

【6】

氏名(本籍)	中戸川 孝 治 (神奈川県)
学位の種類	文学博士
学位記番号	博甲第409号
学位授与年月日	昭和62年3月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
審査研究科	哲学・思想研究科
学位論文題目	集合論における相対化の諸相：哲学的考察
主査	筑波大学教授 文学博士 澤口 昭 聿
副査	筑波大学教授 文学博士 工藤 喜 作
副査	筑波大学教授 経済学博士 長尾 昭 哉
副査	筑波大学教授 文学博士 本橋 信 義

論 文 の 要 旨

現代数学の基礎は集合論にある。この理論は19世紀の後半に成立したが、今世紀の初頭において顕著な変化が現われた。それが相対比に外ならない。19世紀の集合論は所謂カントールの世界であって、絶対的な集合的宇宙を形成している。その相対化には種々なる動機が考えられるが、パラドックスの発見はその一つである。相対化は急速に進み現在に至れば最早動かし難きものとなった。それは種々なる形態をとり、又程度においても一様ではない。しかしその基本的な性格は今世紀の30年代までに決定されたと考えられる。そこで著者は四つの側面においてそれを取り上げ、詳しく現われ方を見、かつ総括的にその本性を究明している。第一章は「弱到達不可能基数の導入と非標準実数構造」と題され、連続体の相対化の過程を論じると共にそれと密接な関連の下で生じた弱到達不可能基数を扱っている。非標準実数構造はハウスドルフによって本格的に研究された。彼においてはそれは順序型の冪乗により導入された。冪乗は濃度の上昇よりも複雑な順序型の構成のために使用された。順序型の中で最も重要なものは均質順序型である。これが連続体の相対化された姿に外ならない。著者の記述は数学史的にも興味深い。B. ラッセルはその内の若干をすでに考察していた。所でこのような非標準連続体の導入は同時に弱到達不可能基数の存在を要請した。これは1907年論文において気付かれた。いうまでもなくこの基数は最初の巨大基数であって、後で次々と導入された巨大基数のまさに端緒をなすものである。巨大数は

順序数の相対比と考えられ、この弱到達不可能基数は連続体の相対化と密接な関係があることは明らかである。この点の解明を意図したことは著者の独自の所である。

第二章は「選択公理と整列原理」と題されている。選択公理の発見程集合論にとって根本的なことはない。この公理により集合に対する順序数の支配が確立する。選択公理発見以前には種々な整列定理の証明が試みられた。最も著明なものはカントールによる「非整合的多者」を用いた証明である。勿論これは誤りであるが、この概念は後の集合論に多くの影響を及ぼしている。選択公理は発見以前に解析学において潜在的に使用せられた。非常に卑近なものの中にもそれが見られる。函数の連続性の二種類の定義の同値性の如きである。「無限集合は可算無限部分集合を持つ」というカントールの定理の証明においても選択公理が潜在的に使用せられている。著者はこれらを詳しく分析している。本章の中心は第四節であり、そこでツェルメロの1904年論文と1908年論文を比較検討し選択公理成立の経緯を明らかにしている。1904年論文の整列定理の証明は順序数全体への言及を排除することによって始めて妥当な証明となり、従ってブラリ・ホルティのパラドックスとある関連がある。ツェルメロはその証明の中で使用した諸前提を明示し、それを正確に記述せんとして集合論の公理化に導かれた。そして同時に1908年論文における新たな整列定理の証明が成立した。著者はこれらの事実を相当詳細に論じ集合論相対化の過程においてそれが如何に重要な一段階であったか明らかにしている。1908年論文には後半で種々なる批判に答えて選択公理を擁護している部分がある。これは多くの哲学的な課題を含んでおり、当時の思想状況を見るのに適切な個所である。所で選択公理の発見と同時に鋭い批判がフランスの解析学者の間に起った。著者は第五節でこれを取上げ、このような批判が単なる論議に止まるものではなく、新たな数学を生んだものなることを論じている。この論争は集合の定義可能性に関してなされている。従って選択公理発見をめぐって起った集合論の相対化の本質は集合の定義可能性にあったのであって、定義可能な集合と定義不可能な集合へ決定的に分裂したのである。この論争は当時の指導的な解析学者の間でなされたものであるが、底流としてフランス実証主義がある。

