「国際資本市場の理論について（III）」

工　藤　和　久

本誌前々号（第23号）の工藤(12)では，Lucas (6)，(7)を中心として cash-in-advance 制約に従う貨幣経済の二国モデルに於ける，物価，資産価格，利子率及び為替レート等の決定を論じた。そこで紹介した Lucas のモデルでは，(名目利子率が正である限り）人々は貨幣を財の購入額に等しい最小限度しか保有せず，従って，貨幣の流通速度は常に 1 になった。つまり，貨幣需要としては取引需要一しかもその最も単純な形のもの一だけがあり，予備的需要(precautionary demand)等は存在しない。この点が Lucas モデルの短所とされることはそこで指摘した。これに対して Svensson (10)は財と証券の市場が開かれる時間的順序を Lucas のそれとは逆転させ，又，情報入手のタイミングも変えることによって，名目利子率が正でも，貨幣需要が財の購入に必要な大きさを越えることがありうる，即ち，正の予備的需要が生じうる様なモデルを展開した。この Svensson のモデルは cash-in-advance 制約を用いた簡単な貨幣モデルであるが，貨幣の可変的流通速度が一正の名目利子率の下で一えられることや，貨幣需要関数の形が明示的な形で求まることなどの理由でその後 Svensson(11)，Stockman and Svensson (9)，Hodrick (4)等に於いて国際経済モデルの構築に用いられている。勿論，cash-in-advence モデルで，貨幣需要が財購入に必要な額より大きくなり，従って可変的流通速度がえられるモデルは Svensson (10)以外に，古くは，Goldman (1)，又，比較的最近のものとして Helpman & Razin (3)，Krugman，Persson & Svensson (5)などがあるが，前二者は一般均衡モデルではないし，又，後二者は二期間モデルで一しかも二つの期は極めて asymmetric に定義される一あり，(5)の著者自身指摘するようにモデルの設定は artificial にすぎ，Lucas (7)や Svensson (10)流のモデルへの一般化は不可欠である。そこで，本稿ではこれらの論文も考慮しつつ，Svensson (10)とその国際経済モデルへの拡張である Svensson(11)を中心として検討する。

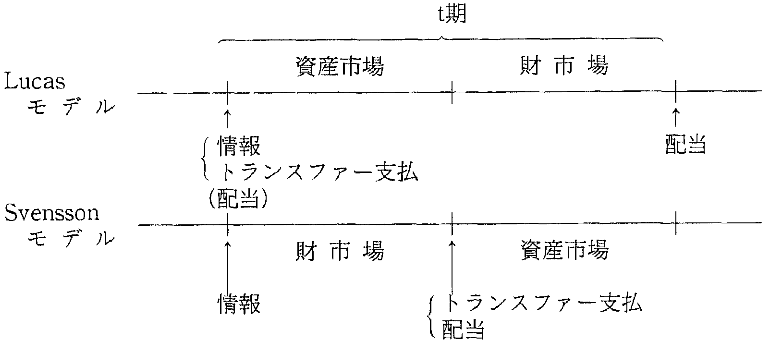
まず，第一節では Svensson (10)の closed economy モデルを紹介する。第二節では，状態変数の確率分布が系列的に独立な場合の均衡解の導出について説明

し，Svensson の議論を補足する。第三節は Lucas モデルと Svensson モデルとの比較である。但し，ここの内容も Svensson (10)に含まれるものである。両モデルの相違は一見した程大きくはないことが指摘される。第四節は Svensson(11)の二国モデルの紹介，検討である。closed economy モデルのときと同様，状態変数の確率分布が系列的に独立な場合について均衡解を求め，物価，為替レート，交易条件の決定等について検討し，Lucas モデルの結果と比較する。

1．Svensson の Cash-in-Advance Model

Lucas (6),(7)のモデルでは各期に於いてまず証券市場が開かれ，次いで財市場が開かれるとされる。人々は各期の期首に今期の状態，つまり，今期の産出量と貨幣トランスファーの大きさについての情報を入手する。人々は前期から持越した資産，前期末に受取った配当，今期首に受取った政府からの貨幣トランスファーを持って資産市場に参加し，share と貨幣との取引を行う。ここで次いで開かれる財市場での財の購入予定額に等しい現金を手当てしておく。それ以上の貨幣を保有しないのは名目利子率が正と仮定されているからである。

これに対して Svensson (10)は各期にまず財市場が開かれ，ついで証券市場が開かれると想定する。各期の状態についての情報は期首，即ち，財市場が開かれる前に得られる。しかし，政府からの貨幣トランスファーは財市場が閉じて後，資産市場が開かれる前の時点で支払われる。各期の所得（配当）も同じ時点で支払われる。従って，今期の財市場で支出できる貨幣は前期の資産市場で手当てした額に限られる。ところが前期の資産市場が開かれる時点では今期の状態は未だわからず，従って，今期の消費支出の大きさもわからない。消費支出の大きさが不確実なままそれに対する貨幣の手当てをしなければならないので貨幣保有は予備的動機に基づく貨幣需要を含むものとなる。今期の状態の現れ方如何によっては消費額は貨幣の保有額より小さくなることもあり，この場合，



第１図

貨幣の流通速度は１を下廻ることになる。この意味で貨幣の流通速度は可変的になる。

市場の開かれる順序，状態についての情報入手時点，所得及び貨幣トランスファー受取り時点については以上の通りである。第一図にこれを Lucas モデルの場合と比較して示してある。なお，Grossman & Weiss (2)や Rotemberg (8)は貨幣と（収益）資産との交換に取引費用がかかる場合の貨幣モデルをつくり，そこでは金融政策（公開市場操作）が実物的な効果をもつことを示しているが，貨幣と資産の交換は前者のモデルでは期末に行われ，従ってそれは今期の財には支出できないことになっているが，後者のモデルではそのような交換は期首に行われ，従って，今期の財購入に支出できる。両モデルの間のこのような違いは Svensson と Lucas のモデルの仮定の違いに類似している。

以下では Svensson (10)のモデルをくわしく見ていく。経済は消費者と企業と政府とからなり，人口は一定である。消費者も企業もそれぞれ単一のタイプのものだけが存在する。企業の産出物 y_t（一人当りで表わされている。）$t=\cdots,-1$，０，１，…は非耐久的であり，かつその大きさは確率変数である。t 期の貨幣量を$\overline{M}_t$とすると t＋１期のそれは

$$\overline{M}_{t+1}=\omega_t\overline{M}_t \tag{1}$$

で与えられる。ここで ω_t は貨幣のグロス増加率であり，$(\omega_t-1)\overline{M}_t$ がトランスファーである。経済の状態(state) s_t は y_t と ω_t との組で与えられる。即ち

$$s_t=(y_t,\omega_t).$$

この s_t は Lucas モデルと同様，次の様なマルコフ過程に従う。即ち，

$$\mathrm{Prob}\,\{y_{t+1}\leq y',\ \ \omega_{t+1}\leq\omega'\mid y_t=y,\ \ \omega_t=\omega\}=F(s',\ s) \tag{2}$$

である。但しここで $s'=(y',\ \omega')$，$s=(y,\omega)$ である。

消費者は現金制約

$$p_tc_t\leq M_t \tag{3}$$

と以下でのべる予算制約の下で期待効用

$$E_t\sum_{\tau=t}^{\infty}\beta^{\tau-t}u(c_\tau)\qquad 0<\beta<1 \tag{4}$$

を最大化する。

t 期の財取引に対する制約は(3)で与えられる現金制約のみである。次にのべる予算制約は t 期末に行われる証券取引に対する制約である。これは次のように与えられる。

$$M_{t+1}+Q_tz_{t+1}\leq(M_t-P_tc_t)+(Q_t+P_ty_t)z_t+(\omega_t-1)\overline{M}_t \tag{5}$$

M_{t+1} と z_{t+1} は t+1期まで保有する貨幣とシェア残高，Q_t は t 期のシェアの貨幣価格である。右辺第一項は，前期から持越した貨幣のうち，t 期の消費を越える部分，第二項は持越したシェアを t 期の価格で評価した額とそれに対する配当支払額 $P_ty_tz_t$ の和，第三項は政府からの貨幣トランスファーである。t+ 1 期まで

持越す貨幣とシェアの和はこれら三つの項の和を越えることはできない。

$\pi_t = 1/P_t$，即ち，財で表わした貨幣の価格，$q_t = Q_t/P_t$，シェアの実質価格，という変数を導入し，(3)及び(5)を次の様に書き変える。

$$c \leq \pi M \tag{6}$$

$$c + \pi M' + qz' \leq \pi M + (q+y)z + \pi(\omega - 1)\bar{M} \equiv w \tag{7}$$

消費者は毎期同じ形の問題を解くのでｔを省略し，t＋１期の変数は ′（ダッシュ）をつけて表わしている。(7)の右辺はｔ期の富の実質価値ｗである。次期の実質富 w′は

$$w' = \pi' M' + (q' + y')z' + \pi'(\omega' - 1)\bar{M}' \tag{8}$$

で与えられる。このとき(6)及び(7)の制約の下での期待効用(4)の最大化問題は次の様に書き変えることができる。即ち，

$$v(w, M, s, \bar{M}) = \max_{\{c_\tau, M_\tau, z_\tau\}} E_t\left[\sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} u(c_\tau)\right]$$

と定義すると

$$v(w, M, s, \bar{M}) = \max_{\{c, M', z'\}} \{u(c) + \beta E_t v(w', M', s', \bar{M}')\} \tag{9}$$

subject to (6) and (7)

