意思決定と情報の価値
——経済学への応用——

吉　住　昭　彦

The Value of Information in Decision Making: Its Applications to Economic Problems

Akihiko Yoshizumi

目　次

1．序　論

情報を入手することは，その人にとって利益となるであろうか。相手がいる場合には，それは相手の損失となるだろうか。また，ある人から別の人に情報を伝達するとき，それは双方にとって利益となるだろうか。このような問題は，情報の価値の問題という名称で総称される。そして，それに対する解答は，それが論じられる様々な文脈において異なってくるであろう。

本稿の目的は，情報の価値の理論において基本的かつ古典的とも言える以下の2つの結果を概観することによって，今後の自らの研究の一助とすることである。すなわち，

(1)　ライファ［7］に代表されるような，不確実性下における古典的な単独の意思決定問題において，追加情報は恒にプラスの価値を持つこと

および，

(2)　ゼロ和2人ゲームにおいて，一方のプレイヤーのみが追加情報を入手する場合，追加情報はそれを入手するプレイヤーの観点からすれば，常にプラスの価値を持つということ(1)

である。

通常の場合においては，情報の獲得はプラスの価値を持つであろうことが了解される。上記(1)の古典的意思決定問題において，情報がプラスの価値を持つことは広く知られている。意思決定主体は，情報を獲得するならばそれに応じて自らの行動を選択できる余地があるのだから，情報の獲得は彼にとって有利に作用することは明らかであろう。

しかし，競争相手が存在するようなゲーム理論的な状況においては，事態は簡単にはいかなくなる。まず不確実性2種類の区別を設けなくてはならなくなる。すなわち，全てのプレイヤーの利得に直接的に影響を与えるいわば共通の不確実性と，特定のプレイヤーの利得のみに直接影響を与えるいわば私的な不

確実性である。後者の場合にも当のプレイヤーの戦略の選択を通じて，他のプレイヤーの利得にまで間接的な影響が及ぶのである。例えば，寡占企業間で行なわれるゲームにおいて，需要に関する不確実性は共通の不確実性であるのに対して，個々の費用関数に関する不確実性は私的な不確実性であることになる。さらにその不確実性に関する情報の獲得の仕方についても，自分だけが獲得する場合（独占情報），両者ともに獲得する場合（共有情報），相手に知られずに自分だけが獲得する場合（秘密情報）などがある。そして実際に，相手との兼ね合いによっては，情報の獲得は必ずしも利益とはならない状況が報告されているのである。

経済学においては経済主体の利害が対立することが多いので，ゲーム理論的な状況が生じる。こうした局面における情報の価値の分析のために有益な枠組みを提出したのは，ハルサンニ［1］による不完全情報ゲームの概念である。この枠組みにおいて，ポンサール［4］は上記(2)の結果を示した。すなわち，2人の利得の和が一定であるようなケースにおいては，(1)の結果を拡張することができるのである。しかしその後，非ゼロ和ゲームにおいて，情報の価値がマイナスになるという，変則事態が生じ得ることが知られた。例えば，レヴァイン&ポンサール［2］は，そのようなゲームを構成することに成功した。

そしてポンサール［5］は，需要関数に不確実性が存在するようなクールノー型寡占市場を取り上げ，経済学的な文脈における情報の理論の応用に先鞭をつけたのである。このポンサールによるクールノー型モデルにおいては情報は各企業にプラスに作用することが示されたのに対して，酒井［9］は双方の費用関数に不確実性が存在するクールノール型複占モデルにおいて，情報の獲得がマイナスに作用する状況の存在を示した。さらに酒井［8］はポンサールのモデルにおいても，企業の危険回避的な行動が考慮されれば，情報の価値はマイナスになり得るということを強力に示唆している。以後，一連の文献において，情報の価値の理論は不完全競争市場の問題や生産物の差別化の問題などの

経済学固有の問題と密接に関連しながら，多様な展開を見せている。

本稿では，こうした研究の一つの土台とも言える結果(1)と(2)を少し立ち入って検討してみることにする。まず次節において，古典的意思決定問題を扱い，簡単な例示と平行しながら一般的な定式化を導入し，そして基本的な結果を示すことにする。第3節では，その結果がどのように2人ゼロ和ゲームの枠組みに拡張されるかを考察することにする。なおこの2つの結果に対する証明は，それぞれ数学付録の(B)と(C)に記すことにする。

2．意思決定問題における情報の価値

この節では，不確実性があり，かつ情報が不完全な下での意思決定問題を定式化して，そこにおける追加的情報およびその価値について定義を明確にしつつ，かつ最も基本的な結果ともいえる定理1を述べることにする。

いきなり一般的な定式化から入る前に，簡単な事例を考察しながら進ことが，問題の理解を容易にするものと思われる。そこで，次のような問題に直面している意思決定主体を考えよう(2)。

