可算モデルの個数が有限となる理論の研究

(課題番号 11640100)

平成11年度〜平成12年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))
研究成果報告書

平成13年3月

研究代表者 坪 井 明 人
(筑波大学数学系助教授)

可算モデルの個数が有限となる理論の研究

(課題番号 11640100)

平成11年度～平成12年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))
研究成果報告書

平成13年3月

研究代表者 坪 井 明 人
(筑波大学数学系助教授)

は し が き

1階述語論理の表現能力を調べることはモデル理論において非常に重要な課題の一つである．Löwenheim-Skolemの定理によれば，無限モデルを持つ理論は（その言語の濃度以上の）各無限濃度にモデルを持つ．しかし可算濃度に限っても，多くの理論においてモデルは一つに限定されない．

本課題では可算モデルが一つに限定にされない場合で特にその同型を除いた個数が有限になる理論の研究を行った．これは具体的にはモデル理論に残された難問の一つであるLachlanの予想と密接に関係している．実際の研究においては，モデル理論の専門家だけでなく多くの数理論理学の専門家の協力を得て行われた．

本報告書は特に強い意味でのLachlan予想「単純理論は可算モデルの個数が１つまたは無限個である」の解決に寄与するであろうと思われる研究分担者，研究協力者の研究成果をまとめたものである．

研究組織　研究代表者： 坪井明人（筑波大学数学系助教授）

研究分担者： 本橋信義（筑波大学数学系教授）

研究分担者： 塩谷真弘（筑波大学数学系講師）

研究分担者： 西村泰一（筑波大学数学系講師）

研究分担者： 塚田信高（筑波大学数学系助手）

研究協力者： 池田宏一郎（豊田高専）

研究協力者： 板井昌典（東海大学）

研究協力者： 岡本圭史（早稲田大学）

研究協力者： 桔梗宏孝 (東海大学)

研究協力者： 田中克己（岡山大学）

研究協力者： 福崎賢治（鹿児島国際大学）

研究協力者： Byunghan Kim　(MIT)

研究協力者： Francis Oger　(University of Paris VII)

研究協力者： Frank Wagner　(Universite Lyon-1)

研究経費

平成１１年度 ２，１００千円

平成１２年度 １，７００千円

計　　　　　 ３，８００千円

研究発表 (本研究と密接に関係のあるものを抜粋)

1. 学会誌等
   (a) Akito Tsuboi, Random Amalgamation of Simple Theories, Math. Log. Quart. 47 (2001) 1, 45-50.
   (b) Akito Tsuboi, On interpretability of almost linear orderings, Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. 39, No. 3 (1998) (appeared in 2000 spring.), 325-331. joint work with Kentaro Wakai.
   (c) Masahiro Shioya, Generating the club filter on $P_\kappa\lambda$, Top. Appl., to appear.
   (d) Masahiro Shioya, Splitting $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ into maximally many stationary sets, Israel Journal of Mathematics 114 (1999) 347-357.
   (e) Masahiro Shioya, Partition properties of subsets of $\mathcal{P}_\kappa\lambda$. Fund. Math. 161(1999), no. 3, 325–329.
   (f) Hirokazu Nishimura, Supersmooth topoi, International Journal of Theoretical Physics, 39 (2000), 1217-1227.
   (g) Nobutaka Tsukada, An ultrapower which does not preserve the truth of a Π_2-sentence, Tsukuba Journal of Mathematics, vol. 23 no. 2 (1999), 225-228.
2. 口頭発表
   (a) 坪井明人, 理論の融合について (On Amalgamation of Theories), 「モデル理論とその応用」研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2000 年 11 月 14 日.
   (b) 坪井明人, Forking 理論, 「LSS2000」研究集会, 東海大学山中湖セミナーハウス, 2000 年 8 月 7 日- 10 日
   (c) 坪井明人, ω の implicit definability について,「モデル理論の最近の話題」研究集会, 岡山大学理学部数学科 2000 年 2 月 20 日-22 日.
   (d) Akito Tsuboi, On conjectures of complete theory with finitely many countable models, The 7th Asian Logic Conference, His-Tou, Taiwan, June 6-10, 1999.
   (e) Masahiro Shioya, Partitioning pairs of uncountable sets, Logic Colloquium 2000, 2000/7/24.
   (f) Masahiro Shioya, Partitioning pairs of uncountable sets Shelah meeting, 2000/9/3.
   (g) Masahiro Shioya, Nonreflecting stationary sets, 数解研集会, 京都大学数理解析研究所, 2000 年 11 月 15 日.
   (h) Nobutaka Tsukada, A real vector space which has a base but which has no well-ordable one, The 33rd MLG meetijng at Echigo-Yuzawa, January 10-13, 2000.

研究成果 ● 自然数の理論の可算モデルに関する次の予想を研究した．

予想： M を一階ペアノ公理の超準可算モデルとする．通常の自然数の部分 ω はその部分モデルになっている．しかし ω を implicit に定義する低い階層の論理式 φ は存在しない．

いくつか，注意をしておく必要がある．ペアノ公理は帰納法をすべて含んでいるので，1 階論理式 $\psi(x)$ で ψ の解集合が ω に一致するものはない．すなわち，通常の意味で ω は定義可能集合にはならない．われわれは定義可能性の概念を少し拡大した．すなわち，2 階の変数 X をもつ論理式 $\varphi(X)$ が ω を implicit に定義するとは，集合 ω が $\varphi(X)$ のただひとつの解になっていることと定義した．われわれは，単純な Σ_3-論理式という概念を導入して次を得た：

結果： ω を implicit に定義する単純な Σ_3-論理式はない．

ここで上の論理式のクラスは，X が関数で閉じているという形の主張はすべて含む大きなクラスである．

● 単純理論に関する融合を研究した．ω-安定な二つの理論の共通拡大で ω-安定なものを決して持たない場合があることはよく知られている．(同じ理論のクラスに属する共通拡大を融合とよぶ.) そこで，理論のクラスを拡大して，単純理論に対して融合が可能かどうかを考察し次を得た：

結果： T_1 と T_2 を二つの理論として，$L(T_1) \cap L(T_2) = \emptyset$ とする．ともに $\exists^\infty$-限量記号を消去し，いずれか一方は代数閉包が自明になっていれば，融合が存在する．

また，単純で低い階層 (low) の理論についても融合が存在することを上と同様の仮定のもとに証明した．

詳細は「研究成果の詳細」にある．

研究集会の記録 （本補助金の援助で開催した研究集会）

1. 「モデル理論の最近の話題」研究集会
   2000 年 2 月 20 ～ 2 月 22 日, 岡山大学理学部数学科.
2. 「LSS2000」研究集会
   2000 年 8 月 7 日～ 8 月 10 日，東海大学山中湖セミナーハウス．
3. 「自由群とロジック」小研究集会
   － F. Oger 氏とのディスカッション －
   2000 年 9 月 18 日～ 9 月 22 日，筑波大学数学系
4. 「Generic Structure に関する研究」研究集会
   20001 年 2 月 16 日～ 2 月 19 日，鹿児島大学理学部

研究成果詳細と関連項目

Forking 理論

坪井明人

2000年8月7日〜8月10日
東海大学山中湖セミナーハウス

Abstract

本講演では，安定性と単純性の基本的事項を解説します．特に重要なことは，これら安定性または単純性の条件のもとに，抽象的な（forking による）独立性の概念が定義されることです．重要な部分は Shelah 氏，Kim 氏および Pillay 氏によって開発されたものです．

1　第1章

1.1　基本事項

一般に数学を表現するのに必要な記号の集合（定数記号，関数記号，述語記号）を <u>言語</u> という．例えば，群の言語は単位元を表わす定数記号 e, 群演算を表わす2変数関数記号 $*\cdot*$, 逆元を対応させる関数ための1変数関数記号 $*^{-1}$ からなる．ここで $*$ はそこに何かを代入できることを示している．

しかし，我々の立場は，もっと抽象的である．すなわち，最初に一つの単なる記号の集合としての言語を与え，その言語の具現化（意味を与えること）としての構造を考えるという立場をとる．

(*) 言語は（高々）可算のものしか扱わない．大抵のことは，少し頑張れば，可算でなくてもできる．でも表現が面倒になったりするので，とりあえずここでは可算です．

Definition 1　（構造）$L=\{c_i : i<\alpha\}\cup\{F_i : i<\beta\}\cup\{P_i : i<\gamma\}$ を一つの言語とする．ただし，c_i は定数記号，F_i は m_i 変数の関数記号，P_i は n_i 変数述語記号とする．次の条件を満たす対

$$(M;\{c_i^M\}_{i<\alpha},\{F_i^M\}_{i<\beta},\{P_i^M\}_{i<\gamma})$$

を一つの <u>L-構造</u> とよぶ：

1. $M\neq\emptyset$
2. $c_i^M\in M$ $(i<\alpha)$
3. $F_i^M : M^{m_i}\to M$ $(i<\beta)$
4. $P_i^M\subset M^{n_i}$ $(i<\gamma)$

c_i^M を定数記号 c_i の M における解釈とよぶ．同様に F_i^M は関数記号 F_i の解釈，P_i^M を述語記号 P_i の解釈とよぶ．M を上の構造のユニバース（領域）とよぶ．誤解のない場合は，対 $(M;\{c_i^M\}_{i<\alpha},\{F_i^M\}_{i<\beta},\{P_i^M\}_{i<\gamma})$ をかく代わりに単に M とかいて，構造全体を表わすことが多い．

群 G の部分群 H とは，単位元を含み，演算（積と逆元）で閉じた部分集合であった．同様の考えによって，L-構造 M の <u>部分構造</u> N とは，

- 定数記号の解釈をすべて含み

- 関数記号の解釈で閉じている

部分集合のことと定義する．部分構造 N は自然に（制限により）L-構造になる．

言語 L が与えられると，言語と変数記号（x,y,...）を論理記号（$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \forall, \exists$）でつないで（１階）$L$-論理式を作ることができる．論理式とは命題と考えてよい．例えば，$x = y$, $\forall x \exists y(x \cdot y = e)$ は群の言語の論理式である．前者での変数 x, y と後者での変数 x, y は役割が違う．前者のようにそこに代入させることが可能な形の変数を 自由変数，後者のような変数（$\forall$ や $\exists$ がくっついている変数）を 束縛変数 という．自由変数のない論理式を 閉論理式 という．L-閉論理式 φ は与えられた L-構造 M で成立するかどうかが自然に決まる．M で φ が成立するとき，$M \models \varphi$ とかく．$N \subset M$ を部分 L-構造とする．N が M の 基本部分 L-構造 (elementary substructure) であるとは，任意の L-論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$（自由変数 $x_1, ..., x_n$）と $a_1, ..., a_n \in N$ に対して，$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff N \models \varphi(a_1, ..., a_n)$ が成立することである．

Example 2 L を群の言語とする．また M を L-構造とする．

1. すべての M が群になるわけではない．
2. M が群である $\iff$ $M \models$ 群の公理 $\iff$ $M \models \forall x, y, z[x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z] \wedge \forall x[x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e]$

Definition 3 I を無限集合とする．$U \subset \mathcal{P}(I)$ が I 上の ウルトラフィルター であるとは，

1. U は有限交叉性を持つ $\iff$ U の勝手な有限部分集合 $F \subset U$ は共通部分を持つ（すなわち，$\forall \underbrace{A_1, ..., A_n}_{finite} \in U$ に対して，$A_1 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset$）．
2. U が I 上のウルトラフィルター $\iff$ U は有限交叉性を持つ $\mathcal{P}(I)$ の部分集合の中で極大である（すなわち，U 自体は有限交叉性を持ち,U の真の拡大はもはや有限交叉性を持たない）．

Remark 4 $F \subset \mathcal{I}$ が有限交叉性を持つとき，F はウルトラフィルターに拡大される（*Zorn* の補題を使えばよい）．もう少しうそっぽい証明では，次のようになる：F が極大なら，それでおしまい．そうでなければ，もっと大きなものが存在する．それがウルトラフィルターならおしまい．そうでなければまた少し拡大する．これを続ければ最終的に極大な集合（ウルトラフィルター）になる．でもこの程度の証明だと同様の議論で，非可算集合の中の極大な可算集合の存在も言えてしまいそうですが....

Example 5 $\mathbf{N}$ の *cofinite* 集合の全体を F とする．F は有限交叉性を持つので，ウルトラフィルター U に拡大することができる．U を フレシェフィルター とよぶ．

各 $i \in I$ に対して，L-構造 M_i が与えられているとする．直積集合 $N = \prod_{i \in I} M_i$ を考える．各 M_i が群のときは N も群になる．しかし，M_i が体のときは，N は環にはなるが，体にはならない．体にするためには，極大イデアルで割っておく必要がある．これに対応することを，モデル論的に行う．

N 上の２項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff \{i \in I : a_i = b_i\} \in U$$

で定義する．このとき，$\sim$ は同値関係になる．N を同値関係で割った集合を $M^* = \prod_{i \in I} M_i / U$ であらわすことにする．$a \in N$ の同値類を $[a]$ であらわすことにすると，$M^* = \{[a] : a \in N\}$, $[a] = [(a_i)_{i \in I}$ である．以下しばらく簡単のため言語は関数記号だけからなるとする．(一般の場合は想像がつく？)

Definition 6 （ウルトラプロダクト）$M^* = \prod_{i \in I} M_i / U$ は各関数記号 $F \in L$ の解釈を次のように定めることで L-構造になる．

$$F^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [F^N(a^1, ..., a^n)].$$

L-構造としての M^* を M_i たちの ウルトラプロダクト という．

重要なのは次の定理である．

Theorem 7 （ウルトラプロダクトの基本定理）$\varphi(x^1,...,x^n)$ を L-論理式とする．任意の $[a^1],...,[a^m] \in M^*$ に対して次が成立する：

$$M^* \models \varphi([a^1],...,[a^n]) \iff \{i \in I : M_i \models \varphi(a_i^1,...,a_i^n)\} \in U.$$

Proof. 論理式の構成（論理式に含まれる論理記号の個数）に関する帰納法．0) φ が原子論理式のときは補題から明らか．後は φ の構成に関する帰納法で示せばよい．
1) φ が $\neg\psi$ のとき：

$$\begin{aligned}
M^* \models \neg\psi([a^1],...,[a^n]) &\iff M^* \models \psi([a^1],...,[a^n]) \text{ でない} \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1,...,a_i^n)\} \notin U \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1,...,a_i^n)\}^c \in U \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1,...,a_i^n) \text{ でない}\} \in U \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \neg\psi(a_i^1,...,a_i^n)\} \in U.
\end{aligned}$$

2)φ が $\exists y\psi(x^1,...,x^n,y)$ のとき：

$$\begin{aligned}
M^* \models \exists y\psi([a^1],...,[a^n],y) &\iff M^* \models \psi([a^1],...,[a^n],[b]) \text{ for some } b \in M^* \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \psi(a_i^1,...,a_i^n,b_i)\} \in U \text{ for some } b_i\text{'s} \\
&\iff \{i \in I : M_i \models \exists y\psi(a_i^1,...,a_i^n,y)\} \in U
\end{aligned}$$

3) その他の論理記号の場合も同様である．∎

Corollary 8 φ を L-閉論理式とする．このとき，

$$M^* \models \varphi \iff \{i \in I : M_i \models \varphi\} \in U$$

上の系で主張していることを一言でいうと次のようになる：論理式 φ がウルトラプロダクトで成立するのは，(U の意味で) ほとんどの M_i たちが φ を成立させるときである．T が閉論理式の集合のとき，M がすべての T に属する論理式を満たすとき M は T のモデルである ($M \models T$) という．

Theorem 9 （コンパクト性定理）T を L-閉論理式からなる一つの集合とする．このとき，次は同値である．

1. T はモデルを持つ ($\exists M$ *s.t.* $M \models T$)；
2. T の各有限部分はモデルを持つ ($\forall S \subset_{\mathrm{fin}} T\ \exists M_S$ *s.t.* $M_S \models S$)．

Proof. $2 \to 1$ を示せばよい．T が可算の場合に示す．$T = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\{\varphi_i : i \leq n\}$ のモデル M_n がある．F をフレシェフィルターとして，M_n たちのウルトラプロダクト $\prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$ が求める T のモデルである．∎

Definition 10 L-構造の列 $\{M_i : i < \alpha\}$ が次の条件

$$M_i \prec M_j \quad (i < j < \alpha)$$

を満たすとき，基本拡大鎖 (*elementary chain*) とよぶ．

Theorem 11 (*Elementary Chain Theorem*) $\{M_i : i < \alpha\}$ が L-構造の基本拡大鎖のとき，$M^* = \bigcup M_i$ も自然に L-構造となり，各 $i < \alpha$ に対して，$M_i \prec M^*$ が成立する．

1.2 タイプと飽和モデル

M を L-構造とする．$A \subset M$ に対して，A に属する元を定数記号とみなして L に付加した言語を $\underline{L(A)}$ とかく．M は自然に $L(A)$-構造になる．この記号のもとで，$N \prec M$ とは，「すべての $L(N)$-閉論理式 φ に対して，$M \models \varphi \iff N \models \varphi$」のことである．

Definition 12 $A \subset M$ とする．自由変数 $\bar{x}$ を持つ $L(A)$-論理式の集合 $\Sigma(\bar{x})$ を考える．

1. $\Sigma(\bar{x})$ が M で $\underline{\text{有限充足的}}$ $\iff$ $\Sigma(\bar{x})$ の任意の有限部分集合は M に共通解を持つ．

2. $\Sigma(\bar{x})$ が M における $\underline{A\text{ 上のタイプ}}$ $\iff$ （1）$\Sigma(\bar{x})$ が有限充足的でなおかつ（2）完全である（任意の $\varphi(\bar{x})$ に対して，$\varphi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$ *or* $\neg\varphi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$）．

3. M における A 上のタイプ全体の集合を $\underline{\mathrm{S}_M(A)}$ とかく．M は省略することが多い．

4. $p(\bar{x}) \in \mathrm{S}(A)$ のとき，A を $\underline{\mathrm{dom}(p)}$ とかく．

$p(\bar{x})$ が A 上のタイプであるとは，一言で言えば，$\bar{x}$ に関する（$L(A)$ 論理式で書きうる）完全な情報のことである．$p(\bar{x})$ が M におけるタイプのとき，$p(\bar{x})$ が M に解を持つかどうかはわからない．

Exercise 13 *1.* 有限充足的な $L(A)$-論理式の集合は A 上のタイプに拡大されることを示せ．(*Zorn* の補題)

2. $A \subset N \prec M$ とする．$p \in S_M(A) \iff p \in S_N(A)$ である．

Definition 14 M を L-構造とする．κ を無限基数とする．M が $\underline{\kappa\text{-飽和}}$ であるとは，すべてのタイプ $p(\bar{x})$ に対して，

$$|\mathrm{dom}(p)| < \kappa \Rightarrow p \text{ は } M \text{ に解を持つ}$$

が成立することである．

Lemma 15 $p(\bar{x})$ を M におけるタイプとする．$M^* \succ M$ で p の解を持つものが存在する．

Proof. $\bar{c}$ を L に属さない新しい定数記号の列として，

$$T = \{M \text{ で成立する } L(M)\text{-閉論理式全体}\} \cup p(\bar{c})$$

とする．p の M での有限充足性から，T の各有限部分はモデルを持つ．したがって，コンパクト性定理により，T 全体がモデル M^* を持つ．M^* が求めるもの．∎

この補題を繰り返し使って構造を拡大し，最後に Elementary chain theorem を使うと，次を得る：

Theorem 16 （飽和モデルの存在）M を L-構造，κ を無限基数とする．$M^* \succ M$ で κ-飽和なものが存在する．

Definition 17 $A \subset M$, $\bar{a} \in M$ とする．$\bar{a}$ の M における A 上のタイプ（$\underline{\mathrm{tp}(\bar{a}/A)}$）とは $\bar{a}$ が満たす $L(A)$ 論理式全体のことである：

$$\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \{\varphi(\bar{x}) : M \models \varphi(\bar{a})\}.$$

Remark 18 *1.* $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ は確かに A 上のタイプになっている．

2. M が $p(\bar{x}) \in S(A)$ の解を持つ $\iff$ $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ となる $\bar{a} \in M$ が存在する．

Theorem 19 $M \models T$ を κ-飽和モデルとして，$N \models T$ を濃度が κ 以下のモデルとする．このとき，N は M の中に基本部分モデルとして埋め込むことができる：$\exists N_0 \prec M$ *s.t.* $N_0 \cong N$.

