非定常回帰モデルにおける構造変化の検定について*

本　田　敏　雄†

1　はじめに

本稿では，Hansen（1992a）で扱われている共和分ベクトル（行列）の安定性の検定問題，言い換えれば構造変化の検出問題について考察する。変化時点は一時点に特定せず，ある程度の幅をもって考えることとする。これは，Perron（1989），Zivot and Andrews（1992）で扱われているトレンドの変化の下での単位根の検定とは異なることを注意しておく。

研究の動機は以下の通りである。

1．Hansen（1992a）において共和分ベクトル（行列）の推定に用いられている fully modified estimation による推定量の漸近分布は，実際には確定的トレンドが存在する場合は非常に複雑で扱いにくい。

2．構造変化時点を一時点に特定しない場合の Sup F 型の検定は有用か。

3．Sup F 型の検定統計量のもととなる統計量に，Hansen（1992a）で用いられている型のワルド統計量は用いることができない。

後に詳しく示すように Hansen（1992a）の結果は誤っているにも拘わらず，最近の文献にも数多く引用されている（Bai and Perron（1995）等）。また fully modified estimation と類似した canonical cointegration regression については，Choi et al.（1995）を参照されたい。問題は的確に把握されており，間違

---

*Tests for a structural change in nostatinonary regression models

† Toshio Honda

いはないようである。

共和分関係の問題の定式化は，

1．VAR モデルで考える（Johansen（1988，1991）等）。

2．後述の(24)（Stock and Watson（1993）等）。

3．後述の(24)の多項式の次数を無限として，推定の際には T に従って次数をあげていく（Saikkonen（1991）等)。

などがある。fully modified estimation および canonical cointegration regression は，上記のような定式化することなしに解析を行うものである。ここでは Stock and Watson（1993）に従うことにする。

本論文の構成は以下の通りである。まず 2 節で fully modified estimation の問題点を指摘する。次いで 3 節では，構造変化の検定について考える。当初は検定の棄却域もシミュレーションにより計算し同時発表する予定であったが，事故のため棄却域は別途発表することとした。本研究の理論的な結果は比較的容易に導くことができ，むしろ棄却域の計算の方が重要であることは承知している。本稿の出版までには計算は終えているので，ご希望の方は著者までご連絡いただきたい（e-mail : honda@shakai. social. tsukuba. ac. jp)。

2　確定的トレンドが存在する時の fully modified estimation について

それぞれの推定法において確定的トレンドが存在する場合は，I(1)過程の差分から定数，確定的トレンドを除く必要があるが，Hansen（1992a, b）はその detrdnding の影響を見落としているため，それらの論文中に与えられている共和分ベクトル（行列）の推定量の漸近分布は誤ったものである。ここでは Hansen (1992a) に従って fully modified estimation の場合を取りあげる。Hansen (1992a) は頻繁に引用されているので，やや詳しく解説する。これ以降主として Hansen (1992a) の記法に従うことにする。問題は説明変数に適当なトレン

ド関数をとり，共和分ベクトルの一部を無視すれば解決される。

まずモデルの定義を行う。

$$y_t = Ax_t + u_{1t}, \qquad T=1,\ 2, \ldots,\ T, \tag{1}$$

ただし A は $m_1 \times (p_1+m_2+p_2)$ の未知行列，$x_t=(x'_{1t},\ x'_{2t})'$で，x_{1t}，x_{2t}はそれぞれ

$$\begin{aligned} x_{1t} &= k_{1t} \\ x_{2t} &= \Pi_1 k_{1t} + \Pi_2 k_{2t} + x^0_{2t} \\ x^0_{2t} &= x^0_{2,t-1} + u_{2t} \end{aligned} \tag{2}$$

と定義される。ただし $k_{1t}=(1\ \ t \ldots t^{p1-1})$ および $k_{2t}=(t^{p1} \ldots t^{p1+p2-1})$ とし，また本稿の目的は細かな正則条件の追求にはないので，$u_t=(u'_{1t}, u'_{2t})'$は $(m_1+m_2+p_2)$ 次元の強定常過程とし，以下の漸近理論が成立するために必要な条件はすべて成立するものとする。

