国際資本市場の理論について(V)

工　藤　和　久

序

「国際資本市場の理論(Ⅰ)」～「同(Ⅳ)」[18] では主として Lucas の均衡資産価格決定モデルに基づく国際資本市場の理論について解説，検討してきた。しかし Lucas 型の資産価格決定理論にはその後少くとも以下で述べる2つの点で著しい進展が見られた。これらの展開についてはこのシリーズでは断片的に言及してきたものの体系的に紹介してはこなかった。その理由は，このような新らしい資産市場理論に基づく国際資本市場モデルがまだ開発されていないと思われる一寡聞にして筆者はまだそのような文献を知らない一からである。

Lucas 型一般均衡 CAPM の基本的構成要素は

1）加法分離的な期待効用関数

と

2）定常マルコフ過程とされるアウトプットの確率過程

とである。しかし近年このいずれについても，より一般的な，あるいは，現実のデータとの適合性がより高いと思われるような関数ないし確率過程が用いられるようになっている。又，資産価格を陽表的に解くことができれば，種々のパラメーターや外性変数と，資産価格及びそれ(ら)から得られる諸利子率との間の関係が理解しやすいのでそれが可能であるようなモデルの開発も試みられてきた。そこで本稿では一旦，国際資本市場の理論と離れてルーカス型資産価格決定理論の最近の発展を上の二点に焦点を合わせて簡単にたどることにする。

1）の効用関数については，加法分離的期待効用関数が制約的であることは以前からしばしば指摘されてきたが，最近になって Epstein and Zin[5]や Weil [17]らによって，加法分離型を一般化した recursive な選好関数が開発された。このような選好関数を導入した資産価格決定モデルとして Epstein[4]を取り上げる。新らしい選好関数の導入の効果を極立たせるためにアウトプットの確

率過程は i.i.d とされ，このため資産価格決定のメカニズムがより簡単に理解できるようになっていることがこの論文を取り上げる理由の一つである。

他方，2）のアウトプットの確率過程の一般化を試みた論文としてはまず Abel［1］と，ついで Cechetti, Lam and Mark (CLM)［3］をとり上げる。いずれもアウトプットの確率分布が時間と共に変動するように Lucas モデルを拡張したものであり，又，いずれも資産価格を陽表的に求めることができるように工夫されている。

最後に Epstein［4］で導入された一般化された選好関数と CLM［3］で導入されたアウトプットの一般化されたマルコフ過程のモデルとを同時に導入した Kandel-Stambaugh (K-S)［9］の論文を解説する。この論文のモデルは大変複雑であるので比較静学分析は解析的にではなく，数値例を用いて行われる。なお，K-S のモデルは Mehra-Prescott(M-P)［12］のモデルの一般化ともなっており，そのように定式化されているので K-S モデルを解説する節で M-P モデルについても簡単に紹介する。

(1) Kreps-Porteus 型選好と資産価格決定

はじめに，Lucas の基本モデルを要約的に示しておく。代表的消費者の期待効用は

$$V_t = E_t[\sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^{\tau} u(c_{t+\tau})] \quad 0<\beta<1,\ u'>0,\ u''<0 \tag{1}$$

であり，予算制約式は

$$c_t + p_t z_{t+1} \leq y_t z_t + p_t z_t \equiv w_t \tag{2}$$

で与えられる。但し，ここで c_t＝消費，p_t＝シェア価格，y_t＝配当，z_t＝シェアの保有数である。t 期の一人当り産出高 y_t は全て配当として支払われるものとされるが，y_t は次のような推移関数をもつマルコフ過程に従うものとされる。

$$\mathrm{Prob}\{\eta_t \leq \eta' \mid \eta_{t-1} = \eta\} = F(\eta',\ \eta) \tag{3}$$

即ち，t－1期の産出が η である時 t 期の産出が η' 以下になる確率が $F(\eta',\ \eta)$ で与えられる。関数 F(・，・) は時間 t からは独立とされている。

均衡に於いては $c_t = y_t$，$c_{t+1} = y_{t+1}$ 及び $z_{t+1} = 1$ が成りたたねばならない。効用最大化の条件と均衡条件とから資産価格決定の基本式として

$$p(y)u_c(y) = \beta \int u_c(y')(p(y') + y)dF(y',\ y) \tag{4}$$

を得る。このような条件を満たす価格関数 p(y) の存在を証明できるのである。例えば効用関数が u(c)＝logc で，産出が i.i.d なら，上の条件を満たす価格関数は $p(y) = \dfrac{\beta}{1-\beta}y$ であった。

しかし，(1)で与えられる様な加法分離的な期待効用関数は次のような制限的な性質ないし，欠点を持っている。第１に，二つの時点の消費の間の限界代替

率がそれらの時点以外の消費から独立であること，第二に，リスクに関する選好と異時点間代替性，つまり，消費の時間的変動に関する選好とを独立に設定できないという性質の二つである。第1の点については，最近，habit formationとかvariable time preferenceを導入するモデルが多くの論者によって取上げられている。しかし，ここでは，不確実性下の資産価格決定に主に関心があるので効用関数のこのような一般化については論じないことにする。

第二の性質についてまず(1)に於ける，異時点消費の代替の弾力性と（相対）危険回避関数を求めてみよう。簡単のため $u(c_t)=\frac{1}{1-\alpha}(c_t^{1-\alpha}-1)$ とする。代替の弾力性 η は x を限界代替率，即ち，

$$x=\frac{dc_{t+1}}{dc_t}=-\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})}=-\frac{1}{\beta}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\alpha}\text{とすると}$$

$$\eta=-\frac{d\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)\Big/\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)}{dx/x}=\frac{1}{\alpha}$$

となる。他方，相対危険回避関数 $-\frac{u''c}{u'}$ は α になる。従って，加法分離的な効用関数では，異時点消費の代替に関する選好と危険回避に関する選好を独立に決めることはできない。

加法分離的な効用関数がこのような制限的な性質をもつことは以前からしばしば指摘されていたが（例えば，Hall [6]），この点に対する一つの解決法を最も早く提示したのはこのシリーズの（IV）でも紹介したSelden [16] である。Seldenは2期モデルに，2期目の不確実な消費のcertainty equivalentを定める非時間的な危険選好関数を導入する。総効用は1期目の消費からの効用と，2期目の不確実な消費のcertainty equivalentからの効用の割引値との和で与えられる。こうして，異時間代替性と危険回避に関する選好を独立に指定することができる。しかし，Selden型の効用関数は3期以上のモデルに適用されるといわゆるintertemporal consistencyを持たない。(Johnsen and Donaldson [8])

Epstein and Zin [5] は Kreps and Porteus [10] による期待効用モデルの一般化に関する研究に基づいて，計画期間が無限大（∞）である場合について，消費の異時点間代替性とリスク選好を区別できるような recursive な表現をもつ，次の様な選好関数を提示した。その関数は

$$U_t = [c_t^a + \beta (E_t U_{t+1}^b)^{a/b}]^{1/a} \quad 0 \neq a < 1,\ b \neq 0 \tag{5}$$

という CES 型で与えられる。この関数は不確実性がない場合には

$$\begin{aligned} U_t &= [c_t^a + \beta u_{t+1}^a]^{1/a} \\ &= [\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j c_{t+j}^a]^{1/a} \end{aligned} \tag{6}$$

となり，代替の弾力性は$\frac{1}{1-a}$となるので a は異時点間代替性を表わす係数である。他方 b は不確実性がない場合，効用関数から消えるのでリスク選好を表わす係数と考えられる。(5)は a=b の場合，

$$\begin{aligned} U_t &= [c_t^a + \beta E_t U_{t+1}^a]^{1/a} \\ &= [c_t^a + \beta E_t (c_{t+1}^a + \beta E_{t+1} U_{t+2}^a)]^{1/a} \\ &= [c_t^a + \beta E_t c_{t+1}^a + \beta^2 E_t U_{t+2}^a]^{1/a} \\ &= [\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \ E_t c_{t+j}^a]^{1/a} \end{aligned}$$