この定理により，T の十分大きなモデルの中に，ある程度の大きさのモデルはすべて埋め込んで考えることができるようになる．

1.3 安定性とタイプの定義可能性

以下では T を L-閉論理式の完全な集合（理論，theory）とし，$\mathcal{M}$ を十分に飽和な T のモデル（十分大きい κ^* に対する κ^*-飽和モデル）とする．何も言わなければ，M, N などは $\mathcal{M}$ の基本部分モデルとする．また A,B などは $\mathcal{M}$ の部分集合とする．(これらの集合は κ^* に対して十分小さいと仮定する.)

Definition 20 κ を無限基数とする．

1. T が *κ-stable* とは，常に「$|A| \leq \kappa \Rightarrow |\mathrm{S}(A)| \leq \kappa$」が成立すること．(タイプの個数があまり多くないことを主張している．ただし，タイプの個数を数えるとき，変数の違いだけのものは同一視している.)
2. T が *stable* とは，*κ-stable* となる κ が存在すること．κ に対して，T が *κ-stable* となること．

Example 21 代数閉体の公理（理論）ACF_p は $\aleph_0$-安定である：(証明) M を超越次数無限の代数閉体とする．$A \subset M$ を可算集合とする．A 上のタイプの数が可算個しかないことを言えばよい．A の代数閉包を B とする．B は可算である．B に属さない2元 $a \in M$ と $b \in M$ は互いに同型写像で移りあう．したがって，A 上のタイプが等しい．よって $|S(A)| \leq |B| + 1 = \aleph_0$ を得る．

Example 22 順序が定義されるような理論 T は安定でない：(証明) $<$ を $\mathcal{M}$ における順序（を定義する論理式）とする．a_i $(i \in \mathbb{Q})$ を $\mathcal{M}$ の元で，$M \models a_i < a_j \iff i < j$ となるように選ぶ．($\mathcal{M}$ の飽和性から可能である.) このとき，各 $r \in \mathbb{R}$ に対して，切断 $\Sigma_r(x) = \{a_i \leq x : i \leq r\} \cup \{x < a_i : r < i\}$ を考えれば，これは有限充足的．したがって，$\{a_i\}_i$ 上のタイプ $p_r(x)$ に拡大される．p_r たちは全部で連続濃度（非可算個）あるから，これは T が $\aleph_0$-*stable* でないことを意味する．一般の κ に対する κ-非安定性についても同様である．

Example 23 G を $\aleph_0$-stable な群とする．G には論理式で定義される部分群の無限降下列はない．※一般に構造が (κ)-stable とは，$T = \{\varphi : M \models \varphi\}$ が $\kappa)$-stable のことである．(証明) $G_i (i = 0, 1, \ldots)$ を論理式で定義される部分群の無限降下列とする．G_i は G_{i+1} の coset で少なくとも2個に分割される．したがって，(各有限ステージにおいて考えると) G_0 は $G_1, \ldots, G_n$ たちの coset によって，2^n 個に分割されている．よって，G_0 は G_i たち全体によって，連続濃度 $2^{\aleph_0}$ 個に分割されている．違うコセットに属する元は違うタイプを持つので，タイプの数は連続濃度だけある．また，コセットを表現する元は可算個しか必要ないので，このことは G が $\aleph_0$-安定にならないことを示している．矛盾．

Definition 24 （タイプの定義可能性）$p(\bar{x}) \in S(A)$ とする．また $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ を L-論理式とする．$p(\bar{x})$ が $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ に関して定義可能 であるとは，$L(A)$-論理式 $\theta(\bar{y})$ で，

$$\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x}) \iff \mathcal{M} \models \theta(\bar{a}) \quad (\forall \bar{a} \in A)$$

を満たすものが存在することである．p が任意の φ に関して定義可能のとき，p は定義可能であるという．

Theorem 25 T が安定ならば，すべてのタイプは定義可能である．(実は逆も成立する.)

Proof. 証明は2時間め．

2 第2章

2.1 論理式による分割，樹形図

以下では，単に論理式といえば，適当な A に対する $L(A)$-論理式のこととする．論理式 φ の中に現れる $\mathcal{M}$ の元を φ のパラメータとよぶ．

(*) 長さが n の $\{0,1\}$-列とは，$n = \{0, \ldots, n-1\}$ から $2 = \{0,1\}$ への関数のことである．それら全体を ${}^n2$ とかく．同様に長さが n 未満の $\{0,1\}$-列全体を ${}^{n>}2$ とかく

Definition 26 $\Sigma(\bar{x})$ を論理式の集合とする．$\varphi(\bar{x},\bar{y})$ を L-論理式とする．

1. $\Sigma(\bar{x})$ が高さ $n \leq \omega$ の *2* 分岐 $\underline{\varphi\text{-樹形図}}$ を持つとは，適当な $\{\bar{b}_\eta :\}_{\eta\in {}^{n>}2}$ を選ぶことにより，論理式の集合

$$\Sigma^*(\{\bar{x}\}_{\eta\in {}^n2}) = \bigcup_{\eta\in {}^n2} \Sigma(\bar{x}_\eta) \cup \{\varphi(\bar{x}_\eta, \bar{b}_{\eta|m})^{\eta(m)} : m < n\}$$

が解を持つようにできる（有限充足的にできる）ことである．ただし，$\varphi^0 = \neg\varphi$, $\varphi^1 = \varphi$ である．

2. $\Sigma(\bar{x})$ が高さ n の *2* 分岐 φ-樹形図を持つとき，$\underline{R(\Sigma,\varphi,2) \geq n}$ とかく．

Lemma 27 T が安定ならば，高さ ω の 2 分岐 φ-樹形図は存在しない．

Proof. $\Sigma(\bar{x})$ から始まる高さ ω の 2 分岐 φ-樹形図があったとする．定義における $\Sigma^*(\{\bar{x}\}_{\eta\in {}^n2})$ の解 $\{\bar{a}_\eta\}_{\eta\in {}^n2}$ をとる．このとき，$\bar{b}_\eta$ たち全体を B とおけば，$\mathrm{tp}(\bar{a}_\eta/B)$ たちはすべて異なるタイプになる．すなわち可算集合 B 上に連続濃度個のタイプが存在する．これは，T が $\aleph_0$-安定にならないことを示す．(高さ ω の樹形図の存在から，コンパクト性により，任意の高さの樹形図が存在することが分かる．これを用いると，同様の議論で任意の濃度で安定にならないことも証明される．) ∎

したがって，T が安定のときは，$R(\Sigma,\varphi,2) \geq n$ となる最大の自然数 n が決まる．この n を $R(\Sigma,\varphi,2)$ で表わす．(注意．任意の n に対して，$R(\Sigma,\varphi,2) \geq n$ ならば，コンパクト性により，高さ ω の樹形図が存在してしまう．)

Remark 28 T が安定のときは，次のような $b_{0_n{}^\frown 0}, b_{0_n{}^\frown 1}$ *(*$n \in \omega$*)* も存在しない：

1. $\mathrm{tp}(b_{0_n{}^\frown 0}/b_{0_1},\ldots,b_{0_n}) = \mathrm{tp}(b_{0_n{}^\frown 1}/b_{0_1},\ldots,b_{0_n})$；

2. $\varphi(x, b_{0_n{}^\frown 0})$ と $\varphi(x, b_{0_n{}^\frown 1})$ は矛盾する（共通解がない）；

3. $\{\varphi(x, b_{0_i}) : i \in \omega\}$ は有限充足的．

ただし 0_i は 0 を i だけ並べた列．実際，上のような条件から，2 分岐 $\varphi(x,y)$-樹形図を簡単に作ることができる．

約束の次の定理の証明を行う．

Theorem 29 T が安定ならば，すべてのタイプは定義可能である．

Proof. $p(\bar{x}) \in S(A)$ とする．p が $\varphi = \varphi(\bar{x},\bar{y})$ に関して，定義可能なことを示す．$R(p,\varphi,2) = n$ とする．コンパクト性により，p の中の 1 つの論理式 $\psi(\bar{x})$ で $R(\psi,\varphi,2) = n$ となるものが存在する．

Claim 1 $\varphi(\bar{x},\bar{a}) \in p \iff R(\psi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x},\bar{a}),\varphi,2) \geq n.$

$\Rightarrow$ は明らかである．逆を示そう．$R(\psi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x},\bar{a}),\varphi,2) \geq n$ とする．もし $\varphi(\bar{x},\bar{a}) \notin p$ とすれば，ψ はまず $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ と $\neg\varphi(\bar{x},\bar{a})$ によって，まず 1 回分解され，次にそれぞれの上に高さが n の樹形図が存在するので，結局 ψ の上に高さが $n+1$ の樹形図がかけてしまう．これは，$R(\psi,\varphi,2) = n$ に反する．

次は樹形図の定義から明らかである．

Claim 2 $R(\psi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x},\bar{a}),\varphi,2) \geq n$ を $\bar{a}$ に関する条件と思うと，これは論理式でかける条件である．

Claim 2 の論理式を $\theta(\bar{a})$ とかけば，$\varphi(\bar{x},\bar{a}) \in p \iff \mathcal{M} \models \theta(\bar{a})$ となる．∎

2.2 安定性と単純性

安定性はある種の樹形図が存在しないことと同値であった．単純性もこのような観点から定義することができる．最初に基本的な定義をする．

Definition 30 論理式の集合 $\Sigma(\bar{x})$ が k-矛盾するとは，$\Sigma(\bar{x})$ から勝手に k 個の論理式をもってくると，それらが矛盾する（共通解がない）ことである．

Example 31 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$X_n = \{A \subset \mathbb{N} : n \in A, |A| = k\}$ とする．このとき，任意に選んだ k 個の $X_{n_1}, ..., X_{n_k}$ は共通部分を持つ．しかし，任意の $k+1$ 個の共通部分は空である．

有限列を表わすのに，今後は $\bar{}$ を用いずに，単に a, b, x, y などであらわすことがある．

Definition 32 （単純性）

1. $\Sigma(x)$ を論理式の集合とする．また $\varphi(x,y) \in L$, $k \in \omega$, $n \leq \omega$ とする．$\Sigma(x)$ が高さ n の無限分岐 (φ, k)-樹形図を持つとは次の条件を満たす $\{\bar{b}_\nu\}_{\nu \in {}^{n>}\omega}$ が存在することである．

   (a) 各 $\eta \in {}^{n}\omega$ に対して，$p_\eta(x) = \Sigma(x) \cup \{\varphi(x, b_{\eta|(i+1)}) : i < n\}$ は解を持つ；

   (b) 各 $\nu \in {}^{n>}\omega$ に対して，$\{\varphi(x, b_{\nu\frown i}) : i \in \omega\}$ は *k-inconsistent* である．（これが論理式の集合でかけることに注意する．）

2. $\Sigma(x)$ が持つ無限分岐 (φ, k)-樹形図の高さに最大値が存在するとき，その最大値を $D(\Sigma(x), \varphi, k)$ とかく．

3. $D(\Sigma, \varphi, k)$ が常に有限となるとき，T は単純（*simple*）とよばれる．単純でないとき，*tree property* を持つという．

Theorem 33 安定ならば単純である．

Proof. ここでの議論は，次の時間に出てくる概念「一様列」と Ramsey の定理を用いる．この概念を知らない方は，証明を読み飛ばしても構わない．

T が単純でないとする．コンパクト性により高さが無限（ω_1）の ω 分岐樹形図が存在する．(安定性は，2分岐の樹形図の非存在であったから，このことから非安定性がすぐ出てくるように思うかもしれない．しかし，樹形図の形が少し違うことに注意しなければならない．) Ramsey の定理（3時間目参照）により，

$$I = \{b_i : i \in \omega\}$$

は一様列と仮定できる．また，0_n で 0 を n 個並べた列を表わしたとき，$I_n = \{b_{0_n\frown i} : i \in \omega\}$ は $b_0, ..., b_{0_n}$ 上の一様列になっていると仮定できる．

$$\{\varphi(x, b_i) : i \leq n_0\} \cup \{\varphi(x, b_{0_j}) : j > 1\}$$

が矛盾する最小の $n_0 \leq k$ を選ぶ．このとき，$\{\varphi(x, b_{0_j}) : j > 1\}$ の適当な有限部分集合 $F(x)$ のもとで，$\bigwedge_{n_0 m \leq j < n_0(m+1)} \varphi(x, b_j)$ $(m \in \omega)$ は 2-矛盾する集合になる．c を F の中のパラメータとして，$\psi(x, c, b_0, .., b_{n_0-1}) = \bigwedge F(x) \wedge \bigwedge_{j<n_0} \varphi(x, b_j)$ を考える．c' を $\mathrm{tp}(c', b_{n_0}, ..., b_{2n_0-1}) = \mathrm{tp}(c, b_0, ..., b_{n_0-1})$ となるようにとっておく．以上の議論を再び行ない，$\psi(x, c, b_0, .., b_{n_0-1})$ をある論理式で2分割する．以下同様に ω_1 回繰り返してゆく．2分割する論理式の形は各段階で異なる可能性があるが，論理式の形の個数は可算個しかないので，常に一定の $\psi(x, y)$ の形で分割されているとしてよい．以上により，高さ無限の2分岐樹形図が構成されたことになる (注意 28 を参照)．

3 第3章

一般論を先にすすめる前に，単純な理論の例をあげておく．

Example 34 L を2変数述語記号だけからなる言語 $\{R(*,*)\}$ とする．*Random graph* の理論 T_{RG} とは次の論理式 φ_{mn}:

$$\forall x_1,...,x_m \forall y_1,...,y_n \left[\{x_1,...,x_m\} \cap \{y_1,...,y_n\} = \emptyset \rightarrow \exists z (\bigwedge_{i=1}^{m} R(x_i,z) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg R(x_i,z)) \right]$$

の集合 $(m,n \in \omega)$ とする．*back-and-forth argument* により，T_{RG} は完全でなおかつ，限量記号消去を許すことがわかる．したがって，自由変数 x を持つ論理式は $x=a$, $R(x,b)$ の形たち（およびそれらの否定）を $\wedge,\vee$ で結びつけたものである．よって，$\{\varphi(x,\bar{a}_i) : i \in \omega\}$ が k-矛盾するときは，$\varphi(x,\bar{a}_i)$ は本質的に $x=a_i$ の形でなければならない．しかし，このとき，$\varphi(x,\bar{a}_i)$ は解が一つしかないので，これ以上分解することができない．よって，一変数 ω-分岐樹形図の高さは高々1である（n 変数の場合は高さ n）．よって，T_{RG} は単純である．しかし，$I=\{a_i : i<\kappa\}$ を異なる元からなる列とするとき，各 $A \subset \kappa$ に対して，$p_A(x) = \{R(x,a) : a \in A\} \cup \{\neg R(x,b)) : b \notin A\}$ を作れば，これらはすべて異なる I 上のタイプとなるので，$|S(I)| \geq 2^\kappa > \kappa$ となる．これは，T_{RG} が κ-安定にならないことを示す．

3.1 Ramsey の定理，Erdös-Rado の定理

組み合わせ論の次の事実は重要である．

Fact 35 $m,n \in \omega$, κ:無限基数.

1. $\omega \rightarrow (\omega)^m_n$;
2. $\beth_n(\kappa)^+ \rightarrow (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$.