外見の同じ多数の壷がある。ただし，これらの壷は中味によって，s_1型とs_2型の2つの種類がある，ということを主体は知っている。すなわち，

s_1型 $\begin{cases} \text{赤玉} & 4\text{個} \\ \text{黒玉} & 6\text{個} \end{cases}$

s_2型 $\begin{cases} \text{赤玉} & 9\text{個} \\ \text{黒玉} & 1\text{個} \end{cases}$

である。今，この多数の壷から中味を見ずに無作為に一個の壷を選ぶ。主体はそれがs_1型の壷かs_2型の壷かを当てるのである。当たれば賞金を得て，はずれれば罰金を取られる。つまり，主体に可能な行動の全体は$A=\{a_1, a_2\}$,

a_1：「壷はs_1型である」と言う

a_2：「壷はs_2型である」と言う

であり，二つの状態$S=\{s_1, s_2\}$のどちらが生起したかに依存して，獲得する（もしくは失う）金額（ドル）が，

$$u(s_1, a_1)=40,\ u(s_1, a_2)=-5,$$

$$u(s_2, a_1)=-20,\ u(s_2, a_2)=100,$$

のように決められているとする。例えば壷がs_1型であるときに，それを当てれば40ドルを獲得することができるが，はずれれば5ドルを失うことになっている。

この場合の壷の無作為な選択のように，主体の意思とは無関係な選択のことを偶然手番と呼ぶ。主体の利得関数（一般的には効用関数）$u: S\times A\to \mathbb{R}$の形式は，主体の利得（効用）が主体自らの行動のみならず，偶然手番において決定された選択にも依存することを示している。意思決定問題において「不確実性が存在する」とは，主体の効用に影響を与えるような偶然手番が存在することを意味する。また以下では簡単化のために，主体が危険中立的であるかのように話を進めるが，もちろんここでの定式化は危険の回避および愛好を除外するものではない。つまり上に示された利得を獲得金額そのものではなく，獲得金額のフォン・イノマン＝モルゲンシュテルン効用と解釈することも可能である。

主体は壷が何型であるかを言う前に，以下の追加的な情報のいずれか一つを利用することができるものとする。すなわち，

E_0：追加的な観測をしない（無情報）

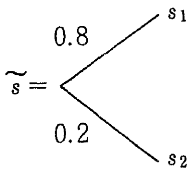
E_1：8ドルを支払い，選ばれた壷の中から無作為に玉を一個取り出すことができる。

E_*：25ドルを支払って，選ばれた壷の中の玉を全て取り出すことができる（完全情報）

である。さらに，主体はs_1型とs_2型の壷の比率について，当初，

$$p(s_1)=0.8,\quad p(s_2)=0.2$$

のような主観的な確率分布を持っているものとする。選ばれた壷の型を表わす確率変数を$\tilde{s}$とおけば,



である。さて，この主体にとって，E_0，E_1，E_2の中のどの情報を利用し，壷が何型であると言うのが合理的であろうか。

まず，追加的な情報を利用しない場合（つまりE_0を利用する場合）における主体の行動を考えよう。主体は獲得する金額の期待値を最大化すべく行動を選択する。すなわち,

$$(1)\qquad \max_{a\in A} Eu(\tilde{s},\ a)=\max_{a\in A}\sum_{s\in S} p(s)\,u(s,\ a)$$

である。各々の行動$a=a_1, a_2$について，期待利得を具体的に計算をしてみると,

$$Eu(\tilde{s},\ a_1)=0.8\times 40+0.2\times(-20)=28,$$

$$Eu(\tilde{s},\ a_2)=0.8\times(-5)+0.2\times 100=16$$

であるから，主体は行動a_1を選択し（「壷はs_1型である」と言い），その場合の期待利得は

$$(2)\qquad v(E_0)\equiv\max_{a\in A} Eu(\tilde{s},\ a)=Eu(\tilde{a},\ a_1)=28$$

である。

次に，追加的情報E_1を利用する場合を考えよう。一個の玉を取り出すという試行の結果として可能な事象の集合は$E_1=\{B,\ R\}$,

R：取り出した玉が赤玉である

B：取り出した玉が黒玉である

である。すなわち数学的には，追加的情報とは主体の持つ主観的な確率空間(における全事象)の一つの分割と考えることができるのである(3)。その分割の上の確率分布を主体は次のように計算することができる。

$$
\begin{aligned}
p(R) &= p(R \cap s_1) + p(R \cap s_2) \\
&= p(s_1)\,p(R \mid s_1) + p(s_2)\,p(R \mid s_2) \\
&= 0.8 \times 0.4 + 0.2 \times 0.9 = 0.5,
\end{aligned}
$$

$$p(B) = 1 - p(R) = 0.5.$$

そして仮りに結果がRであったとしよう。この場合，主体は以下の計算を通じて，選ばれた壷に関する確率分布を修正することができる。すなわち，

$$p(s_1 \mid R) = \frac{p(s_1 \cap R)}{p(R)} = \frac{p(s_1)\,p(R \mid s_1)}{p(R)} = \frac{0.8 \times 0.4}{0.5} = 0.64,$$

$$p(s_2 \mid R) = 1 - p(s_1 \mid R) = 1 - 0.64 = 0.36$$

である。したがって主体はこの修正された確率の下で，期待利得を最大化すべく，Rに応じた行動a^Rを選択するものと考えられる。すなわち，

$$\text{(3)} \quad \max_{a^R \in A} E[u(\tilde{s},\ a^R) \mid R] = \max_{a^R \in A} \sum_{s \in S} p(s \mid R)\,u(s,\ a^R)$$