次に行列 Ω，Λ，$\Omega_{11.2}$, Λ^{+}_{21}を定義する。これらの一致推定量を得る事は可能であるが，相関が強い場合はこれら正確な推定は困難であることが予想される。詳しくは Andrews (1991)，Andrews and Monahan (1992)，Hansen (1992 d) 等を参照されたい。

$$\begin{aligned} \Omega &= \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{T} \mathrm{E}(u_s u_t') = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \\ \Lambda &= \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{t} \mathrm{E}(u_s u_t') = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \\ \Omega_{11.2} &= \Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21} \qquad \Lambda^{+}_{21} = \Lambda_{21} - \Lambda_{22}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21} \end{aligned} \tag{3}$$

それぞれの一致推定量を，$\hat{\Omega}$，$\hat{\Lambda}$，$\hat{\Omega}_{11.2}$，$\hat{\Lambda}_{21}^{\dagger}$と書くことにする。

ここで非定常時系列の研究でよく用いられる以下の事実に注意しておく。極限は$T\rightarrow\infty$の場合を考えるものとし，以下すべて同様とする。まず $Y_t=\sum_{i=1}^{t}u_j$ とおく。

$$\frac{1}{\sqrt{T}}Y_{[Tr]}\Longrightarrow B_u(r)=(B_1{}'B_2{}')'\equiv BM(\Omega) \tag{4}$$

$$\frac{1}{T}\sum_{1}^{[Tr]}Y_t u_{t+1}'\Longrightarrow\int_0^r B_u dB_u{}'+r\Lambda \tag{5}$$

ここで$\Longrightarrow$は D［0，1］と R の適当な直積空間での弱収束，［a］は a 以下の最大の整数，および $BM(\Omega)$ は分散 Ω の多次元のブラウン運動とする。弱収束については Billingsley（1968），Pollard（1984）を参照されたい。また(5)の結果は，u_tが martingale difference である場合は Chan and Wei（1988），より一般の場合については Hansen（1992c）により証明されている。

ここでトレンドが存在する場合の fully modified estimation による未知行列 A の推定量 $\hat{A}^{\dagger}$ を定義する。

$$\hat{A}^{\dagger}=\sum_{t=1}^{T}(y_t^{\dagger}x_t'-(0\hat{\Lambda}_{21}^{\dagger\prime}))\left(\sum_{t=1}^{T}x_t x_t'\right)^{-1} \tag{6}$$

ただし $y_t^{\dagger}=y_t-\hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{22}^{-1}\hat{u}_{2t}$とする。この $\hat{u}_{2t}$は，$\Delta x_{2t}=x_{2t}-x_{2,t-1}$を OLS により以下のように detrending して得られたものである。

$$\hat{u}_{2t}=\Delta x_{2t}-\hat{\Pi}_{\Delta 1}\Delta k_{1t}-\hat{\Pi}_{\Delta 2}\Delta k_{2t} \tag{7}$$

ただし $\Delta k_{1t}=(1, t, \ldots, t^{p_1-2})$ および $\Delta k_{2t}=(t^{p_1-1}, \ldots, t^{p_2-2})$ と定義し，$\Pi_{\Delta i}$ はそれに合わせて Π_i を定義しなおしたものとする。

つまり Δx_{2t} の OLS による detrending により u_{2t}の推定を行うのであるが，先にあげた論文は u_{2t}を $\hat{u}_{2t}$で推定することの影響を見落している。$\sum \hat{u}_{2t}\Delta k'_{it}=0$ ということからもうかがえるが，その影響は無視できない事を以下で示す。その前にいくつかの準備を行う。

まずトレンド関数の基準化のための行列 $\delta_{\cdot T}$ を定義する。

$$\delta_{1T}=\mathrm{diag}(1,\ T^{-1}, \ldots,\ T^{-p_1+1}) \qquad \delta_{2T}=\mathrm{diag}(T^{-p_1}, \ldots,\ T^{-p_1-p_2+1}) \tag{8}$$
$$\delta_T=\mathrm{diag}(1, \ldots,\ T^{-p_1-p_2+1})$$