詳しい内容は組み合わせ論の教科書または，このホームページ内にある「単純理論講義」を参照ください．一言で上の説明するならば，「たくさんものがあれば，その中には似たものがたくさんある」ということの一般化である．1の帰結はたとえば次のようになる：

- 人間の可算無限集合を考えるとき，無限の部分集合をとって，その中の任意の二人が全員お友達どおし，または全員お友達でないようにできる．

また，2を $\kappa=\omega$ のときに，使えば次の帰結を得る：

- 人間が連続濃度よりたくさん（$>\beth(\omega)=2^\omega$）だけいたとき，二人が友達である度合いを自然数 $0,1,2,...$ で判断する．このとき，人間の非可算部分集合が存在して，その中の任意の二人の友達度合いを一定にできる．

これらの事実は一様列の存在を示すために重要となる．

再び $\mathcal{M}$ での話に戻る．

Definition 36 $I=(a_i)_{i<\alpha}$ が A 上の 一様列（*indiscernible sequence*）であるとは，同じ有限の長さの部分列が常に一定の A 上のタイプを持つことである．すなわち，各 $n \in \omega$ に対して，

$$i_1 < \cdots < i_n < \alpha,\ j_1 < \cdots < j_n < \alpha \ \Rightarrow\ \mathrm{tp}(a_{i_1},...,a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}(a_{j_1},...,a_{j_n}/A)$$

が成立することである．

Lemma 37 $\Sigma(x_0,x_1,...)$ を自由変数が $x_0,x_1,...$ に含まれる $L(A)$-論理式の集合とする．$I=(a_i)_i$ が Σ の勝手な解のとき，その同じ長さの部分列も Σ の解になると仮定する．このとき，Σ の解として，A 上の一様集合をとることができる．

Proof. $x_0,x_1,...$ が A 上の一様列であることは $L(A)$ 論理式の集合 $\Gamma(x_0,x_1,...)$ で表現できる．このとき，Ramsey の定理を使って，$\Sigma(x_0,x_1,...) \cup \Gamma(x_0,x_1,...)$ が有限充足的になることを示せばよい．($\mathcal{M}$ の飽和性により解がとれる.)

3.2 Forkingによる独立概念

Definition 38 $\varphi(x,a)$ *divides over* A とは 次の条件を満たす列 $I=(a_i)_{i\in\omega}$ が存在することである：

- $\mathrm{tp}(a_i/A)=\mathrm{tp}(a/A)$ $(i\in\omega)$;
- $\{\varphi(x,a_i): i\in\omega\}$ は適当な $k\in\omega$ に対して，k-矛盾する．

Remark 39 上の定義において，I を $a_0=a$ なる A 上の一様列と仮定しても同値になる．(上の定義の2つの条件を I が満たすことは，I が A 上の論理式の適当な集合 $\Sigma(x_0,x_1,...)$ を満たすことと同値になる．このことを頭において補題 37 を使えばよい．)

Example 40 複素数体 $\mathbb{C}$ において考える．$f(x,a_0,...,a_n))=\sum_{i=0}^{n}a_nx^n$ を $n(>0)$ 次の既約多項式とする．ただし，a_i たちのうち少なくとも一つは $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の超越元とする．このとき，$f(x,a_0,...,a_n)=0$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上 *divide* する:実際 $\mathrm{tp}(b_0,...,b_n/\overline{\mathbb{Q}})=\mathrm{tp}(a_0,...,a_n/\overline{\mathbb{Q}})$ なる $b_0,...,b_n$ を超越次元 $tr.deg(a_0,..,a_n,b_0,...,b_n)$ が最大になるようにとれば，$f(x,a_0,...,a_n)=0\wedge f(x,b_0,...,b_n)=0$ は解を持たない．

簡単にいうと dividing が従属性に対応する．しかし，dividing そのものは，技術的に扱いにくい．そこで forking の概念が必要になる．

Definition 41 論理式 $\varphi(x,a)$ が有限個の A 上 *divide* する論理式によって覆われるとき，$\varphi(x,a)$ *forks over* A という．(φ が ψ_i たちで覆われるとは，$\mathcal{M}\models\forall x[\varphi(x,a)\to\bigvee_{i\leq m}\psi_i(x,b_i)]$ となる意味である．)

Exercise 42 X を無限集合として，構造 $(X\cup\mathcal{P}(X);X,\mathcal{P}(X),\in)$ を考える．すなわち，集合 $X\cup\mathcal{P}(X)$ 上に X 部分と $\mathcal{P}(X)$ 部分を指し示す述語記号があり，さらに X の元と $\mathcal{P}(X)$ の元の間の所属関係 $\in$ が言語に入っている．このとき，論理式 $X(x)$ は $\emptyset$ 上 *divide* しないが，$\emptyset$ 上 *fork* することを示せ．

上の例が示すように一般には divide と fork は異なる概念である．しかし，単純な理論においては，二つは一致する．これを示すのに特別な一様列である Morley 列の存在が重要になる．そして Morley 列の存在を示すために Erdös-Rado の定理が必要となる．

Definition 43 *1.* 論理式の集合 $\Sigma(x)$ が A 上 *divide (fork)* するとは，$\Sigma(x)$ の中の有限個の論理式の *conjunction* が *divide (fork)* することである．

2. a と A が B 上独立である（記号 $a\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_B A$）$\iff$ $\mathrm{tp}(a/A\cup B)$ が B 上 *fork* しない．

3. A_1 と A_2 が B 上独立である（記号 $A_1\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_B A_2$）$\iff$ A_1 の各有限部分 a に対して，$a\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_B A_2$．

安定の場合に forking による独立概念が存在することは Shelah によって示された．同様の独立概念が単純の場合にも存在することは Kim-Pillay によって示された：

Theorem 44 T を単純とする．このとき，3項関係 $*\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_* *$ は独立概念とよぶにふさわしい次の性質を持つ：

1. （不変性）$\mathrm{tp}(A,B,C)=\mathrm{tp}(A',B',C')$ ならば $A\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_B C\iff A'\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{B'} C'$;

2. （存在）A,B,C が与えられたとき，$\mathrm{tp}(A'/B)=\mathrm{tp}(A/B)$ かつ $A'\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_B C$ なる A' が存在する．(A を C と B 上独立な位置に動かすことができる．)

3. （有限性）A の任意の有限部分 a および C の任意の有限部分 c に対して，$a\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_B c$ ならば $A\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_B C$ である．

4. （局所性）a，B に対して，$B_0\subset B$ で $|B_0|\leq|T|$, $a\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{B_0} B$ となるものが存在する．

5. （対称性）$A\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_B C\Rightarrow C\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_B A$;

6. （推移性）$B_1\subset B_2\subset B_3$ のとき，$A\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{B_1} B_3\iff$「$A\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{B_1} B_2$ かつ $A\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{B_2} B_3$」

7. (*Independence Theorem*) $M \prec \mathcal{M}$ とする．$p(x) \in \mathrm{S}(M)$ の二つの拡大 $q_i(x) \in \mathrm{S}(M \cup \{B_i\})$ $(i = 1, 2)$ に対して，条件：

   (a) 各 $q_i(x)$ は M 上 *fork* しない；

   (b) $B_1 \perp_M B_2$,

   が成立すれば，$q_1(x) \cup q_2(x)$ は M 上 *fork* しない．

性質 1 − 4 は比較的容易に示すことができる．特に不変性と有限性は定義から自明である．(推移性も ⇒ は明らかである．)

存在：A は有限列 a と仮定する．$p(x) = \mathrm{tp}(a/B)$ とするとき，$p(x)$ の拡大 $q(x) \in S(C)$ で A 上 fork しないものの存在を示せばよい．($q(x)$ の解 a' が求めるものになる．) このためには，$L(C)$-論理式 $\varphi(x)$ で B 上 fork するものをすべて $p(x)$ に不可して $\Sigma(x)$ をつける．$\Sigma(x)$ が矛盾しない（有限充足的）ことは，fork する論理式の有限 disjunction が再び fork することを考えれば，明らかである．$\Sigma(x)$ の $S(C)$-タイプへの任意の拡大を $q(x)$ とすればよい．

残りを示すためには，まず対称性を示す必要がある．そのためには，新しい概念が必要となる．

Definition 45 $p(x) \in S(A)$, $A_0 \subset A$ とする．$I = \{a_i : i < \alpha\}$ を p の解の列とする．I が p の A_0 上の <u>*Morley* 列</u> であるとは，次の条件を満たすことである：

1. I は A 上の一様列である．
2. $\mathrm{tp}(a_i/A \cup \{a_j : j < i\})$ は A_0 上 *fork* しない．

$A_0 = A$ のときは，単に p の *Morley* 列という．

一様列には大きく分けると 2 種類ある．一つ目は自明な一様列．すなわち，$I = (a_i)_i$ において，すべての a_i が一定の元 a の場合である．もう一つは，I の元がお互いに無関係になっているために一様になっている 場合で，代数閉体における超越基底がそれに相当する．このような後者の形の一様列を正確に定義したものが，Morley 列である．

Fact 46 $p(x) \in S(A)$ が $A_0 \subset A$ 上 *fork* しないとき，p の A_0 上の（勝手な長さの）*Morly* 列が存在する．

この証明のための基本的（で雑な）アイディアは次のとおりである．最初に存在（定理の性質 2）を使って，十分長い $I = (a_i)_{i<\kappa}$ を Morley 列の定義の独立条件 2 を満たすように作る．I の各元は A 上一定の 1 変数タイプ (p) を満たしている．しかし，$a_i, a_j \in I$ のとき，2 変数タイプ $\mathrm{tp}(a_i, a_j/A)$ は一定とは限らない．そこで，Erdös-Rado の定理を使い，部分列 I' で 2 変数タイプが一定となるものを選ぶ．この部分列 I' から，さらに部分列 I'' を選べば，3 変数タイプも一定にできる．これを ω 回続ければ，部分列で一様列になるものがとれる（そして独立条件 2 も保存される）と期待したい．しかし残念ながら，各ステップで部分列の長さは確実に短くなっている．したがって，この雑な方法では基数の無限降下列がない限り（そんなものはない）だめである．そこで，もう一つのアイディアが必要になる．(これに関してはここで詳しく述べることはしない．講演では多少述べた．単純理論講義を参照のこと.)

Lemma 47 T を単純とする．次の 4 条件は同値である．

1. $\varphi(x, a)$ は A 上 *fork* する．
2. $\varphi(x, a)$ は A 上 *divide* する．
3. I を $\mathrm{tp}(a/A)$ の適当な *Morley* 列とするとき，$\{\varphi(x, b) : b \in I\}$ は矛盾する．
4. I を $\mathrm{tp}(a/A)$ の勝手な *Morley* 列とするとき，$\{\varphi(x, b) : b \in I\}$ は矛盾する．

Proof. $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ は明らかである.

$2 \Rightarrow 4$: $\varphi(x, a)$ が divide するが, Morley 列 $I = (a_i)_{i\in\omega}$ に対して,

$$\Sigma(x) = \{\varphi(x, a_i) : i \in \omega\}$$

が有限充足的とする. ($a_0 = a$ としてよい.) $\varphi(x, a)$ が divide するので, A 上の適当な一様列 $J \ni a$ によって, $\{\varphi(x, b) : b \in J\}$ は k-矛盾する. Ramsey の定理を用いた簡単な議論により, J は $I \setminus \{a\}$ 上の一様列と仮定できる. このことは, $D(\Sigma(x), \varphi(x, y), k) < D(\Sigma_1(x), \varphi(x, y), k)$ を示す. ただし, $\Sigma_1(x) = \{\varphi(x, a_i) : i \in \omega, i \geq 0\}$ しかし, $\mathrm{tp}(a_0, a_1, .../A) = \mathrm{tp}(a_1, a_2, .../A)$ だから, Σ と Σ_1 は同じランクを持たなければならない. これは矛盾である.

2 と 4 の同値性をつかうと, 1 と 2 の同値性もでる.

(対称性の証明) $a \perp_B c$ とする. Morley 列の存在により, $I \ni a$ をタイプ $\mathrm{tp}(a/B \cup \{c\})$ の B 上の Morley 列としてとることができる. I は同時に $\mathrm{tp}(a/B)$ の Morley 列になっている (推移性 ⇒ を使った). また, $p_a = \mathrm{tp}(c/A \cup \{a\})$ とするとき,

$$p_{a_0} \cup p_{a_1} \cup p_{a_2} \cup \cdots$$

が有限充足的 (c で満たされる) になる. よって, 補題 47 により, $p_a(x)$ が B 上 fork しないことになる. すなわち, $c \perp_B a$.

(推移性の証明) は省略.

3.3 Amalgamation theorem

ここでは, モデル M ($\prec \mathcal{M}$) 上のタイプの性質を述べる. 安定な理論においては, モデル M 上のタイプは勝手な $A \supset M$ 上にただ一つの「正当な後継者」となる拡大 (nonforking extension) を持つ.

Definition 48 *1.* $A \subset B$, $p(x) \in S(A)$, $p \subset q \in S(B)$ とする. q が p の *nonforking extension* $\iff$ q が A 上 *fork* しない.

2. $p \in S(A)$ が *stationary* $\iff$ p は勝手な $B \supset A$ 上にただ一つの *nonforking extension* を持つ.

Theorem 49 T を安定とする. モデル上のタイプは *stationary* である.

単純な理論では, これは成立しない. 対応する性質は次のものである.

Theorem 50 (*Independence Theorem,* 再掲) T を単純とする. $M \prec \mathcal{M}$ とする. $p(x) \in \mathrm{S}(M)$ の二つの拡大 $q_i(x) \in \mathrm{S}(M \cup \{B_i\})$ ($i = 1, 2$) に対して, 条件 :

1. 各 $q_i(x)$ は M 上 *fork* しない ;

2. $B_1 \perp_M B_2$,

が成立すれば, $q_1(x) \cup q_2(x)$ は M 上 *fork* しない.

証明はここで述べることはできない.

参考文献

[1] B. Kim, Forking in simple unstable theories, The Journal of the London Mathematical Society (Second Series), vol. 57 (1998), pp. 257–267.

[2] B. Kim and A. Pillay, Simple theories, Annals of Pure Applied Logic, vol. 88 (1997), pp. 149–164.

数学基礎論サマースクール2000
仮想元について

おかもと けいし (早稲田大学 理工学部)

2000年8月7-10日

概 要

このノートでは、同値関係による同値類 (仮想元) たちを、構造に新たに加えて得られる拡張された構造 (eq 構造) を定義する。次に、仮想元に対応する通常の元が存在するような状況を、仮想元を消去すると定義し、代数閉体が仮想元を消去することを示す。

1 準備 (Preliminaries)

言語を L 、言語 L の理論を T で表す。十分大きな T の飽和モデル $\mathcal{C}$ を考え、以後考える対象はすべてその要素または部分集合とする。元を $a, b, \ldots$、有限列を $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$、モデルを $M, N, \ldots$、論理式を $\varphi, \psi, \ldots$ でそれぞれ表す。(モデル理論の基本的な事柄に関しては [9] を参照)

仮想元を定義するときに使うのが、次に定義する同値関係である。論理式で定義された関係が同値関係になるかどうかは、理論 T に依存する。

定義 1 (同値関係) L-論理式 $E(\bar{x}, \bar{y})$ が

1. $\forall \bar{x} E(\bar{x}, \bar{x})$ (反射律)
2. $\forall \bar{x} \forall \bar{y} [E(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow E(\bar{y}, \bar{x})]$ (対称律)
3. $\forall \bar{x} \forall \bar{y} \forall \bar{z} [E(\bar{x}, \bar{y}) \wedge E(\bar{y}, \bar{z}) \rightarrow E(\bar{x}, \bar{z})]$ (推移律)

をみたすとき、$E(\bar{x}, \bar{y})$ は同値関係 (*an equivalence relation*) であるという。

以下に同値関係の例を示す。

1. $x = y$, $\bar{x} = \bar{y}$
2. 有限列の置換 ($e.g.$ $[x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2] \vee [x_1 = y_2 \wedge x_2 = y_1]$)
3. $\bar{y}, \bar{y}'$ に関する関係 $\forall \bar{x} [\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{y}')]$ ($\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ は L-論理式)
4. 整数 x, y に関する関係 「$x = y + 3z$ をみたす整数 z が存在する」

2 仮想元 (Imaginary Elements)

eq 構造の定義には2種類の方法があるが、ここでは Makkai [6] による many sorted 構造を使った定義をする。(Many sorted 構造に関しては [10] を参照)

定義 2 (L^{eq},T^{eq}) L を言語、T は L-理論、$\mathcal{E}$ を $L(\emptyset)$-論理式で定義された T における同値関係すべての集合とする。

1. L^{eq} は、記号として $L \cup \{f_E : E \in \mathcal{E}\}$ を持つ、$\mathcal{E}$ の元たちをソートとする *many sorted* 言語

2. $T^{eq} = T \cup \{\forall y \exists \bar{x}[f_E(\bar{x}) = y] : E \in \mathcal{E}\} \cup \{\forall \bar{x} \forall \bar{y}[f_E(\bar{x}) = f_E(\bar{y}) \leftrightarrow E(\bar{x}, \bar{y})] : E \in \mathcal{E}\}$

Many sorted 言語では、関数や述語の領域は予めどのソートに属するのか定義されている。例えば $P(x_1, x_2)$ という関係記号があったとすると、変数 x_1 はソート E_1 ($\in \mathcal{E}$) に変数 x_2 はソート E_2 ($\in \mathcal{E}$) というように予め決まっている。また等号と変数記号もソート毎に異なるものが用意されていて、各等号はある一つのソートの 2 元だけを比べることができ、各変数の動く範囲はある一つのソートに限定されている。many sorted 言語から many sorted 論理と many sorted 構造が定義され、1 階の述語論理とそこでの構造で成り立つ完全性定理などが many sorted な場合にも成り立つ。

注意 3 $\mathcal{C}^{eq}$ の元の中には、パラメータを含む同値関係によって定義された仮想元が含まれていると考えて良い。$E(\bar{x}, \bar{y}; \bar{m})$ は $L(\bar{m})$-定義可能な同値関係とする。($\bar{x}, \bar{y}$ は自由変数、$\bar{m}$はパラメータ) 次のような L-定義可能な同値関係 $(\bar{x}, \bar{s})E'(\bar{y}, \bar{t})$ を考える。(理解しにくいので $E'(\bar{x}, \bar{s}, \bar{y}, \bar{t})$ とは書かない)