である。(9)の期待値の表現は言うまでもなく

$$E_t v(w', M', s', \bar{M}') = \int v(w', , M', s', \bar{M}') dF(s', s)$$

である。

(6),(7)に対するラグランジュの未定乗数をそれぞれ μ, λ とすると最大化の一

階の条件は

$$u_c = \lambda + \mu \tag{10}$$

$$\beta \int (v_{W'} \cdot \pi' + v_{M'}) dF(s', s) - \lambda\pi = 0 \tag{11}$$

$$\beta \int v_{W'} (q' + y') dF(s', s) - \lambda q = 0 \tag{12}$$

で与えられ，又，λ と μ は

$$v_W = \lambda, \quad v_M = \mu\pi \tag{13}$$

を満たす。

次に市場均衡の条件は

$$c = y, M = \overline{M}, M' = \overline{M}', \quad z = z' = 1 \tag{14}$$

である。(10)〜(13)と(14)とから t 期の均衡を規定する諸条件を次の様に表わす事ができる。但し，ここで $m = \pi\overline{M}$，即ち，m は貨幣供給の実質価値である。

$$(y - m)\mu = 0, \quad m \geq y (\mu \geq 0) \tag{15}$$

$$\lambda + \mu = u_c(y) \tag{16}$$

$$\lambda m = \frac{\beta E[u_c(y') m(s') ; s]}{\omega} \tag{17}$$

$$\lambda q = \beta E[\lambda' (q' + y') ; s] \tag{18}$$

以下でこれらの導出を簡単に説明する。(6)の不等式に均衡条件 $c = y, M = \overline{M}$ を代入すると $y \leq \pi\overline{M} = m$ となる。ラグランジュの未定乗数の性質から $(m - y)\mu =$

0をうる。但し，ここで$m>y$なら$\mu=0$，$m=y$なら$\mu>0$である。次に，(16)は(10)の$u_c(c)$に$c=y$を代入したものである。(13)から$v_{W'}=\lambda'$，$v_{M'}=\mu'\pi'$をうるが，これらと$\pi=m/\bar{M}$，$\pi'=m'/\bar{M}'=m'/\omega\bar{M}$及び$\lambda'+\mu'=u_c(y')$を(11)に代入して整理すると(17)を得る。(18)は(12)に$v_{W'}=\lambda'$を代入したものである。

均衡を決定する(15)〜(18)は4つの変数m，q，λ，μについての4本の方程式であり，$E[u_c(y')m(s'):s]$と$E[\lambda'(q'+y'):s]$とが与えられればこれらの変数の均衡値を決める。ところでこれらの均衡値は状態変数sの関数である。(15)，(16)の二式はyを含み，(17)式はωを含み，又(16)，(17)式の二つの期待値はsの関数とみなせるからである。従ってこれらの均衡値は$m(s)$，$q(s)$，$\lambda(s)$，$\mu(s)$と表わす事ができる。$m(s)$が与えられれば貨幣の価格πは

$$\pi=m(s)/\bar{M}\equiv\pi(s,\ \bar{M}) \tag{19}$$

として与えられる。完全予見均衡に於いては人々はこれらの関数関係を知っているのである。

Lucasのモデルとちがって，このモデルでは二つのラグランジュ未定乗数が重要な役割を演ずる。(13)が示す様にλは富の限界効用である。即ち，富wの限界的増加は(最大)期待効用vをλだけ増大させる。他方，$\mu\pi$は前期から持越した貨幣残高の限界効用である。即ち，wは不変でMだけが限界的に増大するときvは$\mu\pi$だけ増加する。従ってμはMの実質価値の限界効用である。貨幣は富の一部でもあるから，Mの，従ってπMの限界的増加が，富wの(同額の)増加でもあるときのvの増加は$\lambda+\mu$である。

vをwとMとで偏微分すると

$$v_W=\lambda+\frac{\partial c}{\partial w}\cdot(u_c-\lambda) \tag{20}$$

$$v_M=(u_c-\lambda)\frac{\partial c}{\partial M} \tag{21}$$

を得る。もし現金制約が non-binding なら $\pi M > c$ であって $\mu = 0$，$u_c = \lambda$ であるから $v_W = \lambda$，又，現金制約が binding なら $u_c - \lambda = \mu > 0$ であるが，$\frac{\partial c}{\partial w} = 0$，即ち，現金制約が binding だから（M 不変のままの）w の増加は c を増加させないのでやはり $v_W = \lambda$ である。同様に，$\pi M > c$ なら $\mu = 0$ で $u_c = \lambda$ だから $v_M = 0$，$\pi M = c$ なら $\partial c / \partial M = \pi$ だから $v_M = (u_c - \lambda)\pi = \mu\pi$ となる。

Lucas モデルとの大きな違いは富の限界効用 $v_W = \lambda$ が消費の限界効用に等しいとは限らない点である。Lucas モデルではそのような関係が成りたつ。Svensson のモデルでそのような関係が成りたたないのは t 期の期首の富 w の限界的増加があっても，現金制約が binding である場合には，それが現金の増加の形をとらない限り，t 期の消費を増加させる事はできないからである。Svensson のモデルで現金制約が binding でない場合に Lucas モデルと同じになるという事は，後者に於いては，t 期の消費を制約しているのは t 期の富であって，現金制約ではない，少なくとも，それは Svensson モデルに於けると同様の意味では制約になっていない事を意味する。Lucas モデルでは消費支出が決まったら，それに等しい現金を期首の資産市場で必ず用意しておかなければならないが，それは富の制約の範囲内で可能である。これに対して Svensson モデルでは，今期の消費支出は，前期に決めた，すでに所与の現金保有の範囲内になければならない。今期の富が現金保有より大きくてもそれは今期の消費のために現金化する事はできない。それ故，Lucas モデルに於けると同じ関係 $v_W = \lambda$ は Svensson モデルでは現金制約が binding でない場合に与えられるのである。

(18)は Lucas モデルに於けると同様の標準的な資産価格決定式

$$q_t = \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \beta^{\tau-t} E(y_\tau \ \lambda_\tau / \lambda_t : s)$$

を与えるが不確実な割引率が Lucas のモデルの $\beta^{\tau-t}\frac{u_c(y_\tau)}{u_c(y_t)}$ ではなくて

$\beta^{\tau-t}\frac{\lambda_\tau}{\lambda_t}=\beta^{\tau-t}\frac{u_c(y_\tau)-\mu_\tau}{u_c(y_t)-\mu_t}$となっている所が異なる。又(17)は

$$\lambda\pi=\beta E\,[(\lambda'+\mu')\pi'] \tag{17'}$$

とも表わせるがこの右辺に $\lambda'\pi'=\beta E\,[(\lambda''+\mu'')\pi'']$ 等を次々に代入して

$$\pi_t=\sum_{\tau=t+1}^{\infty}\beta^{\tau-t}\frac{E(\mu_\tau\ \pi_\tau\ :s)}{\lambda_t} \tag{22}$$

を得る。即ち，t 期の貨幣の価格は，次期以降の貨幣の限界効用 $v_M=\mu\pi$ の期待値の割引和を t 期の富の限界効用で割ったものとして表現できる。Svensson は貨幣の価格がこのようにシェア価格決定式と同様の表現で与えられる事を特に強調する。

次にリスクレスな名目及び同じく実質利子率はそれぞれ次の様な表現で与えられる。前者を i，後者を ρ とすると

$$i=\frac{E(\mu'\pi')}{E(\lambda'\pi')} \tag{23}$$

及び

$$\rho=\frac{\lambda}{\beta E(\lambda')}-1 \tag{24}$$

である。リスクレスな名目利子率とは来期末確実に一万円支払うという証券の利廻りの事である。一万円の支払いは来期末であるからその時には来期の財を買う事はできない。そこで来期末の一万円を来期の財価格で実質化した π' を評価するのに，シェア価格決定式に於けると同様，来期の富の限界効用を用いる。来期末と今期末の富の間の不確実な限界代替率は $\beta\lambda'/\lambda$ でありこれを用いて π' を期待現在価値に直すと $\beta E(\lambda'\pi'/\lambda)$ となる。これが今期末資産市場でのこのような証券の実質価格 q_B（$=\pi Q_B$，但し，Q_B は名目価格）になるはずである。即ち

$$q_B = \pi Q_B = \beta \frac{E(\lambda'\pi')}{\lambda}$$

これから

$$Q_B = \beta \frac{E(\lambda'\pi')}{\lambda\pi}$$

をうるが，これと $i = (1-Q_B)/Q_B$ 及び(17)′とから(23)をうる。次に実質利子率であるがこれは来期末，状態が s′であれば，そのときの，財価格 $1/\pi(s')$ に等しい金額を支払うという証券の実質利廻りである。$1/\pi'$ を来期の物価で実質化すると 1 となる。これを $\beta\lambda'/\lambda$ を用いて今期の期待実質価値に直すと $E(\beta\lambda'/\lambda)$ となり均衡に於いてはこれが q_B に等しくなり，$q_B = E(\beta\lambda'/\lambda)$ をうるが，これと $\rho = (1-q_B)/q_B$ とから(24)をうる。

名目及び実質利子率の表現(23)，(24)は市場で実際にそのような証券が利用可能だとしてそれらに対する需要を求め，均衡条件とから導出する事もできる。以下で，このようにして名目利子率の表現を求めてみよう。

b を名目ボンドの数，q_B をその実質価格とする。このとき期末予算制約は

$$c + \pi M' + qz' + q_B b' \leq \pi M + (q+y)z + \pi b + (\omega - 1)\overline{M} = w$$

となり又

$$w' = \pi' M' + (q'+y')z' + \pi' b' + (\omega' - 1)\overline{M}'$$

である。前と同様ラグランジイアンをつくり，b′に関する最適条件を求めると

$$\beta \int v_{W'} \pi' dF(s', s) = \lambda q_B$$

となる。均衡条件は b＝0，b′＝0 である。上の式に $v_{W'} = \lambda'$ を代入すると直ちに $q_B = \beta E(\lambda'\pi')/\lambda$ がえられる。