である。ここにおいて，各々の行動a_1，a_2について，期待利得を具体的に計算してみると，

$$E[u(\tilde{s},\ a_1) \mid R] = 0.64 \times 40 + 0.36 \times (-20) = 18.4,$$

$$E[u(\tilde{s},\ a_2) \mid R] = 0.64 \times (-5) + 0.36 \times 100 \fallingdotseq 32.8$$

であるから，主体は行動a_2を選択する。つまり主体は赤玉を見るならば，それは「壷はs_1型である」というべきであることがわかる。そのときの期待利得は，

(4) $\max_{a^R \in A} E[u(\tilde{s}, a^R) \mid R] = E[u(\tilde{s}, a_2) \mid R] = 32.8$

である。まったく同様にして，試行の結果として事象Bが得られたときの最適な行動と利得が次のように計算できる。

(5) $\max_{a^B \in A} E[u(\tilde{s}, a^B) \mid B] = E[u(\tilde{s}, a_1) \mid B] = 37.6$，

つまり主体は黒玉を見るならば，「壷はs_2型である」と言うべきである。

以上２つの条件付きの最大化行動は，壷の型に関する確率分布が修正されている点を除けば，無情報下における行動(1)に等しいことがわかる。すなわち，意思決定問題における「無」情報とは，文字通り情報が皆無なのではなく，相対的な意味を持つに過ぎない。つまり，それ以降の追加的な情報を考察していく際の，一つの基準点の役割を果たすものである。主体が当初持っていた確率分布は，主体が何の情報も無く勝手に考えたというよりも，すでに何らかの試行を行なった結果から，それ以前の確率分布を修正したものであろう。

したがって以上を総合すると，追加情報E_1を利用するときの期待利得は，BとRの２つのケースに獲得される期待利得(4)と(5)の平均として与えられるはずであるから，

(6) $v(E_1) \equiv \sum_{e \in E} p(e) \max_{a \in A} \sum_{s \in S} p(s \mid e) u(s, a)$

$$= 0.5 \times 32.8 + 0.5 \times 37.6 = 35.2$$

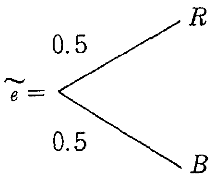
となる。これは確かに，先の無情報の場合に獲得される期待利得$v(E_0) = 28$を上回っている。そして，その差

(7) $EVI(E_1) \equiv v(E_1) - v(E_0) = 35.2 - 28 = 7.2$

を追加的情報E_1の持つ価値と考えることができる。この場合には，情報E_1の価

値はプラスである。しかし，8ドルを支払って情報E_1を入手するのは，合理的ではないことになる。そして一般的に，情報の持つ価値は常にプラスになるのかどうかという問題が生じるのである。

玉を一個取り出す試行の結果を表わす確率変数を$\tilde{e}$おくと，



である。すると上に見た主体の最大化行動に対して，次のような表現を与えることも可能であろう。すなわち，

$$(8)\quad v(E_2)=E\left[\max_{a\in A} E\left[u(\tilde{s},\ a)\ \middle|\ \tilde{e}\right]\right]$$

$$=\max_{a:E_1\to A} E\left[E\left[u(\tilde{s},\ a(\tilde{e}))\ \middle|\ \tilde{e}\right]\right]$$

$$=\max_{a:E_1\to A}\ \sum_{e\in E_1} p(e)\sum_{s\in S} p(s\mid e)\,u(s,\ a(e))$$

である。最後の2つの表現においては，各々の観測の結果に対して行動を対応させる関数$a(\cdot)$：$E_1\to A$を選択する問題となっている。これら(8)式の表現が(6)式と同値であることは明らかであろう。上の計算の通り，この関数の選択問題に対する解は

$$a(R)=a_2,\quad a(B)=a_1$$

である。

最後に完全情報E_*の場合を考えてみよう。すなわち，観測の結果として可能な事象が$E_*=\{s_1,\ s_2\}=S$の場合である。もちろん考えようによっては，一個目の玉が何で，2個目の玉が何で等々というようにさらに細かい分割を与えているとも考えられる。しかし主体の利得関数に影響する分割はSであり，それよ

りも細かい分割は，この主体の観点からすれば結局Sに等しいものであることは明らかであろう。すなわち，本稿において「情報が完全である」とは，追加的情報としてSもしくはSよりも細かい情報（一種の過剰情報）を主体が得ることを意味する。それは，主体の効用関数に相対的な概念である。反対に「情報が不完全である」とは，情報が完全ではないことを意味する。

完全情報E_*の場合には，明らかに

$$a(s_1)=a_1,\quad a(s_2)=a_2$$

が最適な行動である。そのときの期待利得は次のようになる。

$$(9)\quad v(E_*)=\sum_{s\in S} p(s)\max_{a\in A}\sum_{s'\in S} p(s'|s)u(s',a)$$

$$=\sum_{s\in S} p(s)\max_{a\in A} u(s,a)$$

$$=0.8\times 40+0.2\times 100=52$$

そして完全情報E_2の価値は

$$(10)\quad EVPI\equiv EVI(E_*)=v(E_*)-v(E_0)=52-28=24$$

である。この例では，完全情報の価値は先の追加的情報E_1の価値を上回っていることがわかる。完全情報の価値は，あらゆる追加的情報の価値の上限を決めるであろうことが推測されるのである。ただしこの場合には，完全情報の入手は25ドルを支払うには値しない。