$(\bar{a}, \bar{m})E'(\bar{b}, \bar{m}') \Leftrightarrow$
「$\bar{m} = \bar{m}'$ かつ $E_{\bar{m}}$ は同値関係 かつ $E_{\bar{m}}(\bar{a}, \bar{b})$」 または 「$\bar{m} = \bar{m}'$ かつ $E_{\bar{m}}$ は同値関係でない かつ $\bar{a} = \bar{b}$」

すると構造 $\mathcal{C}^n / E_{\bar{m}}$ は $\{e \in \mathcal{C}^{eq} : \exists \bar{x} \in \mathcal{C}^n[e = f_{E'}(\bar{x}, \bar{m})]\}$ と同型になる。

定義 4 (**eq 構造**) T を L-理論、M を T のモデル、$\mathcal{E}$ を $L(\emptyset)$-論理式で定義された T における同値関係すべての集合とする。このとき L^{eq}-理論 T^{eq} のモデル M^{eq} を以下のように構成する。

1. M^{eq} のドメインは $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} M^{n_E}/E$

2. L の定数記号 c の M^{eq} での解釈は $c^M/=$

3. L の関数記号 f の M^{eq} での解釈は $f^{M^{eq}}(a_1/=, \ldots, a_n/=) = f^M(a_1, \ldots, a_n)/=$

4. L の関係記号 P の M^{eq} での解釈は $\{(a_1/=, \ldots, a_n/=) : M \models P(a_1, \ldots, a_n)\}$

5. L^{eq} の関係記号 f_E の M^{eq} での解釈は $f_E(a_1/=, \ldots, a_2) = a_1 \ldots a_n/E$

L に含まれる記号の解釈から T が成り立ち、f_E たちの解釈から $\{\forall y \exists \bar{x}[f_E(\bar{x}) = y] : E \in \mathcal{E}\}$ と $\{\forall \bar{x} \forall \bar{y}[f_E(\bar{x}) = f_E(\bar{y}) \leftrightarrow E(\bar{x}, \bar{y})] : E \in \mathcal{E}\}$ が成り立つことが分かる。したがって、M^{eq} は T^{eq} のモデルになっている。

簡単にするため、混乱しない場合は、ソートによるドメインのこともソートと呼び、M^{eq} のうちソート E ($\in \mathcal{E}$) のドメインを M_E と書く。また、ソートのうち特に「=」によるソートをノーマルソートと呼ぶ。a ($\in \mathcal{C}$) とノーマルソートの元 $a/x = y$ ($\in \mathcal{C}^{eq}$) は同一視できるので、M での L-論理式は自然に、M_{eq} のノーマルソートにおける L^{eq}-論理式として解釈できる。ただしノーマルソートは M^{eq} 全体ではないので、関数は関係として考える。また many sorted 言語では変数はあるソートに属するので、例えば L-論理式 $\forall x \varphi(x)$ を L^{eq}-論理式として解釈する場合、変数 x はノーマルソートのみを動ので、「任意のノーマルソートに属する元 x にたいして $\varphi(x)$ が成り立つ」という意味になる。存在記号に関しても同様。

注意 5 M^{eq} のノーマルソートへの制限は M である。T^{eq} のモデル N のノーマルソートへの制限は T のモデルで、さらにノーマルソートへの制限から、再び *eq* 構造へ拡張すると N になる。

eq 構造を使うといいこと　標数を固定した代数閉体の理論 T_{ACF} の eq 構造を考える。G を論理式で定義された群、H を $L(\emptyset)$-論理式 $\psi(x)$ で定義された G の正規部分群とする。ここで、同値関係 $E_H(x,y)$ を $\exists z[\psi(z)\wedge x=y\cdot z]$ で定義すると、G/H は、この同値関係 E_H によるソートの中に定義された群であると思うことができる。

3　eq の世界の論理式はもとの世界の論理式＋射影で同様のことが表せる

補題 6 任意の L^{eq}-論理式 $\varphi(x_1,\ldots,x_m)$ に対して、

$$T^{eq}\vdash\forall\bar{y}_1\ldots\forall\bar{y}_m[\varphi(f_{E_1}(\bar{y}_1),\ldots,f_{E_m}(\bar{y}_m))\leftrightarrow\varphi^*(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_m)]$$

を満たすような L-論理式 $\varphi^*(\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_m)$ が存在する。ただし、各変数 x_i は E_i によるソートに属するとする。

証明　論理式の構成に関する帰納法で証明する。

Step 1.　φ が $x=y$ のとき

$$T^{eq}\vdash\forall\bar{u}\forall\bar{v}[f_E(\bar{u})=f_E(\bar{v})\leftrightarrow E(\bar{u},\bar{v})]$$

φ が $x=f_E(t_1(\bar{v}),\ldots,t_n(\bar{v}))$ の形のとき (ただし $t_1(\bar{v}),\ldots,t_n(\bar{v})$ は L の項 (term))

$$T^{eq}\vdash\forall\bar{u}\forall\bar{v}[f_E(\bar{u})=f_E(t_1(\bar{v}),\ldots,t_n(\bar{v}))\leftrightarrow E(\bar{u},t_1(\bar{v})t_n(\bar{v}))$$

φ が $f_E(s_1(\bar{u}),\ldots,s_n(\bar{u}))=f_E(t_1(\bar{v}),\ldots,t_n(\bar{v}))$ の形のとき ($s_1(\bar{u}),\ldots,s_n(\bar{u}),t_1(\bar{v}),\ldots,t_n(\bar{v})$ は L の項)

$$T^{eq}\vdash\forall\bar{u}\forall\bar{v}[f_E(s_1(\bar{u}),\ldots,s_n(\bar{u})=f_E(t_1(\bar{v}),\ldots,t_n(\bar{v}))\leftrightarrow E(s_1(\bar{v})s_n(\bar{v}),t_1(\bar{v})t_n(\bar{v}))$$

Step 2.　φ が $P(x_1,\ldots,x_n)$ のときはそのまま。φ が $\neg\psi$ の形のときは、$\neg(\psi^*)$ を φ が $\psi\wedge\theta$ の形のときは、$(\psi^*)\wedge(\theta^*)$ をそれぞれ考えればよい。

Step 3.　φ が $\exists x\psi(x,x_1,\ldots,x_n)$ の形 (ただし $\psi(x,x_1,\ldots,x_n)$ は量化記号を含まない) のときは、仮定から $\psi(x,x_1,\ldots,x_n)$ にたいして、

$$T^{eq}\vdash\forall\bar{u}\forall\bar{u}_1\ldots\forall\bar{u}_n[\psi(f_E(\bar{u}),f_{E_1}(\bar{u}_1),\ldots,f_{E_n}(\bar{u}_n))\leftrightarrow\psi^*(\bar{u},\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)]$$

となる ψ^* が存在する。このとき

1. $T^{eq}\vdash\forall\bar{u}_1\ldots\forall\bar{u}_n[\exists\bar{u}\psi(f_E(\bar{u}),f_{E_1}(\bar{u}_1),\ldots,f_{E_n}(\bar{u}_n))\leftrightarrow\exists x\psi(x,f_{E_1}(\bar{u}_1),\ldots,f_{E_n}(\bar{u}_n))]$
2. $T^{eq}\vdash\forall\bar{u}_1\ldots\forall\bar{u}_n[\exists x\psi(x,f_{E_1}(\bar{u}_1),\ldots,f_{E_n}(\bar{u}_n))\leftrightarrow\exists x\exists\bar{u}[x=f_E(\bar{u})\wedge\psi(x,f_{E_1}(\bar{u}_1),\ldots,f_{E_n}(\bar{u}_n))]]$

が成り立つので、

$$T^{eq}\vdash\forall\bar{u}_1\ldots\forall\bar{u}_n[\exists x\varphi(x,f_{E_1}(\bar{u}_1),\ldots,f_{E_n}(\bar{u}_n))\leftrightarrow\exists\bar{y}\varphi^*(\bar{y},\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)]$$

が成り立つ。したがって $\exists\bar{y}\varphi^*(\bar{y},\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)$ が求めるものである。□

例 7 eq構造の命題をノーマルソートで表すことの例
eq構造 Z_5 での命題 $\bar{2}+\bar{3}=\bar{0}$ は $\forall u\forall v\forall w[f_5(u)+f_5(v)=f_5(w)\leftrightarrow\exists z(u+v=w+5z)]$ (f_5 は $f_5: Z\mapsto Z_5$ の同値類への関数) が成り立つので、ノーマルソート Z での命題 $\exists z(7+13=10+5z)$ と同値になる。正確には Z の eq構造の一部としての Z_5 には $+$ という関数は無いので、命題 $\bar{2}+\bar{3}=\bar{0}$ を L^{eq}-論理式では書くことはできない。

補題 6 から、L^{eq}-論理式は本質的に L-論理式で表すことができるので、理論 T の持つ性質は T^{eq} も持つことがわかる。

命題 8 M が T の κ-飽和モデルのとき、M^{eq} は T^{eq} の κ-飽和モデル。

証明 $A\subset M^{eq}, |A|<\kappa$ とする。a のソートが E_a であるとき、$f_{E_a}(\bar{b})=a$ となる $\bar{b}\in M$ を、各 a につき一つずつ集めたものを B とする。(各同値類の代表元を集めたもの) 任意のソート $E\in\mathcal{E}$ に属する任意のタイプ $p(x)\in S_E(A)$ が M^{eq} に解を持つことを示せばよい。(many sorted structure では、自由変数はあるソートに属している!) $\varphi(x,a_1,\ldots,a_n)\in p$ とすると、補題 6 から $\forall\bar{u}[\varphi(f_E(\bar{u}),a_1,\ldots,a_n)\leftrightarrow\varphi^*(\bar{u},\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n)]$ をみたす $L(B)$-論理式 $\varphi^*(\bar{u},\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n)$ が存在する。各 $\varphi(x,\bar{a})\in p$ にたいして、このような $\varphi^*(\bar{u},\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n)$ たちを集めたものを p^* とする。すると $L(B)$-論理式の集合である p^* は M^{eq} で有限充足的なので、M でも有限充足的になる。M は κ-飽和なので p^* の解 $\bar{c}$ を持ち、このとき $f_E(\bar{c})$ が p の解になっている。□

定義と証明は行わないが、いくつか代表的な性質を次に示す。

定理 9

1. T^{eq} は完全 (*complete*)
2. C^{eq} は T^{eq} の飽和モデル
3. 任意の $\lambda\geq|T|$ に対して、「T^{eq} が λ-安定である」ことと「T が λ-安定である」ことは同値

Shelah の定義は、many sorted 構造による定義ではなく、ソートに属することを表す述語記号 $P_E(\bar{x})$ が言語に含まれる。Many sorted 構造ではないので、変数 x はすべてのソートを動くことができ、論理式の集合 $\{\neg P_E(x)\}$ が無矛盾になる。従ってどのソートにも属していない元の満すタイプが存在し、C^{eq} が飽和ではなくなる点が異なる。

4 仮想元の消去 (Elimination of Imaginaries)

L^{eq}-理論 T^{eq} の定義 (定義 2) から、各仮想元 a ($\in C^{eq}$) にたいし、ある要素 $\bar{a}$ ($\in C$) と関数 f_E ($\in L^{eq}$) が存在し、$C^{eq}\models a=f_E(\bar{a})$ をみたしている。したがって $a\in dcl^{eq}(\bar{a})$ となるが、逆 $\bar{a}\in dcl^{eq}(a)$ は、一般的には成り立たない。しかしある特別な場合には、各仮想元 a ($\in C^{eq}$) にたいし、「$a\in dcl^{eq}(\bar{a})$ かつ $\bar{a}\in dcl^{eq}(a)$」となるようなある要素 $\bar{a}$ ($\in C$) が存在する。このようなときに、理論 T は仮想元を消去するという。ここでは仮想元消去を定義して、それと同値な条件を示し、最後に T^{eq} と代数閉体の理論が仮想元を消去することを示す。なお C 上の同型写像の全体を $Aut(C)$ で表し、$Aut(C)$ のうち集合 A ($\subset C$) の各点を固定したもの全体を $Aut_A(C)$ で表すことにする。

定義 10 (仮想元の消去) T を L-理論、$X(\subset C)$ を論理式で定義された集合、$\bar{b}$ ($\in C$) を有限列とする。

1. 任意の同型写像 $\sigma\in Aut(C)$ にたいして $\sigma(X)=X$ (*setwise fixed*) $\iff$ $\sigma(\bar{b})=\bar{b}$ (*pointwise fixed*) が成り立つとき、$\bar{b}$ を X のコード (*a code* または *a canonical parameter*) という。

2. 任意の論理式で定義された集合 $X(\subset \mathcal{C})$ がコードを持つとき、理論 T は仮想元を消去するという。

例 11 何も構造を持たない無限集合の理論を考える。2点集合 $\{a,b\}$ を考えると、$f(a)=b, f(b)=a$ となる同型写像 f は $a\hat{}b$ を固定しないので、何も構造を持たない無限集合の理論は仮想元を消去しない。

注意 12 L-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ で定義される集合 D に対して、同値関係 $E(\bar{y},\bar{y}') \equiv \forall\bar{x}[\varphi(\bar{x},\bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x},\bar{y}')]$ を考えると

$$\sigma(\bar{a}/E)=\bar{a}/E \iff E(\bar{a},\sigma(\bar{a})) \iff \forall\bar{x}[\varphi(\bar{x},\bar{a}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x},\sigma(\bar{a}))] \iff \sigma(D)=D$$

が成り立つので、もし $\mathcal{C}^{eq}$ の要素まで考えて良いなら、常にコードは存在する。また、この意味で、仮想元 $\bar{a}/E$ は集合 D と同一視できる。

仮想元消去の定義にはいくつかあり、次の系 16 の条件のいずれかを定義にしている。系 16 を示す前に、定義とふたつの補題を用意する。

定義 13 (definable, algebraic) a を要素、B を集合とする。

1. タイプ $tp(a/B)$ が a のみを解として持つとき、a は B 上 *definable* という。B 上 *definable* な元全体の集まりを $dcl(B)$ と書く。

2. 集合 $\{a' : a' \models tp(a/B)\}$ が有限のとき、a は B 上 *algebraic* という。B 上 *algebraic* な元全体の集まりを $acl(B)$ と書く。

eq 構造の中で考えていることを強調する場合は、$dcl(B), acl(B)$ ではなく、それぞれ $dcl^{eq}(B), acl^{eq}(B)$ と書くことにする。

補題 14 次は同値になる。

1. T は仮想元を消去する

2. 各 $a\ (\in \mathcal{C}^{eq})$ は、ある $\bar{b}\ (\in \mathcal{C})$ と互いに *definable* (すなわち $a \in dcl^{eq}(\bar{b})$ かつ $\bar{b} \in dcl^{eq}(a)$)

証明 $(2 \to 1)$ $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ で定義される $\mathcal{C}^n$ の部分集合を考える。$E(\bar{y},\bar{y}') \equiv \forall\bar{x}[\varphi(\bar{x},\bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x},\bar{y}')], \bar{a}/E\ (\in \mathcal{C}^{eq})$ と置く。仮定から、$\bar{a}/E$ と互いに definable になる $\bar{b} \in \mathcal{C}$ が存在するので、任意の同型写像 σ にたいして

$$\sigma(\bar{b})=\bar{b} \iff \sigma(\bar{a}/E)=\bar{a}/E \iff \forall\bar{x}[\varphi(\bar{x},\bar{a}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x},\sigma(\bar{a}))]$$

となり、$\varphi(\bar{x},\bar{a})$ はコード $\bar{b} \in \mathcal{C}$ を持つ。したがって、T は仮想元を消去する。

$(1 \to 2)$ 勝手に $a \in \mathcal{C}^{eq}$ を取ると、$a=\bar{a}/E$ となる $\bar{a} \in \mathcal{C}$ と同値関係 E が取れる。仮定から $E(\bar{x},\bar{a})$ のコード $\bar{c} \in \mathcal{C}$ が存在する。すると、任意の $\mathcal{C}^{eq}$ 上の同値関係 σ にたしいて

$$\sigma(\bar{c})=\bar{c} \iff \forall\bar{x}[E(\bar{x},\bar{a}) \leftrightarrow E(\bar{x},\sigma(\bar{a}))] \iff E(\bar{a},\sigma(\bar{a})) \iff \sigma(\bar{a}/E)=\bar{a}/E$$

となるので、a と $\bar{c}$ は互いに definable になる。□

補題 15 $\bar{b}$ を有限列、X を論理式で定義された集合とする。このとき次の二つは同値になる。

1. $\bar{b}$ は X のコード

2. 「X が $\varphi(\bar{x},\bar{b})$ で定義され、$\forall\bar{x}[\varphi(\bar{x},\bar{b}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x},\bar{b}')]$ ならば $\bar{b}=\bar{b}'$」をとなるような $L(\emptyset)$-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ が存在する

証明 $(1 \Leftarrow 2)$ 自明。$(1 \Rightarrow 2)$ $\bar{b}$ は X のコードであるとする。するとコンパクト性から、$X = \varphi(\mathcal{C}, \bar{b})$ となる L-論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ が存在する。ここで $p(\bar{y}) = tp(\bar{b})$ とおき、次のようなタイプ $p(\bar{y}) \cup p(\bar{y}') \cup \{\bar{y} \neq \bar{y}'\} \cup \{\forall x[\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{y}')]\}$ を考える。仮定からこのタイプは充足的でないので、$\psi(\bar{y}) \wedge \psi(\bar{y}') \wedge \forall x[\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{y}')] \to y = y'$ となる L-論理式 $\psi(\bar{y})$ が存在する。あらためて $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{y})$ を考えれば、$\bar{b}$ と X は条件を満たしていることがわかる。□

系 16 次の3つの条件は同値になる。

1. 理論 T は仮想元を消去する(論理式で定義された任意の集合はコードを持つ)
2. 任意の a $(\in \mathcal{C}^{eq})$ にたいし、ある $\bar{b}$ $(\in \mathcal{C})$ が存在して「$a \in dcl^{eq}(\bar{b})$ かつ $\bar{b} \in dcl^{eq}(a)$」 をみたす
3. 任意の論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ と $\bar{a}$ $(\in \mathcal{C})$ にたいし、ある論理式 $\psi_{\bar{a}}(\bar{x}, \bar{z})$ と唯一の $\bar{b}$ が存在し $\forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \psi_{\bar{a}}(\bar{x}, \bar{b})]$ となる