以上が Svensson モデル(10)の概略である。m, q, π, λ, μ 等の均衡値は(15)〜(18),

⒆の条件によって決まるということであったが，以上の説明だけでは均衡の決定のメカニズムは必ずしも明快ではない。そこで，Svensson に従って，次節では，状態変数 s の確率分布が系列的に独立である（かつ各期同一分布する）場合について均衡の決定をよりくわしく見てゆく。

2．確率分布が系列的に独立な場合の均衡解

状態変数 s が系列的に独立であれば分布関数 $F(s' \mid s)$ は

$$F(s' \mid s) = F(s')$$

となる。従って，⒄や⒅の右辺の期待値は今期の表現値 s には依存しないので⒄，⒅は次の様に表わされる。

$$\lambda m = \frac{\beta E\ [u_c(y')m(s')]}{\omega} \tag{25}$$

$$\lambda q = \beta E\ [\lambda'(q'+y')] \tag{26}$$

今㉕式の $E\ [u_c(y')m(s')]$ を A とおく。A は s からは独立である。㉕式は，

$$\lambda m = \beta A/\omega \tag{25'}$$

となる。均衡の貨幣の実質価値 m と二つのラグランジュ未定乗数 λ，μ は⒂，⒃，㉕′の三つの式のみによってきまる。即ち，まず $m=y$ の場合にはこれを㉕′に代入して $\lambda=\beta A/\omega y$，これを⒃に代入して $\mu=u_c(y)-\beta A/\omega y$ をうる。これらの m，λ，μ はいずれも状態変数 $s=(y,\ \omega)$ の一方，又は両方に依存する。この関数関係を明示的にするために $m=m(s)$，$\lambda=\lambda(s)$，$\mu=\mu(s)$ と表現してもよい。完全予見の下では人々は均衡値の状態変数へのこのような依存関係を知っているのである。

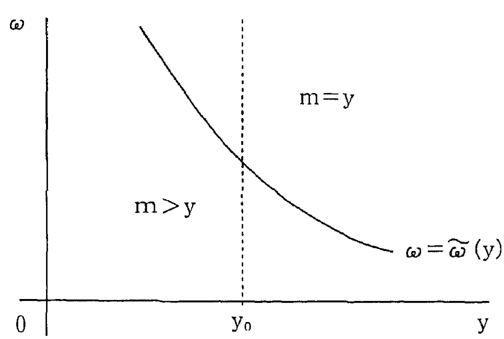
他方，$m>y$ のときには $\mu=0$，$\lambda=u_c(y)$，これを(25)′に代入して $m=\beta A/\omega u_c(y)$ をうる。このような λ，m も又 s の関数である。

今期の状態の現われ方如何で m は y に等しくなったり，y より大きくなったりする。そこでまず $m=y$ たらしめる s の領域と $m>y$ たらしめる s の領域とはどのように区切られるだろうか。これを求めるために二つの領域の境界線の上では $m=y$ と（$m>y$ の場合に成りたつ）$\mu=0$ とがいずれも成りたっているから，これらを(16)，(17)に代入し，その結果から

$$\omega=\frac{\beta A}{u_c(y)y}\equiv\widetilde{\omega}(y) \tag{27}$$

をうる。$u_{cc}<0$ であるから $d\widetilde{\omega}(y)/dy$ の符号は定まらないが第2図にこれが負である場合の $\widetilde{\omega}(y)$ のグラフを示す。

$\omega=\widetilde{\omega}(y)$ カーブの上方で $m=y$，下方で $m>y$ としてあるが，これは次の様にして示す事ができる。同カーブの上方で $\mu=0$（従って $m>y$）として見よう。このとき $\lambda=u_c(y)$ である。今 y が y_0 で所与とする。$y=y_0$ に対して ω を大きくしていくと(25)′の右辺は次第に小さくなる。λ は $u_c(y_0)$ で一定だから m が $\beta A/\omega$



第2図

につれて小さくならなければならない。しかし $m \geq y_0$ であって y_0 より小さくはなれず従って(25)′を成りたたせることはできなくなる。$\omega=\tilde{\omega}(y)$ カーブより上方で $\mu=0$ とする事は矛盾を含むことになり，そこでは $\mu>0$，つまり，$m=y$ であることが示された。同カーブより下の領域で $m>y$ となる。

第2図によれば，所与の y に対して貨幣の増加率が $\tilde{\omega}(y)$ より大きければ現金制約は binding になる。この理由は次の通りである。ω が大きければ来期の物価は概して高く，貨幣の価値 π' は小さいであろう。それ故貨幣を持越す事は不利になり今期それわ使い切ってしまおうとする。これは今期の物価を引上げ，貨幣の実質価値 m を低下させる傾向がある。ω が充分大きければ m はついに y に等しくなる。ω がこの水準を越えても物価はもはや上らず，m は y で一定になる。

今期の状態変数 $s=(y, \omega)$ の実現値が $\tilde{\omega}(y)$ カーブより下にある場合には，まず $\mu=0$ で，これと(16)とから，$\lambda=u_c(y)$，これを(25)に代入して

$$m=\beta A/u_c(y)\omega \tag{28}$$

をうる。他方，今期の s が $\tilde{\omega}(y)$ カーブより上方にある場合には $m=y$，$\lambda=\beta A/y\omega$ であり，この λ を(16)に代入して

$$\mu=u_c(y)-\frac{\beta A}{y\omega} \tag{29}$$

をうる。このようにして状態変数の確率過程が系列的に独立である場合には m, μ, λ 等の均衡解を明示的に求める事ができる。なお物価水準は $p=1/\pi=\overline{M}/m(s)$ から求まる。この物価決定のメカニズムについては更に後述する。

Svensson は，効用関数が例えば

$$u(c)=\frac{1}{1-\gamma}c^{1-\gamma}(\gamma\neq 1,\ \gamma=1 \text{ なら } u(c)=\log c) \tag{30}$$

のときの均衡の実質残高の表現

$$m=\beta A y^{\gamma}/\omega \tag{31}$$

を求め，これが効用関数が(30)のときの貨幣需要関数を与えるとしている。(31)によって貨幣需要がどのように効用関数のパラメーター γ や β に依存するかがわかるというのである。Svensson は文献(10)の 1 図で γ の種々の値に対して，本論文第 2 図に示したと同様の $\tilde{\omega}(y)$ 関数のグラフを示しているが，そこでは γ の異なる値に対して A を同一の定数とみなしている。しかしこれは正しくないと思われる。何故なら定数 A は，確かに今期の実現値には依存しないが，border line $\tilde{\omega}(y)$ には依存するからである。(25)に於いて $E[u_c(y')m(s')]$ の $m(s')$ は $m(s)$ と同じ関数であり，それは来期の状態 s' の現れ方如何で $m(s')=y'$ になったり $m(s')>y'$ になったりする。従ってこの期待値は $\tilde{\omega}(y)$ に依存し，それ故それは β や $u(c)$ のパラメーター，s' の確率分布に依存する。Svensson は定数 A がどのように求まるかには全く言及していないが以下でこの問題を簡単に検討する。

以下では状態変数の確率分布を更に簡単化する。はじめに y は一定で ω のみが確率変数で，ω' は ω_0 から ω_1 までの間を一様分布するものとする。従って

$$F'(\omega')=\frac{1}{\omega_1-\omega_0} \qquad \omega_0\leq\omega'\leq\omega_1$$

である。又，効用関数として $u(c)=\log c$ を仮定する。このとき(27)の borden line の式は

$$\tilde{\omega}=\beta A=\beta\left\{\int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}}\frac{1}{y}m(\omega')\frac{d\omega'}{\omega_1-\omega_0}+\int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}}\frac{d\omega'}{\omega_1-\omega_0}\right\}$$

$$=\frac{\beta}{y}\left\{\int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}}m(\omega')\frac{d\omega'}{\omega_1-\omega_0}+y\,\frac{\omega_1-\tilde{\omega}}{\omega_1-\omega_0}\right\} \tag{32}$$

となる。$\omega'\leq\tilde{\omega}$ の場合 $m'\geq y'$，$\mu'=0$ となって

$$m(\omega')=\frac{\beta y A}{\omega'}$$

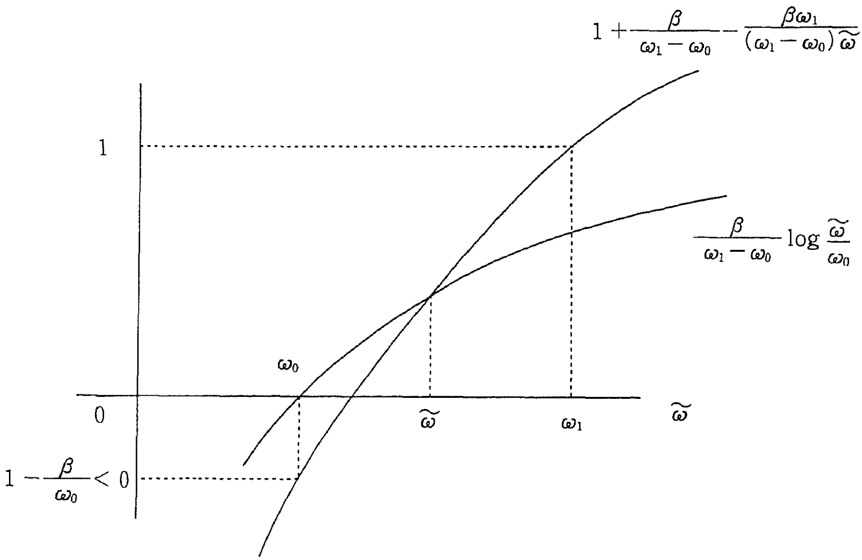
であるが上の(32)を用いて

$$m(\omega')=\frac{\tilde{\omega}\,y}{\omega'} \tag{33}$$

をうる。これを(32)に代入し，整理すると，

$$1=\frac{\beta}{\omega_1-\omega_0}\log\frac{\tilde{\omega}}{\omega_0}+\frac{\beta}{\omega_1-\omega_0}\left(\frac{\omega_1}{\tilde{\omega}}-1\right) \tag{34}$$