また $k_t=(k'_{1t}k'_{2t})'$ かつ $k(r)=(1, r, \ldots, r^{p_1+p_2-1})=(k_1(r)', k_2(r)')'$と おくと，

$$\delta_T k_{[Tr]} \Longrightarrow k(r) \tag{9}$$

が成り立つことに注意しておく。次に x_tの基準化のための行列 Γ_T，Γ_{2T} を定義する。

$$\Gamma_{2T}=\begin{pmatrix} \delta_{2T}(\Pi_2'\Pi_2)^{-1}\Pi_2' \\ (\Pi_2{'}_{\perp}\Omega_{22}\Pi_{2\perp})^{-1/2}\Pi_2{'}_{\perp}/\sqrt{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\Gamma_T=\begin{pmatrix} \delta_{1T} & 0 \\ -\Gamma_{2T}\Pi_1 & \Gamma_{2T} \end{pmatrix} \tag{11}$$

ただし $\Pi_{2\perp}$ は，Π_2 に直交するランクが m_2の $(p_2+m_2)\times m_2$の行列とする。そして Γ_{T}による x_tの基準化の結果は次のようになる。

$$\Gamma_T x_{[Tr]}\begin{pmatrix} \delta_{1T}k_{1[Tr]} \\ \delta_{2T}k_{2[Tr]}+\delta_{2T}(\Pi_2'\Pi_2)^{-1}\Pi_2' x^0_{2[Tr]} \\ (\Pi'_{2\perp}\Omega_{22}\Pi_{2\perp})^{-1/2}\Pi'_{2\perp}x^0_{2[Tr]}/\sqrt{T}\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} k_1(r) \\ k_2(r) \\ W_2(r)\end{pmatrix} = X(r) \tag{12}$$

$$\frac{1}{T}\Gamma_T\sum_{t=1}^{T}x_t x_t'\Gamma_T' \Longrightarrow \int_0^1 X(r)X(r)'dr \tag{13}$$

ただし $W_2(r)=(\Pi'_{2\perp}\Omega_{22}\Pi_{2\perp})^{-1/2}\Pi'_{2\perp}B_2(r)\equiv BM(Im_2)$ とする。上の $\int_0^1 X(r)X(r)'dr$ は正則であることを指摘しておく。

以上の準備の下で $\hat{A}^{\dagger}$ の漸近分布に対する $u_{2t}-\hat{u}_{2t}$ の影響を調べる。まず $\hat{A}^{\dagger}-A$ を基準化した上で表現しなおすことにする。

$$\begin{aligned}
&\sqrt{T}(\hat{A}^{\dagger}-A)\Gamma_T^{-1} \qquad (14)\\
&=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\left\{(u_{1t}x_t'-\hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{22}^{-1}\hat{u}_{2t}x_t')-(0\hat{\Lambda}_{21}^{\dagger\prime})\right\}\Gamma_T'\left(\frac{1}{T}\Gamma_T\sum_{t=1}^{T}x_t x_t'\Gamma_T'\right)^{-1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\Big\{(u_{1t}x_t'-\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}u_{2t}x_t')-(0\hat{\Lambda}_{21}^{\dagger\prime})\\
&\qquad+(\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}-\hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{22}^{-1})u_{2t}x_t'+\hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{22}^{-1}(u_{2t}x_t'-\hat{u}_{2t}x_t')\Big\}\\
&\qquad\times\Gamma_T'\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\Gamma_T\sum_{t=1}^{T}x_t x_t'\Gamma_T'\right)^{-1}
\end{aligned}$$

となる。最後の式の｛　｝の中の最初の二項は，Hansen (1992a) の定理 1 (e) で評価されているので，問題は第三項，第四項である。第三項が $o_p(1)$であることは容易にわかるので，これから第四項，すなわち

$$\hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{22}^{-1}\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}(u_{2t}-\hat{u}_{2t})x_t'\Gamma_T' \tag{15}$$

を評価していくことにする。この項は，Hansen (1992a，b) においては無視可能とされている。一方 Choi et al. (1995) では，説明変数に十分な次数のトレンド関数をとり，x_2の係数のみ考慮しているので問題ない。

評価のため第四項を都合のよい形に書き直すことにする。$\hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{22}^{-1}$は $\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}$ 置き換えて差し支えないので，今後はそのようにする。

$$\Gamma_T x_t = \begin{pmatrix} \delta_{1T} k_{1t} \\ \delta_{2T} k_{2t} + \delta_{2T} (\Pi_2' \Pi_2)^{-1} \Pi_2' x_{2t}^0 \\ (\Pi_{2\perp}' \Omega_{22} \Pi_{2\perp})^{-1/2} \Pi_{2\perp}' x_{2t}^0 / \sqrt{T} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$u_{2t} - \hat{u}_{2t} = (\hat{\Pi}_\Delta - \Pi_\Delta) \Delta k_t \tag{17}$$