以上の考察から，この主体は無情報の下において「壷はs_1型である」と言うべきであることが判明した。そして追加的情報の価値について，一般に以下の定理が成立することが明らかであろう。

定理１　任意の追加的情報Eに対して，次の不等式がなりたつ。

$$0 \leqq EVI(E) \leqq EVIP$$

すなわち，不確実性下の意思決定問題において，情報の価値は常にプラスであり，完全情報の価値がその上限を決める。証明については，数学付録(B)を参照せよ。

3．2人ゼロ和ゲームへの拡張

この節ではポンサール［4］に従って，2人ゼロ和ゲームの文脈において情報の価値の理論を考察する。そして以下に見るように前節の定理1は，2人ゼロ和ゲームの場合において以下の定理2として拡張できることがわかる。

ここで考えるゲームは次のようなものである。一つの偶然手番および2人の（利得関数を有する）プレイヤーI，IIを考える。偶然手番において可能な結果の集合をS，2人のプレイヤーI，IIの純戦略の集合をそれぞれA，Bとし，利得関数をそれぞれ$u : S \times A \times B \to \mathbb{R}$，$v : S \times A \times B \to \mathbb{R}$とする。

さて，まず状態の集合Sの中から偶然手番により一つの状態$s \in S$が選ばれる。プレイヤーIはこの状態sに関する追加的情報Eを受け取り（しかしプレイヤーIIの行動は知らずに）自分の行動を決定する。他方プレイヤーIIは追加的な情報は受け取らないが，プレイヤーIが追加的情報Eを受け取るということは知って（しかしプレイヤーIの行動は知らずに）自分の行動を決定する。2人のプレイヤーの利得は各々の状態において，ゼロ和であるものとする。すなわち，各状態$s \in S$に対して，その状態sに応じた定数$c(s) \in \mathbb{R}$があり，

$$\forall i \in A,\ \forall j \in B,\ u(s, i, j) + v(s, i, j) = c(s)$$

が成り立つものとする。

ゲームの解としては，ミニ・マックス解を考えることにする。プレイヤーIの混合戦略の集合を

$$X \equiv \left\{ x = (x_i^e)_{i \in A, e \in E} \;\middle|\; \forall e \in E (\forall i \in A,\ x_i^e \geqq 0) \wedge \left(\sum_{i \in A} x_i^e = 1 \right) \right\}$$

とし，プレイヤーIIの混合戦略の集合を

$$Y \equiv \left\{ y = (y_j)_{j \in B} \;\middle|\; (\forall j \in B,\ y_j \geqq 0) \wedge \left(\sum_{j \in B} y_j = 1 \right) \right\}$$

とする。すなわち，プレイヤーＩが混合戦略$(x_i^e) \in X$ を選択するときには，

$$p(i \mid e) = x_i^e \quad (e \in E,\ i \in A)$$

であり，プレイヤーIIが混合戦略$(y_j) \in Y$ を選択するときには，

$$p(j) = y_j \quad (j \in B)$$

である。

プレイヤーＩの入手する追加的情報Eに応じて定まるゲームの値を$\boldsymbol{v}(E)$と書くことにする。ミニ・マックス定理によって

(11)
$$v(E) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \sum_{s \in S} \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} p(s \cap i \cap j) u(s, i, j)$$
$$= \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \sum_{s \in S} \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} p(s \cap i \cap j) u(s, i, j)$$

である。$\boldsymbol{v}(E)$は均衡においてプレイヤーＩが獲得する期待利得である。とくに，最後の項は以下のように変形できる。すなわち，

$$p(s \cap i \cap j) = \sum_{e \in E} p(e \cap s \cap i \cap j \cap)$$
$$= \sum_{e \in E} p(e \cap s) p(i \mid e \cap s) p(j \mid e \cap s \cap i)$$
$$= \sum_{e \in E} p(e) p(s \mid e) p(i \mid e) p(j)$$
$$= \sum_{e \in E} p(e) p(s \mid e) x_i^e y_j$$

であることを利用して，次式を得る。

(12) $$v(E)=\min_{y\in Y}\sum_{e\in E}p(e)\max_{x^e}\sum_{s\in S}\sum_{i\in A}\sum_{j\in B}p(s\mid e)x_i^e y_j u(s,i,j)$$

$$=\min_{y\in Y}\sum_{e\in E}p(e)\max_{i\in A}\sum_{s\in S}\sum_{j\in B}p(s\mid e)y_j u(s,i,j)$$

そして前節と同様に，無情報E_0におけるゲームの値$v(E_0)$と上式との差

(13) $$EVI(E)\equiv v(E)-v(E_0)$$

をプレイヤーIにとっての追加的情報Eの価値と考えることにする。特に完全情報E_*の価値を，

(14) $$EVPI\equiv EVI(E_*)=v(E_*)-v(E_0)$$

と書くのも前節と同様である。このとき，次の定理が成立する。

定理2　（ポンサール）

任意の追加的情報Eに対して，次式が成立する。

$$0\leqq EVI(E)\leqq EVPI$$

すなわち，偶然手番をふくむ2人ゼロ和ゲームにおいて，一方のプレイヤーが追加的な情報を入手し，他方のプレイヤーや追加的な情報を入手しないとき，情報を入手したプレイヤーにとって情報の価値は常にプラスとなる。かつ完全情報を入手する場合に，彼にとっての情報の価値は最大となる。つまり前節の意思決定問題の文脈における定理1と同様の定理が，2人ゼロ和ゲームの場合にも成立する。その証明については，数学付録(C)を参照せよ。