となって加法分離的な期待効用関数となる。それ故，後者は(5)の特殊ケースであることがわかる。

又，(5)は t 期の総効用 U_tが，t 期の消費と t+1の不確実な総効用 U_{t+1}の certainty equivalent との CES 関数であると説明することもできる。但し，certainty equivalent を計算するリスク選好関数は

$$\psi(\mu) = \mu^b \qquad 0 \neq b < 1$$
$$= \log\mu \qquad b = 0 \tag{7}$$

で与えられる。従って U_{t+1} の certainty equivalent μ_t は $b \neq 0$ のとき

$$\mu_t^b = E_t U_{t+1}^b$$

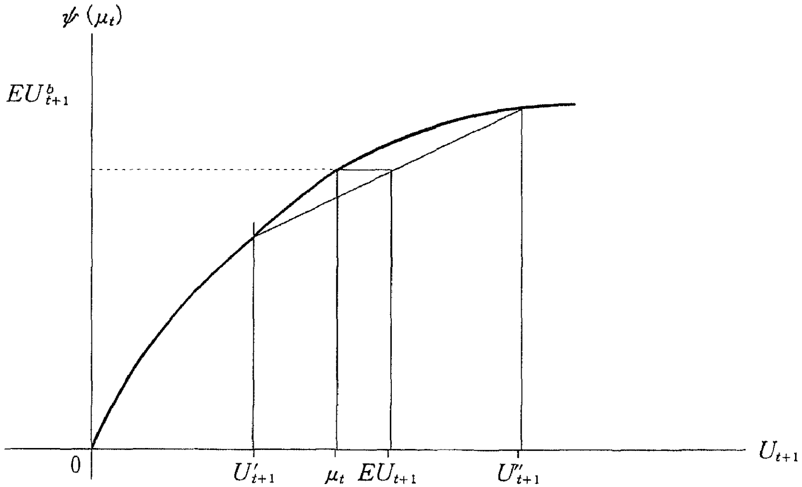
から

$$\mu_t = (E_t U_{t+1}^b)^{1/b}$$

と求まる。（第１図参照。）これを

$$U_t = [c_t^a + \beta\mu_t^a]^{1/a}$$

に代入すると(5)が求まる。(7)からわかるようにｂが大きい程，危険回避度は強



第１図

まる。

Epstein [4] は Lucas [11] 流のモデルに(5)で与えられる選好関数を導入し，均衡資産価格がどのように異時点間代替性と危険回避選好に依存するかを論じた。この節ではこの論文をやや詳しく解説する。

モデルの枠組は基本的に Lucas ［11］ と同じ代表的消費者モデルであり，アウトプットは外生的である。但し，アウトプットの確率過程は Lucas より単純であって，i.i.d とされる。この仮定によって均衡価格関数を求めるために必要な数学が簡単になる。

経済には n 個の異なる生産単位があり，単一の perishable good を生産している。その生産高のベクトルを $s_t = (s_{1t}, \cdots, s_{nt})$ とする。生産物は全て各生産単位の発行する株（シェア）の保有者に配当として支払われる。(各生産単位は 1 の株式を発行している。)

消費者は(5)で与えられる選好関数を予算制約

$$c_t + p_t z_{t+1} \leq (s_t + p_t) z_t \equiv x_t \tag{8}$$

の下で最大化するように c_t と z_{t+1} を決める。但し，z_t は t 期の期首に保有されるシェアのベクトルであり，s_t は各シェアへの配当のベクトルである。$0 < \underline{s}_1 < s_{1t} < \bar{s}_1$ と仮定される。

この問題は，選好関数の形がより複雑になっていることを除けば，［18］で解説した Lucas モデルの最大化問題と数学的構造は同じである。まず，シェアの価格 p_t は t 期の状態変数 s_t の関数

$$p_t = p(s_t)$$

として表現できる。人々の将来価格の予想もこのように形成される。次に，(5)の最大値は t 期の期首の富 x_t と $p(s_t)$ とに依存するからそれを $J(x_t, s_t)$ と表わすと(5)の最大値は

$$J(x_t,\ s_t)=\max_{c_t,\ z_{t+1}}[c_t^a+\beta E_t^{a/b}[J^b(x_{t+1},\ s_{t+1})]]^{1/a} \tag{9}$$

とかける。最大化問題は(9)を(8)と

$$x_{t+1}=(s_{t+1}+p(s_{t+1}))z_{t+1} \tag{10}$$

の下で最大化するという標準的な dynamic programming の問題になる。

最大値関数 $J(\cdot)$ については更に，予算制約式(8)と，効用関数の同次性の性質とから，$J(\cdot)$が，x に関して一次同次であることがわかる。即ち，$J(\cdot)$は

$$J(x,\ s)=A(s)x \tag{11}$$

のように表わすことができる。このことから，ポートフォリオ選択が消費・貯蓄の決定から分離できることを示せる。

ここで，資産選択を表わす変数を z_{t+1}からポートフォリオシェア変数 w_t^*，即ち

$$w_{it}=p_i(s_t)z_{i,t+1}/p(s_t)z_{t+1}$$

に変換する。又，各シェアの gross return のベクトルを $r_t=(r_{1t},\ \cdots\cdots,\ r_{nt})$ とすると

$$r_{it}=(s_{it}+p_i(s_t))/p_i(s_{t-1})$$

である。これらを用いると t＋1期の富 x_{t+1}(10)は

$$x_{t+1}=(s_{t+1}+p(s_{t+1}))z_{t+1}=(x_t-c_t)r_{t+1}w_t' \tag{12}$$

となる。(11)及び(12)を Bellman 方程式(9)に代入すると，(9)は

$$A(s_t)x_t=\max_{c_t,\ w_t}\{c_t^a+\beta(x_t-c_t)^aE_t^{a/b}[A(s_{t+1})(\Sigma w_ir_{i,t+1})]\}^{1/a} \tag{13}$$

と書き直せる。ポートフォリオ選択 w_t は｛　｝カッコ内の期待値の表現を最大化すればよいから，貯蓄・消費の決定からは分離されることがわかる。

最適ポートフォリオを w_t^* と表わし，それに対するグロス収益率を

$$M_{t+1} = w_t^* r_{t+1} \tag{14}$$

とする。このとき効用最大化の条件は次の様に与えられる。

$$\beta E^{a/b}[(c_{t+1}/c_t)^{b(a-1)/a} M_{t+1}^{(b-a)/a} r_{j,t+1}] = 1, \quad j = 1, \cdots, n \tag{15}$$

これは Lucas モデルを解説した文献［18］の中の(14)式に相当する。即ち，(15)で b＝a とすれば(15)は Lucas 型期待効用モデルの期待効用最大化の条件式に帰着する。

代表的個人モデルでは(14)の最適ポートフォリオのグロス収益率をマーケットポートフォリオのグロス収益率と同一視できる。

このようなモデルでの均衡とはまず財の需給均衡条件

$$c_t = \sum_{i=1}^{n} s_{it} \tag{16}$$

と，各シェアの需給均衡条件

$$z_t = (z_{1t}, \cdots, z_{n,t}) = (1, \cdots, 1) \tag{17}$$

の下で，効用最大化の条件を満たすシェアの価格関数 $p_t = p(s_t) > 0$ の存在によって表わされる。(16)，(17)を(15)に代入して書き直すと

$$\beta^{b/a} E_t\left[\left[\frac{\Sigma s_{i,t+1}}{\Sigma s_{i,t}}\right]^{b(a-1)/a}\left[\frac{\Sigma(p_i(s_{t+1}) + s_{i,t+1})}{\Sigma p_i(s_t)}\right]^{(b-a)/a}\right.$$

$$\left.\times \frac{(p_j(s_{t+1}) + s_{j,t+1})}{p_j(s_t)}\right] = 1, \quad j = 1, \cdots, n \tag{18}$$

となる。

この式は又

$$(\sum_i s_{i,t})^{b(a-1)/a}(\sum_i p_i(s_t))^{(b-a)/a}\, p_j(s_t)$$

$$=\beta^{b/a}E_t\left[\left[\frac{\sum_i s_{i,t+1}}{\sum_i s_{i,t}}\right]^{b(a-1)/a}\left[\sum_i(p_i(s_{t+1})+s_{i,t+1})\right]^{(b-a)/a}\right.$$

$$\left.\times(p_j(s_{t+1})+s_{j,t+1})\right]\equiv K_j,\quad j=1,\ \cdots,\ n \tag{19}$$

とも表されるが，右辺の K_j は s_t からは独立の定数である。この式から

$$p_j(s_t)=K_j(\sum_j K_j)^{\frac{a-b}{b}}\ (\sum_i s_{it})^{1-a} \tag{20}$$

を得るが，(注1)これを(19)に代入して，

$$K_j=\beta^{b/a}E_t[(\Sigma s_{i,t+1})^{-(1-a)}((\Sigma s_{i1})^{a}+(\Sigma K_i)^{a/b})^{(b-a)/a}$$

$$\times\{K_j(\Sigma s_{i,t+1})^{1-a}(\Sigma K_i)^{(a-b)/a}+s_{j,t+1}\}],\quad j=1,\ \cdots,\ n \tag{21}$$