を用いると，第四項は以下のように書ける。

$$\Omega_{12} \Omega_{22}^{-1} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} (\hat{\Pi}_\Delta - \Pi_\Delta) \Delta k_t \begin{pmatrix} \delta_{1T} k_{1t} \\ \delta_{2T} k_{2t} + \delta_{2T} (\Pi_2' \Pi_2)^{-1} \Pi_2' x_{2t}^0 \\ (\Pi'_{2\perp} \Omega_{22} \Pi_{2\perp})^{-1/2} \Pi_{2\perp}' x_{2t}^0 / \sqrt{T} \end{pmatrix} \tag{18}$$

一般の場合も全く同様なので，簡単のためこれ以降 $\Delta k_t =$ (1， t) および $k_t =$ (1， t， t^2) とする。ここで dependent variable の中心極限定理と簡単な計算から，

$$(\hat{\Pi}_\Delta - \Pi_\Delta) \begin{pmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{pmatrix} \Longrightarrow Z \tag{19}$$

もわかる。Z は $(m_2 + p_2) \times 2$ の退化していない正規分布確率変数行列である。このとき

$$\frac{1}{\sqrt{T}} (\hat{\Pi}_\Delta - \Pi_\Delta) \left(\sum_{t=1}^{T} \Delta k_t k_t' \right) \delta_T \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
&=(\hat{\Pi}_\Delta-\Pi_\Delta)\begin{pmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T^{-2} \end{pmatrix} \\
&\quad\times\sum_{t=1}^{T}=\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}(1tt^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & T^{-2} \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow Z\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

がわかる。また

$$
\begin{aligned}
&(\hat{\Pi}_\Delta-\Pi_\Delta)\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{T}\Delta k_t(\Pi'_{2\perp}\Omega_{22}\Pi_{2\perp})^{-1/2}\Pi'_{2\perp}x_{2t}^0 \qquad (21) \\
&=(\hat{\Pi}_\Delta-\Pi_\Delta)\begin{pmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^{-3/2} & 0 \\ 0 & T^{-5/2} \end{pmatrix} \\
&\quad\times\sum_{t=1}^{T}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}((\Pi'_{2\perp}\Omega_{22}\Pi_{2\perp})^{-1/2}\Pi'_{2\perp}x_{2t}^0)' \\
&\Longrightarrow Z\int_0^1(1r)'W_2(r)'dr
\end{aligned}
$$

も成立する。以上により detrending による u_{2t}の推定の影響は無視可能でないことがわかる。また結果としてあらわれてくる分布は複雑で扱いやすいとはいえない。従って本節で扱ったような確定的トレンドが存在する場合における統計的な解析には，若干の注意が必要であることがわかる。またここに述べた事実を無視して提案された検定は，帰無仮説の下での極限分布を誤って特定されている。

3　構造変化の検定統計量

変化時点を特定しない構造変化の検定に関しては，ある程度の定常性を仮定

した場合については Andrews (1993) に包括的な議論が与えられている。I(1) 過程を含んだ線形非定常モデルの場合については Hansen (1992a) で扱われている。それ以外の文献については Bai and Perron (1995) 等を併せて参照されたい。

本節では Hansen (1992a) で扱われている共和分ベクトル（行列）の構造変化の検定問題を考える。構造変化が存在しないという仮説を帰無仮説にとる。Perron (1989) および Zivot and Andrews (1992) らの扱っているのは，構造変化（確定的トレンドの変化）の下での単位根の検定であり，ここで扱う問題とは異なっている。Stock and Watson (1993) はその一部で構造変化の時間を特定した上で同様の検定問題を扱っているが，検定統計量の構成に誤りが見られる（説明変数の取り方が不適切）。そこでは得られた推定値は構造変化の存在を示唆し，構造変化がないという帰無仮説は棄却されると予想されるにも拘わらず，帰無仮説は受容されている。検定統計量の構成の誤りもその一因かと考えられる。また Hansen (1992a) は前節で指摘した問題により，帰無仮説の下での検定統計量の漸近分布を誤って特定している。