4．経済問題への応用――結語にかえて――

最後にこうした枠組みがどのように経済問題に応用されるかということ，および非ゼロ和ゲームにおいては変則事態が生じる（追加情報の価値がマイナスになる）ことを例示するために次のクールノー型複占モデルを簡単に取り上げてみよう[(4)]。

同質財を生産する２つの企業($i=1,\ 2$)があり，企業iの産出量をx_iとする。両企業は次の線形の市場需要曲線に直面するものとする。

(15) $$p=\tilde{a}-(x_1+x_2)$$

需要関数のパラメータ$\tilde{a}$は確率変数であり，それは偶然手番によって決定される。企業には共通の不確実性が存在していることになる。$\tilde{a}$の実現値aの取り得る範囲を表わす集合をAとする。企業iの利潤Π_iはこの実現値a，および両企業の産出量x_1，x_2に依存して次式のように決まる。

(16) $$\Pi i(a,\ x_1,\ x_2)=p\,x_i=(a-x_1-x_2)\,x_i$$

また各企業は危険回避者であり，フォン・ノイマン＝モルゲンシュテルン効用U_iを持つことにする($i=1,\ 2$)。したがって，各企業が利潤から得る期待効用$V_i(a,\ x_1,\ x_2)$は次のようになる。

(17) $$V_i(a,\ x_1,\ x_2)\equiv U_i(\Pi_i(a,\ x_1,\ x_2))$$
$$=U_i((a-x_1-x_2)\,x_i) \qquad (i=1,\ 2)$$

企業iは，需要パラメータの実現値aに関する追加情報E_iを入手することにする($i=1,\ 2$)。すると，企業iの行動は，各$e_i\in E_i$に対して産出量$x_i(e_i)$を対応させるような関数$x_i: E_i\rightarrow \mathbb{R}$によって記述される。

この複占市場における均衡としては，以下のようなクールノー＝ナッシュ均衡を考える。たとえば企業１の立場から考えてみよう。企業１は追加情報E_1を

入手し，かつ相手企業が追加情報E_2を入手することを知っている。企業1が相手の行動$x_2(\cdot)$を所与として，自分の期待効用を最大化するように$x_1(\cdot)$を決定するならば，次の式に従わなければならない。

(18) $$\max_{x_1(\cdot)} EV(\widetilde{a},\ x_1(\widetilde{e_1}),\ x_2(\widetilde{e_2}))$$
$$=\max_{x_1(\cdot)} \sum_{e_1\in E_1}\sum_{e_2\in E_2}\sum_{a\in A} p(a\cap e_1\cap e_2)V(a,\ x_1(e_1),x_2(e_2))$$

そこで，$(x_1^*(\cdot),\ x_2^*(\cdot))$がクールノー＝ナッシュ均衡であることを，次式の成立をもって定義することができる。

(19) $\forall x_1(\cdot): E_1\rightarrow \mathbb{R}$
$$EV(\widetilde{a},x_1^*(\widetilde{e_1}),x_2^*(\widetilde{e_2}))\geqq EV(\widetilde{a},x_1(\widetilde{e_1}),x_2^*(\widetilde{e_2}))$$
$\forall x_2(\cdot): E_2\rightarrow \mathbb{R}$
$$EV(\widetilde{a},x_1^*(\widetilde{e_1}),x_2^*(\widetilde{e_2}))\geqq EV(\widetilde{a},x_1^*(\widetilde{e_1}),x_2(\widetilde{e_2}))$$

この条件は以下のように少し書き直すことができる。すなわち(18)式において，
$p(a\cap e_1\cap e_2)=p(e_1)p(e_2|e_1)p(a|e_1\cap e_2)$ なので，

$$\max_{x_1(\cdot)} EV(\widetilde{a},\ x_1(\widetilde{e_1}),\ x_2(\widetilde{e_2}))$$

$$=\max_{x_1(\cdot)} \sum_{e_1\in E_1} p(e_1)\sum_{e_2\in E_2}\sum_{a\in A} p(e_2\mid e_1)p(a\mid e_1\cap e_2)V(a,x_1(e_1),x_2(e_2))$$

$$=\sum_{e_1\in E_1} p(e_1)\max_{x_1(e_1)}\sum_{e_2\in E_2}\sum_{a\in A} p(e_2\mid e_1)p(a\mid e_1\cap e_2)V(a,x_1(e_1),x_2(e_2))$$

$$=\sum_{e_1\in E_1} p(e_1)\max_{x_1(e_1)} E[V(\widetilde{a},\ x_1(e_1),\ x_2(\widetilde{e_2}))\mid e_1]$$

$$=E[\max_{x_1(\widetilde{e_1})} E[V(\widetilde{a},\ x_1(\widetilde{e_1}),\ x_2(\widetilde{e_2}))\mid \widetilde{e_1}]]$$