という K_j についての n 本の方程式が求まる。(注2)これを満たす $K_j>0$，$j=1$，…，n を(20)に代入すれば，均衡価格関数が求まる訳である。(21)をみたす $(K_1, \cdots, K_n)$ がユニークに存在し，従って，(20)で与えられるユニークな均衡価格関数が存在することを示すことができる。

簡単のため，n＝1とする。このとき(20)は

$$p(s)=K s^{1-a},\quad K=K_1^{a/b} \tag{22}$$

又(21)は j＝1とすると

$$K_1=\beta^{b/a}E_t[(s_{1,t+1})^{a-1}(s_{1,t+1}^{a}+K_1^{a/b})^{\frac{b-a}{a}}\ \{K_1 s_{1t+1}^{1-a}K_1^{\frac{a-b}{b}}+s_{1,t+1}\}]$$

$$=\beta^{b/a}E_t[(s_{1,t+1}^{a}+K_1^{a/b})^{b/a}]$$

となるがこれは

$$K=\beta\ E_t^{a/b}[s_{1,t+1}^{a}+K)^{b/a}] \tag{23}$$

と書き直せる。価格式(22)のKは(23)を満たさねばならない。

(23)を満たすKが存在することは簡単に示せる。右辺は$\beta KE_t^{a/b}[(\frac{S_{1,t+1}^{a}}{K}+1)^{b/a}]$とかけ，従って(23)は

$$1=\beta\ E_t^{a/b}[(\frac{S_{1,t+1}^{a}}{K}+1)^{b/a}]$$

となる。右辺は$K\rightarrow\infty$のとき$\beta(<1)$に近づき，$K\rightarrow 0$のとき∞になる。又，右辺はKの減少関数である。従ってこの式を満たす正のユニークなKが存在することがわかる。

(22)式からわかる様にシェア価格のアウトプット（配当）弾力性は代替の弾力性のみに依存し，危険回避度には依存しない。即ち，

$$\frac{dp(s)}{ds}\ \frac{s}{p(s)}=1-a\equiv\frac{1}{\sigma} \tag{24}$$

σは代替の弾力性である。σが大きい程，即ち，異時間消費の代替が容易である程，現時点の産出（＝配当）の増加によるシェア価格の上昇は小さい。この場合には，わずかのシェア価格の上昇，従って，わずかの収益率の低下によって消費の大幅な異時点間代替を受け入れるのである。

次に，次期の産出（＝配当）の確率分布が first-order stochastic dominance (FSD) の意味でより有利になるとシェア価格は必ず上昇するであろうか。産出の分布関数として，F_a，F_bがあるとし，F_bがF_aに対して，FSDの関係にあるとする。即ち，任意の$s\geq 0$ （$\underline{s}\leq s\leq \bar{s}$） に対して，

$$F_b(s)\leq F_a(s)$$

なる関係がある場合である。このとき

$$\left.\begin{array}{l} a>0,\ 従って,\ \sigma=\dfrac{1}{1-a}>1\ ならば \\ \quad K_b>K_a \\ 又,\ a<0,\ 従って,\ \sigma=\dfrac{1}{1-a}<1\ ならば \\ \quad K_b<K_a \end{array}\right\} \qquad (25)$$

という関係が得られる。(注3)(25)によると来期の配当についてのより楽観的期待は今期のシェア価格を上げるとは限らないことになる。$\sigma<1$の場合には現在消費を増加させようとしてシェアが売られるためその価格が下がるのである。

更に，危険回避度αの変化が資産価格に与える影響も異時点間消費の代替の弾力性の大きさに依存することを示せる。即ち，$\alpha_a<\alpha_b$という二つの危険回避度に対して$\sigma>1$のときには$K_a<K_b$，又，$\sigma<1$なら$K_a>K_b$となる。

(注1)　(19)をjについて合計し，$\sum_{j=1}^{n} p_j(s_t)$を求めそれを(19)に代入して$p_j(s_t)$を求めると(20)を得る。

(注2)　(20)をjについて合計し，$\sum_{j=1}^{n} p_j(s_t)$の表現を求め，それと(20)を(19)に代入する。

(注3)

まず(23)を書きかえて

$$1=\beta^{\frac{b}{a}}E_t[(\frac{s^a}{K}+1)^{\frac{b}{a}}]=\beta^{\frac{b}{a}}\int_{\underline{s}}^{\bar{s}}(\frac{s^a}{K}+1)^{\frac{b}{a}}dF(s)\cdots(a)$$

となる。右辺の積分は部分積分の公式を用いて，

$$\int_{\underline{s}}^{\bar{s}}\left(\frac{s^{a}}{K}+1\right)^{\frac{b}{a}} dF(s)=\int_{\underline{s}}^{\bar{s}} d\left\{\left(\frac{s^{a}}{K}+1\right)^{\frac{b}{a}} F(s)\right\}$$

$$-\frac{b}{K}\int_{\underline{s}}^{\bar{s}}\left(\frac{s^{a}}{K}+1\right)^{\frac{b}{a}-1} s^{a-1}F(s)\,ds$$

$$=\left(\frac{\bar{s}^{a}}{K}+1\right)^{\frac{b}{a}}-\left(\frac{\underline{s}^{a}}{K}+1\right)^{\frac{b}{a}} F(\underline{s})-\frac{b}{K}\int_{\underline{s}}^{\bar{s}}\left(\frac{s^{a}}{K}+1\right)^{\frac{b}{a}-1} s^{a-1}F(s)\,ds$$

$F_b<F_a$, $F_b(\underline{s})<F_a(\underline{s})$ だからこの表現は FSD である方の分布 F_b に対する方が大きい。

(23)の右辺を K で微分すると

$$\beta^{\frac{b}{a}}\int\frac{b}{a}\left(\frac{s^{a}}{K}+1\right)^{\frac{b}{a}-1}\left(-\frac{s^{a}}{K_2}\right)dF(s)$$

となり，これは $a>0$ なら負，$a<0$ なら正である。従って $a>0$ なら F_b に対する K_b の方が F_a に対する K_a より大きく，$a<0$ なら K_b の方が K_a より小さくなる。（注３終）

(2) アウトプットの分布の時間的変動と資産価格

Lucasのモデルではアウトプットの確率過程は(3)で与えられるような定常的なマルコフ過程とされた。この仮定は次期のアウトプット（配当）の（条件付）確率分布が時間を通じて不変であることを意味し大変制約的である。これに対してAbel [1] は次期アウトプットの条件付の期待値と分散とが時間を通じて確率的に変動するような確率過程を想定し，かつ，安全資産とaggregate stock-portfolioの価格式が陽表的に解けるようなモデルを定式化した。

Abelの論文はそもそもPyndick [15] やPoterba and Summers [14] らによる，1970年代のアメリカの株価の下落がリスクの増大によって説明できるかどうかについての論争で取り上げられた問題に理論的な分析を加えることを目的としたものである。リスクが株価に与える影響の分析についてはBarsky[2]の論文がある。この論文でBarskyは2期間のLucas型モデルを用いて，配当のリスクの増大は効用関数の傾きの大小に依存して，株価を下げることも，又，上げることもあることを示した。しかし，Abelが指摘するようにBarskyモデルの分析は，配当の分布パラメーターが異なる二つの経済の株価の比較であって，配当のリスクの時間的変動の効果の分析ではない。Abel [1] は無限期間のLucas型モデルで，配当の確率分布が時間的に変動するとして，その株価へ与える効果を分析したのである。

アウトプットの確率過程以外はLucasのモデルと全く同じである。特に，選好関数は加法分離的であるとされる。ややくり返しになるがモデルを要約的に示すと，選好関数は相対危険回避度をαで一定として

$$E_t\{\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j(c_{t+j}^{1-\alpha}-1)/(1-\alpha)\} \quad \alpha>0 \tag{26}$$

とされ，予算制約式は

$$c_t + p_t z_t = (p_t + y_t) z_{t-1} \tag{27}$$

である。この制約の下での(26)の最大化の条件は

$$p_t c_t^{-\alpha} = \beta E_t\{(p_{t+1} + y_{t+1}) c_{t+1}^{-\alpha}\} \tag{28}$$

である。これに均衡条件 $c_t = y_t$，$c_{t+1} = y_{t+1}$ を代入して

$$p_t y_t^{-\alpha} = \beta E_t\{(p_{t+1} + y_{t+1}) y_{t+1}^{-\alpha}\} \tag{29}$$