まず問題の定式化からはじめることにする。(1)を以下のように書き直す。ここで $1 \leq S \leq T$ としておく。

$$\begin{aligned} y_t &= A_{11}x_{1t} + A_{12}x_{2t} + u_t, \qquad t \leq S \\ &= A_{21}x_{1t} + A_{22}x_{2t} + u_t, \qquad t > S \end{aligned} \tag{22}$$

(1)以外は前節と同一する。このとき帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 は，

$$H_0 : A_{12} = A_{22} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : A_{12} \neq A_{22} \tag{23}$$

となる。ここで次の仮定を加える。$p_2 \leq 1$ を除けば，基本的に Stock and Watson (1993) の Assumption B と同じ仮定である。

仮定：$p_2 \leq 1$ かつ次数の上限 k 既知の多項式 $d(u)=\sum_{i=-k}^{k} d_i u^i$ が存在して，

$$u_{1t}=d(L)u_{2t}+v_t \quad \text{かつ}\{v_t\}\text{と}\{u_{2t}\}\text{は無相関と表現できる。} \tag{24}$$

canonical cointegration regression と fully modified estimation の長所は，AR モデルの仮定や上のようなある意味で人為的な仮定をおかずに OLS を少し修正した形で攪乱母数が容易に消去でき，推定，検定が行えるというものである。

本題に戻ると，時刻 S が特定されていればワルド検定を用いて検定することがまず考えられる。しかしここでは S を一時点に特定せず，ある範囲，例えば区間 [T_1，T_2] にあることのみが想定されるという場合について，Andrews (1993) あるいは Hansen (1992a) で考察されているいわゆる Sup F 型の検定を考えていく。以下で扱う場合は，Sup Wald 型という方がより適切であろう。この Sup F 型の検定統計量は，変化時点が特定される場合に時点を決めて行う検定より明らかに検出力は劣る。また変化時点を [0.20，0.80] 程度にしか特定しない検定もあまり意味がないのではないかと思われる。ここでは検定統計量を提案し，理論的な解析をおこなう。帰無仮説の下での検定統計量の漸近分布の導出等は決して困難ではなく，標準的な議論によることを述べておく。

検定統計量を構成するために(23)を次のように書き直す。

$$y_t=(\delta_z z_t+\delta_k k_{1t}+\delta_x x_{2t})I\{t \leq S\}+A_z z_t+A_k k_{1t}+A_x x_{2t}+v_t \tag{25}$$

ここで z_tは $\{\Delta x_{2,t-i}\}$ からなり，$\{u_{2,t-j}\}$ と $\{k_{1,t-i}\}$ の有限の線形結合からなる。また仮定では，$\delta_z=0$ であるが，この項を入れて検定統計量を構成することにする。もっともよく考えられるのは，$k_{1t}=1$，$k_{2t}=t$ の場合であろう。

ここで帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 は，

$$H_0 : \delta_x = 0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \delta_x \neq 0 \tag{26}$$

となる。この問題に対するワルド検定 W_s を構成し，

$$\sup_{T_1 \leqq S \leqq T_2} W_s \tag{27}$$

を検定統計量とする。T_1，T_2 は問題により適宜設定される。Sup F 型の検定の漸近分布の導出の際に普通行われるように，

$$T_1 = [Ta], \qquad T_2 = [Tb], \qquad \text{および} \quad S = [Tr] (a \leq r \leq b) \tag{28}$$

として $T \to \infty$ の極限を考えていく。いろいろな表現が可能であるが，ここでは前節の議論の修正でしめすので簡潔に述べることにする。はじめに説明変数の基準化を行い，次いで検定統計量の漸近分布を導く。

まず $p_2 \leq 1$ 仮定よりある行列 Π_3 が存在して

$$z_t = z_t^0 + \Pi_3 k_{1t} \tag{29}$$

と書けることに注意する。ここで z_t^0 は $\{u_{2,t-i}\}$ からなる。次に必要な記号を定義する。

$$Z_1 = (z_1, \ z_2, \ldots, \ z_S), \qquad Z_2 = (z_{S+1}, \ldots, \ z_T)$$

Z_1^0, V_1, K_1, X_1, Z_2^0, V_2, K_2, X_2 等の定義は明らかであろう。基準化行列は $\bar{\Gamma}_T$ は,

$$\bar{\Gamma}_T=\begin{pmatrix} I & \Gamma_3 & \Gamma_4 \\ 0 & \Gamma_T & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_T \end{pmatrix} \quad \Gamma_3=\begin{pmatrix} -\Pi_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Pi_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