次に T^{eq} と代数閉体の理論が、仮想元を消去することを示す。

命題 17 任意の理論 T に対して、T^{eq} は仮想元を消去する。

証明 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ を $L(\emptyset)$-論理式、$A \subset \mathcal{C}$ を L-構造、$\bar{a} \in A$ とする。いま $E_\varphi(\bar{y}, \bar{y}') \equiv \forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{y}')]$ と置く。すると、任意の $\bar{b}, \bar{c}$ にたいして $E_\varphi(\bar{b}, \bar{c}) \Longleftrightarrow \forall \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{b}) = \varphi(\bar{x}, \bar{c})$ が成り立つので、任意の $\mathcal{C}^{eq}$ の同型写像 σ に関して $\sigma(\bar{a}/E_\varphi) = \bar{a}/E_\varphi \Longleftrightarrow E_\varphi(\bar{a}, \sigma(\bar{a})) \Longleftrightarrow \forall \bar{x}[\varphi(\bar{x}, \bar{a}) = \sigma(\varphi(\bar{x}, \bar{a}))]$ が成り立つ。したがって、$\bar{a}/E_\varphi$ は $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ のコード。

$\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ を $L^{eq}(\emptyset)$-論理式、$|\bar{x}| = m$、$|\bar{y}| = n$、$\bar{a} \in (\mathcal{C}^{eq})^n$ とする。$\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ が定義する $\mathcal{C}^{eq}$ の部分集合について考える。補題6から、

$$T^{eq} \vdash \forall \bar{u}_1 \ldots \bar{u}_m \bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n[\varphi(f_{E_1}(\bar{u}_1), \ldots, f_{E_m}(\bar{u}_m), f_{E_{m+1}}(\bar{v}_1), \ldots, f_{E_{m+n}}(\bar{v}_n)) \leftrightarrow \varphi^*(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)]$$

をみたす $\varphi^*(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$ が存在する。ここで

$$\forall \bar{u}_1 \ldots \bar{u}_m[\varphi^*(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n) \leftrightarrow \varphi^*(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \bar{v}_1', \ldots, \bar{v}_n')]$$

を $E((\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n), (\bar{v}_1', \ldots, \bar{v}_n'))$ と置く。今 $\bar{a} = a_1 \ldots a_n$、さらに各 $1 \leq i \leq n$ にたいし、$f_{E_{m+i}}(b_i) = a_i$ であるとする。すると、任意の $\mathcal{C}^{eq}$ の同型写像 σ にたいして、

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{x}, \sigma(\bar{a})) = \varphi(\bar{x}, \bar{a}) &\Leftrightarrow \varphi^*(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \sigma(\bar{b}_1), \ldots, \sigma(\bar{b}_n)) = \varphi^*(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) \\ &\Leftrightarrow \bar{b}_1 \ldots \bar{b}_n/E = \sigma(\bar{b}_1 \ldots \bar{b}_n/E)\end{aligned}$$

が成り立つので、$\bar{b}_1 \ldots \bar{b}_n/E$ が $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ のコードになる。□

eq 構造でない一般の構造は、eq 構造のように自分自身に仮想元を含んでいないので、一般的には仮想元を消去しない。しかし次に示すように、代数閉体の理論は仮想元を消去する。

定理 18 T_{ACF} (標数を固定した代数閉体の理論)は仮想元を消去する。

証明は、補題19と補題21による。補題19は「構造が strongly minimal (任意の論理式の解集合は有限か余有限) で $acl(\emptyset)$ が無限集合」であるという条件のみから示すことができ、代数閉体はこの条件を満している。また補題21は、任意の体で成り立つ。

補題 19 $\mathcal{C} \models T_{ACF}$、$X$ $(\subset \mathcal{C}^n)$ を L-論理式で定義された集合とする。任意の $\mathcal{C}$ の同型写像 σ にたいし、$\sigma(X) = X$ (*setwise*) $\Longleftrightarrow$ $\sigma(D) = D$ (*setwise*) をみたす有限集合 $D \subset \mathcal{C}^m$ が存在する。

証明 $\varphi(\bar{x}, a_1, \ldots, a_m)$ が X を定義しているとする。$\mathcal{C}^m$ 上の同値関係 $E(\bar{u}, \bar{v})$ を $\forall\bar{x}[\varphi(\bar{x}, \bar{u}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{v})]$ で定義する。任意の同型写像 σ にたいして、$\sigma(X) = X$ (setwise) $\iff$ $\sigma(\bar{a}/E) = \bar{a}/E$ である。

主張 20 $E(\bar{a}, \bar{b})$ をみたす、$\bar{a}/E$ 上 *algebraic* な元 $\bar{b}$ $(\in \mathcal{C}^m)$ が存在する。

証明 $\bar{b}$ として $E(\bar{b}, \bar{a})$ をみたし $j = |\{i \le m : b_i$ は $\bar{a}/E$ 上 algebraic $\}|$ が極大になる $\bar{b}$ をとる。$j = m$ を示せばよい。$j < m$ と仮定する。適当に並べ替えることで、$b_1, \ldots, b_j$ は $\bar{a}/E$ 上 algebraic かつ $b_{j+1}, \ldots, b_m$ は $\bar{a}/E$ 上 algebraic でないとしてよい。$Y = \{x \in \mathcal{C} : \exists y_{j+2} \ldots \exists y_n E((b_1, \ldots, b_j, x, y_{j+1}, \ldots, y_n), \bar{a})\}$ とおく。Y が有限であるとすると、Y のすべての元は $b_1 \ldots b_j \bar{a}/E$ 上 algebraic となり、したがって $\bar{a}/E$ 上 algebraic となる。これは、$\bar{b}$ の取り方に矛盾するので、Y は有限ではない。一方 Y が無限であるとすると、$\mathcal{C}$ は strongly minimal なので、Y は cofinite になる。さらに空集合上 algebraic な元は無限個あるので、Y は空集合上 algebraic な元 d を含む。すると Y の定義から、$E((b_1, \ldots, b_j, d, d_{j+1}, \ldots, d_n), \bar{a})$ となる $d_{j+1}, \ldots, d_n \in Y$ が取れ、j の極大性に矛盾する。したがって、$j = m$ である。□ (主張の証明終了)

D として、$\bar{b}$ の $\bar{a}/E$ 上の共役全体の集合を取る。前の主張から、D は有限集合である。$\bar{a}/E$ を固定する同型写像は、D を集合として固定する。D を集合として固定する同型写像 τ を考えると、$\tau(\bar{b}) \in D$ $(\bar{b} \in D)$ となるので、$\bar{a}/E$ も固定する。したがって任意の同型写像 σ にたいして、$\sigma(X) = X$ (setwise) $\iff$ $\sigma(D) = D$ (setwise) となっている。□ (補題の証明終了)

補題 21 F を体, n $(\in \omega), \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m \in F^n$ とし、$B = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m\}$ と置く。このとき、任意の F の同型写像 σ にたいして $\sigma(\bar{c}) = \bar{c}$ *(pointwise)* $\iff$ $\sigma(B) = B$ *(setwise)* をみたす $l \in \omega$ と $\bar{c} \in F^l$ が存在する。すなわち、任意の n $(\in \omega)$ にたいし、任意の F^n の有限部分集合はコードを持つ。

証明 $n = 1$ のときは $b_1, \ldots, b_m \in F$ なので、次の多項式を考える。

$$p(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - b_i) = X^m + \sum_{i=0}^{m-1} c_i X^i$$

すると c_i たちは、$b_1, \ldots, b_m$ の対称式で書けるので、$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ を集合として動かさない同型写像と $c_0 c_2 \ldots c_{m-1}$ を動かさない同型写像は同じになる。

一般の n の場合 $\bar{b}_i = d_{i,1}, \ldots d_{i,n}$ として、各 i $(1 \le i \le m)$ にたいして

$$q_i(X_1, \ldots, X_n, Y) = Y - \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} X_j$$

とする。次に

$$p(\bar{X}, Y) = \prod_{i=1}^{m} q_i(\bar{X}, Y)$$

とする。既約多項式への分解が一意であることから、任意の同型写像 σ にたいして、「$\sigma(p(\bar{X}, Y)) = p(\bar{X}, Y)$ $\iff$ σ は q_i たちの置換 $\iff$ σ は $\bar{b}_i$ たちの置換」が成り立つので、$\bar{c}$ として、$p(\bar{X}, Y)$ の係数たちを取れば良い。□

5 付録 A Shelah の方法

定義 22 (仮想元) $E(\bar{x}, \bar{y})$ を L-論理式で定義された同値関係 $(|\bar{x}| = |\bar{y}| = n)$ とし、$\bar{a} \in \mathcal{C}^n$ とする。

1. $E(\bar{x}, \bar{y})$ による同値類で、定義可能な部分集合 $\{\bar{b} \in \mathcal{C}^n : \models E(\bar{b}, \bar{a})\}$ が表す同値類を $\bar{a}/E(\bar{x}, \bar{y})$ と書き、$\bar{a}/E(\bar{x}, \bar{y})$ のことを仮想元 (*an imaginary element* または *an eq element*) と言う。以後、簡単のために $\bar{a}/E(\bar{x}, \bar{y})$ を $\bar{a}/E$ と書く。

2. 仮想元の集合 $\{\bar{a}/E : \bar{a} \in C^n\}$ を $E(\bar{x},\bar{y})$ によるソート (*a sort*) と言い、S_E と書く。

定義 23 (eq 構造) L を言語、A を L-構造とする。$E(\bar{x},\bar{y})$ は A 上の同値関係とする。このとき、構造 A^{eq} を以下のように定義する。

1. $|A^{eq}| = \bigcup_E S_E = \{a/E : n < \omega, \bar{a} \in C^n, E \in L\}$

2. A^{eq} の関係は以下で定義される。

   (a) $\bar{a}/E_1 = \bar{b}/E_2 \Leftrightarrow E_1 = E_2$ かつ $E_1(\bar{a},\bar{b})$

   (b) $P_E = \{\bar{a}/E : \bar{a} \in A\}$

   (c) $F_E : P_= \mapsto P_E\ F_E(\bar{a}) = \bar{a}/E$

   (d) 各 L-論理式 $\varphi(\bar{x})$ にたいして $R_\varphi = \{< \bar{a_1}/=, \ldots, \bar{a_n}/=>: \models \varphi(\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_n})\}$

3. $L^{eq} = L \cup \{F_E(\bar{x}) : E \in L\} \cup \{P_E(\bar{x}) : E \in L\}$

4. T^{eq} は A^{eq} の L^{eq}-理論とする。

補題 24 任意の L^{eq}-論理式 $\varphi(\bar{x})$ にたいして、T^{eq} で同値になる、以下の論理式たちのブール結合が存在する。

1. *True* または *False* を表す論理式

2. $x = y$

3. $P_E(x)$

4. $\bigwedge_{i=1}^n P_{E_i}(x_i) \to (\forall \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)[\bigwedge_{i=1}^n F_{E_i}(\bar{y}_i) = x_i \to R_\psi(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n)]$

定理 25

1. T^{eq} は完全 (*complete*)

2. C^{eq} は T^{eq} の飽和モデルではない

3. 任意の $\lambda \geq |T|$ に対して、「T^{eq} が λ-安定である」ことと「T が λ-安定である」ことは同値

6　付録B 仮想元消去に関する様々な性質

系 16 で示したように、仮想元消去と同値な条件として以下の条件がある。

事実 26 次の 3 つの条件は同値になる。

1. 理論 T は仮想元を消去する（論理式で定義された任意の集合はコードを持つ）

2. 任意の a $(\in C^{eq})$ にたいし、ある $\bar{b}$ $(\in C)$ が存在して「$a \in dcl^{eq}(\bar{b})$ かつ $\bar{b} \in dcl^{eq}(a)$」をみたす

3. 任意の論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ と $\bar{a}$ $(\in C)$ にたいし、ある論理式 $\psi_{\bar{a}}(\bar{x},\bar{z})$ と唯一の $\bar{b}$ が存在し $\forall \bar{x}[\varphi(\bar{x},\bar{a}) \leftrightarrow \psi_{\bar{a}}(\bar{x},\bar{b})]$ となる

上の条件が同値であることから、各々の条件のバリエーションをいくつか定義し、それらの持つ性質を示す。

定義 27 任意の $L(\emptyset)$-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ にたいし、ある $L(\emptyset)$-論理式 $\psi(\bar{x},\bar{z})$ が存在して「各 $\bar{a}$ $(\in C)$ にたいし、$\forall\bar{x}[\varphi(\bar{x}.\bar{a}) \leftrightarrow \psi(\bar{x},\bar{b})]$ となる $\bar{b}$ $(\in C)$ が唯一存在する」を満すとき、T は仮想元を一様に消去するという。(ψ の取り方は $\bar{a}$ に依存せず、φ にのみ依存する)

定理 28 $\emptyset$ 上定義される異なる二つの定数を含むとする。このとき、理論 T が仮想元を消去するならば、T は仮想元を一様に消去する。すなわち消去は、パラメータに依存せず、論理式の形にのみ依存する。

証明 L-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ を固定する。T は仮想元を消去するので、任意の $\bar{a} \in M$ にたいし、ある L-論理式 $\psi_a(\bar{x},\bar{z})$ と $\bar{b}_a \in M$ が存在する。ここで、次のような論理式の集合 $Th(M,a)_{a\in M} \cup \{\exists x[\varphi(\bar{x},\bar{y}) \not\leftrightarrow \psi_a(\bar{x},b_a)]\}_{a\in M}$ を考えると、これは矛盾する。したがって、

$$Th(M.a)_{a\in M} \vdash \forall\bar{y}\bigvee_{i=1}^{n}[\forall\bar{x}(\varphi(\bar{x},\bar{y}) \leftrightarrow \psi_{a_i}(\bar{x},\bar{b}_{a_i}))]$$

となる $\psi_{i_1},\ldots,\psi_{i_n},b_{i_1},\ldots,b_{i_n}$ が存在する。これらを新しく $\psi_1,\ldots,\psi_n,b_i,\ldots,b_n$ と置き直し、$l_i = (0,\ldots 0,1,0,\ldots,0)$ (全部で n 個、i 番目のみ 1 でそれ以外は全部 0) と置く。$\overline{\psi}(\bar{x},\bar{z}\bar{u}) \equiv \bigwedge_{i=1}^{n}(\bar{u}=l_1 \to \psi_1(\bar{x},\bar{v}))$ とする。すると、任意の $\bar{a}$ にたいし、ある $\bar{c}$ $(=l_i\bar{b}_i)$ が唯一存在して $M \models \forall\bar{x}[\varphi(\bar{x},\bar{a}) \leftrightarrow \overline{\psi}(\bar{x},\bar{b}_i l_i)]$ となるので、T は仮想元を一様に消去する。□

定義 29 A を L-構造とする。任意の要素 e $(\in A^{eq})$ にたいし、ある有限列 $\bar{b}$ $(\in M)$ が存在して「$e \in dcl^{eq}(\bar{b})$ かつ $\bar{b} \in acl^{eq}(e)$」をみたすとき、A は仮想元を弱く消去するという。また任意の自然数 n $(\in\omega)$ について、A^n の任意の有限集合 A_0 がコードを持つとき、A は *finite set property* を持つという。

定理 30 M が *strongly minimal* かつ $acl(\emptyset)$ が無限集合ならば、M は仮想元を弱く消去する。

証明 $acl(\emptyset)$ が無限なら、$acl^{eq}(\emptyset)$ も無限。勝手な $e \in M^{eq}$ にたいし、$L^{eq}(\emptyset)$-definable な関数 f と $\bar{b} \in M$ が存在して、$e = f(\bar{b})$ となるので $e \in dcl^{eq}(\bar{b})$ となる。次の主張が示せれば、定理は証明される。いま $lh(\bar{b}) = n$ とする。

主張 31 $\bar{c} \in acl^{eq}(e), e \in dcl^{eq}(\bar{c})$ となる $\bar{c} \in M^n$ が存在する。

主張の証明 $\exists x_2 \ldots \exists x_n(e = f(x_1,x_2,\ldots,x_n))$ を $\varphi_1(x_1)$ と置く。M は strongly minimal なので、$\varphi_1(M)$ は有限か余有限。$\bar{b}$ $(\in M^n)$ があるので、$\varphi_1(M)$ は空ではない。

Case 1. $\varphi_1(M)$ **が有限**

このとき c_1 として、$\varphi_1(c_1)$ をみたす $c_1 \in M$ を取る。すると $c_1 \in acl^{eq}(e)$ になっている。

Case 2. $\varphi_1(M)$ **が余有限**

仮定から $acl^{eq}(e)$ が無限なので、$c_1 \in M \cap acl^{eq}(e) \cap \varphi_1(M)$ となる c_1 が取れる。

この操作を n 回繰り返し、$c_1,\ldots,c_n$ $(=\bar{c})$ を決めると、$\bar{c} \in acl^{eq}(e)$ かつ $e \in dcl^{eq}(\bar{c})$ となっている。□
(主張の証明終了)

定理 32 次の二つは同値

1. M は仮想元を消去する

2. M は仮想元を弱く消去しかつ *finite set property* を持つ

参考文献

[1] Baldwin, John T., *Fundamentals of Stability Theory*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag

[2] Bouscaren, Elisabeth (Ed.), *Model Theory and Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1696, Springer

[3] Buechler, Steven, *Essential Stability Theory*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer

[4] Hodges, Wilfrid, *Model Theory*, Encyclopedia of mathematics and its applications 42, Cambridge

[5] Maker, D., Messmer, M., Pillay, A., *Model Theory of Fields*, Lecture Notes in Logic 5, Springer

[6] Makkai, M, *A survey of basic stability theory, with particular emphasis on orthogonality and regular types*, Israel Journal of Mathematics Vol. 49, Nos. 1-3, 1984