すなわち，企業1は各状態$e_1 \in E_1$に応じて，

$$\max_{x_1(e_1)} E[V(\tilde{a}, x_1(e_1), x_2(\tilde{e}_2)) \mid e_1]$$

を満たすように行動$x_1(e_1)$を決定している。したがって，クールノー＝ナッシュ均衡の条件⒆は，

$$(20) \quad \begin{aligned} &\forall e_1 \in E_1 \quad x_1^*(e_1) = arg \max_{x_1} E[V(\tilde{a}, x_1, x_2^*(\tilde{e}_2)) \mid e_1] \\ &\forall e_2 \in E_2 \quad x_2^*(e_2) = arg \max_{x_2} E[V(\tilde{a}, x_1^*(\tilde{e}_1), x_2) \mid e_2] \end{aligned}$$

と書くこともできる。

以上のように，両企業が獲得する追加情報E_1, E_2に応じてゲームが定められ，そのクールノー＝ナッシュ均衡として両企業の均衡産出量水準，$x_1^*: E_1 \to \mathbb{R}$，$x_2^*: E_2 \to \mathbb{R}$が決定される。ここに$\eta = (E_1, E_2)$をこの複占モデルにおける情報構造と呼ぶ。そして情報構造ηの下で各企業が獲得する期待効用は，その均衡産出量を⒅式に代入することによって求められる。

このようにして様々な情報構造ηが企業の期待効用に及ぼす影響を分析することができるのである。多くの情報構造の中でも，とりわけ次のものが分析の対象として興味深いであろう。

①$\eta =$ (E_0, E_0)：両企業ともに無情報である
②$\eta =$ (E_*, E_0)：企業1は完全情報を入手するが，企業2は無情報である
③$\eta =$ (E_*, E_*)：両企業ともに完全情報を入手する

前節まで概観してきた枠組みは，例えば以上のような形で，経済問題に応用することができる。これまで，不確実性下のクールノー複占市場における情報の価値は，専ら両企業が危険中立的であるという想定の下で，分析されてきた。その場合には完全情報の価値はおおかたプラスになることが知られていた。と

ころが意外なことに，両企業が危険回避的行動をとるのであれば，完全情報の価値は両企業にとってマイナスになり得ることが示されるのである。この結果が，このモデルのどの想定にどういう形で依存しているのかを解明することは今後の課題の一つとなるだろう。

数学付録

(A) 凹化について，

(B)と(C)で行なう定理1と2の証明のために，関数の凹化（concavification）という概念を定義しておくことにする。すなわち，

定義1　$X \subset \mathbb{R}^l$ を凸集合，$f: x \to \mathbb{R}$ とする。このとき，各点 $x \in X$ に対して

$$cav\ f(x) = inf\left\{ g(x) \,\middle|\, (g: X \to \mathbb{R}\ \text{は凹関数}) \wedge (g \geqq f) \right\}$$

と定められる $cav\,f: x \to \mathbb{R}$ のことを，f の凹化と呼ぶ。

である。凹化の名称の由来でもある，その最も基本的な性質は次のものである。

命題1　$cav\,f$ は凹関数であり，かつ $cav\,f \geqq f$ を満たす。すなわち，$cav\,f$ は f よりも大きい最小の凹関数である。

証明：　任意に x，$y \in X$，$\theta \in [0,\ 1]$ を選ぶ。また，

$$G \equiv \left\{ g: X \to \mathbb{R} \,\middle|\, (g\ \text{は凹関数}) \wedge (g \geqq f) \right\}$$

とおく。任意に $g \in G$ をとる。このとき，

$$cav\ f(x) \leqq g(x), \quad cav\ f(y) \leqq g(y),$$

したがって，

$$(1-\theta)\, cav\ f(x) + \theta\, cav\ f(y) \leqq (1-\theta)\, g(x) + \theta\, g(y)$$

$$\leqq g((1-\theta)\,x + \theta\,(y))$$

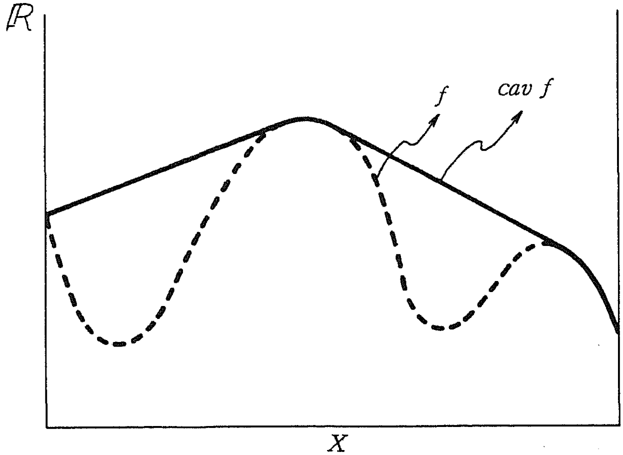
これが任意の$g \in G$に対して成り立つので，

$$
\begin{aligned}
(1-\theta)\, cav\ f(x) + \theta\, cav\ g(y) &\leqq inf\ g((1-\theta)x + \theta y) \\
&\leqq cav\ f((1-\theta)x + \theta y)
\end{aligned}
$$

である。□

このことを図示すると，図１のようになる。

図１　関数の凹化



そして，以下の定理の証明のために次の定義をしておく。

定義２　$x \subset \mathbb{R}^{l}$ とし，$Y \subset X$を凸集合，$f: X \to \mathbb{R}$とする。このとき，各点$x \in X$に対して

$$
\underset{Y}{cav}\ f(x) = \begin{cases} f(x) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ x \in X \setminus Y \\ cav\ (f|_{Y})(x) & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ x \in Y \end{cases}
$$