第三章は「集合論の公理化と領域概念の相対化」と題され、モデル概念の相対性を論じている。まずツェルメロの集合論の公理化が扱われる。公理化のためには予め幾つかの概念の操作が必要であるが、基数・順序数を集合へ還元する還元主義が問題とせられる。カントールにおいては順序数・基数は「第一の抽象・第二の抽象」によって得られる。これは所謂プラトン主義的な存在論を前提として初めて可能なことである。順序数の集合への還元はすぐに行なわれたのではない。終局的には1920年代に至って、フォン・ノイマンによって完成された。しかし1908年のツェルメロの公理系においてもすでに未完成ながらもその動きが見られる。次に著者は分出公理と確定命題の問題を論じる。これはツェルメロの公理系において一番に不明瞭な所であって、しかもその不明瞭さは論理学と本質的に関連している点が重要である。所でこの公理系の成立する「領域」はどうであろうか。「ツェルメロは領域概念を数学の証明の内部に持ち込むことを認めない。領域という非整合的多者を数学の外に対置し、領域を数学の外に設定したのである」と述べている。

このような領域はまだ依然として絶対的である。領域の相対化は1920年代におけるスコレームの「モデル領域」によって本格化する。著者がここで取上げるスコレームの論文は主に1922年論文である。そして所謂「可算領域充足定理」を論じていることはいうまでもない。ここではコントロール理論の諸概念の絶対主義的性質は錯覚に過ぎないことが示される。領域は一つではなく、複数となる。所でコントロールでは領域は非整合的多者であった。「領域」の相対化のためには非整合的多者自身が合理化されなければならない。これが1928年に公表されたフォン・ノイマンの公理系である。著者は第三節でこれを論じ、従来あまり取上げられなかった1929年論文「公理的集合論における無矛盾性問題について」に対し詳細な分析を加えている。非整合的多者までを公理化するならば当然矛盾の問題が起るわけである。最後の第四節では「累積宇宙」が考察されている。これは「領域」が多重に積み重なったものであって、そこでは領域自体の複数化、相対化が徹底的に行なわれる。この理論は1930年のツェルメロの論文にて初めて体系化された。著者の文献の選択はここにおいても適切である。この論文で注目すべき所は、選択公理を集合論の公理と見做さず、「普遍的論理法則」と考えている点である。このことは相対化がある点までで阻止されていることを意味する。まさに著者の主張する如く、「ここで、順序数の系列は相対化した正規領域を貫く共通の基準尺度を形成し、順序数自身への相対化の波及は阻止されている」のである。このような累積宇宙の累積の仕方を決定する基数として強到達不可能基数が導入される。巨大数は相対化の示標であって、又同時に自身順序数系列によって系列化され絶対的性格をも保持している。著者は適切にも「實在領域の実現を無限過程の極限に想定するという形で、ツェルメロの反映原理はコントロールのプラトン主義的傾向を継承している」といっている。第一章における弱到達不可能基数は連続体だけの相対化に対応せるものであったが、それが前進して領域の相対化が強到達不可能基数を導入した。従ってこれら巨大数は個々には順序数の相対化に外ならない。この第三章は本論文の白眉である。

第四章は「言語内在化の不可能な対象と意味論的真理」と題され、数学的命題の相対化が考察される。ここでも相対・絶対の結合の程度が問題となる。第一節ではヒルベルトの形式主義が論じられ、数学的宿命の最後の根拠として記号的直観が語られる。これは残存せる最終の絶対である。第二節はゲーデルの直観に当てられている。そして特殊問題における直観の意味について説明がなされている。直観が語られる所には何等かの絶対がある。ゲーデルの直観に対する著者の分析は鋭い。第三節ではタルスキの意味論的真理が扱われている。命題の真偽は言語の使用行為に応じて「相対的に」定まると考えざるを得ないのである。第四節では第三節の結論に従い、集合論の新公理の真理性が実際のその使用において決定される実状を具体例をあげて明らかにしている。

## 審 査 の 要 旨

問題の設定は適切であって、四章に分けて論じていることも集合論の相対化の解明には極めて有効である。資料は十分であると考えられる。従来取上げられることのなかった数学論文に論拠を置いて結論を出していることも少なくない。このような所には独自の見解が見られる。しかし本論文の欠点は、この資料が十分に消化されていない点が時々見出されることである。このことは本論文中に数学的記述が多過ぎる嫌いなしとしない傾向と関連している。哲学論文であるから数学的記述は必要最小限に止めるべきであろう。これは数学的記述に比して哲学的記述が少なく感じられる原因ともなっている。公表に際してこれらの欠点の是正が望まれる。しかしながら本論文は興味深い結論を含んでいることは否定できない。

よって、著者は文学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。