となる。この式が borden line 関数$\tilde{\omega}$(今の場合，定数であるが)をきめる。$\tilde{\omega}$は明らかにβに依存している。$\tilde{\omega}$の決定は$\omega_0<\beta<\omega_1$の場合について第3図に示されている。(注一)



第3図

ω が $\omega \geq \tilde{\omega}$ なら $m=y$ であり，$\omega < \tilde{\omega}$ なら $m>y$ であって，このときの m は

$$m=\frac{\tilde{\omega}}{\omega}y$$

で与えられる。勿論これは Svensson の結果と同じであるがより正確には $\tilde{\omega}$ は

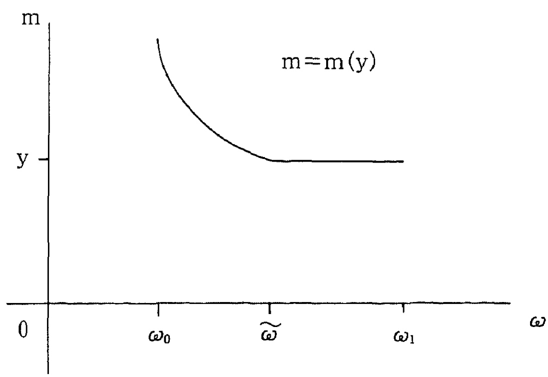
$$\tilde{\omega}=\tilde{\omega}(\beta,\ \theta_1,\ \theta_0)$$

と表わされるべきである。実質残高 m のグラフを第 4 図に示す。

次に ω が一定で y のみが確率的に変動するとしよう。y は $y_0 \leq y \leq y_1$ の範囲にあり分布関数は $F'(y')=\frac{1}{y_1-y_0}$ とする。効用関数は $u(c)=(1/\alpha)c^{\alpha}\ (\alpha \neq 0)$ とする。このとき border line $\tilde{y}$ をきめる式(27)は積分の計算をして整理すると

$$\tilde{y}^{\alpha}\ \left[(1+\frac{\beta}{\omega}\frac{y_0}{y_1-y_0})-\frac{\beta}{\omega}\frac{1}{y_1-y_0}\frac{\alpha}{1+\alpha}\tilde{y}\ \right]$$

$$=\frac{\beta}{\omega}\frac{1}{y_1-y_0}\frac{{y_1}^{1+\alpha}}{1+\alpha} \tag{35}$$



第 4 図

で与えられる。この式の右辺は定数，左辺は$\tilde{y}=0$及び

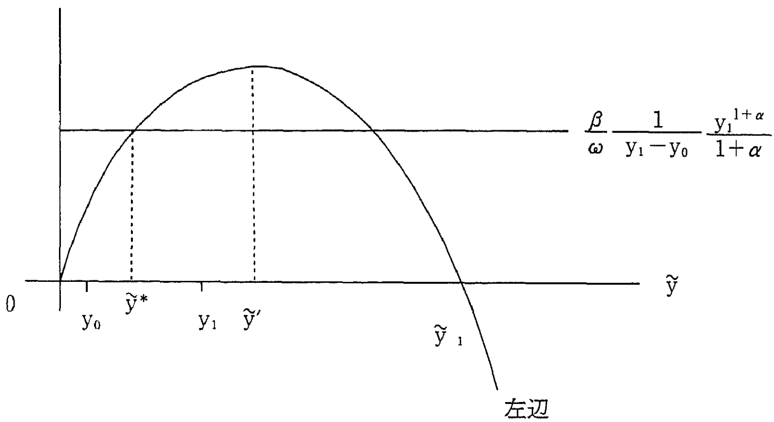
$$\tilde{y}_1 \equiv \frac{1+\dfrac{\beta}{\omega}\dfrac{y_0}{y_1-y_0}}{\dfrac{\beta}{\omega}\dfrac{1}{y_1-y_0}\dfrac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{(1+\alpha)}{\alpha}\left\{y_0+\frac{\omega}{\beta}(y_1-y_0)\right\}$$

で0となり$\tilde{y}' \equiv \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\tilde{y}_1$で頂点をもつ第5図のようなグラフをもつ関数である。$\tilde{y}_1 > y_1$を仮定する。（例えば$\omega \geq \beta$なら$\tilde{y}_1 > y_1$となる。）次に$\tilde{y}=y_0$を(35)式の両辺に代入すると

$$左辺 = y_0^{\alpha} + \frac{\beta}{\omega}\frac{y_0^{(1+\alpha)}}{y_1-y_0}\frac{1}{1+\alpha}$$

$$右辺 = \frac{\beta}{\omega}\frac{1}{y_1-y_0}\frac{1}{1+\alpha}y_1^{1+\alpha}$$

となり，y_1がy_0より充分に大きければ右辺＞左辺となる。この場合が第5図に示されている。$\tilde{y}=\tilde{y}^*$で(35)は満たされる。$\tilde{y}^*$もβやαに依存する事は明らかで



第5図

ある。$y_0 \leq y < y^*$のとき

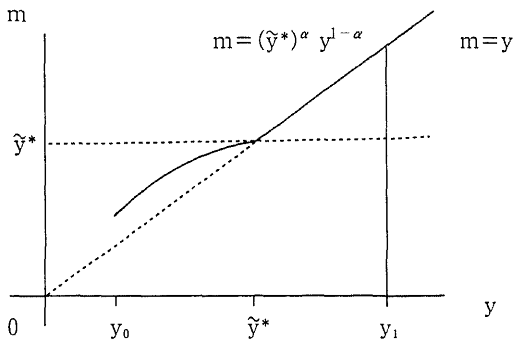
$$m(y) = (\tilde{y}^*)^{\alpha}\ y^{1-\alpha}$$

であり，$y^* \leq y \leq y_1$のとき $m(y) = y$ となる。$m(y)$のグラフが第6図に示される。

以上の二例では border line が定数になった。以下では ω と y とが共に上の二例の一様分布をするとし，効用関数が $u(c) = \frac{1}{\alpha} c^{\alpha}$ として border line 関数を求めよう。

(ω, y)の領域で現金制約が non-binding なる領域を S_1, binding になる領域を S_2とする。$s \epsilon S_1$なら $m(s) = \beta A / \omega u_c(y)$であり，従って，$s' \epsilon S_1$なら $m(s') = \beta A / \omega' u_c(y')$である。それ故 border line を定める式(27)は

$$u_c(y)\, y = y^{\alpha} = \frac{\beta}{\omega} A = \frac{\beta}{\omega}\ [\int_{S_1} \frac{\beta}{\omega} A dF(s') + \int_{S_2} y'^{\alpha}\ dF(s')] \tag{36}$$



第6図

とかける。border line 関数は $\omega=\dfrac{\beta A}{y^{\alpha}}\equiv\widetilde{\omega}(y)$ だから

$$\int_{S_1}\frac{\beta}{\omega'}AdF(s')=\beta A\int_{y_0}^{y_1}\int_{\omega_0}^{\tilde{\omega}(y')}\frac{1}{\omega'}\frac{d\omega'}{(\omega_1-\omega_0)}\frac{dy'}{(y_1-y_0)}$$

であり，

$$\int_{S_2}y'^{\alpha}\,dF(s')=\int_{y_0}^{y_1}\int_{\frac{\beta A}{y'^{\alpha}}}^{\omega_1}y'^{\alpha}\frac{1}{\omega_1-\omega_0}\frac{1}{y_1-y_0}d\omega'dy'$$

である。故に(36)は

$$\frac{\beta A}{\omega_1-\omega_0}\log\frac{\beta A}{\omega_0}-\frac{\beta A}{\omega_1-\omega_0}\frac{1}{y_1-y_0}H(\alpha,\ y_1,\ y_0)$$

$$+\frac{1}{\omega_1-\omega_0}\frac{1}{y_1-y_0}\left\{\frac{\omega_1}{1+\alpha}(y_1{}^{1+\alpha}-y_0{}^{1+\alpha})-\beta A(y_1-y_0)\right\}=A \tag{37}$$

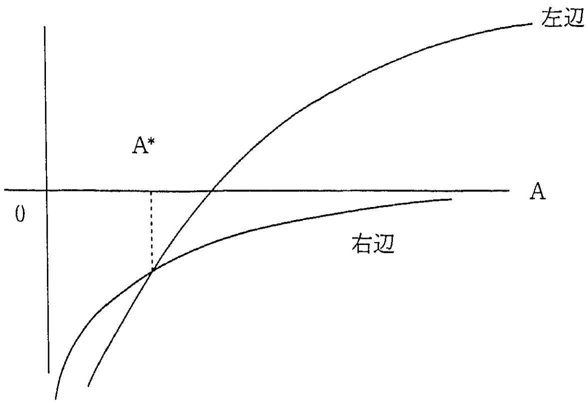
とかける。但しここで

$$H(\alpha,\ y_1,\ y_0)$$
$$=y_1\log y_2{}^{\alpha}-\alpha y_1-(y_0\log y_0{}^{\alpha}-\alpha y_0)$$