と定義される。説明変数行列を

$$\bar{X}=\begin{pmatrix} Z_1' & Z_1' & K_1' & X_1' & K_1' & X_1' \\ 0 & Z_2' & 0 & 0 & K_2' & X_2' \end{pmatrix}' \tag{31}$$

と書く。すると

$$\frac{1}{T}\bar{\Gamma}_T\bar{X}\bar{X}'\bar{\Gamma}_T' \Longrightarrow \begin{pmatrix} D(r) & 0 \\ 0 & E(r) \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$D(r)=\begin{pmatrix} r\Sigma_z & r\Sigma_z \\ r\Sigma_z & \Sigma_z \end{pmatrix} \quad E(r)=\begin{pmatrix} \int_0^r XX'ds & \int_0^r XX'ds \\ \int_0^r XX'ds & \int_0^1 XX'ds \end{pmatrix}$$

が成立する。Σ_zはある正値対称行列である。

次に（V_1 V_2）$\bar{X}'\bar{\Gamma}'_T/\sqrt{T}$ の評価を行う。まず

$$\sum_{t=1}^{[Ts]} v_t \Longrightarrow B_v(s)\equiv BM(\Omega_v)$$

$$\sum_{t=1}^{[Ts]} v_t z_t^{0\prime} \Longrightarrow B_{vz}(s) \qquad (\mathrm{vec}B_{vz}\equiv BM(\Omega_{vz})$$

に注意する。仮定より B_vと W_2は独立である。前節と同様にすると

$$\frac{1}{\sqrt{T}}(V_1 V_2)\bar{X}'\bar{\Gamma}_T' \tag{33}$$

$$\Longrightarrow\Big(B_{vz}(r)B_{vz}(1)\Big|\int_0^r dB_v k_1'\int_0^r dB_v k_2'\int_0^r dB_v W_2'\int_0^1 dB_v k_1'\int_0^1 dB_v k_2'$$

$$\int_0^1 dB_v W_2'\Big)$$

$$=(F(r)|G(r))$$

の成立がわかる。従って

$$\sqrt{T}((\hat{\delta}_z\hat{A}|\hat{\delta}_k\hat{\delta}_x\hat{A}_k\hat{A}_x)-(\delta_z A_z|\delta_k\delta_x A_k A_x))\bar{\Gamma}_T^{-1} \tag{34}$$

$$\Longrightarrow(F(r)|G(r))\begin{pmatrix}D(r) & 0\\ 0 & E(r)\end{pmatrix}^{-1}$$

となることがわかる。簡単のため(34)の左辺を $\sqrt{T}(\hat{A}_\delta-A_\delta)\bar{\Gamma}_T^{-1}$ と書くことにする。δ_xが問題なので，$R=(0\ 0\ 0\ I\ 0\ 0)'$とおくと，$R\Gamma_{2T}=\bar{\Gamma}_T R$ より

$$\sqrt{T}(\hat{A}_\delta-A_\delta)R\Gamma_{2T}^{-1}=\sqrt{T}(\hat{A}_\delta-A_\delta)\bar{\Gamma}_T^{-1}R \tag{35}$$

が成立する。$\hat{\Omega}_v$を Ω_vの一致推定量とすると，ワルド統計量は，

$$W_S=\mathrm{tr}[\hat{\Omega}_v^{-1}(\hat{A}_\delta-A_\delta)R\{R'(\bar{X}\bar{X}')^{-1}R\}^{-1}R'(\hat{A}_\delta-A_\delta)'] \tag{36}$$

と定義される。ここで $0<a<b<1$ なので，手間はかかるが $\hat{\Omega}_v$を S に応じて計算しなおしても問題ない。

以上より

$$W_S \Longrightarrow \mathrm{tr}\{\Omega_v^{-1}(G(r)E(r)^{-1}\bar{R})(\bar{R}'E(r)^{-1}\bar{R})^{-1}(G(r)E(r)^{-1}\bar{R})'\} = H(r) \quad (37)$$