と定められる$\underset{Y}{cav}\ f$のことを，fのY上における凹化と呼ぶ。

(B)　定理１の証明。

ここでは，ポンサール［３］の手順に従って，定理１を証明していく。まず

次のような関数を定義することから始める。すなわち，

$$\Lambda=\left\{(p_s)_{s\in S}\ \middle|\ (\forall s\in S,\ p_s\geq 0)\wedge\sum_{s\in S}p_s=1\right\}$$

とΛを定め，各$p=p=(p_s)s\in\Lambda$に対して，

$$u^*(p)=\max_{a\in A}\ \sum_{s\in S}\ p_s u(a,\ s)$$

と$u^*:\Lambda\rightarrow\mathbb{R}$を定める。$\Lambda$は数学的に言えば基本単体であり，分割$S$上の可能な確率分布の全体を表わしている。$u^*$は，$S$上の様々な確率分布に対して，その分布の下で（他の追加的な情報を利用せずに）効用を最大化したときの値を対応させている。したがって$p(s)\in\Lambda$に対しては，

$$v(E_0)=u^*((p(s))_{s\in S})$$

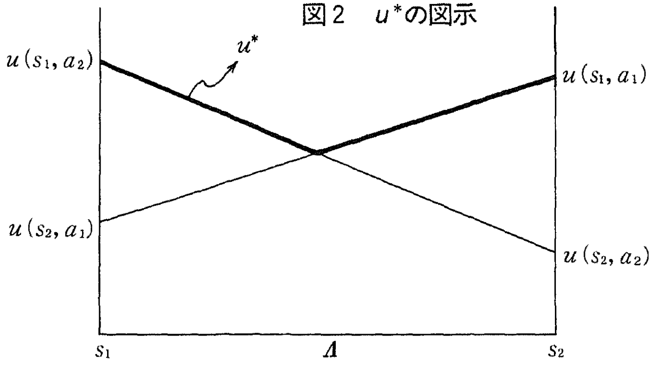
を与える。またEを任意の追加的情報とするとき，Eの各々の結果$e\in E$の下で修正される確率分布$p(s|e)$に基づいた最大化の値$u^*((\mathrm{p}(\mathrm{s}|\mathrm{e}))_{s\in S}$の平均が$v(E)$であったから，

$$v(E)=\sum_{e\in E}\ p(e)u^*((p(s\,|\,e))_{s\in S})$$

が成立していることに留意せよ。

$S=\{s_1,\ s_2\}$，$A=\{a_1,\ a_2\}$の場合にu^*を図示してみると，図２のようになる。図からも明らかなように，関数u^*の性質として次のことが導かれる。

図２　u^*の図示



補助定理1.　$u^*:\Delta\to\mathbb{R}$は凸関数である。

証明：　$p^1=(p^1s)$，$p^2=(p^2s)\in\Delta$および$\theta\in[0,\ 1]$を任意にとる。このとき，

$$u^*((1-\theta)p^1+\theta p^2)=\max_{a\in A}\sum_{s\in S}((1-\theta)p^1_s+\theta p^2_s)u(a,s)$$

$$=\sum_{s\in S}((1-\theta)p^1_s+\theta p^2_s)u(a^*,s)$$

$$=(1-\theta)\sum_{s\in S}p^1_s u(a^*,s)+\theta\sum_{s\in S}p^2_s u(a^*,s)$$

$$\leqq\max_a(1-\theta)\sum_{s\in S}p^1_s u(a^*,s)+\max_a\theta\sum_{s\in S}p^2_s u(a^*,s)$$

$$=(1-\theta)u^*(p^1)+\theta u^*(p^2)$$

が成り立つ。□

このことから直ちに，情報の価値が常にプラスであることが導かれる。

補助定理2.　任意の追加的情報Eに対して，$EVI(E)\geqq0$である。

証明：　u^*は凸であるから，

$$EVI(E)=\sum_{e\in E}p(e)u^*((p(s\mid e))_{s\in S})-u^*((p(s))_{s\in S})$$

$$\geqq u^*(\sum_{e\in E}p(e)(p(s\mid e))_{s\in S})-u^*((p(s)_{s\in S})$$

$$=u^*((p(s))_{s\quad S})-u^*((p(s))_{s\in S})=0$$

が成り立つ。□

他方，凹化の性質から次のことが導かれる。

補助定理３． Eを追加的情報とし，$P_E \equiv co\ \{p(s|e)\}_{e\in E}$ と定める。

このとき

$$EVI(E) \leqq \underset{P_E}{cav}\ u^*((p(s))_{s\in S}) - u^*((p(s))_{s\in S}$$

が成り立つ。

証明：　P_E上で $\underset{P_E}{cav}\ u^* \geqq u^*$であるから，

$$\sum_{e\in E} p(e) u^*((p(s|e))_{s\in S}) \leqq \sum_{e\in E} p(e)\ \ cav\ u^*((p(s|e))_{s\in S}$$