である。定数 A は(37)式を満たすように決まらなければならない。全体を A で割って書き直すと

$$\frac{\beta}{(\omega_1-\omega_0)}(\log\frac{\beta}{\omega_0}+\log A)-\frac{\beta H(\alpha,\ y_1,\ y_0)}{(\omega_1-\omega_0)(y_1-y_0)}-\left\{1+\frac{\beta}{(\omega_1-\omega_0)}\right\}$$

$$=-\frac{1}{A}\cdot\frac{\omega_1(y_1{}^{1+\alpha}-y_0{}^{1+\alpha})}{(\omega_1-\omega_0)(y_1-y_0)(1+\alpha)} \tag{37$'$}$$



第７図

左辺と右辺のグラフが第７図に示される。二曲線の交点の A が(37)′を満たす A ≡ A* を与える。このような A* に対して border line の関数が

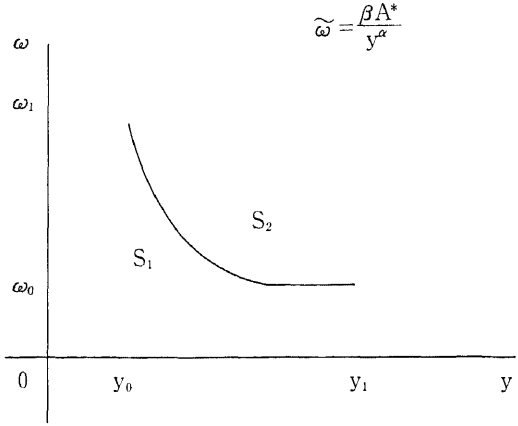
$$\tilde{\omega}=\frac{\beta A^*}{y^\alpha}$$

として与えられる。A* は効用関数のパラメーター，α，β 及び分布関数の形に依存する。$\tilde{\omega}$のグラフを第８図に示す。

定数 A の決定については以上の通りである。これからわかるように，定数 A は存在するとは限らないし，又，存在する場合それは，s の確率分布だけでなく，効用関数のパラメーターや割引率 β にも依存するので $m=\beta A/u_c(y)\omega$ を貨幣需要関数とみなす場合にはこの点に留意することが必要である。

（注一） 図では$\tilde{\omega}=\omega_1$に対して

$$\frac{\beta}{\omega_1-\omega_0}\log\frac{\omega_1}{\omega_0}<1$$



第8図

としている。即ち，ω_1とω_0とは

$$\log\omega_1-\log\omega_0<\frac{1}{\beta}(\omega_1-\omega_0)$$

を満たさねばならない。これはω_0に対してω_1が充分大きくなければならないことを意味している。上の不等式を等号で成り立たせるω_1を$\hat{\omega}_1$とすると$\omega_1>\hat{\omega}_1$でなければならない。このようなω_1に対して，$\omega_0<\widetilde{\omega}<\omega_1$で(34)を満たすものが存在する。(注終り)

3．Lucasモデルとの比較

以上ではSvenssonのモデルとLucasのそれとの間の違いを強調してきた。しかし，実は，両モデルの均衡の間の差異は一見した程大きいものではない。

というのはまず，Svensson のモデルに関して次のような事が言える。そのモデルの貨幣の実質残高 m，シェアの実質価格 q，二つのラグランジュ乗数，λ，μ の均衡値は，そこで期首にも資産市場が開かれるとした場合のこれらの変数の均衡値と同じであり，更にそれらは期首にだけ資産市場が開かれるとした場合のそれらの変数の均衡値と同じである。このとき二つのモデルの間の違いとして残されるのは Lucas モデルでは来期首のトランスファー，従って来期の貨幣ストックは確率的にしかわからないのに対し，Svensson モデルでは今期末に支払われるトランスファー，従って来期の貨幣ストックはあらかじめわかっているという，来期の貨幣ストックについての情報を持っているかいないかの違いだけである。この違いによって確かに，Svensson モデルの解—実質残高とシェア価格—は Lucas モデルのそれとは異なるものとなる。

しかし，両モデルの主要な差異と思われた，Lucas モデルでは名目利子率が正なら必ず m＝y，即ち，流通速度が 1 になるのに対して，Svensson モデルでは名目利子率が正でも m＞y となりうるという点は，実は，両モデルに於ける二つの名目利子率の定義の違い—Lucas のは期首利子率，Svensson のは期末利子率—によるのであり，そうして，Svensson のモデルで m＞y たらしめる今期の状態変数の実現値は期首にも資産市場が開かれる場合にはそこでの均衡名目利子率をゼロにするようなものなのである。もう一度要約すると Svensson モデルで期首にも資産市場が開かれるとした場合の諸変数の均衡値は，それが期末にしか開かれないとした場合の均衡値と同じであり，しかも，m＞y となる均衡は（期首）利子率がゼロの場合にしか起きないのである。

以下で期首にも資産市場が開かれるとしたときの均衡が第 1 節でのべた均衡と同じものになる事を簡単に示しておく。期首にも資産市場が開かれる場合，そこで決める貨幣とシエアの保有を期末市場でのそれと区別する必要がある。これらを$\widetilde{M}_t$，$\tilde{z}_t$とする。又，その市場でのシェア価格を$\widetilde{Q}_t$とすると期首資産取引に対する予算制約は

$$\widetilde{M}_t+\widetilde{Q}_t\tilde{z}_t \leq M_t+\widetilde{Q}_t z_t \tag{38}$$

であり財取引に対する現金制約は

$$P_t c_t \leq \widetilde{M}_t \tag{39}$$

である。期末資産取引に対する予算制約は

$$M_{t+1}+Q_t z_{t+1} \leq (\widetilde{M}_t-P_t c_t)+(Q_t+P_t y_t)\widetilde{M}_t+(\omega_t-1)\widetilde{M}_t \tag{40}$$

となる。市場均衡条件は

$$c_t=y_t,\ M_t=\widetilde{M}_t=\widetilde{M}_t,\ z_t=\tilde{z}_t=1 \tag{41}$$

である。ここで

$$A_t=\pi_t M_t+\tilde{q}_t z_t$$

とする。但し，$\pi_t=1/P_t$，$\tilde{q}_t=\widetilde{Q}_t/P_t$である。このとき期待効用の最大値は

$$v(A,\ s,\ \widetilde{M})=\max\ \{u(c)+\beta\int v(A',\ s',\ \widetilde{M}')dF\}$$

と書ける。(38)，(39)，(40)の下で最大化問題は

$$\max_{(c,\ \widetilde{M},\ \tilde{z},\ M',\ z')}[u(c)+\beta\int v(A',\ s',\ \widetilde{M}')dF$$

$$+\lambda\ \{\pi\widetilde{M}+(q+y)\tilde{z}+(\omega-1)\pi\widetilde{M}-c-\pi M'-qz'\}$$

$$+\mu(\pi\widetilde{M}-c)+\nu(\pi M+\tilde{q}\ z-\pi\widetilde{M}-\tilde{q}\ \tilde{z})] \tag{42}$$

となり，最大化の一階条件は

$$u_c - \lambda - \mu = 0 \tag{43}$$

$$\lambda\pi + \mu\pi - \nu\pi = 0 \tag{44}$$

$$\lambda(q+y) - \nu\tilde{q} = 0 \tag{45}$$

$$\beta\int v_{A'}\pi' dF = \lambda\pi \tag{46}$$

$$\beta\int v_{A'}\tilde{q}' dF = \lambda q \tag{47}$$

で与えられる。但し，

$$\lambda > 0, \quad \nu > 0 \tag{48}$$

であり，μ については

$$\begin{cases} \mu = 0 & \text{if} \quad \pi\widetilde{M} - c > 0 \\ \mu > 0 & \text{if} \quad \pi\widetilde{M} - c = 0 \end{cases} \tag{49}$$

である。(44)，(45)は$\widetilde{M}$と$\tilde{z}$ とがいずれも$\widetilde{M} > 0$，$\tilde{z} > 0$ をみたさねばならず，かつ

$$\pi\widetilde{M} < \pi M + \tilde{q}z$$

及び

$$\tilde{q}\,\tilde{z} < \pi M + \tilde{q}z$$

を満たすとしていることによる。又，

$$v_A = \nu \tag{50}$$

である。以上の諸関係に対して均衡条件(41)を用すると次のような関係がえられる。まず(49)に $c=y$ を用いて，

$$y \leq m(s),\ \mu(y-m(s)) = 0\ (\mu \geq 0) \tag{51}$$

をうる。次に(46)に $v_{A'} = \nu' = \lambda' + \mu' = u_c(y')$, $\pi = m/\bar{M}$, $\pi' = m'/\omega\,\bar{M}$を代入すると

$$\lambda m = \beta \int u_c(y') m' dF/\omega \tag{52}$$

となる。更に(47)に $v_{A'} = \nu'$，$\lambda'(q'+y') = \nu'\tilde{q}'$を代入して

$$\beta \int v_{A'}\tilde{q}'dF = \beta \int \lambda'(q'+y')dF = \lambda q \tag{53}$$

をうる。最後に $c=y$ を(43)に代入して

$$\lambda + \mu = u_c(y) \tag{54}$$

をうる。(51)，(52)，(53)，(54)の条件は第1節の(15)，(16)，(17)，(18)と全く同じであり，従ってこれらが決める m，q，λ，μ も同じになる。以上で資産市場が期首にも開かれるとしても，m や q の均衡値は前の場合と全く変らない事が示された。更に直ちに明らかな事であるが期末資産市場は不必要である。何故なら次期の期首に情報入手の後にも資産市場が開かれるのであるから，そこで又資産保有の調整ができ，しかもシェアに対する配当は次期の期首からの保有に対して支払われるとされているからである。結局，資産市場が期首にだけ開かるとしてもそこでえられる解はSvenssonのはじめのモデルの解と同じになる。