がわかる。ただし $\bar{R}=(0\ I\ 0\ 0)'$ とする。ここではＤ［０，１］の直積空間での収束を考えているが，r を固定して考えた場合は，B_vと W_2の独立性よりこれは自由度 $m_1\times(m_2+p_2)$ のカイ自乗分布に従う。

従って帰無仮説の下での検定統計量の分布は，(37)で定義された $H(r)$ により

$$\sup_{a\leqq r\leqq b} H(r) \quad (38)$$

とかける。この分布の裾が，a，b の値によってどれだけカイ自乗分布から重くなるかに，Sup F 型の検定の有用性がかかっている。

4 まとめ

以上の結果に引き続き，$\sup_{a\leqq r\leqq b}H(r)$の上側５％点の計算をさまざまな a，b の組についておこない，この型の検定の有用性の検証をおこないたい。

またここで１節で述べた Saikkonen (1991) の仮定との関連について触れておく。本稿の仮定(24)ではなく，Saikkonen (1991) の仮定で議論をすすめると，変化時点を固定した場合，すなわち r を固定した場合においては，全く同様に検定統計量の漸近分布がカイ自乗であることを示せる。しかし Sup F 型の検定の場合は，$\bar{\Gamma}_T\bar{X}\bar{X}'\bar{\Gamma}'_T$の対角化の補題 (LemmaA2) の部分で支障が生じると思われる。

構造変化前と変化後で，データを生成する確率構造に変化があることも想定した検定の構成も必要であり，今後の課題である。

参考文献

[1] Andrews, D. W. K. (1991) Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation, *Econometrica,* **59,** 817-858.

[2] Andrews, D. W. K. (1993) Tests for parameter instability and structural change with unknown change point, *Econometrica,* **61,** 821-856.

[3] Andrews, D. W. K. and Monahan, J. C. (1992) An improved heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation, *Econometrica,* **60,** 953-966.

[4] Bai, J. and Perron, P. (1995) Estimating and testing linear models with multiple structural change, mimeo.

[5] Billingsley, P. (1968) *Convergence of Probability Measures,* Wiley.

[6] Chan, N. H. and Wei, C. Z. (1988) Limiting disributions of least - squares estimates of unstable autoregressive processes, *Annals of Statistics,* **16,** 367 - 401.

[7] Choi, I., Park, J. Y., and Yu, B. (1995) Canonical cointegration and testing for cointegration in the presence of I (1) and I (2) variables, mimeo.

[8] Hansen, B. E. (1992a) Tests for parameter instability in regressions with I (1) processes, *J. Business & Economic Statistics,* **10,** 321 - 335.

[9] Hansen, B. E. (1992b) Efficient estimation and testing of cointegarating vectors in the presence of deterministic trends, *J. Econometrics,* **53,** 87 - 121.

[10] Hansen, B. E. (1992c) Convergence to stichastic integrals for dependent heterogeneous variables, *Econometric Theory,* **8,** 501-517.

[11] Hansen, B. E. (1992d) Consistent covariance matrix estimation for dependent heterogenous processes, *Econometrica,* **60,** 967 - 972.

[12] Johansen, S. (1988) Statistical analysis of cointegration vectors, *J. Economic Dynamics and Control,* **12,** 231 - 255.

[13] Johansen, S. (1991) Estimation and hypothesis testing of cointegration

vectors in Gaussian vector autoregression models, *Econometrica,* **59,** 1551 - 1580.

[14] Park, J. Y. (1992) Canonical cointegration regressions, *Econometrica,* **60,** 119 - 143.

[15] Perron, P. (1989) The Great Crash, the Oil Price Shock and the unit root hypothesis, *Econometrica,* **57,** 1361 - 1401.

[16] Pollard, D. (1984) *Convergence of Stochastic Processes,* Springer.

[17] Saikkonen, P. (1991) Asymptotically efficent estimation of cointegration regresstions, *Econometric Theory,* **7,** 1 - 21.

[18] Stock, J.H. and Watson, M. W. (1993), A simple estimator of cointegrating vectors in higher order integrated systems, *Econometrica,* **61,** 783 - 820.

[19] Zivot, E. and Andrews, D. W. K. (1992) Further evidence on the Great Crash, the Oil Price Shock and the unit root hypothesis, *J. Business & Economic Statistics,* **10,** 251 - 271.