を得る。この条件を満たす価格関数 $p_t = p(y_t)$ を求めることが目的である。言うまでもなくこの関数の性質はアウトプット y_t の確率過程に依存する。

そこで次にアウトプットの確率過程であるが，y_t は系列相関する平均と変動係数を持つ対数正規分布に従うとされる。即ち，

$$\log y_{t+1} \sim N_t(m_t, s_t^2) \tag{30}$$

である。正規分布を表わす $N_t(\cdot, \cdot)$ という表現に t という添字がついているのは t 期に利用可能な情報に条件づけられていることを表わす。$\mu_t = E_t(y_{t+1})$，$\nu_t = \mathrm{var}_t(y_{t+1})/\mu_t^2$ とすると

$$\left.\begin{aligned} \mu_t &= \exp(m_t + \frac{1}{2} s_t^2) \\ \nu_t^2 &= \exp(s_t^2) - 1 \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

となる。(注4)この μ_t と ν_t が又，確率分布するとされるのである。

これらのパラメーターの動学的な動きの定式化を簡単化するために，次のような変換を行う。即ち，

$$\left.\begin{aligned} \omega_t &\equiv \mu_t^{1-\alpha} = \exp\left[(1-\alpha)(m_t + \frac{1}{2}s_t^2)\right] > 0 \\ \theta_t &\equiv [1+\nu_t^2]^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}} = \exp[\alpha(\alpha-1)s_t^2/2] > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

という変換である。このとき

$$E_t(y_{t+1}^{1-\alpha}) = \omega_t\theta_t \qquad (33)$$

が直ちに得られる。(注5)又,

$$\frac{d\omega_t}{d\mu_t} = (1-\alpha)\mu_t^{-\alpha} \gtreqless 0 \quad 1 \gtreqless \alpha$$

$$\frac{d\theta_t}{d\nu_t} = \alpha(\alpha-1)(1+\nu_t^2)^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}-1}\nu_t \gtreqless 0 \quad \alpha \gtreqless 1$$

という関係がある。

μ_tとω_t, ν_tとθ_tとの関係は一義的であるのでμ_t, ν_tの時間的動きをω_tとθ_tの時間的動きで表わせる。分布パラメーターの時間的動きは次の二つのステップでとらえられる。まず,μ_{t+1}とν_{t+1}とがμ_t, ν_tから変化するかどうかが決められる。これは,ω_{t+1}, θ_{t+1}がそれぞれω_t, θ_tにとどまる確率ρ_ω, ρ_θ, 即ち,

$$\rho_\omega = \text{prob}\{\omega_{t+1} = \omega_t\}$$
$$\rho_\theta = \text{prob}\{\theta_{t+1} = \theta_t\}$$

を指定することで与えられる。

$0 \leq \rho_\omega \leq 1$, $0 \leq \rho_\theta \leq 1$なる条件が満たされるとする。第1表に各事象の組合せの起る確率を示す。例えば$\theta_{t+1} = \theta_t$, $\omega_{t+1} = \omega_t$となる確率はp(Abelモデルのg)としている。言うまでもなく$p + p' + q + q' = 1$である。θ_{t+1}もω_{t+1}もt期の値から変る確率q'は

第1表

事　象	$\omega_{t+1}=\omega_t$	$\omega_{t+1}=\omega_t$	周辺確率
$\theta_{t+1}=\theta_t$	ρ	ρ'	ρ_θ
$\theta_{t+1}\neq\theta_t$	q	q'	$1-\rho_\theta$
周辺確率	ρ_ω	$1-\rho_\omega$	

$$q'=1-p-p'-q=1-p-(\rho_\theta-p)-(\rho_\omega-p)$$
$$=1-\rho_\theta-\rho_\omega+g$$

である。又，$g=\rho_\theta-p'\leq\rho_\theta\,(\because p'\geq 0)$，$g=\rho_\omega-q\geq\rho_\omega\,(\because q\geq 0)$であるから

$$g\leq\min(\rho_\theta,\ \rho_\omega)$$

を得る。もし，ω_tの変化の日付とθ_tのそれとが独立なら（1表に於いて）

$$\rho=g=\rho_\theta\cdot\mathrm{prob}\{\omega_{t+1}=\omega_t\mid\theta_{t+1}=\theta_t\}$$
$$=\rho_\theta\cdot\mathrm{prob}(\omega_{t+1}=\omega_t)=\rho_\theta\ \rho_\omega$$

となる。又，正相関があれば，

$$\mathrm{prob}\{\omega_{t+1}=\omega_t\mid\theta_{t+1}=\theta_t\}>\mathrm{prob}\{\omega_{t+1}=\omega_t\mid\theta_{t+1}\neq\theta_t\}$$

であるが，左辺をm，右辺をnとすると

$$\rho_\omega=m\rho_\theta+(1-\rho_\theta)n$$

であるから，

$$m-\rho_\omega=(1-\rho_\theta)(m-n)$$

となり，m>n なら m>ρ_ωとなって g>$\rho_\omega\rho_\theta$となる。

次に分布パラメーターの確率的変動の特定の第2ステップであるが，これは，もし，μの新しい値が選ばれるとすれば，それは $f_\mu(\mu)$という密度関数をもつ連続分布から抽出されるというものである。νについては分布関数は $f_\nu(\nu)$である。そうして両分布関数は独立とされる。

このとき ω と θ の条件付期待値 $\overline{\omega}$，$\overline{\theta}$ は

$$\overline{\omega}=\int_0^\infty \mu^{1-\alpha} f_\mu(\mu)\,d\mu$$
$$\overline{\theta}=\int_0^\infty [1+\nu^2]^{\alpha(\alpha-1)/2} f_\nu(\nu)\,d\nu \tag{34}$$

で与えられる。それ故，ω_{t+1}，θ_{t+1}の条件付期待値は，

$$\left.\begin{aligned} E_t(\omega_{t+1})&=\rho_\omega\,\omega_t+(1-\rho_\omega)\overline{\omega} \quad 0\leq\rho_\omega\leq 1 \\ E_t(\theta_{t+1})&=\rho_\theta\,\theta_t+(1-\rho_\theta)\overline{\theta} \quad 0\leq\rho_\theta\leq 1 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

で与えられる。さらに，

$$\mathrm{cov}_t(\omega_{t+1},\ \theta_{t+1})=(g-\rho_\theta\,\rho_\omega)(\omega_t-\overline{\omega})(\theta_t-\overline{\theta}) \tag{36}$$

が成り立つ。(注6)

(30)－(36)で与えられる確率的構造によって条件(29)を満たす価格関数 $p(y_t)$を解くことができる。このために(29)を(33)を用いて次の様に書きかえる。

$$\begin{aligned} p_t y_t^{-\alpha} &=\beta E_t\{(p_{t+1}+y_{t+1})\,y_{t+1}^{-\alpha}\} \\ &=\beta E_t(p_{t+1}y_{t+1}^{-\alpha})+p\,\omega_t\theta_t \end{aligned} \tag{37}$$

そうして価格関数が次のような形をしていると想定する。

$$p_t = p(y_t\,;\,\omega_t,\ \theta_t) \equiv [a + b\omega_t\theta_t + d\omega_t + e\theta_t]y_t^{\alpha} \tag{38}$$

このとき，(37)の右辺の第一項は

$$\begin{aligned} E_t(p_{t+1}y_{t+1}^{-\alpha}) &= E_t\{(a + b\omega_{t+1}\theta_{t+1} + d\omega_{t+1} + e\theta_{t+1})y_{t+1}^{-\alpha}y_{t+1}^{\alpha}\} \\ &= a + bE_t\omega_{t+1}\theta_{t+1} + dE_t\omega_{t+1} + eE_t\theta_{t+1} \end{aligned} \tag{39}$$

となる。

$$\mathrm{cov}_t(\omega_{t+1}\theta_{t+1}) = E_t\omega_{t+1}\theta_{t+1} - E_t\theta_{t+1}E_t\omega_{t+1}$$

及び(35)，(36)を用いると

$$\begin{aligned} E_t\omega_{t+1}\theta_{t+1} &= \overline{\omega}\overline{\theta}(1 - \rho_{\omega} - \rho_{\theta} + g) \\ &+ \omega_t\theta_t g + \overline{\omega}\theta_t(\rho_{\theta} - g) + \overline{\theta}\omega_t(\rho_{\omega} - g) \end{aligned}$$