次に期首資産市場が開かれる場合，期首名目利子率がSvenssonモデルでどのように与えられるかを見よう。t＋1期首に必ず一万円支払うというボンドのt

期首における利廻り$\bar{i}$は

$$\frac{1}{1+\bar{i}}=\frac{\beta E\ [u_c{}'\pi']}{u_c\pi} \tag{55}$$

で与えられる。何故ならt＋１期首の一万円はその時点の財価格で実質化してπ'，これを不確実な割引率$\beta u_c'/u_c$で現在価値に直し，その期待値をとるとそれがそのボンドの実質価格$\bar{q}_B$に等しいはずである。即ち

$$\bar{q}_B=E\left(\frac{\beta u_c{}'\pi'}{u_c}\right)$$

$\bar{q}_B=\pi\,\overline{Q}_B,\ \overline{Q}_B=\dfrac{1}{1+\bar{i}}$であるから(55)をうる。(46)より$\beta E(u_c{}'\pi')=\lambda\pi$をうるがこれを(55)に代入して$1/(1+\bar{i})=\lambda/u_c$，$\bar{i}$についてとき$u_c=\lambda+\mu$を代入すると

$$\bar{i}=\mu\ /\ \lambda$$

をうる。これが期首名目利子率である。(49)を見ると$\pi\widetilde{M}>c$なら$\mu=0$，即ち，名目利子率ゼロである。従って，貨幣を消費支出に必要な以上に保有しているときには必ず期首名目利子率はゼロである。又，期首名目利子率が正なら消費支出に必要な以上の貨幣はもたない。これはLucasモデルにおけると同じである。

４．二国貨幣モデルへの拡張

Svenssonは(11)で１節で紹介したモデルに基づいて，二国からなる国際経済の貨幣モデルを展開した。ここではこのモデルについて解説するが，諸市場の開かれる時間的順序とか収入受取りのタイミング，来期貨幣量についての情報の有無などを除けば，Lucasのモデルと多くの点で類似するので重複をさけるため簡単にとどめる。

アウトプットは外生的であり，又，均衡はやはりperfectly pooled equilibricem

なので，主たる関心は直先為替相場，交易条件を含めた諸価格の決定式にある。二国を自国と外国とする。人口は同じであるが，通貨は異なる。国際貿易の決済は輸出国通貨で行われる。自国及び外国の（t期の）貨幣残高を$\overline{M}_t$，$\overline{N}^*_t$とする。又，t＋1期の貨幣量は

$$\begin{aligned} \overline{M}_{t+1} &= \omega_t \overline{M}_t \\ \overline{N}^*_{t+1} &= \omega^*_t \overline{N}^*_t \end{aligned} \tag{56}$$

で与えられる。ω_t，ω^*_tは確率変数である。両国では異なった財が生産されるが，その生産量をy_t，y^*_tとする。各期の状態はy_t，y^*_t，ω_t，ω^*_tで完全に規定される。$s_t=(y_t, y^*_t, \omega_t, \omega^*_t)$とすると$s_t$は次の様なマルコフ過程に従う。即ち

$$\mathrm{Prob}\ \{s_{t+1} \leq s' \mid s_t = s\} = F(s', s)$$

である。両国の消費者は同じ効用関数

$$E_t \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{\tau-t} u(c_{h\tau}\, c_{f\tau}) \quad 0 < \beta < 1 \tag{57}$$

を最大化する。但し，ここでc_{ht} c_{ft}はそれぞれt期の自国財及び外国財の消費量である。以下まず自国民の最大化問題を示す。

財市場は各期の期首に開かれ，各消費財購入量は

$$p_{ht}\ c_{ht} \leq M_t, \quad P^*_{ft} c_{ft} \leq N_t \tag{58}$$

という二つの現金制約に従う。p_{ht}，p^*_{ft}はそれぞれ自国財の自国通貨価格及び外国財の外国通貨価格である。M_t，N_tは前期から持ち越した自国通貨及び外国通貨の保有であり，財取引に際しては所与とされる。資産市場は期末に開かれるがそこでの資産取引に対する予算制約は

$$
\begin{aligned}
&M_{t+1}+e_tN_{t+1}+Q_{ht}z_{h,t+1}+R_{Mt}x_{M,t+1}+R_{Nt}x_{N,t+1}\\
&\leq(M_t-P_{ht}c_{ht})+e_t(N_t-P^*_{ft}c_{ft})+(Q_{ht}+P_{ht}y_t)z_{ht}\\
&+(Q_{ft}+e_tP^*_{ft}y^*_t)z_{ft}+\ [R_{Mt}+(\omega_t-1)\overline{M}_t]\ x_{Mt}\\
&+\ [R_{Nt}+e_t(\omega^*_t-1)\overline{N}^*_t]\ x_{Nt}
\end{aligned}
\tag{59}
$$

で与えられる。但し，ここで M_{t+1}，N_{t+1} は来期に持越す自国及び外国通貨，e_t は自国通貨で表わした外国通貨価格，$z_{h,t+1}$，$z_{f,t+1}$，$x_{M,t+1}$，$x_{N,t+1}$ はそれぞれ，自国シェア，外国シエア，自国貨幣トランスファー受取権シェア，外国貨幣トランスファー受取り権シェアの保有数である。Q_{ht}，Q_{ft}，R_{Mt}，R_{Nt} はそれらのシェアの自国通貨価格である。

自国消費者は(58)，(59)の制約の下で(57)を最大化する。以下，これらの制約条件と t＋1期の富を実質タームで書き直す。$\pi_{Mt}=1/P_{ht}$，$\pi_{Nt}=e_t/P_{ht}$，$p_t=e_tP^*_f/P_{ht}$，$q_{ht}=Q_{ht}/P_{ht}$，$q_{ft}=Q_{ft}/P_{ht}$，$r_{Mt}=R_{Mt}/P_{ht}$，$r_{Nt}=R_{Nt}/P_{ht}$ とする。π_{Nt} は自国財で表わした外国通貨一単位の価格であり，p_t は自国財で表わした外国財一単位の価格である。これらの記号を用いると(58)と(59)はそれぞれ（なお，添字 t を落し，t＋1期の諸変数はダッシュをつけて表わす。）

$$
c_h\leq\pi M,\quad pc_f\leq\pi_N N \tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_h+pc_f+\pi_M M'+\pi_N N'+q_h z'_h+q_f z'_f+r_M x'_M\\
&+r_N x'_N\leq\pi_M M+\pi_N N+(q_h+y)z_h+(q_f+py^*)z_f\\
&+\ [r_M+\pi_M(\omega-1)\overline{M}]\ x_M+\ [r_N+\pi_N(\omega^*-1)\overline{N}^*]\ x_N\equiv w
\end{aligned}
\tag{61}
$$

又，

$$
\begin{aligned}
&w'=\pi'_M M'+\pi'_N N'+(q'_h+y')z'_h+(q'_f+p'y^{*\prime})z'_f\\
&\ [r'_M+\pi'_M(\omega'-1)\overline{M}']\ x'_M+\ [r'_N+\pi'_N(\omega^{*\prime}-1)\overline{N}^{*\prime}]\ x'_N
\end{aligned}
\tag{62}
$$

である。自国消費者の最大化問題は(60), (61)の下で(57)を最大化することである。期待効用の最大値は$v(w, M, N, s, \overline{M}^*, \overline{N}^*)$と表わすことができるが，これを用いると最大化問題は

$$\max_{(c_h, c_f, M', N', Z'_h, Z'_f, x'_M, x'_N)} [u(c_h, c_f) + \beta E_t v(w', M', N', s', \overline{M}', \overline{N}^{*\prime})]$$

subject to (60), (61)

となる。λ, μ, νをそれぞれ(61)及び(60)の中の二つの条件に対応するラグランジュ乗数とすると通常の手続きによって以下の条件をうる。

$$u_h = \partial u/\partial c_h = \lambda + \mu \tag{63}$$

$$u_f = \partial u/\partial c_f = (\lambda + \nu) p \tag{64}$$

$$\beta \int (v_W \pi'_M + v'_M) dF(s', s) = \lambda \pi_M \tag{65}$$

$$\beta \int \{v_{W'} (r'_M + \pi'_M (\omega' - 1) \overline{M}') + \lambda r_M\} \, dF(s', s) = \lambda r_M \tag{66}$$

$$\beta \int \{v_{W'} (r'_N + \pi'_N (\omega^{*\prime} - 1) \overline{N}^{*\prime}) + \lambda r_N\} \, dF(s', s) = \lambda r_N \tag{67}$$

$$\beta \int v_{W'} (q'_h + y') dF(s', s) = \lambda q_h \tag{68}$$

$$\beta \int v_{W'} (q'_f + p' y^{*\prime}) dF(s', s) = \lambda q_f \tag{69}$$

及び

$$v_W = \lambda, \quad v_M = \mu \pi_M, \quad v_N = \nu \pi_N \tag{70}$$

である。外国消費者の最大化問題も全く同様にして定式化できる。（注二参照）

均衡に於いては

$$c_h + c_h^* = y,\ c_f + c_f^* = y^*,$$
$$z_h + z_h^* = z_f + z_f^* = x_M + x_M^* = x_N + x_N^* = 1, \tag{71}$$
$$M + M^* = \overline{M} \quad N + N^* = \overline{M}^*$$