[7] Pillay, Anand, *Geometric Stability Theory*, Oxford Logic Guides 32, Oxford Science Publications

[8] Shelah, Sharon, *Classification Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol.92, NORTH-HOLLAND

[9] 坪井 明人, モデルの理論, 数学基礎論旨リーズ３巻, 河合文化研究所

[10] 吉澤 淳子, *Many sorted structure* について, 修士論文 1998 年 1 月, 筑波大学

[11] Wagner, Frank O., *Simple Theories*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers

安定理論と群

田中　克己

平成13年1月11日

1　安定性

1969年にShelahが[S]において定理と不安定な理論を区別しました．これはある理論について非可算な κ に対し，濃度 κ の非同形なモデルがいくつ存在するかを調べるために導入された概念です．

T を第1階述語言語 L の完全な理論とします．T が**不安定**とは，L のある論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ と T のモデル A と $\bar{a}_i \in A$ があって，

$$\forall i, j < \omega, A \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \Longleftrightarrow i < j$$

をみたすこととします．T が**安定**とは，それが不安定でないこととします．また，構造 A が安定とか不安定とかは $Th(A)$ が各々安定とか不安定のこととします．

定義から分かるとおり，有限な構造はすべて安定となります．ですから，以下では，T は第1階述語言語 L の完全な理論で，T のすべてのモデルは無限と仮定します．

定理 1 A を安定とします．

(a) $\bar{a} \in A$ に対し，$(A, \bar{a})$ も安定．

(b) 構造 B が A の中に解釈可能ならば，B は安定．

λ を無限基数とします．T が λ 安定とは，T の任意のモデル A と濃度 $\leq \lambda$ の任意の集合 $X \subset A$ に対し，$|S_1(X; A)| \leq \lambda$ をみたすこととします．ここで $S_1(X; A)$ は X 上の A における complete 1-type の全体の集合とします．構造 A が λ **安定**とは，$Th(A)$ が λ 安定のこととします．このとき，次が成り立ちます．

定理 2 次は同値になります．

(a) T は安定．

(b) 少なくとも1つの無限基数 λ について，T は λ 安定．

Proof. (a) $\Rightarrow$ (b) 今回はちょっと無理そうです．

(b) $\Rightarrow$ (a) には少し準備が必要です．

P, Q を線形順序集合とするとき，P が Q の中で**稠密**とは，

$$\forall b, c \in Q \;\; b < c \Longrightarrow \exists a \in P \quad b < a < c.$$

をみたすこととします．

補題 3 λ を無限基数とします．$|P| \leq \lambda < |Q|$ で P は Q の中で稠密となる線形順序集合 P と Q が存在します．

Proof. μ を $2^\mu > \lambda$ をみたす最小の基数とします．$\mu \leq \lambda$．長さ μ の 0-1 列の全体を ${}^\mu 2$ とします．この集合の濃度は $2^\mu > \lambda$ となります．集合 ${}^\mu 2$ に線形順序 $\prec$ を次のように入れます．

$$s \prec t \Longleftrightarrow \exists i < \mu \text{ s.t. } s|i = t|i \text{ and } s(i) < t(i)$$

${}^\mu 2$ の元のうちどこからか先が全て 1 が並ぶ列の全体を X とします．$Q = {}^\mu 2 \setminus X$ なる線形順序集合を考えます．Q の元であるところから先が全て 0 となる列の全体を P とおきます．μ の取り方から，$|X|, |P| = \sum_{\kappa<\mu} 2^\kappa \leq \lambda$ となり，$|Q| > \lambda$ となります．このとき，P は Q で稠密となります．□

補題 4 A を L-構造，λ を無限基数，$X \subset A$ を濃度 λ の集合とします．ある自然数 n に対し，$|S_n(X;A)| > |X|$ となるとき，A は λ 安定にはなりません．

Proof. n についての帰納法で示します．$n = 1$ のとき，そのままです．$n > 1$ とします．各 $r \in S_n(X;A)$ に対し，$(n-1)$ 項 $\bar{b}_r$ と元 c_r を選び，A のある初等拡大 B_r の中で，n 項 $\bar{b}_r{}^\frown c_r$ が r をみたすとします．$\lambda \geq |L|$ より，各 B_r は濃度 λ としていいです．いま，タイプ $tp_{B_r}(\bar{b}_r/X)$ を q_r と表すことにすると，これは，A についての X 上の complete $(n-1)$-type になります．ここで，二つの場合に分かれます．

ひとつは，相異なるタイプ q_r の数は高々 λ とします．λ^+ は正則基数ですから，濃度 λ^+ の集合 $S \subset S_n(X;A)$ が存在して，$r \in S$ のとき，すべての q_r は等しくならなければなりません．$s \in S$ をひとつ固定して，各 $r \in S$ に対して，$q_r = \{\varphi(\bar{b}_s, x) : \varphi(x_0, \cdots, x_{n-1}) \in r\}$ とおきます．このとき，$r \in S$ なる $q\prime_r$ 達は $X \cup \{\bar{b}_s\}$ 上の異なる 1-type となります．

ふたつめは，λ 個以上の異なるタイプ q_r があるとしましょう．このとき，λ 個以上の X 上の $(n-1)$ タイプがあります．帰納法の仮定より示される．□

定理 2 の (b) $\Rightarrow$ (a) の証明．T を不安定とします．定義から，T のモデルと論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ が存在します．$\varphi(\bar{y}, \bar{x})$ を $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \neg\varphi(\bar{y}, \bar{x})$ で置き換える．φ は T のモデルの元の対上の非対称な関係を定義すると思おう．P と Q を補題 3 にあるようなものだとします．各 $s \in P$ に対し，定数の新しい対 $\bar{c}_s$ を取り，理論

$$U = T \cup \{\varphi(\bar{c}_s, \bar{c}_t) : \;\; s \prec t \;\; \text{in} P\}$$

を考えます．コンパクト性定理より，U はモデル B を持ちます．ここで，B の濃度は λ 以下に取ることができます．$A = B|L$ とします．Q の任意の元 r に対し，論理式の集合

$$\Phi_r(\bar{x}) = \{\varphi(\bar{c}_s, \bar{x}) :\ s \prec r\} \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{c}_t) :\ r \prec t\}$$

を考えます．集合 Φ_r は A についての $dom(A)$ 上でのタイプになります．これの complete type への拡張をひとつ $p_r(\bar{x})$ を取ります．Q で $r \prec r'$ ならば，稠密性より，$r \prec s \prec r'$ なる s が P に存在します．したがって，$p_r \neq p_{r'}$ となり，$r \in Q$ なる complete type p_r が λ 個より多く存在する．

つまり，$dom(A)$ 上の n タイプが λ より多く存在することが示せました，ただし，$n = lh(\bar{x})$. 補題 4 から，T は λ 安定ではないことが分かります．これで，定理 2 の (b) $\Rightarrow$ (a) が示せました．□

2 安定な論理式

ここでは T を言語 L の完全な理論とします．自由変数として $\bar{x}$ 達と $\bar{y}$ 達を含む L の論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ を考えます．φ の n-ladder とは，T のあるモデル A の元対の列 $(\bar{a}_0, \cdots, \bar{a}_{n-1}, \bar{b}_0, \cdots, \bar{b}_{n-1})$ で

$$\forall i, j < n,\ A \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \Leftrightarrow\ i \leq j.$$

をみたすものとします．φ が**安定な**論理式とは，ある自然数 n があって，φ の n-ladder が存在しないこととし，そうでないとき**不安定**とよぶことにします．

補題 5 理論 T が不安定 $\Longleftrightarrow$ T について L の不安定な論理式が存在する．

Proof. $(\Leftarrow)$ T が不安定な論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ をもつとします．すると φ は各 n に対し n-ladder をもちます．新しい定数記号を導入し，理論

$$T \cup \{\varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) :\ i \leq j < \omega\} \cup \{\neg\varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) :\ j < i < \omega\}$$

この集合の任意の有限部分集合はモデルをもちます．十分大きな n に対し，n-ladder を取ってやればいいです．コンパクト性定理より，T のあるモデル A が存在して，$\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ $(i < \omega)$ が不安定の条件をみたすように取ってこれます．各 $i < \omega$ に対し，$\bar{c}_i = \bar{a}_i\bar{b}_i$ とおき，$\psi(\bar{x}\bar{x}', \bar{y}\bar{y}') = \neg\varphi(\bar{y}, \bar{x}')$ とします．このとき，

$$A \models \psi(\bar{c}_i, \bar{c}_j) \Leftrightarrow A \models \neg\varphi(\bar{a}_j, \bar{b}_i) \Leftrightarrow i < j,$$

となり，ψ が $(\bar{c}_i : i < \omega)$ 上の線形順序になります．したがって，T は不安定になります．

$(\Rightarrow)$ はお任せします．□

すべての加群が安定であることは知られています．ここでは，安定な群はある種の極小条件をみたすことを示します．まず，構造 A が **group-like** とは A のある制限が群になることとします．その制限のことを考えて，A の群とよぶことにします．**安定群**とは，安定な group-like な構造のこととします．後には，この定義もより一般化されることと思いますが．

補題 6 *(Baldwin-Saxl).* L を言語, A を安定群である L-構造とします. G を A の群とします. $\varphi(x,\bar{y})$ を L の論理式とします. $\bar{b}\in A$ のとき, $\varphi(A,\bar{b})$ の形の G の定義可能部分群の全体を S と表します. $\bigcap S$ を S の群の任意個の共通部分達すべての集合とします. このとき,

(a) ある自然数 n があって, $\bigcap S$ の中の任意の群は S のうち高々 n 個の共通部分として表せます.

(b) ある自然数 m があって, $\bigcap S$ の中に長さ $>m$ の包含関係による鎖は存在しません.

Proof. n を φ が n-ladder をもたないような最小の n とします (これを, ladder index とよぶ). $n<k<\omega$ とし, 部分群 $H_i=\varphi(A,\bar{b}_i)$ $(i<k)$ が存在して, どの H_i も $\bigcap_{j\neq i}H_j$ をすべて含むようなことはないとします. 各 i に対して, $h_i\in\bigcap_{j\neq i}H_j\setminus H_i$ を選びます. $a_0=1$, $a_{i+1}=h_0\cdot\cdots\cdot h_i$ と表すことにします. すると, $A\models\varphi(a_i,\bar{b}_j)\Leftrightarrow i\leq j$. これは n の選び方に反します.

$\bigcap_f$S を S の有限個の群の共通部分全体の集合とします. $\bigcap_f$S の中の各群は $\psi(A,\bar{c})$ の形で表せる. ここで, $\psi(x,\bar{z})=\varphi(x,\bar{y}_0)\wedge\cdots\wedge\varphi(x,\bar{y}_{n-1})$ の形.

A は安定だから, ψ も ladder-index をもち, それを m としておきましょう. G の部分群の狭義の上昇列

$$\psi(A,\bar{c}_0)\subset\cdots\subset\psi(A,\bar{c}_m)$$

があったとしましょう.

$a_0\in\psi(A,\bar{c}_0)$ として, 各 $i\leq m$ に対して, $a_i\in\psi(G,\bar{c}_i)\setminus\psi(G,\bar{c}_{i-1})$ を選びます. すると, $A\models\varphi(a_i,\bar{c}_j)\Leftrightarrow i\leq j$. これは m の選び方に反します.

したがって, $\bigcap_f S=\bigcap S$. そうでないとすると, 部分群 $\varphi(A,\bar{d}_i)$ $(i<\omega)$ が存在して, $\bigcap_{j<i}\varphi(A,\bar{d}_j)$ は狭義の減少列をなし, $\bigcap_f$ S の極小条件に反します. これで, (a) と (b) が同時に証明できました. □

群 G における部分集合 X の**中心化群** $C_G(X)$ は X の任意の元と可換な元 $g\in G$ 全体のなす群です. つまり, $C_G(X)=\bigcap_{g\in X}C_G(g)$ です. ここで, $C_G(g)=\varphi(A,g)$ で, $\varphi(x,y)$ は L の論理式 $x\cdot y=y\cdot x$ で表されます. Baldwin-Saxl lemma より, 安全群は中心化群の極小条件をみたす (M_C-群).

参考文献

[BS] J.Baldwin and J.Saxl *Logical stability in group theory*, J. Austral. Math. Soc 21(1976)267-276.

[H] Wilfrid Hodges *Model Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[S] S.Shelah *Stable theories*, Israel J. of Math 7(1969)187-202.

One-Based Groups

池田宏一郎（豊田工業高等専門学校）

平成12年8月7日

構造が1-basedという概念の定義は技術的であるが、その概念はHrushovskiの結果はもとより、現代のモデル理論の様々な所に現れる。ここでは特に、構造が群である場合について考察し、

1-basedな群は“ほとんど”アーベル群である

ことを示すのを主な目標とする。

1 1-Basedな構造

性質1（論理式のcanonical base）． M をモデル、$X \subset M$ を定義可能な集合とする。このとき u を X の **canonical base**（記号：$\mathrm{Cb}(X)$）とすると
(1) X は u 上定義可能；
(2) 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(M)$ に対して，$\sigma(u) = u \Leftrightarrow \sigma(X) = X$.

性質2（タイプのcanonical base）． M をモデル，$p \in S(M)$ とする。このとき v を p の **canonical base**（記号：$\mathrm{Cb}(p)$）とすると
(1) $v \in M$;
(2) 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(M)$ に対して，$\sigma(v) = v \Leftrightarrow \sigma(p) = p$.

定義（代数的な元）． $\bar{a}$ が A 上**代数的** $\Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ $\bar{a}$ が有限個しか解をもたないような A 上の論理式の解になっている。（記号：$\bar{a} \in \mathrm{acl}(A)$）

定義 (1-based). (1) 安定な理論 T が **1-based**$\Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ 任意のモデル M と M 上のタイプ $p = \mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ に対して、$\mathrm{Cb}(p) \in \mathrm{acl}(\bar{a})$
(2) 構造 M が **1-based**$\Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ $\mathrm{Th}(M)$ が1-based.

例． 無限アーベル群は1-based.（アーベル群の定義可能集合は、$\emptyset$ 上定義可能な群の剰余類のBoolean combinationになっているという事実を用いて示される。）

2 ω安定な群

定義（Morleyランク）.

1. 定義可能な集合 X の **Morleyランク** $\mathrm{RM}(X)$ を次のように定義する：
   - $\mathrm{RM}(X) \geq 0 \Leftrightarrow X \neq \emptyset$;
   - $\mathrm{RM}(X) \geq \delta$ (極限順序数) $\Leftrightarrow$ すべての $\alpha < \delta$ に対して $\mathrm{RM}(X) \geq \alpha$
   - $\mathrm{RM}(X) \geq \alpha + 1 \Leftrightarrow \mathrm{RM}(X \cap X_i) \geq \alpha$ を満たすような定義可能な X_i 達 $(i < \omega)$ で互いに交わりがないものが存在する；
2. $\mathrm{RM}(X) = \infty \Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ すべての α に対して $\mathrm{RM}(X) \geq \alpha$;
3. $\mathrm{RM}(p) =_{\mathrm{def}} \min\{\mathrm{RM}(X) : X \in p\}$
4. $\mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ は $\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$ の意。

注意 3. $\mathrm{RM}(a/A) = 0 \Leftrightarrow a \in \mathrm{acl}(A)$

定義 (ω **安定**). 理論 T が ω **安定** (ω**-stable**)$\Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ 任意の可算モデル M に対して $S(M)$ も可算。

性質 4. (1) T が ω 安定 $\Leftrightarrow \mathrm{RM}(x = x) < \infty$.
(2) $A \subset B$ のとき、$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/B) \Leftrightarrow \bar{a} \downarrow_A B$.

定義（**連結な群**）. G を ω 安定な群とする。このとき
(1) G が**連結** (**connected**) $\Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ G の定義可能な真部分群で指数有限になるものがない。
(2) G の定義可能な部分群 H が G の**連結成分** $\Leftrightarrow_{\mathrm{def}}$ H は指数有限で連結。

性質 5. ω 安定な群は必ず連結成分をもつ。

定義 (**生成元**). G を ω 安定な群、$A \subset G$、$X \subset G$ は A 上定義可能であるとする。このとき a が A 上 X の**生成元** (**generic**) であるとは、次の条件をみたすことである：
(i) $X \in \mathrm{tp}(a/A)$;
(ii) $\mathrm{RM}(X) = \mathrm{RM}(a/A)$.

性質 6. G を ω 安定な群、$G^* \succ G$, $g, h \in G^*$ とする。このとき、g が G 上 G の生成元で $g \downarrow_G h$ であるならば、gh も G 上 G の生成元（特に、$gh \downarrow G$）。

証明. $G' \prec G^*$ を $G \cup \{h\} \subset G'$ かつ $G' \downarrow_{G\cup\{h\}} g$ となるように取ると、

$$\mathrm{RM}(g/G) = \mathrm{RM}(g/G \cup \{h\}) = \mathrm{RM}(g/G') = \mathrm{RM}(gh/G') \leq \mathrm{RM}(gh/G).$$

よって g が G 上の生成元であることより

$$\mathrm{RM}(G) = \mathrm{RM}(gh/G) \leq \mathrm{RM}(G)$$

であるので、gh も G の G 上の生成元。■

3 定理

補題. G が 1-based な群、H が G の定義可能な部分群で連結であるとする。このとき H は $\mathrm{acl}(\emptyset)$ 上定義可能。

証明. $u = \mathrm{Cb}(H)$ として $u \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ を示せばよい（性質 1(1))。G^* を十分大きなモデルとする。g, G', h, p, v をそれぞれ次の様に取ってくる：

- g は G の G 上の生成元；
- $G' \prec G^*$ は $G \cup \{g\}$ を含むモデル；
- h は H の G 上の生成元で $h \downarrow_G G'$；
- $p = \mathrm{tp}(gh/G')$;
- $v = \mathrm{Cb}(p)$.