となるが，これと(35)を(39)に代入して

$$\begin{aligned} E_t p_{t+1}y_{t+1}^{-\alpha} &= \{a + b(1 - \rho_{\omega} - \rho_{\theta} + g)\overline{\omega}\overline{\theta} + d(1 - \rho_{\omega})\overline{\omega} \\ &+ e(1 - \rho_{\theta})\overline{\theta}\} + \{b(\rho_{\omega} - g)\overline{\theta} + d\rho_{\omega}\}\omega_t \\ &+ \{b(\rho_{\theta} - g)\overline{\omega} + e\rho_{\theta}\}\theta_t + bg\omega_t\theta_t \end{aligned}$$

これを(37)に代入し，(38)よりえられる

$$\rho_t y_t^{-\alpha} = a_t b\omega_t\theta_t + d\omega_t + e\theta_t$$

を用いると

$$\beta[\{a+b(1-\rho_\omega-\rho_\theta+g)\overline{\omega}\overline{\theta}+d(1-\rho_\omega)\overline{\omega}$$
$$+e(1-\rho_\theta)\overline{\theta}\}+\{b(\rho_\omega-g)\overline{\theta}+d\rho_\omega\}\omega_t$$
$$+\{b(\rho_\theta-g)\overline{\omega}+e\rho_\theta\}\theta_t+bg\omega_t\theta_t+\beta\omega_t\theta_t$$
$$=a+b\omega_t\theta_t+d\omega_t+e\theta_t$$

なる関係を得る。これは任意の θ_t, ω_tについて成り立たねばならない。

両辺の定数項及び $\omega_t\theta_t$, ω_t, θ_tの係数をそれぞれ等しいとおき未知数 a, b, d, e について解くと

$$b=\frac{\beta}{1-\beta g}>0 \tag{40}$$

$$d=\frac{b\beta\overline{\theta}(\rho_\omega-g)}{1-\rho_\omega\beta}\geqq 0 \tag{41}$$

$$e=\frac{b\beta\overline{\omega}(\rho_\theta-g)}{1-\rho_\theta\beta}\geqq 0 \tag{42}$$

$$a=\frac{\beta}{1-\beta}[b(1-\rho_\omega-\rho_\theta+g)\overline{\omega}\overline{\theta}+d(1-\rho_\omega)\overline{\omega}+e(1-\rho_\theta)\overline{\theta}]\leq 0 \tag{43}$$

をうる。(40)−(43)で与えられるような係数をもつ価格関数(38)は条件(29)を満たす。

(a)　資産価格と分布パラメーターとの関係

アウトプット(配当)の分布パラメーター μ_t, ν_tの変化は株式価格 p_tにどのように影響するだろうか。これを知るためにまず，p_tと ω_t, θ_tとの間の関係を求めると

$$\frac{\partial p_t}{\partial \omega_t} = p_\omega = (b\theta_t + d)\, y_t^\alpha \tag{44}$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial \theta_t} = p_\theta = (b\omega_t + e)\, y_t^\alpha \tag{45}$$

となる。又，

$$\frac{\partial p_t}{\partial y_t} = \alpha p_t / y_t > 0 \tag{46}$$

である。(32)，(33)を用いて

$$\frac{\partial p_t}{\partial \mu_t} = (1-\alpha)\{p_\omega \frac{\omega_t}{\mu_t}\} \tag{47}$$

$$\frac{\partial p_t}{\partial \nu_t} = -(1-\alpha)\{\alpha p_\theta \cdot \theta_t \frac{\nu_t}{1+\nu_t^2}\} \tag{48}$$

をうる。{　} 内は正だからこれらの符号は α の 1 との大小に依存する。

即ち，

(1)　$\alpha < 1$

$\partial p_t / \partial \mu_t > 0$

$\partial p_t / \partial \nu_t < 0$

(2)　$\alpha < 1$

$\partial p_t / \partial \mu_t < 0$

$\partial p_t / \partial \nu_t > 0$

という関係がある。

Abel は α を相対危険回避度として説明しているが，一別の箇所では，単に効用関数の curvature としている一そのような α が 1 より小さい場合には，配当

の（条件付）期待値の増大はシェア価格を上げ，その（条件付）変動係数の上昇はシェア価格を下げる。これは通常，予想される結果であるが，α が1より大きい場合には逆の結果が得られる。即ち，次期配当の（条件付）期待値の増大はシェア価格を下げ，変動係数の上昇はそれを上げる。

(b) 安全債券の価格と分布パラメーター

安全債券，即ち，次期に確実に1個の財を支払うという債券の価格を q_t とすると，

$$q_t = \beta E_t(c_{t+1}^{-\alpha}) / c_t^{-\alpha}$$

が満たされねばならない。$c_t = y_t$，$c_{t+1} = y_{t+1}$ を代入して

$$q_t = \beta E_t(y_{t+1}^{-\alpha}) / y_t^{\alpha} \tag{49}$$

を得る。

$$\begin{aligned} E_t(y_{t+1}^{-\alpha}) &= \exp[-\alpha\omega_t + \frac{1}{2}\alpha^2 s_t^2] \\ &= \mu_t^{-\alpha}[1+\nu_t^2]^{\alpha(1+\alpha)/2} \end{aligned}$$

であるから，安全債券の価格関数として

$$q_t = \beta\left(\frac{y_t}{\mu_t}\right)^{\alpha}[1+\nu_t^2]^{\frac{\alpha(1+\alpha)}{2}} \tag{50}$$

を得る。リスクレスな（グロス）利子率はこの逆数である。(50)から，

$$\partial q_t/\partial y_t > 0$$

$$\partial q_t/\partial \mu_t = -\alpha \frac{q_t}{\mu_t} < 0$$

$$\partial q_t/\partial \nu_t^2 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{2} \frac{q_t}{(1+\nu_t^2)} > 0$$

という関係を得る。又，はじめの二つの不等式から

$$\partial q_t/\partial(y_t/\mu_t) > 0$$

が成りたつ。

(c) 株式収益率のリスクプレミアム

aggregate stock の（gross の）収益率 R_{t+1} は

$$R_{t+1} = (p_{t+1} + y_{t+1})/p_t$$

で与えられ，又，満期１期の安全資産のそれ R^F_{t+1} は

$$R^F_{t+1} = 1/q_t$$

で与えられるから（ex-ante の）リスクプレミアムは，

$$E_t(R_{t+1} - R^F_{t+1})$$

である。

リスクプレミアムの表現を導出するために Abel はアウトプットの確率分布について更に ω_{t+1} 及び θ_{t+1} が y_{t+1} とは独立という仮定を設ける。このとき ex-ante リスクプレミアムは，

$$E_t\{R_{t+1}-R^F_{t+1}\}=h(\mu_t, \nu_t)y_t^{-\alpha} \tag{51}$$

$$h(\mu_t, \nu_t)\equiv\beta^{-1}\mu_t^{\alpha}[\theta_t-(1+\nu_t^2)^{-\alpha(1+\alpha)/2}]+\frac{\mu_t}{p_t^*}(1-\theta_t^2) \tag{52}$$

で与えられる。(注7)

このようなリスクプレミアムは次期配当のリスク(ν_t)とどのような関係にあるだろうか。はじめに簡単な場合として効用関数 $u(c_t)$ が対数関数の場合，即ち，$\alpha=1$ の場合について見る。$\alpha=1$ のとき，$\omega_t=\theta_t=1$ だから，これと(注7)の p_t^* の表現とから p_t^* が定数であることがわかる。従って $E_t p_{t+1}^*=p_t^*$ であるから

$$p_t^*=\frac{\beta}{1-\beta}$$

をうる。$\alpha=\theta_t=\omega_t=1$ を(52)に代入，h( )を求めて，それを(51)に代入するとリスクプレミアムが

$$E_t\{R_{t+1}-R^F_{t+1}\}=\beta^{-1}(\mu_t/y_t)\frac{\nu_t^2}{1+\nu_t^2}$$

として与えられる。これは，次期配当のリスク（変動係数 ν_t）の増加関数である。

しかしながらこのことは α の任意の値に対して成りたつ訳ではない。Abel は数値例を与えて，ν_tの増大がリスクプレミアムを低下させる場合があることを示している。Abel はこの結果は効用関数に関する標準的な設定がリスクプレミアムがリスクの増加関数となることを確立のに充分でないことを示唆するものだと述べている。

（注４）

$$Ey=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}e^{x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}e^{-\frac{\{x-(m+s^2)\}^2}{2s^2}}dx\ e^{m+\frac{s^2}{2}}$$

$$=e^{m+\frac{s^2}{2}}$$

又,

$$\nu_t^2=\frac{\mathrm{var}_t(y_{t+1})^2}{\mu_t^2}=\frac{E_t(y_{t+1}-\mu_t)^2}{\mu_t^2}=\frac{E_t y_{t+1}^2}{\mu_t^2}-1$$