$\underset{P_E}{cav}\ u^*$ は凹関数だから，

$$\leqq \underset{P_E}{cav}\ u^*(\sum_{e\in E} p(e)(p(s|e))_{s\in S}$$

$$= \underset{P_E}{cav}\ u^*((p(s))_{s\in S})$$

が成り立つ。□

最後に，完全情報の価値について，以下のことが成立する。

補助定理４． $EVPI = cav\ u^*((p(s))_{s\in S}) - u^*((P(s))_{s\in S})$

証明：　各$p\in \Lambda$に対して，

$$u^{\circ}(p) \equiv \sum_{s\in S} p_s \max_{a\in A} u(s, a)$$

と$u^0 : \Lambda \to \mathbb{R}$を定めると，$\Lambda$上で$u^0 \geqq u^*$であり，かつ$u^0$は凹関数なので，

$$u^{\circ} \geqq cav\ u^*,$$

したがって，

$$u^{\circ}((p(s))_{s\in S}) - u^*((p(s))_{s\in S}) \geqq cav\ u^*((p(s))_{s\in S}) - u^*((p(s))_{s\in S})$$

他方，$u^0((p(s))_{s\in S}) - u^*((p(s))_{s\in S}) = EVPI$であるから，補助定理３により，

$$u^{\circ}((p(s))_{s\in S}) - u^{*}((p(s))_{s\in S}) \leqq cav\ u^{*}((p(s)_{s\in S}) - u^{*}((p(s))_{s\in S})$$

したがって，補助定理 4 の主張が成り立つ。□

以上により，定理 1 は証明された。補助定理 4 は完全情報の価値について，すなわち情報の価値の上限について，数学的な表現を与えていることに留意せよ。

(C) 定理 2 の証明

定理 2 の証明は定理 1 とほとんど同じである。まずΛを同じように定義し，そしてここでは，関数族$\{u^{*}_{y} : \Lambda \to \mathbb{R}\}_{y \in Y}$ を，各 $y \in Y$ および各 $p \in \Lambda$ に対して，

$$u^{*}_{y}(p) = \max_{i \in A} \sum_{s \in S} \sum_{j \in B} p_s y_j u(s, i, j)$$

と定義する。このとき，追加的情報Eに応じるゲーム値は

$$v(E) = \min_{y \in Y} \sum_{e \in E} p(e) u^{*}_{y}((p(s \mid e))_{s \in S})$$

と表現される。とくに，無情報と完全情報について

$$v(E_0) = \min_{y \in Y} u^{*}_{y}((p(s))_{s \in S})$$

$$v(E_{*}) = \min_{y \in Y} \sum_{s \in S} p(s) \max_{i \in A} \sum_{j \in B} y_j u(s, i, j)$$

である。ここで，u^{*}_{y}が凹関数であることから，$v(E_0) \leqq v(E^{*})$がわかる。他方，

$$v(E_{*}) = \min_{y \in Y} cav\ u^{*}_{y}((p(s))_{s \in S}) \geqq v(E)$$

であることが，補助定理 3 と 4 と同様にして示される。

注

* 本稿作成にあたって，筆者は酒井泰弘助教授（筑波大学）から多くの貴重な

助言をいただいた。ここに記して謝意を表すことにしたい。もちろん，有り得べき誤謬はすべて筆者のみの責任である。

(1) 偶然手番をふくむ2人ゼロ和ゲームにおける結果は，ポンサール［4］およびポンサール&ザミア［6］による。また偶然手番を含まない2人ゼロ和ゲームにおける結果については，鈴木［11］を参照せよ。

(2) ライファ［7］の1頁以下の例を用いた。

(3) これと同様のやり方で，無情報E_0を記述するなら，主体の持つ確率空間を$(\Omega, \mathscr{B}, p)$とするとき，$E_0 = \{\Omega\}$ということになる。

(4) 以下のモデルは，酒井&吉住［10］に基づいている。

参考文献

1．Harsanyi, J. C., "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players," Parts I-III, *Management Science* **14**(1967-1968), 159-182, 320-334, 486-502.

2．Levine, P. and Ponssard, J. P., "The Values of Information in Some Nonzero-Sum Games," *Int. J. of Game Theory* **6**(1977), 221-229.

3．Ponssard, J. P., "A Note on Information Value Theory for Experiments Defined in Extensive Form," *Management Science* **22**(1975), 449-454.

4．———, "On the Concept of the Value of Information in Competitive Situations," *Management Science* **22**(1976), 739-747.

5．———, "The Strategic Role of Information on the Demand Function in an Oligopolistic Market," *Management Science* **25**(1979), 243-250.

6．———, and Zamir, S., "Zero-Sum Sequential Games with Incomplete Information," *Int. J. of Game Theory* **2**(1973), 99-107.

7．Raiffa, H., *Decision Analysis : Introductory Lectures on Choices under Uncertainty,* Addison-Wesley, 1967（宮沢光一・平館道子訳『決定分析入門：不確実性下の選択問題』東洋経済新報社，1972年)。

8．酒井泰弘「複占市場における情報の役割――需要不確実性のケース――」『筑波大学経済学論集』第14巻（1984年)，1頁-29頁。

9 . Sakai, Y., "The Value of Information in a Simple Duopoly Model," *J. Econ. Theory* **36**(1985), 36-54.

10. Sakai, Y. and Yoshizumi, A., "Risk Aversion and Information Transmission in a Duopolistic Market," 1988年10月，理論計量経済学会にて発表予定。

11. 鈴木光男『ゲーム理論入門』共立出版，1981年。