まず、次の主張を示す。
主張 1 ：$u \in \mathrm{acl}(v)$
証明：任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(G')$ に対して

$$\sigma(v) = v \Rightarrow \sigma(u) = u$$

を示せば十分。まず $\sigma(v) = v$ より $\sigma(p) = p$(性質 2(2)) ． ここで $g_1 = \sigma(g), H_1 = \sigma(H)$ とすると

$$\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(h/G') = \mathrm{RM}(H) \geq \mathrm{RM}(gH \cap g_1H_1).$$

一方、$gH \in p$ であるので $g_1H_1 \in \sigma(p) = p$. よって

$$\mathrm{RM}(gH \cap g_1H_1) \geq \mathrm{RM}(p).$$

以上より

$$\mathrm{RM}(H) = \mathrm{RM}(gH \cap g_1H_1) = \mathrm{RM}(H \cap H_1).$$

よって H が連結であることより $H = H_1$. 従って性質 1(2) より $\sigma(u) = u$. □
主張２：$u \in \mathrm{acl}(\emptyset)$
証明：G が 1-based であることから $v \in \mathrm{acl}(gh)$ であるので主張１より

$$u \in \mathrm{acl}(gh).$$

一方、g は G 上の生成元で $g \downarrow_G h$ なので、性質 6 より $gh \downarrow G$. よって $u \in G$ に注意すると $gh \downarrow u$. 従って注意 3 より $u \in \mathrm{acl}(\emptyset)$ を得る。□ ■

定理. 1-based な群 G は abelian by finite. (すなわち、G の定義可能な部分アーベル群で指数有限のものが存在する。)

証明. G の連結成分 (性質 5 より存在する) がアーベル群であることを示せば十分。よって G は連結であると仮定する。各 $g \in G$ に対して、$H_g = \{(a, a^g) : a \in G\}$ とする。
主張１：H_g は連結.
証明：$\tau_g : a \to (a, a^g)$ とすると、τ_g は G から H_g への定義可能な群同型。よって G が連結であることより H_g も連結。□

よって補題より H_g は $\mathrm{acl}(\emptyset)$ 上定義可能であるので
主張２：H_g 達は有限個しかない。
主張３：$|G/Z(G)| < \omega$.
G が連結であることより、$G = Z(G)$。よって G はアーベル群。■

系. G を安定な群とする。このとき次は同値：
(i) G は 1-based;
(ii) 各 $n < \omega$ に対して、G^n の定義可能な部分集合は G^n の $\mathrm{acl}(\emptyset)$ 上定義可能な部分群の剰余類の Boolean combination になっている。

参考文献

- 坪井明人，モデルの理論，河合文化教育研究所
- Bouscaren, Elisabeth (ed.), Model theory and algebraic geometry, Lecture Notes in Mathematics, Springer
- Wagner, Frank O., Stable groups, Cambridge University Press

Hyperimaginaries and canonical bases

Byunghan Kim
(note taken by Hisatomo Maesono)

(In the following, T denotes a complete theory of a language L. And we work in a sufficiently large saturated model M as usual.)

Definition Let T be any theory.

A *hyperimaginary element* is an equivalence class of a type-definable euivalence relation over $\emptyset$ on $M \times M \times \cdots \times M \times \cdots$.

Let $E(\bar{x}, \bar{y})$ be a type-definable equivalence relation over $\emptyset$ on $M^{|\bar{x}|}$ and $\bar{a} \in M^{|\bar{x}|}$. ($\bar{x}$ can be infinite.)

$\bar{a}/E$ is a hyperimaginary element.

Example Any element, tuple $\bar{a} \in M^n$ is a hyperimaginary by $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n$.

Any imaginary element $a \in M^{eq}$ is a hyperimaginary by a definable equivalence relation over $\emptyset$, $E(\bar{x}, \bar{y})$ where $a = \bar{b}/E$ for some $\bar{b}$.

The set of hyperimaginaries $\supseteq M^{eq}$.

Up to certain level, one can deal with hyperimaginaries as ordinary elements.

Let $\bar{a}, \bar{b} \in M$ and $E(\bar{x}, \bar{y}), F(\bar{z}, \bar{w})$ be type-definable equivalence relations over $\emptyset$ where $|\bar{a}| = |\bar{x}| = |\bar{y}|$ and $|\bar{b}| = |\bar{z}| = |\bar{w}|$. And let a_E, b_F denote $\bar{a}/E, \bar{b}/F$ respectively.

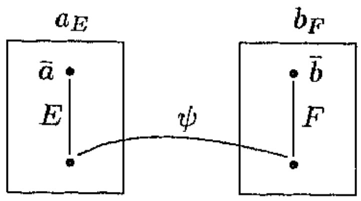
(1) How to define $tp(a_E/b_F)$? We desire

$tp(a_E/b_F) = tp(c_E/b_F)$

if and only if

there is a $f \in Aut(M)$ such that $f(a_E) = c_E$ and f fixes b_F where $Aut(M)$ is the automorphism group of M.

Hence, $tp(a_E/b_F)$ can be the partial type $r(\bar{x}, \bar{b}) = \bigcup\{r_\psi(\bar{x}, \bar{b}) \mid \bar{a} \models r_\psi(\bar{x}, \bar{b}), \psi(\bar{y}, \bar{z})$
$\in L-\text{formula}\}$ where $r_\psi(\bar{x}, \bar{b}) = \exists \bar{y}\bar{z}[E(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{y}, \bar{z}) \wedge F(\bar{z}, \bar{b})]$, so that for any $\bar{c}$, $r(\bar{c}, \bar{b})$ iff $tp(a_E/b_F) = tp(c_E/b_F)$.



(In the following, we abbreviate tuples $\bar{a}, \bar{b}, \cdots$ to $a, b, \cdots$.)

(2) Definition

Let d, e be hyperimaginaries.

We write $e \in dcl(d)$ if whenever $f \in Aut(M)$ fixes d, then f fixes e.

Let $p(x) = tp(a_E/b_F)$ and $e \in dcl(b_F)$.

We write $p\lceil e$ for $tp(a_E/e)$. So if $c \models p(x)$ for some c, then $c \models p\lceil e$.

(3) Dividing

Let a, b, c_E be hyperimaginaries where $c \in M$, E is a type-definable equivalence relation over $\emptyset$ and c_E is the class of c modulo E. And let $r(x)$ be the partial type which means $tp(a/b)$.

We say that $tp(a/b)$ *divides over* c_E if there is a formula $\psi(x)$ implied by $r(x)$ such that $\psi(x)$ divides over some d with $d_E = c_E$.

Fact *Let a, b, c_E be hyperimaginaries.*
$tp(a/b)(= r(x))$ divides over c_E
if and only if
there is $k < \omega$ such that
for any infinite cardinal λ, there are automorphism images $r_i(x)(i < \lambda)$ of $r(x)$ over c_E such that
$\{r_i(x) \mid i < \lambda\}$ is $k-$inconsistent.

In some simple theories, it is not necessary to deal with hyperimaginaries.

Definition Let T be any theory.

We say that T has the *elimination of hyperimaginaries* (We write T has *e.h.i.*.) if for any hyperimaginary e, there is $A \subseteq M^{eq}$ such that $e \in dcl(A)$ and $A \subseteq dcl(e)$.

It is known that ;
if T is stable, then T has *e.h.i.* and
if T is supersimple, then T has *e.h.i.*.

¿From now on, we assume that T is simple and has the elimination of hyperimaginaries. So we work in M^{eq}.

Terminology Let $A \subseteq M^{eq}$.
We write $\overline{A}$ for $acl^{eq}(A)$.
And let $p \in S(\overline{A})$.
We say that p is an *amalgamation base* or *base type*.
(Under the assumption of T, strong types are Lascar strong types.)

Fact *Let A, B, C be subsets of M^{eq}.*
Then $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,_C B$ if and only if $\overline{A} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,_{\overline{C}} \overline{B}$
where " $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ " means the nonforking independence.

Definition Let $p(x) \in S(A)$ and $q(x) \in S(B)$ for some A, B.
We say that p and q are *parallel* (we write $p \parallel q$) if p and q have a common nonforking extension *i.e.* for some c with $c \models p \cup q$, $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,_A AB$ and $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,_B AB$.

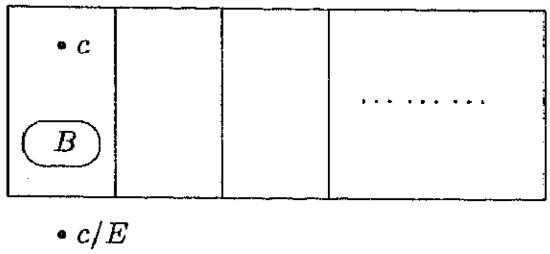
Canonical base

Fact *Let T be stable and $p(x) \in S(A)$ for some A with $A = \overline{A}$.*
Then there is $A_p \subseteq A$ such that for any $f \in Aut(M)$, f fixes A_p pointwise if and only if $p \parallel f(p)$.

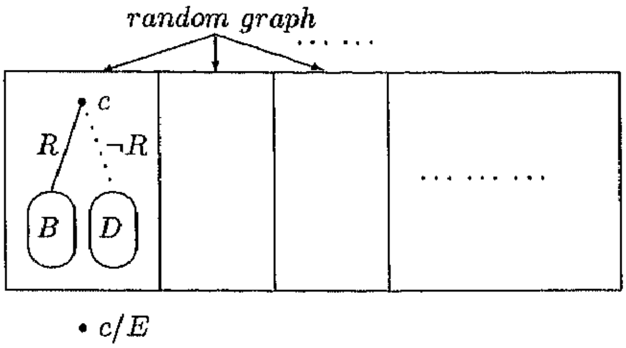
Fact *Let T be simple and has e.h.i..*
And let $p(x) \in S(A)$ for some A with $A = \overline{A}$.
Then there is $A_p \subseteq A$ such that for any $f \in Aut(M)$,
f fixes A_p pointwise
if and only if
there are $n < \omega$ and $g_i (i < n) \in Aut(M)$ such that
$p \parallel g_0(p) \parallel \cdots \parallel g_{n-1}(p) \parallel f(p)$
if and only if
there is $g \in Aut(M)$ such that $p \parallel g(p) \parallel f(p)$.

In the two facts above, we call A_p the *canonical base of* p, and write $Cb(p)$.

Example (1) Consider a theory T_1 of a language $L_1 = \{E(x, y)\}$ which consists of one binary relation. The axioms of T_1 say that $E(x, y)$ is an equivalence relation and has infinitely many infinite classes. Thus T_1 is stable. Take a set B and an element c ($\notin B$) in some equivalence class. And let $A = B \cup \{c/E\}$. So $A = \overline{A}$. Now let $p = tp(c/A)$. Then for any $f \in Aut(M)$, $p \parallel f(p)$ if and only if $p \cup f(p)$ is consistent. And clearly for any $f \in Aut(M)$, $p \cup f(p)$ is consistent if and only if $f(c/E) = c/E$. Hence $c/E \in A$ is the canonical base of p.



(2) Consider a theory T_2 of a language $L_2 = \{E(x,y), R(z,w)\}$ which consists of two binary relations. The axioms of T_2 say that $E(x,y)$ is an equivalence relation and has infinitely many infinite classes, and each equivalence class makes the random graph by the adjacent relation $R(z,w)$. Thus T_2 is simple and has *e.h.i.*.(In fact, T_2 is supersimple.) Take sets B, D and an element c ($\notin B, D$) in some equivalence class satisfying; $B \cap D = \emptyset$, $|B| = |D|$, and for any $b \in B$ and $d \in D$, $\models R(c,b) \wedge \neg R(c,d)$. Let $A = B \cup D \cup \{c/E\}$. So $A = \overline{A}$. And let $p = tp(c/A)$. Now for any $f \in Aut(M)$, $p \cup f(p)$ is consistent if and only if $p \parallel f(p)$. But there is $g \in Aut(M)$ such that $g(c/E) = c/E$ and $g(B) = D$. Thus clearly $p \cup g(p)$ is not consistent, much less $p \parallel g(p)$. However for any $h \in Aut(M)$, $h(c/E) = c/E$ if and only if there is $h' \in Aut(M)$ such that both $p \cup ! h'(p)$ and $h'(p) \cup h(p)$ are



In the following, we write B_c for $Cb(tp(c/B))$.

Property of canonical base (*);
for c, $A \subseteq B$,
$c \perp_A B$ if and only if $B_c \subseteq \overline{A}$.
(We know that $B_c \subseteq \overline{B}$.)

Exercise Let $A \subseteq B$.
(1) $c \perp_A B$ if and only if $\overline{B_c} = \overline{A_c}$.

(2) $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A B$
if and only if
there is a Morley sequence $c^\frown I$ over both A and B where $I = \{c_i \mid i < \omega\}$.

(proof of (1))
Let $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A B$. By the property $(*)$ above, $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{A_c} A$. And by the transitivity of forking, $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{A_c} B$. By $(*)$ again, $B_c \subseteq \overline{A_c}$. Similarly by $(*)$, $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{B_c} B$. Thus $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{B_c} A$. By $(*)$ again, $A_c \subseteq \overline{B_c}$. Conversely let $\overline{B_c} = \overline{A_c}$. By $(*)$, $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{A_c} B$. As $A_c \subseteq \overline{A}$, $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A B$.

(proof of (2))
We use the next fact;

Fact *Let p be a Lascar strong type and $\{a_i \mid i < \omega\}$ a Morley sequence of p.*
Then $Cb(p) \in dcl(\{a_i \mid i < \omega\})$.

Now let $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A B$. Take a Morley sequence $c^\frown I$ over B. By the transitivity of forking, it is also a Morley sequence over A. Conversely let $c^\frown I$ be a Morley sequence over A and B. Thus $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A I$ and $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_B I$. By the fact above and $(*)$, $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_I A$ and $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_I B$. Hence by (1), $\overline{A_c} = \overline{(AI)_c} = \overline{I_c} = \overline{(BI)_c} = \overline{B_c}$. Then by (1) again, $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_A B$.

There is analogy between notions between stable theories and simple theories;

$$\begin{cases} \text{stable}: & \text{nonforking independence} \quad \text{Cb} \quad \text{stationarity} \\ \text{simple}: & \text{nonforking independence} \quad \text{Cb} \quad \text{Independence Theorem} \end{cases}$$

By combining these analogous notions, results on stable theories can be extended to the context of simple theories.

GROUPS IN SIMPLE THEORIES

FRANK WAGNER

ABSTRACT. We review the basic properties of simple and supersimple theories, and of supersimple groups.

1. SIMPLICITY

Let us recall the basic definitions of simplicity theory:

Definition 1. Let A be a set of parameters.

(1) A linearly ordered sequence $(a_i : i \in I)$ of tuples is (order-) *indiscernible* over A, or A-*indiscernible*, if for all $n < \omega$ and all $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ and $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$ we have $\mathrm{tp}(a_{i_1} \dots a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}(a_{j_1} \dots a_{j_n}/A)$.

(2) Let $k < \omega$. A family of partial types $(\pi_i(x) : i \in I)$ is k-*inconsistent* if every subfamily of size k is inconsistent.

(3) Let $\pi(x)$ be a partial type over some parameter set B. We say that π *divides* over A if there is an infinite A-indiscernible sequence $(B_i : i < \omega)$ with $B_0 = B$ which is k-inconsistent for some $k < \omega$.

(4) A tuple a is *independent* of B over A, denoted $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A B$, if $\mathrm{tp}(a/AB)$ does not divide over A.

(5) A set C is independent of B over A, denoted $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A B$, if $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_A B$ for all finite tuples $a \in C$.

Recall that $D(\pi(x), \varphi(x,y), k)$ is the maximal height of an ω-splitting tree such that

- the root is $\pi(x)$,
- the nodes are formulas of the form $\varphi(x, a)$ for some parameter a,
- the successors of a node form a k-inconsistent family, and
- all branches are consistent.

We write $D(a/A, \varphi, k)$ instead of $D(\mathrm{tp}(a/A), \varphi, k)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 03C45; Secondary: 20F22.

Key words and phrases. Simple theory, definable group.

The author should like to thank the organizers of the Logic Summer School 2000 at Yamanakako.

Theorem 1.1. [KIM] *Let T be a complete first-order theory. The following are equivalent:*

1. *T is simple.*
2. *$\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ is symmetric.*
3. *$D(\pi, \varphi, k) < \omega$ for all partial types π, all formulas φ and all $k < \omega$.*

Moreover, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ if and only if $D(\mathrm{tp}(a/AB), \varphi, k) = D(\mathrm{tp}(a/A), \varphi, k)$ for all formulas φ and all $k < \omega$.

Condition 2. may be taken as an easy definition of simplicity. We shall usually say *non-forking* rather than *non-dividing.*

Corollary 1.2. *Non-forking is type-definable. In other words, if p is a complete type over A and $\Phi(x, a)$ is a partial type, the condition $\exists x \models p\, [x \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A a \wedge \Phi(x, a)]$ is equivalent to a partial type in a over A.*

Proof: The partial type will express $D(p(x) \cup \Phi(x, a), \varphi, k) = D(p, \varphi, k)$ for all formulas φ and all $k < \omega$. ■

Theorem 1.3. [KIM, PILLAY] *In a simple theory, independence $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ satisfies*

1. EXISTENCE *If $p \in S(A)$, then p does not fork over A.*
2. EXTENSION *Every partial type over B which does not fork over A has a completion which does not fork over A.*
3. REFLEXIVITY *$B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ if and only if $B \subseteq \mathrm{acl}(A)$.*
4. MONOTONICITY *If p and q are types with $p \vdash q$ and p does not fork over A, then q does not fork over A.*
5. FINITE CHARACTER *$D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ if and only if $\bar{d} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ for every finite $\bar{d} \in D$.*
6. SYMMETRY *$D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ if and only if $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A D$.*
7. TRANSITIVITY *$D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A BC$ if and only if $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ and $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_{AB} C$.*
8. LOCAL CHARACTER *For any $p \in S(A)$ there is $A_0 \subseteq A$ with $|A_0| \leq |T|$, such that p does not fork over A_0.*
9. INDEPENDENCE THEOREM *If M is a model, $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M B$, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M A$, $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_M B$ and $\mathrm{tp}(a/M) = \mathrm{tp}(b/M)$, then $\mathrm{tp}(a/A) \cup \mathrm{tp}(b/B)$ is consistent and does not fork over M.*

Conversely, any automorphism-invariant ternary relation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}$ with the above properties is forking independence, and the underlying theory is simple.