ここで $E_t y_{t+1}^2=E_t(e^{\log y_{t+1}})^2=E_t e^{2\log y_{t+1}}=e^{2(m_t+s_t^2)}$

これと(30)を上の ν^2 の表現に代入して(31)をうる。（注４終）

（注５）

$$Ey^{1-\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}e^{(1-\alpha)x}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}e^{-\frac{\{x-(m+s^2(1-\alpha))\}^2}{2s^2}}dx\ e^{(1-\alpha)\{m+\frac{(1-\alpha)}{2}s^2\}}$$

$$=\exp(1-\alpha)\ \{m+\frac{(1-\alpha)}{2}s^2\}$$

（注6）

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cov}_t(\omega_{t+1},\ \theta_{t+1})\\
&=E_t(\omega_{t+1}-E_t\omega_{t+1})(\theta_{t+1}-E_t\theta_{t+1})\\
&=E_t\{(\omega_{t+1}-\overline{\omega}-\rho_\omega(\omega_t-\overline{\omega})\}\{(\theta_{t+1}-\overline{\theta})-\rho_\theta(\theta_t-\overline{\theta})\}\\
&=E_t(\omega_{t+1}-\overline{\omega})(\theta_{t+1}-\overline{\theta})-\rho_\theta\,\rho_\omega(\theta_t-\overline{\theta})(\omega_t-\overline{\omega})\\
&=[g(\omega_t-\overline{\omega})(\theta_t-\overline{\theta})+\rho_\omega(1-\rho_\theta)(\omega_t-\overline{\omega})\times 0\\
&\quad+\rho_\theta(1-\rho_\omega)(\theta_t-\overline{\theta})\times 0+(1-\rho_\theta-\rho_\omega+g)\times 0\,]\\
&\quad-\rho_\theta\,\rho_\omega(\theta_t-\overline{\theta})(\omega_t-\overline{\omega})=(g-\rho_\theta\,\rho_\omega)(\omega_t-\overline{\omega})(\theta_t-\overline{\theta})
\end{aligned}
$$

（注6終）

（注7）

(38)の p_t の表現の右辺の y_t^α を除く部分を p_t^* とおく。即ち，

$$p_t^*=a+b\omega_t\theta_t+d\omega_t+e\theta_t$$

とする。このとき R_{t+1} は，

$$R_{t+1}=\frac{p_{t+1}^*\ y_{t+1}^\alpha+y_{t+1}}{p_t^* y_t}$$

となる。ω_{t+1}，θ_{t+1} が y_{t+1} と独立なら

$$E_t(R_{t+1})=\frac{E_t(p_{t+1}^*)E_t\ y_{t+1}^\alpha+\mu_t}{p_t^* y_t} \tag{a}$$

となる。

$p_t=p_t^* y_t^\alpha$ であるからこれを(37)に代入すると

$$p_t^*=\beta E_t(p_{t+1}^*)+\beta\omega_t\theta_t$$

となるが，これから

$$E_t(p^*_{t+1})=\frac{1}{\beta}p^*_t-\omega_t\theta_t$$

をうる。又，y_{t+1} は log-normal だから

$$E_t\{y^{\alpha}_{t+1}\}=\mu^{\alpha}_t\ \theta_t$$

である。これらを(a)に代入し，(50)の逆数との差をとると(51)をうる。（注 7 終）

(3) アウトプットの markov switching model と資産価格

Cecchetti, Lam and Mark (CLM) [3] も又，ルーカス型モデルにアウトプットの確率過程として米国の実際のデータの特徴をよりよくとらえるようなものを導入し，かつ，資産価格を陽表的に解くことを可能にするようなモデルを定式化した。彼らの論文の目的は株式の長期収益 (long-horizon return) に見られる負の系列相関 (いわゆる "mean reversion") が，資産価格決定の均衡理論と矛盾しないこと――そこでのパラメーターに許容できる値を指定することによってそのような現象を生ぜしめることができることを示すことにある。

米国の GNP や，消費や配当の成長率の時系列の分布のもつ特徴とは，負の方向への skewness(歪度，ひずみ)と過度の kurtosis(尖度，とがり，分布がFat-tailed であること)とである。実際のデータのもつこのような特徴をとらえる確率過程で，資産価格を陽表的に解くことを可能にするものが，Hamilton[7]が定式化した markov switching process である。

効用最大化の条件はアウトプット＝配当を CLM に従って D と表わすと，

$$p_t u'(D_t)=\beta E_t\{u'(D_{t+1})(p_{t+1}+D_{t+1})\}$$

であるが $u(c)=(1+\gamma)^{-1}c^{(1+\gamma)}(-\infty\leq\gamma\leq0)$ とされるので上式は，

$$p_t D_t^{\gamma}=\beta E_t D_{t+1}^{\gamma}\, p_{t+1}+\beta E_t D_{t+1}^{\gamma+1} \tag{53}$$

となる。

これから株価 p_t は

$$p_t=D_t^{-\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k\, E_t D_{t+k}^{(1+\gamma)} \tag{54}$$

となる。

配当 D_t は Hamilton の markov switching process に従うとされる。即ち，配当(=アウトプット)の対数は確率的なドリフト項をもつ random walk process に従う。$d_t = \log D_t$ とすると d_t が random walk なら，ε_t を $N(0, \sigma^2)$ とすると，

$$d_{t+1} = d_t + \varepsilon_t$$

であるが，これに確率的なドリフト項が加わる。それは $\alpha_0 + \alpha_1 s_t$ と表わされるが s_t はマルコフ確率変数で CLM モデルでは 1 と 0 という 2 つの値をとるものとされる。即ち，s_t は,

$$\begin{aligned} &\text{prob}\{s_t = 1 \mid s_{t-1} = 1\} = p \\ &\text{prob}\{s_t = 0 \mid s_{t-1} = 1\} = 1 - p \\ &\text{prob}\{s_t = 0 \mid s_{t-1} = 0\} = q \\ &\text{prob}\{s_t = 1 \mid s_{t-1} = 0\} = 1 - q \end{aligned} \tag{55}$$

という推移確率をもつ。$\alpha_0 > 0$，$\alpha_1 < 0$ とされる。d_{t+1} は

$$d_{t+1} = d_t + \varepsilon_t + \alpha_0 + \alpha_1 s_t \tag{56}$$

で与えられる。

$d_{t+1} - d_t$ は D_t の成長率であるから(56)は成長率(の期待値)が二つの値 α_0 と $\alpha_0 + \alpha_1$ とをとりうることを意味する。$s_t = 0$ なら高成長状態，$s_t = 1$ なら低成長状態である。米国のデータ(GNP，消費，配当)を用いて p，q を推定すると $q > 0.9$，p は GNP と消費の場合，約0.5，配当の場合約0.17である。従って，今期が好景気である（$s_t = 0$）とき来期も好景気である確率は非常に高い。

アウトプットが(55)，(56)で与えられるような確率過程に従うときに(53)を満たす価格関数は以下で示すように定数係数をもつアウトプットの一次同次関数とな

る。Abel［1］と同様、未定係数法を用いる。ここでは想定関数として

$$p_t = \rho(s_t)D_t \tag{57}$$

を用いる。これを(53)に代入すると

$$\rho(s_t)D_t^{\gamma+1} = \beta E_t D_{t+1}^{\gamma+1}[\rho(s_{t+1})+1] \tag{58}$$

をうる。この表現の $D_{t+1}^{\gamma+1}$ は，(56)を変形した

$$D_t = D_{t-1}e^{\varepsilon_t+\alpha_0+\alpha_1 s_{t-1}}$$

を用いて

$$D_{t+1}^{\gamma+1} = D_t^{\gamma+1}\,e^{(\gamma+1)(\varepsilon_{t+1}+\alpha_0+\alpha_1 s_t)}$$

と書ける。これを(58)に代入して整理すると

$$\begin{aligned}\rho(s_t) &= \beta E_t e^{(\gamma+1)(\varepsilon_{t+1}+\alpha_0+\alpha_1 s_t)}(\rho(s_{t+1})+1)\\ &= \beta E_t e^{(\gamma+1)\alpha_0}\,e^{(\gamma+1)\varepsilon_{t+1}}\,e^{(\gamma+1)\alpha_1 s_t}\,E_t(\rho(s_{t+1})+1)\\ &= \beta e^{(\gamma+1)\alpha_0}\,e^{\frac{(\gamma+1)^2\sigma^2}{2}}\,e^{(\gamma+1)\alpha_1 s_t}\,E_t(\rho(s_{t+1})+1)\\ &= \tilde{\beta}e^{(\gamma+1)\alpha_1 s_t}\,E_t(\rho(s_{t+1})+1)\end{aligned}$$