が成りたたねばならない。Lucas (7)に於けると同様，このモデルの均衡も perfectly pooled equilibrium であり両国民が二つの財を半分づつ消費し，全ての資産を半分づつ所有するというものである。即ち $c_h = c_h{}^* = \frac{1}{2}y$，$c_f = c_f^* = \frac{1}{2}y^*$，$z_h = z_h^* = z_f = z_f^* = x_M = x_M^* = x_N = x_N^* = \frac{1}{2}$である。このような均衡における諸価格は次のような条件によって決まる。

$$y \leq \pi_M \overline{M},\ \mu(\pi_M \overline{M} - y) = 0\ (\mu \geq 0)$$
$$py^* \leq \pi_N \overline{N}^*,\ \nu(\pi_N \overline{N}^* - py^*) = 0\ (\nu \geq 0)$$
$$u_h(\frac{y}{2}, \frac{y^*}{2}) = \lambda + \mu,\ u_f(\frac{y}{2}, \frac{y^*}{2}) = p(\lambda + \nu),$$
$$\lambda \pi_M = \beta E\ [(\lambda' + \mu')\pi_{M'}],\ \lambda \pi_N = \beta E\ [(\lambda' + \nu')\pi_{N'}], \tag{72}$$
$$\lambda q_h = \beta E\ [\lambda'(q_h' + \mu')],\ \lambda q_f = \beta E\ [\lambda'(q_f' + p'y^{*\prime})],$$
$$\lambda r_M = \beta E\ [\lambda'(r_M' + \pi_M'(\omega' - 1)\overline{M}')],$$
$$\lambda r_N = \beta E\ [\lambda'(r_N' + \pi_N'(\omega^{*\prime} - 1)\overline{N}^{*\prime}]$$

これらの式が変数 $(p,\ \pi_M,\ \pi_N,\ q_h,\ q_f,\ r_M,\ r_N,\ \lambda,\ \mu,\ \nu)$をきめる。例えば $y \leq \pi\overline{M}$の導出の仕方を見てみよう。(60)から $c_h \leq \pi_M M$ であり，又，これに対応する外国人にとっての現金制約は

$$c_h{}^* \leq p\pi_M^* M^* \text{（注二参照）}$$

である。ここで π_M^*は$\frac{1}{e\,p_f^*}$であり，自国財で表わした外国通貨価格である。均衡に於いては $c_h + c_h^* = y$，$M + M^* = \overline{M}$だから上の二つの不等式を足して，これ

らを代入すると

$$c_h + c_h^* = y \leq \pi_M M + p\pi_M^* M^* = \pi_M \overline{M}$$

即ち，$y \leq \pi_M \overline{M}$をうる。但しここで$p = \frac{e\ p_f^*}{p_h}$を用いた。

これらの式によってきまる上記諸変数の均衡値は状態変数 s 及び$\overline{M}$, $\overline{N}^*$に依存するが完全予見均衡においては人々はこの依存関係を知っていることは第1節でも指摘した。

為替レート e は$e = \pi_N / \pi_M$から求められる。ところで先物為替レートはどのように表わされるか。ここで先物為替とは t＋1期末に1単位の外国通貨を支払うという契約とする。これは t＋1期末に e'の自国通貨を支払うという契約と同じである。これを t＋1期の財価格で実質化すると $e'\pi'_M$，この限界効用は $\lambda' e' \pi'_M$，その t 期における期待値は $\beta E(\lambda' e' \pi'_M)$，これを t 期の財で表わすと $\beta E(\lambda' e' \pi'_M) / \lambda$，t 期の自国通貨での価値は $\beta E(\lambda' e' \pi'_M) / \lambda \pi_M$ となる。ところで先物レートは t＋1期末に支払うものであるから，これに $(1+i)$ を乗じたものが f に等しくなるはずである。$1+i = \lambda \pi_M / \beta E(\lambda' \pi'_M)$ を乗じると

$$f = \frac{E(\lambda' e' \pi'_M)}{E(\lambda' \pi'_M)} \tag{73}$$

をうる。これが Svensson モデルに於ける先物相場の表現になる。右辺を書き直すと

$$f = E(e') + \frac{Cov(e',\ \lambda' \pi'_M)}{E(\lambda' \pi'_M)} \tag{74}$$

をうる。即ち，先物相場は期待直物相場にリスクプレミアム $Cov(e',\ \lambda' \pi'_M) / E(\lambda' \pi'_M)$ を加えたものである。この表現は文献(12)中の，Lucas モデルで求められた表現((68)式）とほぼ同じであるが λ'が必ずしも u'_hに等しくないところが異なる。

以下で第2節に於けると同様，状態変数 s が系列的に独立な場合について均衡の決定をよりくわしく見てみよう。

$$m=\pi_M\overline{M},\ \ n=\pi_N\overline{N}^*,\ \ n^*=\pi_N^*\overline{N}^* \tag{75}$$

として(72)の関連する式を書き直すと

$$\begin{aligned}&y\leq m,\ \ \mu(m-y)=0\ (\mu\geq 0)\\&y^*\leq n^*,\ \ \mu^*(n^*-y^*)=0\ (\mu^*\geq 0)\\&\lambda m=\beta E(u_h' m')/\omega,\ \ \lambda^* n^*=\beta E\ [u_f' n^{*\prime}]/\omega^*\end{aligned} \tag{76}$$

となる。これらの表現に於ける $E(u_h' m')$, $E(u_f' n^{*\prime})$ は今や今期の状態 s からは独立である。第 2 節に於けると同様今期の状態の現われ方如何で現金制約 $m\geq y$, $n^*\geq y^*$ は等式になったり，不等式になったりする。そこでと同様 border line を求めるために $m=y$, $\mu=0$ を用いて

$$u_h(y/2,\ y^*/2)y=\beta E(u_h' m')/\omega\equiv\beta A/\omega \tag{77}$$

をうる。A は s に依存しない定数である。(77)を満たす ω, y, y^* の間の関係を

$$\omega=\tilde{\omega}(y,\ y^*) \tag{77$'$}$$

と表わそう。自国貨幣（グロス）増加率 ω 率が $\omega<\tilde{\omega}(y,\ y^*)$ の範囲にある場合には自国貨幣実質価値 m は y より大きく，即ち，貨幣の流通速度は 1 より小さくなる。このとき $\mu=0$ だから(76)の $\lambda m=\beta A/\omega$ に $\lambda=u_h$ を代入して m について解くと

$$m=\beta A/u_h(y/2,\ y^*/2)\omega \tag{78}$$

をうる。又，これから

$$\pi_M=\frac{1}{p_h}=\beta A/u_h(y/2,\ y^*/2)\,\omega\,\overline{M}$$

をうる。自国貨幣増加率 ω が $\omega\geq\tilde{\omega}(y,\ y^*)$ のときには

$$m = y$$

$$\lambda = \beta A / y\omega$$

$$\mu = u_h(y/2,\ y^*/2) - \beta A / y\omega \geq 0$$

である。以上からまず自国貨幣の実質残高は $m = \beta A / u_h(y/2, y^*/2)\omega$ あるいは $m = y$ となるのであるから，外国の貨幣増加率の（今期の実現値）ω^*からは独立であることがわかる。同じ事が利子率についても言える。自国名目利子率 i は

$$\frac{1}{1+i} = \frac{E(\lambda\pi'_M)}{E(u'_h\ \pi'_M)} = \frac{E(\lambda'm')}{E(u'_h\ m')\omega} = \frac{E(\lambda'm')}{A\omega}$$

で与えられ，これから決まる i は外国貨幣増加率 ω^*の今期の実現値には依存しない。同じことが「実質」利子率 ρ についても言える。

自国の場合と同様，外国貨幣残高の実質価値 n^*（及び外国財価格 P^*_f）も自国貨幣の増加率 ω（の今期の実現値）からは独立であることを示すことができる。（注三参照）

次に外国財の相対価格，即ち，交易条件であるが，Svensson のモデルではこれは貨幣的要因に依存することになっている。二財の相対価格は必ずしも，その限界代替率 $u_f(y/2,\ y^*/2)/y_h(y/2,\ y^*/2)$ に等しいとは限らないのである。(72)の第5式と第6式とから

$$p = \frac{e\ p^*_f}{p^*_h} = \frac{1+\mu/\lambda}{1+\nu^*/\lambda^*} \cdot \frac{u_f(y/2,\ y^*/2)}{u_h(y/2,\ y^*/2)} \tag{79}$$

をうる。μ，ν^*はゼロとは限らない——$\omega > \tilde{\omega}(y,\ y^*)$ 及び $\omega^* > \tilde{\omega}^*(y,\ y^*)$ のときは μ，$\nu^* \geq 0$ である——から $p \neq u_f/u_h$が起りうる。μ や ν^*はそれらがゼロでないときにはそれぞれ ω と ω^*とに依存するから，交易条件は貨幣的要因に依存することになる。

何故このようになるかというと，Svensson モデルでは二種の貨幣の間の交換が期末市場でしか行われないからである。期首市場で自国民が自国財を外国人

に売ってp_hの自国貨幣を入手してもそれを直ちに外貨に交換することはできない。そのような交換は期末市場で行われ，そこでp_h/eの外貨を売ることができるが，それで外国財を購入できるのは来期の期首の財市場に於いてである。今期首の時点から見ると１単位の自国財は$p_h/e\ p_f^{*\prime}$単位の外国財と交換されるはずである。但しここで$p_f^{*\prime}$は確率変数である。従って，$p=e\,p_f^*/p_h$は実際に交換可能な比率を与えるものではなく，言わば事後的な統計的概念である。Svenssonのモデルでは交易条件を意味のある仕方で定義するのは難かしいのである。

もし，期首にも貨幣の交換の行われる市場が開かれるとすれば，期首為替レート$\tilde{e}$に対して定義される$\tilde{p}=\tilde{e}p_f^*/p_h$は財の実際の交換比率を与えるものとなる。期首貨幣取引に対する予算制約は取引後の貨幣保有を$\widetilde{M}_t$，$\widetilde{N}_t$とすると

$$\widetilde{M}_t+\tilde{e}_t\widetilde{N}_t\leq M_t+\tilde{e}_tN_t$$

となり，現金制約は

$$P_{ht}c_{ht}\leq\widetilde{M}_t,\quad P_{ft}^*c_{ft}\leq\widetilde{N}_t$$

となる。これらの制約の下で最適条件を求めると$\tilde{p}=\tilde{e}p_f^*/p_h=u_f/u_h$を直ちに求めることができる。即ち，期首為替レートで計算された相対価格は限界代替率に等しい。(一般には期首為替レートは期末為替レートに等しいとは限らない。)