Remark 1. In a stable theory, the independence theorem is trivially true, since types over models have unique non-forking extensions: if c realizes the non-forking extension of $\mathrm{tp}(a/M)$ to ABM, then $c \models$

$\mathrm{tp}(a/A) \cup \mathrm{tp}(b/B)$. We get a characterization of *stability* if we replace condition 9. by condition

9$'$. BOUNDEDNESS If M is a model and $A \supseteq M$, then any type over M has a unique non-forking extension to A.

2. SUPERSIMPLICITY

We shall now define a particular class of simple theories. We work in a monster model of a simple theory. Let On^+ denote the class of ordinals together with an extra symbol ∞ (where $\alpha < \infty$ for every ordinal α, and $\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty + \infty = \infty$).

Definition 2. The *SU-rank*, or *Lascar rank SU*, is the least function from the collection of all types (over parameters in the monster model) to On^+ satisfying for every ordinal α:

$SU(p) \geq \alpha + 1$ if there is a forking extension q of p with $SU(q) \geq \alpha$.

Recall that every ordinal α can be written as a finite sum $\sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} n_i$ for ordinals $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$ and natural numbers $n_1, \ldots, n_k$; this sum is unique if we require all summands to be non-zero. (This is called the *Cantor normal form* of α.) If $\beta = \sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i} m_i$, then the *commutative sum* $\alpha \oplus \beta$ is defined to be $\sum_{i=1}^{k} \omega^{\alpha_i}(n_i + m_i)$; note that $\oplus$ is the smallest symmetric increasing function f from pairs of ordinals to ordinals which satisfies $f(\alpha+1, \beta) = f(\alpha, \beta) + 1$. Clearly, if α and β are finite, then $\alpha + \beta = \alpha \oplus \beta$.

Lascar rank satisfies the following important inequalities, which can be considered a refinement of forking symmetry (in case the ranks are ordinal):

Theorem 2.1. LASCAR INEQUALITIES

$$SU(a/bA) + SU(b/A) \leq SU(ab/A) \leq SU(a/bA) \oplus SU(b/A).$$

Moreover, if $SU(a/AB) < \infty$, then $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A B$ if and only if $SU(a/AB) = SU(a/A)$, so Lascar rank characterizes non-forking.

Definition 3. A theory is *supersimple* if $SU(p) < \infty$ for all types p.

The disadvantage of Lascar rank is that it only ranks complete types, but not formulas. We shall therefore introduce a second rank on formulas:

Definition 4. The *D-rank*, or *Shelah rank D*, is the least function from the class of all consistent formulas to On^+ satisfying

$D(\varphi(\bar{x})) \geq \alpha + 1$ if there is a formula $\varphi'(\bar{x})$ which forks over the parameters of $\varphi(\bar{x})$, such that $\varphi'(\bar{x}) \vdash \varphi(\bar{x})$ and $D(\varphi'(\bar{x})) \geq \alpha$.

For a partial type π we put $D(\pi) = \min\{D(\varphi) : \pi \vdash \varphi\}$.

Remark 2. It is easy to see that

$$D(\varphi(x) \vee \psi(x)) = \max\{D(\varphi(x)), D(\psi(x))\}.$$

Hence $D(\varphi) = \max\{D(p)$:p a complete type containing $\varphi\}$, and a formula can be completed to a type of the same Shelah rank.

Remark 3. If $D(a/AB) < \infty$ and $a \not\perp_A B$, then $D(a/A) > D(a/AB)$. However, Kim has constructed a supersimple theory and tuples $a \perp_A B$ with $D(a/AB) < D(a/A)$, so equality of Shelah rank does not necessarily characterize non-forking. However, it does so in a super*stable* theory.

Proposition 2.2. *$SU(p) \leq D(p)$, for any type p.*

Proof: We prove by induction on α that if $SU(p) \geq \alpha$, then $D(p) \geq \alpha$. This is trivial for $\alpha = 0$ or limit ordinals. So suppose $SU(p) \geq \alpha + 1$. Hence there is a forking extension q of p with $SU(q) \geq \alpha$. By inductive hypothesis, $D(q) \geq \alpha$. But q contains a formula φ which forks over the domain of p. So if $\psi \in p$ is such that $D(\psi) = D(p)$, then $\varphi \wedge \psi$ forks over the parameters of ψ, and

$$D(p) = D(\psi) \geq D(\psi \wedge \varphi) + 1 \geq D(q) + 1 \geq \alpha + 1. \qquad \blacksquare$$

Theorem 2.3. *The following are equivalent:*

(1) *T is supersimple.*
(2) *$D(p) < \infty$ for all types p.*
(3) *For all a, A there is a finite $A_0 \subseteq A$ such that $a \perp_{A_0} A$.*

Proof: Since $SU(p) \leq D(p)$, the implication 2. $\Rightarrow$ 1. is trivial. Suppose 1. holds and consider a type $\text{tp}(a/A)$. There is finite $A_0 \subseteq A$ such that $SU(a/A_0)$ is minimal possible. Then $SU(a/A_0b) = SU(a/A_0)$ for all finite tuples $b \in A$, whence $a \perp_{A_0} A$, and 3. holds.

Finally, suppose 2. does not hold. Then there is a sequence $(\varphi_i(x, a_i) : i < \omega)$ of formulas such that $\varphi_i(x, a_i)$ divides over $(a_j : j < i)$ for all $i > 0$. Let b realize $\{\varphi(x, a_i) : i < \omega\}$, and consider a finite subset A_0 of $\{a_i : i < \omega\}$. If n is the maximal index of an element in A_0, then $\varphi(x, a_{n+1})$ divides over A_0, so $b \not\perp_{A_0} \{a_i : i < \omega\}$. Hence $\text{tp}(b/a_i : i < \omega)$ is not based on a finite subset, and 3. does not hold. $\blacksquare$

It is important to note that both Lascar and Shelah rank are invariant under definable bijections (using no new parameters). In other words, if f is an A-definable bijection, then $SU(a/A) = SU(f(a)/A)$ and $D(a/A) = D(f(a)/A)$.

Remark 4. In stability theory, there is a third rank, *Morley rank MR*, which grows at least as fast as Shelah rank; a theory is called *ω-stable* if Morley rank takes only ordinal values. However, so far there is no analogue in simplicity theory neither for Morley rank nor for ω-stability.

3. Groups

Let us first specify what we mean by a group. There are several possibilities:

(1) A *pure* group, i.e. a structure $\langle G, 1, *\rangle$.
(2) A *impure* group, i.e. a structure $\langle G, 1, *, \ldots\rangle$.
(3) A *definable* group, i.e. a definable set G in some structure M, together with a definable group law $*$ and a constant 1.
(4) A *type-definable* group, i.e. a set G given by a partial type in some structure M, together with a definable group law $*$ and a constant 1. There are two subcases:
    (a) a $\bigcap$-definable group, which is given as the intersection of definable subgroups of a definable group, and
    (b) a $\bigwedge$-definable group, which is just given as the intersection of a family of arbitrary sets.
(5) A *hyperdefinable* group, whose universe is a type-definable set modulo a type-definable equivalence relation E, and whose group-law is induced by a ternary E-invariant relation. This is the right context for simple theories in general, but too complicated for the purposes of this introduction.

Recall Poizat's Theorem of the Separation of Parameters:

Theorem 3.1. [Poizat] *Suppose M is stable, and X is a definable subset of M. Then X is definable with parameters in X.*

This clearly implies that as far as groups definable in stable structures are concerned, we may restrict ourselves to impure groups. However, this is no longer the case for simple theories:

Example 1. Consider the structure $\langle M, G, R, *, 1\rangle$, where G is an infinite co-infinite subset of M such that $\langle G, *, 1\rangle$ is an elementary abelian 2-group, and R is the random bipartite graph on $(G, M - G)$. Then for $x \in M - G$ the set $\{g \in G : \models R(g, x)\}$ is not definable with parameters in G. Hence the ambient structure may be essential for the collection of definable subsets of a definable, and *a fortiori* of a type-definable or hyperdefinable group in a simple theory.

4. Supersimple groups

In this section, we consider a group G which is type-definable in a supersimple structure M.

Suppose that G contains realizations of types over $\emptyset$ of all possible Lascar ranks. Let $p(x)$ be a type over M which extends the partial type $x \in G$, and has maximal Shelah rank possible. Such a type exists by Remark 2; note that $D(g/M) = D(g/\emptyset)$ and $g \perp M$. If p is realized by h, then $hg \models G$ for any $g \in G$, so by translation invariance of the ranks $D(hg/M) = D(g/M)$ is maximal possible, whence $D(hg/M) = D(hg/\emptyset)$ and $hg \perp M$. Now by translation invariance

$$\begin{aligned} SU(h/M) &= SU(hg/M) = SU(hg) \\ &\geq SU(hg/g) = SU(h/g) = SU(h/\emptyset), \end{aligned}$$

whence $SU(h/M)$ is maximal possible. It follows that a type-definable group in a supersimple theory has types of maximal Lascar rank; such types are called *generic*. We can put $SU(G) = SU(p)$ and attribute a Lascar rank to G (remember that in general Lascar rank is only defined for complete types).

Remark 5. It is unknown whether a type is generic if and only if it has maximal Shelah rank. We have just seen that types of maximal Shelah rank are generic, but the converse is open.

Lemma 4.1. *Let $p \in S(M)$ be generic, and $h \models p$. Then $hg \perp M, g$ for any $g \models G$ with $g \perp_M h$.*

Proof: $SU(hg/M, g) = SU(h/M, g) = SU(h/M)$ is maximal possible, whence $SU(hg/M, g) = SU(hg/\emptyset)$ and $hg \perp M, g$. ■

If M is merely simple, this property is used to define generic types:

Definition 5. Let G be a type-definable group in a simple structure. An element $h \models G$ is *left generic* over M if $gh \perp M, g$ for all $g \models G$ with $g \perp_M h$.

The definition of *right generic* is analogous; one can show that left genericity is the same as right genericity, and generic types always exist.

Lemma 4.2. *Let* $\mathrm{tp}(g/M)$ *be left generic in a supersimple structure M. Then $SU(g/M) = SU(G)$.*

Proof: Take $h \models G$ with $h \perp_M g$. Then $h \perp M, g$ and

$$\begin{aligned} SU(g/M) &= SU(g/M, h) = SU(hg/M, h) = SU(hg/\emptyset) \\ &\geq SU(hg/g) = SU(h/g) = SU(h/\emptyset) \end{aligned}$$

is maximal possible. ■

Corollary 4.3. *If M is supersimple, the following are equivalent for a type $p \in S(M)$ extending $x \in G$:*

(1) *p is left generic.*
(2) *p is right generic.*

(3) $SU(p) = SU(G)$.

We shall now relate the Lascar rank of G with the rank of its subgroups.

Definition 6. Let H be a type-definable subgroup of G. The index of H in G is *bounded* if there is some κ such that $|G : H| \leq \kappa$ in every model of the theory.

By compactness, the index of H in G is unbounded if and only if there is an infinite indiscernible sequence $(g_i : i \in I)$ with $g_iH \neq g_jH$ for $i \neq j$.

Proposition 4.4. *Let H be a type-definable subgroup of G. Then $SU(H) = SU(G)$ if and only if the index of H in G is bounded.*

Proof: Suppose the index of H in G is unbounded, and let $(g_i : i < \omega)$ be an indiscernible sequence with $g_0H \neq g_1H$. Then $g_0H \cap g_1H = \emptyset$; by compactness (and indiscernibility) there is a definable superset X of H with $g_iX \cap g_jX = \emptyset$ for all $i < j$. Then g_0X is a formula which divides over $\emptyset$. It follows that any type extending $x \in g_0H$ forks over $\emptyset$, and has Lascar rank less than $SU(G)$. Thus $SU(H) = SU(g_0H) < SU(G)$.

Conversely, if the index of H in G is bounded, let $(g_i : i \in I)$ be a system of representatives for G/H, and consider a generic g for G over $(g_i : i \in I)$. Then there is $i \in I$ with $g_i^{-1}g \in H$, and

$$SU(G) = SU(g/g_i) = SU(g_i^{-1}g/g_i) \leq SU(H). \quad \blacksquare$$

Corollary 4.5. *In a supersimple structure, a descending chain of groups each of unbounded index in its predecessor, is finite.*

Proof: Each group has smaller Lascar rank than its predecessor. $\blacksquare$

Definition 7. Let A be a subset of M. The *A-connected component* G_A^0 of G is the smallest type-definable subgroup of G of bounded index. A generic type for G_A^0 is called a *principal* generic type over A.

Using the Erdös-Rado Theorem, one can show that $|G : G_A^0| \leq 2^{|T(A)|}$.

Remark 6. Clearly $G_A^0 \geq G_B^0$ for $A \subseteq B$, and in general the inequality may be strict. However, in a *stable* theory, the connected component does not depend on the underlying parameter set by the Baldwin-Saxl Theorem.

Example 2. Let $\langle V, +, 0, (.,.)\rangle$ be a vector space over a finite field with a non-degenerate bilinear form. Then V is supersimple of SU-rank 1. For every subset A of V the A-connected component is given by $\bigcap_{a \in A}\{v \in V : (a, v) = 0\}$, and decreases as A increases.

Definition 8. If $p(x) \in S(M)$ extends $x \in G$ and $g \in G$, let $gp = \{\varphi(x) : \varphi(g^{-1}x) \in p\}$.

The translate gp is a complete type over M. Moreover, if $h \models p$ then $gh \models gp$. In a stable group, we may now put $\mathrm{stab}_G(p) = \{g \in G : p = gp\}$, and obtain a type-definable subgroup of G. However, in the simple case this subgroup no longer has to be type-definable.

Definition 9. Let $p(x) \in S(M)$ extend $x \in G$. We put

$$S(p) = \{g \in G : gp \cup p \text{ does not fork over } \emptyset\}.$$

The *stabilizer* of p, denoted $\mathrm{stab}(p)$, is the set $S(p) \cdot S(p)$.

Similar notions exist for translations on the right rather than on the left.

Remark 7. If $g \in S(p)$, then there is a realization $h \models p$ with $gh \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M g$ and $gh \models p$. Then

$$SU(h/M, g) = SU(gh/M, g) = SU(gh/M) = SU(p) = SU(h/M).$$

Hence $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M g$, and $g^{-1} \in S(p)$.

Using local ranks, the same result can be shown in the merely simple case.

Note that by Corollary 1.2 both $S(p)$ and $\mathrm{stab}(p)$ are type-definable over M.

Lemma 4.6. *Let X be a non-empty type-definable subset of G such that $g^{-1}g' \in X$ for any two independent $g, g' \in X$. Put $Y = X \cdot X$. Then Y is a type-definable subgroup of G, and X is generic in Y. In fact, X contains all generic types for Y.*

Proposition 4.7. *Let M be a model, and $p \in S(M)$ extend $x \in G$. If $g, g' \in S(p)$ with $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M g'$, then $gg' \in S(p)$. Furthermore,* $\mathrm{stab}(p)$ *is a subgroup of G and $S(p)$ contains all generic types for* $\mathrm{stab}(p)$.

Proof: Suppose $g, g' \in S(p)$ with $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M g'$. Then there are $h, h' \models p$ with $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M h$, $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M gh$, $g' \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M h'$ and $g' \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M g'h'$, such that $gh, g'h' \models p$. By the Independence Theorem, we may suppose $h = g'h'$ and $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M g, g'$. So $gg'h' = gh \models p$; as $h \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{M,g} g'$ implies $gg'h' \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{M,g} g'$, transitivity yields $gg'h' \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_M g, g'$ and $gg' \in S(p)$. As $S(p)$ is closed under inversion, the rest follows from Lemma 4.6. ∎

Theorem 4.8. *Let $p \in S(M)$ extend $x \in G$. Then* $\mathrm{stab}(p) \leq G^0_M$, *and equality holds if and only if p is generic for G.*

Proof: The equivalence relation given by $xy^{-1} \in G^0_M$ is type-definable over M with boundedly many classes. Since M is a model, every class is definable over M, and any type $p(x) \in S(M)$ extending $x \in G$

must specify its equivalence class, i.e. its coset modulo G^0_M. Hence $\mathrm{stab}(p) \le G^0_M$.

Now suppose p is generic for G, and let g, g' be independent realizations of p. Then $g'g^{-1}$ is generic and independent of g and of g' over M; moreover $(g'g^{-1})g = g'$. It follows that $g'g^{-1} \in S(p)$, so $S(p)$ is generic for G, as is $\mathrm{stab}(p)$. Hence $\mathrm{stab}(p) \ge G^0_M$, and we have equality.

Conversely, if $\mathrm{stab}(p) = G^0_M$, then there is $g \in S(p)$ which is generic for G. As $g \in S(p)$, there is $g' \models p$ with $g' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M g$, $gg' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_M g$, and $gg' \models p$. As $\mathrm{tp}(g/M)$ is generic, so is $\mathrm{tp}(g/M, g')$, whence also $\mathrm{tp}(gg'/M, g')$. It follows that $p = \mathrm{tp}(gg'/M)$ is generic for G. ■

By symmetry G^0_M is also the right stabilizer of the generic types for G over M.

References

[1] B. Kim, *Simple first order theories*, Ph. D. thesis, University of Notre Dame, 1996.

[2] B. Kim, *Forking in simple unstable theories*, Journal of the London Math. Soc., 57:257–267, 1999.

[3] B. Kim and A. Pillay, *Simple theories*, Annals of Pure and Applied Logic, 88:149–164, 1997.

[4] S. Shelah, *Simple unstable theories*, Annals of Math. Logic, 19:177–203, 1980.

[5] Frank O. Wagner. *Simple Theories*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.

Frank O Wagner, Institut Girard Desargues (Lyon 1), Université Claude Bernard, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne-Cedex, France

E-mail address: `wagner@desargues.univ-lyon1.fr`

Webpage: `http://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/wagner/fowae.html`