となる。但し，

$$\tilde{\beta} = \beta e^{[\alpha_0(\gamma+1)+(1+\gamma)^2\sigma^2/2]}$$

である。これから

$$\rho(0) = \tilde{\beta}\{q\rho(0)+(1-q)\rho(1)+1\}$$
$$\rho(1) = \tilde{\beta}\{p\rho(1)+(1-p)\rho(0)+1\}$$

という2つの係数 $\rho(0)$，$\rho(1)$ についての連立方程式をうる。これを解いて

$$\rho(0)=\frac{\tilde{\beta}}{\Delta}\{1-\tilde{\beta}(p+q-1)\} \tag{59}$$

$$\rho(1)=\frac{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}_1}{\Delta}\{1-\tilde{\beta}(p+q-1)\} \tag{60}$$

を得る。但しここで

$$\Delta=-(1-\tilde{\beta}p)(1-\tilde{\beta}q)+\tilde{\beta}^2(1-p)(1-q)$$
$$\tilde{\alpha}_1=e^{\alpha_1(1+\gamma)}$$

である。即ち株価は高成長状態では

$$p_t=\rho(0)D_t \tag{61}$$

低成長状態では

$$p_t=\rho(1)D_t \tag{62}$$

となる。

このような均衡資産価格関数の特徴としてはまず第一にそれがアウトプットの一次同次関数であることである。第二に比例定数 $\rho(0)$, $\rho(1)$ は消費の異時点間代替の弾力性の逆数 γ に依存していることであるがその関係は

$$\rho(0)\gtreqless\rho(1) \text{ as } \gamma\gtreqless-1 \tag{63}$$

で与えられる。(注8)

例えば，現在，好景気（$s_t=0$）であるとする。このとき，$p\approx0.9$ということであるから来期も好景気であることが予想される。従って，来期の高配当が予想されるがこれは資産価格に対して反対方向に作用する二つの効果を持つ。即ち，まず第一にこれは来期の財の相対価格を低め，貯蓄を促がし，資産価格を上昇させる。このような異時点間相対価格効果は資産価格を上昇させる。他

方，消費を平準化しようとする代替効果は今期の消費を高めるように働く。これは資産価格を下げる効果をもつ。異時点間代替の弾力性$-1/\gamma$が小さければ，即ち，γの絶対値が大きければ後者の効果が強く働き，$\rho(1)>\rho(0)$となる。効用関数が対数関数の場合$\gamma=-1$となり，ρは定数$\beta/(1-\beta)$になることはAbelのモデルと同様である。γが対数効用の場合より大きく，異時点間代替が容易である場合，財の異時点間相対価格効果が支配的となって資産価格は高くなる。

来期の好配当が予想されるとき，今期の資産価格が高くなるか低くなるかは効用関数のパラメーターγの1との大小に依存する。この結論はAbel［1］の(47)で与えられた結果と同じである。なお，CLMはこのモデルで株式収益率のmean reversionを説明できることを論じているがここでは触れない。

（注8）

(60)を(59)から引いて

$$\rho(0)-\rho(1)=\frac{\tilde{\beta}[1-\tilde{\beta}(p+q-1)]}{\Delta}(1-\tilde{\alpha}_1)$$

を得る。$\alpha_1<0$であるから$\gamma>-1$から$\tilde{\alpha}=e^{\alpha_1(1+\gamma)}<1$となって$\rho(0)>\rho(1)$をうる。$\gamma<-1$なら$\tilde{\alpha}>1$で$\rho(0)<\rho(1)$となる。（注8終）

(4) Kreps-Porteus 型選好とアウトプットの markov switching process

Kandel-Stambaugh (K-S) [9] はルーカス型の資産価格決定モデルに 1) 選好関数として, Epstein モデルの節で紹介した, 危険回避パラメーターと異時点消費の代替性を表わすパラメーターを分離できるような効用関数を導入し, そうして同時に, 2) アウトプットの確率過程として成長率の分布に於ける skewness や kurtosis をとらえることができるような, Hamilton の markov switching model で, 前節の CLM モデルに於けるそれより一般的なものを導入した。従ってこの論文のモデルは CLM モデルの効用関数とアウトプットの確率過程の両者を一般化したものとみることもできるけれども, K-S はむしろ, Lucas モデルの variant である Mehra-Prescott (M-P) [12] のモデルとの連続性を強調したい様であり, 実際そのように定式化されている。(注9)

そこでここではまず M-P [12] のモデルを簡単に解説する。モデルは基本的に Lucas 型であるが, Lucas がアウトプットの水準がマルコフ過程に従うとしたのに対し, M-P [12] はその成長率がマルコフ過程に従うとした。特に成長率は有限個の値しかとらない discrete state モデルである。M-P がこのような修正をしたのは現実のアウトプットや消費の時系列の非定常性をとらえようとしたのであるが, 容易に推察できるようにこれはモデルのかなり本質的な変更であって, この場合の競争均衡の存在の証明は [13] で行われている。

アウトプット y_t のグロスの成長率を x_t とすると

$$y_{t+1}=x_{t+1}y_t$$

となるがこの x_{t+1} は有限個の値（λ_1, …, λ_n）のいずれかをとりその推移確率は

$$\mathrm{prob}\{x_{t+1}=\lambda_j\ ;\ x_t=\lambda_i\}=\phi_{ij}$$

で与えられる。この λ_j が有限個という仮定は大変制約的でありK-Sモデルで修正される。効用関数を $u(c)=(c^{1-\alpha}-1)/(1-\alpha)$ とすると均衡株式価格は

$$p_t=E_t\{\sum_{s=t+1}^{\infty}\beta^{s-t}\frac{y_t^{\alpha}}{y_s^{\alpha}}y_s \mid x_t,\ y_t\}$$

と表わせる。$y_s=y_t\cdot x_{t+1}\cdot x_{t+2}\cdot\cdots\cdot x_s$ 及び p_t が y_t の一次同次関数となることを用いると上式から，$y_t=c$，$\lambda_i=i$ のとき

$$p^e(c,\ i)=\beta\sum_{j=1}^{\infty}\phi_{ij}(\lambda_j c)^{-\alpha}[p^e(\lambda_j c,\ j)+c\lambda_j]c^{\alpha}$$

を得る。$p^e(c,\ i)$ の e は期待価格を表わす。$p^e(c,\ i)=w_i c$ としてこれを上式に代入すると

$$w_i=\beta\sum_{j=1}^{\infty}\phi_{ij}\lambda_j^{(1-\alpha)}(w_j+1)\quad i=1,\ \cdots,\ n \tag{64}$$

という w_i についての線型の連立方程式をうる。これを w_i について解き，$p^e(c,\ i)=w_i c$ に代入すると均衡価格関数が求まる。

今期の状態が（c, i）で来期のそれが（$\lambda_j c$, j）であるときの一期収益率は

$$r_{ij}^e=\frac{p^e(\lambda_j c,\ j)+\lambda_j c-p^e(c,\ i)}{p^e(c,\ i)}$$

$$=\frac{\lambda_j(w_j+1)}{w_i}-1$$

となる。従って，現在の状態が i のときの株式の期待収益率 R_i^e は

$$R_i^e=\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}r_{ij}^e$$

となる。リスクレスな資産の価格は今期の状態を（c，i）とすると

$$\begin{aligned}p_i^f&=p^f(c,\ i)\\&=\beta\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}(\lambda_j c)^{\alpha}/c^{\alpha}=\beta\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}\lambda_j^{\alpha}\end{aligned}$$

である。リスクレスな利子率は$\frac{1}{p_i^f}-1$である。これらは今期のアウトプット（＝消費）水準 c には依存しない。以上が M-P モデルとそこでの結果の一部のごく簡単な要約である。

これに対して K-S［9］では効用関数は Epstein-Zin 型で

$$V_t=[c_t^a+\beta[E_t(V_{t+1}^b))^{\frac{a}{b}}]^{\frac{1}{a}} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}&a=(\eta-1)/\eta,\ b=1-\alpha\\&0<\beta<1,\quad 0<\alpha\neq 1,\quad 0<\eta\neq 1\end{aligned}$$

とされる。α は相対危険回避度，η は異時点間代替の弾力性である。第1節で示したように効用最大化条件は

$$\beta E_t^{\frac{a}{b}}\{c_{t+1}\mid c_t)^{-\frac{b(1-a)}{a}}(1+R_{A,t+1,1})^{\frac{(b-a)}{a}}(1+R_{k,t+1,1})\}=1 \tag{66}$$