最後に為替レートについてであるが$\pi_M=1/p_h$，$\pi_N=e/p_h$，(76)及び（注二）で示した$p=\lambda^*/\lambda$よりeは

$$e=\frac{\pi_N}{\pi_N}=\frac{n/\overline{N}^*}{m/\overline{M}}=\frac{pn^*}{m}\frac{\overline{M}}{\overline{N}^*}=\frac{\lambda^*n^*}{\lambda m}\frac{\overline{M}}{\overline{N}^*}$$

$$=\frac{\beta E(u_f'\,n^{*\prime})/\omega^*}{\beta E(u_h'\,m')/\omega}\frac{\overline{M}}{\overline{N}^*}=\frac{A^*}{A}\frac{\omega}{\omega^*}\frac{\overline{M}}{\overline{N}^*}\tag{80}$$

となる。この表現は$\omega\geq\tilde{\omega}(y,\ y^*)$，$\omega^*\geq\tilde{\omega}^*(y,\ y^*)$のときには$m=y$，$n^*=y^*$だから（３つ目の等号の後の表現に）これらを代入すると

$$e = p\frac{y^*}{y}\cdot\frac{\overline{M}}{\overline{N}^*} \tag{81}$$

となり，これは Lucas (7)に於ける為替レート決定式と同じである。しかし今期の状態の現われ方が $\omega \leq \tilde{\tilde{\omega}}(y, y^*)$，$\omega^* \leq \tilde{\tilde{\omega}}^*(y, y^*)$ であれば両国の貨幣の流通速度は1より小さくなり為替レートは(80)の最後の表現で与えられるように，単純なマネタリーアプローチの表現(81)とは違って，両国の貨幣の増加率にも依存することになる。

$$de/d\omega = \frac{A^*}{A}\frac{1}{\omega^*}\frac{\overline{M}}{\overline{N}^*}$$

だから $\frac{\omega}{e}\frac{de}{d\omega} = 1$，即ち，為替レートの自国通貨増加率 ω に関する弾力性は1となる。同様にして $\frac{\omega^*}{e}\frac{de}{d\omega^*} = -1$ をうる。

但し，貨幣の流通速度が1より小さい場合の為替レートの表現は Lucas モデルのそれと異なる結果であるというよりは，Lucas が扱わなかった場合—即ち，期首名目利子率がゼロの場合—の為替レートの表現であるというべきであろう。

(注二)

外国消費者の最大化問題を記しておく。

$$\max\ \{u(c_h^*,\ c_f^*) + \beta\int v^*(w^{*\prime},\ M^{*\prime},\ N^{*\prime},\ s',\ \overline{M}',\ \overline{N}^{*\prime})dF(s' \mid s)\}$$

subject to

$$c_h^* \leq p\pi_M^* M^*$$

$$c_f^* \leq \pi_N^* N^*$$

$$
\begin{aligned}
&c_f^* + \frac{1}{p} c_h^* + \pi_M^* M^{*\prime} + \pi_N^* N^{*\prime} + \frac{q_h}{p} z_h^{*\prime} + \frac{q_f}{p} z_f^{*\prime} \\
&+ \frac{r_M}{p} x_M^{\prime} + \frac{r_N}{px} {}_N^{*\prime} \leq \pi_M^* M^* + \pi_N^* N^* + \left(\frac{q_h}{p} + \frac{y}{p}\right) z_h^* \\
&+ \left(\frac{q_f}{p} + y^*\right) z_f^* + \left[\frac{r_M}{p} + (\omega - 1)\frac{\pi_M}{p}\bar{M}\right] x_M^* \\
&+ \left[\frac{r_N}{p} + (\omega^* - 1)\pi_N^* \bar{N}^*\right] x_N^* \equiv w^*
\end{aligned}
$$

但し，$\pi_M^* = \dfrac{1}{e\, p_f{}^*}$，$\pi_N^* = \dfrac{1}{p_f^*}$，$\pi_N^* = \dfrac{1}{p_f^*}$であり又$eQ_f^* = Q_f$ $Q_h = eQ_h^*$（Q_h^*は外国通貨建自国シェア価格，Q_f^*は外国通貨建外国シェア価格）等が成りたつとしている。従って，例えば，外国財で表わした外国シェア価格Q_f^*/P_f^*は

$$
Q_f^*/P^* = Q_f/eP_f^* = \frac{Q_f}{p_h} \frac{p_h}{ep_f^*} = q_f/p
$$

である。λ^*，μ^*，ν^*を上の三つの不等式に対するラグランジュ乗数とすると最大化条件として

$$
\begin{aligned}
&u_h = \frac{1}{p}(\lambda^* + \mu^*) \\
&u_f = \lambda^* + \nu^* \\
&\beta \int (v_{W^{*\prime}}^* \pi_M^{*\prime} + v_{M^{*\prime}}^*)\, dF(s' \mid s) = \lambda^* \pi_M^*
\end{aligned}
$$

等であり，$v_{W^*}^* = \lambda^*$，$v_{M^*}^* = \mu^* \pi_M^*$，$v_{N^*}^* = \nu^* \pi_N^*$である。なお，$\lambda$，$\lambda^*$，$\nu$，$\nu^*$とpとの間には

$$
p = \lambda^*/\lambda = \nu^*/\nu
$$

という関係がある。即ち，上記の諸条件から

$$
\beta \int (\lambda^{*\prime} + \mu^{*\prime})\, \pi_M^{*\prime} dF(s' \mid s) = \lambda^* \pi_M^*
$$

をうるがこれに$(\lambda^{*\prime} + \mu^{*\prime}) = (\lambda' + \mu')p'$を代入し，$p'\pi_M^{*\prime} = \pi_M'$を利用すると上式

左辺は

$$\beta \int (\lambda' + \mu') \pi'_M \, dF(s' \mid s)$$

となりこれは $\lambda\pi_M$ に等しい。故に $\lambda^* \pi^*_M = \lambda\pi_M$ をうるが $\pi_M = p\pi^*_M$ だから $p = \lambda^*/\lambda$ をうる。これを $\lambda^* + \nu^* = p(\lambda + \nu)$ に代入すると $p = \nu^*/\nu$ をうる。(注終り)

(注三)

n^*, λ^*, ν^* の均衡値の導出を簡単に示しておく。外国貨幣の実質価値 n^* も t 期の状態の現われ方如何で $n^* > y^*$ となったり $n^* = y^*$ となったりする。ボーダーラインを決める式は自国の場合と同様にして

$$\omega^* = \beta E\ [u_f(y'/2,\ y^{*\prime}/2) n^{*\prime}] / u_f(y/2,\ y^*/2) y^*$$
$$= \beta A^* / u_f(y/2,\ y^*/2) y^*$$

で与えられる。この関係を $\omega^* = \tilde{\omega}^*(y, y^*)$ とすると $\omega^* < \tilde{\omega}^*(y, y^*)$ なら $n^* > y^*$ で $\nu^* = 0$ となり, $\lambda^* = u_f(y/2,\ y^*/2)$, $n^* = \dfrac{\beta A^*}{\omega^* u_f(y/2,\ y^*/2)}$ をうる。$\omega^* \geq \tilde{\omega}^*(y,\ y^*)$ なら $n^* = y^*$, $\lambda^* = \beta A^*/y^*\omega^*$, $\nu^* = u_f(y/2,\ y^*/2) - \beta A^*/y^*\omega^* \geq 0$ となる。いずれにしても n^* (そして $p^*_f = \overline{N}^*/n^*$) は自国貨幣増加率 ω の今期の実現値の影響は受けない。i^*, ρ^* についても同様のことが言える。 (未完)

参　考　文　献

(1) Goldman, S.M., "Flexibility and the Demant for Money." J.Econ. Theory 9, 1974, pp. 203-22.

(2) Grossman, S.J. and Weiss, L., "A Transaction-Based Model of the Monetary Transmission Mechanism." Amer.Econ. Rev 73, 1983, pp. 871-80.

(3) Helpman, E. and Razin, A., "A Comparison of Exchange Rate Regimes in the Presence of Imperfect Capital Markets." Int.Econ. Rev 23, 1982, pp. 365-88.

(4) Hodrick, R.J., "International Asset Pricing with time-Varying Risk Premia," J. Int.Econ 11, 1981, pp. 573-87.

(5) Krugman, P.R., Persson, T., and L.E.O. Svensson, "Inflation, Interest Rates and Welfare." Quart.J.Econ 1985, pp. 677-95.

(6) Lucas, R.E.Jr., "Asset Prices in an Exchange Economy." Econometrica 46, 1978, pp. 1429-45.

(7) ……………, "Interest Rates and Currency Prices in a Two Country World." J. Monetary Econ 10, 1982, pp. 335-59.

(8) Rotemberg, J.J., "A Monetary Equilibrium with a Transaction Cost." J.Political Econ 92, 1984, pp. 40-58.

(9) Stockamn, A.C., and L.E.O. Svensson, "Capital Flows, Investments and Exchange Rates." J.Monetary Econ 19, 1987, pp. 171-201.

(10) Svensson, L.E.O., "Money and Asset Prices in a Cash-in-Advance Economy." J. Political Econ 93, 1985, pp. 919-44.

(11) ……………, "Currency Prices, Terms of Trade and Interest Rates."J.Int.Econ 18,1985, pp. 17-41.

(12) 工藤和久「国際資本市場の理論について(II)」経済学論集第23号（1990年3月）