である。但し，$R_{A,t+1,1}$は最適ポートフォリオ（aggregate wealth）に対する1期収益率，$R^R_{k,t+1,1}$は k 資産に対するそれである。この式は第1節の(15)と同じである。

次にアウトプットの確率過程であるが，アウトプットの成長率 $\lambda_{t+1}=y_{t+1}/y_t$ が平均 μ_t，標準偏差 σ_tの対数正規分布すると想定する。そうして $s_t=(\mu_t,\ \sigma_t)$ が有限個 s の状態をもつマルコフ過程に従うとするのである。このモデルではア

ウトプットの成長率がとりうる値は無数である。M-P モデルではそれは有限個であったし，又，CLM モデルでもその期待成長率は有限（2個）であった。

s_tの推移行列は

$$\left.\begin{aligned} \phi &= [\phi_{ij}] \\ \phi_{ij} &= \mathrm{prob}(s_{t+1}=j \mid s_t=i) \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

とする。M-P との違いは，今期の状態 i がきまっても，来期にかけての成長率の分布が一つ決まる一成長率が ϕ_{ij}の確率で $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$の値をとる一のではなく，その分布のパラメーター $s_{t+1}=(\mu_{t+1}, \sigma_{t+1})$の分布が決まるのである。即ち，$s_t=i$ のとき t＋1期にかけての成長率，$\log \lambda_{t+1} \sim N_t(\mu_{t+1}, \sigma_{t+1})$の分布パラメーターは次のように分布する。

	確率
$s_{t+1}=1=(\mu(1), \sigma(1))$	ϕ_{i1}
$s_{t+1}=2=(\mu(2), \sigma(2))$	ϕ_{i2}
$\vdots$	
$s_{t+1}=s=(\mu(s), \sigma(s))$	ϕ_{is}

もし全ての i について $\sigma(i)=0$ なら ϕ_{ij}の確率で成長率が $\mu(j)$になるということになり M-P モデルの場合に帰着する。

全産出に対する請求権を表わすものとしての株式の価格は M-P に於けると同様，産出の一次同次関数となる。特に今期の状態が(c, j)であればその価格は

$$p_A(c, j)=cw(i) \qquad (69)$$

と表わせる。そうして，w(i)が満たすべき条件は次のように与えられる。

$$w(i)^{\frac{b}{a}}=\sum_{j=1}^{s}\phi_{ij}E\{\lambda_{t+1}^{b}\mid i\}\{\beta[1+w(j)]\}^{\frac{b}{a}} \tag{70}$$
$$i=1,\ \cdots,s$$

$a=b, \sigma(j)=0$ のときこの式が M-P モデルの(64)に帰着することは明らかである。一般には $a \neq b$ であるから(70)式は $w(i)$ について線型ではなく陽表的に $w(i)$ を解くことはできない。

なお，現実の世界での株式は全産出に対する請求権ではなく債券に対する支払いを差引いた残余に対する請求権（いわゆる levered equity）である。K-S はこのような equity の価格式も導出しているがここでは省略する。

次に，リスクレスな（満期１期の）資産の価格は

$$p_F(c,\ i:1)=(\psi g)_i \tag{71}$$

と与えられるが g は$(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)'$という s ベクトルで ψ は $s\times s$ 行列で(i, j) 要素は

$$\psi_{ij}=\beta^{-\frac{b}{a}}\phi_{ij}E\{\lambda_{t+1}^{b-1}\mid i\}[(w(j)+1)/w(i)]^{\frac{b-a}{a}} \tag{72}$$

で与えられる。故に

$$p_F(c,\ i:1)=\beta^{-\frac{b}{a}}\sum_{j=1}^{s}\phi_{ij}E\{\lambda_{t+1}^{b-1}\mid i\}[(w(j)+1)/w(i)]^{\frac{b-a}{a}} \tag{73}$$

となる。これからリスクレスな債券の価格が M－P に於けると同様 c には依存しないことがわかる。従って $p_F(c,\ i:1)=p_F(i:1)$ である。

K-S はこのモデルを用いて “equity premium puzzle” や “excess volatility issue” や “mean reversion” の現象を均衡モデルが説明できるかどうかを論じている。ここではこれらの問題に関する K-S の議論を詳しく紹介することはできないが，資産価格決定に関連する重要な結果をいくつか紹介しておく。なお，これらの結果は解析的な比較静学分析によって得られたのではなく，アウトプ

ットの確率過程のモデルの諸係数（ないしパラメーター）に米国のデータに最も良く適合する値を選び，そのようなアウトプットの確率過程の下で，いろいろの α や η の値をもつ選好関数を与えるとどのような資産価格（収益率）やその変動がえられるかを計算するのである。

まず（リスクレスな）利子率（の平均値）は相対危険回避度 α と異時点間代替の弾力性 η の減少関数(従って a と b の増加関数)であり，株(levered equity)のリスクプレミアムは α の増加関数で η の減少関数である。(b の減少関数で a の増加関数である。)

株式収益率の変動は η の減少関数であるが，リスクパラメーター α には殆んど依存しない。従って，現実に観察される株式収益率の大巾な変動を説明するには異時点消費の変動に対する強い忌避を表わすような選好が要求されることになる。つまり配当の与えられた時間的変動に対して消費を時間的に平準化しようとする行動が株価と株式収益率の大幅な変動を説明するということになる。他方，(リスクレスな)利子率の変動は α と η の両者に強く依存するけれども，単調な依存関係ではない。　　未完

(注 9)

M-P [12] はいわゆる“equity premium puzzle”を指摘したことで知られている。このパズルとは米国の過去約100年間に於ける株式に対する(リスクレス利子率を越える）超過収益率（6.20%）と0.75%という低いリスクレスな利子率とをルーカス型の資産価格決定モデル(の M-P 版）ではうまく説明できないというものである。

参 考 文 献

[1] Abel, A. B., 1988, Stock prices under time varying dividend risk : An exact solution in an intinite-horizon general equilibrium model, Journal of Monetary Economics **22**, 375-394.

[2] Barsky, R. B., 1986. Why d'ont the pries of stocks and bonds more together ? working paper no.2047 National Burean of Economic Research, 1-31.

[3] Cecchetti, S. G., Pok-sang Lam, and N. C. Mark, 1990, Mean reversion in equilibrium asset prices, American Economic Review go, 398-418.

[4] Epstein, L. G., 1988. Risk aversion and asset prices, Journal of Monetary Economics **22**, 177-192.

[5] ―――――― and S. E. Zin 1989. Substitution, risk aversion, and the temporal behaviour of consumption and asset returns : A theoretical framework, Econometrica **57**, 937-969.

[6] Hall, R. E., 1989. Intertemporal substitution in consumption, Journal of political Economy **96**, 339-357.

[7] Hamilton, J. D., 1989. A new approach to the economic analysis of non-stationary time series and the business cycle, Econometrica **57**, 357-384.

[8] Johnsen, T. H., and J. B. Donaldson, 1985, The structure of intertemporal preferences under uncertainty and time consistent plans, Econometrica **53**, 1451-1458.

[9] Kandel, S., and R. F. Stambaugh, 1991. Asset returns and intertemporal prelerences, Journal of Monetary Economics **27**, 39-71.

[10] Kreps, D. M., and E. L. Porteus, 1978. Temporal Resolution of uncertainty and dynamic choice theory, Econometrica **46**, 185-200.

[11] Lucas, R. E. Jr., 1978, Asset prices in an exchange economy, Econometrica **46**, 1429-1445.

[12] Mehra, R. and E. C. Prescott, 1985, The equity premium ; A puzzle, Journal of Monetary Economics **15**, 145-162.

[13] ――― and ―――, 1984, Asset prices with non-stationary consumption, working paper (Graduate school of Business, Colccmbia University Press, New york).

[14] Poterba, J. A. and L. H. Summers, 1988 Mean reversion in stock pries : Evidence and implications, Journal of Financial Economics, **22**, 27-59.

[15] Pyndick, R, 1984, Risk, inflation and the stock market, American Economic Review **74**, 335-351.

[16] Selden, L, 1978, A new representation of preterences over 'certain × uncertain' consumption pairs ; The 'ordinal cetainty equivalent' hypothesis, Econometrica **46**, 1045-1060.

[17] Weil, P, 1989 The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle, Journal of Monetary Economics, **24**, 401-421.

[18] 工藤和久「国際資本市場の理論について(I)～(IV)」経済学論集　1989～1991年.