

波場解析における緩勾配方程式の Green 関数について

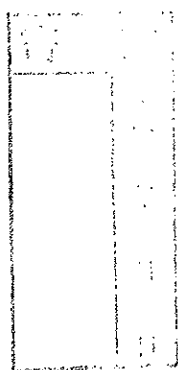
1993年3月

加藤 俊太郎

波浪場解析における緩勾配方程式の Green 関数について

1999年3月

藤井信太郎



## 要 旨

Green 関数法は、境界が複雑で回折・多重反射・透過といった平面変形が卓越するような波浪場の解析に対してきわめて合理的な解析手法である。近年、この手法の非一様水深場への拡張として、一様水深場における点源波の厳密解である Hankel 関数に代わり、緩勾配方程式の放物型近似式の数値解を用いる手法が提案された。ここで、数値的な取り扱いが困難となる特異点近傍では、便宜上一様水深を仮定して Hankel 関数が用いられている。これは、境界近傍に一様水深を仮定することにより、最終的に得られる波浪場の数値解に影響することが考えられる。本研究では特異点近傍に緩勾配方程式の級数解を、遠方には放物型近似式を新たに導出しその数値解を用いることで Green 関数を構成する。従って点源近傍の水深変化を考慮することが可能となる。また級数解および放物型近似式の導出手法は、緩勾配方程式に含まれる仮定のみを用いる体系的な手法であるので、他の工学分野で重要となるような変数係数偏微分方程式の Green 関数の導出にも適用可能である。次に任意水深場における新たな波源強度算定法を提案する。この場合、波源強度はその点での波の振幅勾配のみでは決定されず、境界上すべての強度が相互に影響し合う。これは境界より発した波が屈折により同一境界に再入射する効果を表す。この効果は、実港湾のような底面勾配が緩やかな地形においても有意となる。最後に Green 関数を計算する際に問題となる計算領域外の仮想地形の影響について、具体的に数値解析を行って検討し、実用上この影響は極めて小さいことを示す。

# 目 次

## 要旨 目次

1. 序 論.....	1
1. 1 はじめに.....	1
1. 2 平面波浪場解析のモデル方程式.....	1
1. 3 Green 関数法を用いた波浪場解析とその任意水深場への拡張 .....	4
1. 4 本研究の概要.....	5
2. 平面波浪場の基礎方程式.....	6
2. 1 一様水深場の基礎方程式.....	6
2.1.1 Helmholtz 方程式の導出.....	6
2.1.2 Hankel 関数.....	9
2. 2 任意水深場の基礎方程式.....	10
2.2.1 緩勾配方程式の導出.....	10
2.2.2 緩勾配方程式の Helmholtz 型方程式への変換.....	17
2. 3 Green の定理.....	18
2.3.1 Green の定理の導出.....	18
2.3.2 Helmholtz 型方程式への応用.....	19
2. 4 Green 関数法.....	21
3. 緩勾配方程式の Green 関数.....	22
3. 1 一様水深場の Green 関数構成法.....	22
3.1.1 一様水深場の Green 関数.....	22
3.1.2 特異点近傍の級数解.....	25
3.1.3 Helmholtz 方程式の放物型近似式.....	26
3.1.4 級数解と放物型方程式の接合.....	27
3. 2 任意水深場の Green 関数構成法.....	29
3.2.1 特異点近傍の級数解.....	29
3.2.2 緩勾配方程式の放物型近似式.....	31
3.2.3 級数解と放物型方程式の接合.....	33
3. 3 Green 関数構成法の特徴.....	35
3. 4 数値計算法.....	36

3. 5	数値素解の精度.....	39
3.5.1	一様水深場における点源波.....	39
3.5.2	平行等深線斜面上における点源波.....	40
3. 6	任意水深場における Green 関数の相反性.....	43
3.6.1	Helmholtz 型方程式の特徴.....	43
3.6.2	数値素解の相反性.....	47
3.6.3	Green 関数の相反性と Green の定理.....	52
4.	半無限平面における波動解.....	54
4. 1	半無限平面内の波動に関する Green 関数.....	54
4. 2	直線境界に到達する波.....	55
4. 3	直線境界から発する波.....	59
4. 4	鏡像法の任意水深場への拡張性.....	63
5.	境界条件.....	65
5. 1	無障害接続条件.....	65
5. 2	閉境界.....	67
5. 3	有限長開境界における解の接続.....	69
6.	密度法の詳細.....	73
6. 1	基本姿勢.....	73
6. 2	計算領域の分割.....	73
6. 3	分布波源強度の算定.....	74
6.3.1	直線境界に入射する波の法線方向勾配の算定.....	74
6.3.2	入射境界における分布波源強度.....	75
6.3.3	閉境界における分布波源強度.....	77
6.3.4	開境界における分布波源強度.....	78
6.3.5	漸次補正および収束判定方法.....	81
6. 4	計算領域外地形の影響.....	82
7.	数値計算による境界条件の検討.....	84
7. 1	半無限長壁面境界.....	84
7. 2	波源強度に及ぼす波源相互作用項の寄与.....	87
8.	結論.....	89

参考文献.....	90
謝辞.....	92
Appendix	
A.1 緩勾配方程式に対する Green の定理.....	93
A.2 緩勾配方程式の級数解の導出.....	96
A.3 放物型近似式の導出法とその問題.....	99
A.4 級数解と放物型近似式の接合.....	105
A.5 郭・西村の手法による放物型近似式の導出.....	108
A.6 波向き線法による波峰線方程式の厳密解.....	110
A.7 複素振幅 $f$ , $\phi$ の水深 $h$ に対する依存性.....	115

# 第1章 序論

## 1. 1 はじめに

海岸工学分野の技術開発・計画・設計に従事するものにとって、波の場の解析は最も基本的な課題である。近年、経済の発展に伴い、防災の受動的な観点以外に、沿岸域の利用開発というより積極的な観点が重視されるようになったが、これらのすべてにおいて波浪場の解析が基本となる。海岸浸食、構造物周辺の洗掘、港湾・河口の埋没といった底質の移動現象、汚染拡散、さらには水産とも深い関わりを有する海浜流もまた、波の場から生じるものである。

通常の場合、波浪は深海域における海上風によって発生・発達し、浅海域においては様々な要因による変形を生じながら伝播する。深海域から入射した波浪は、浅海域において水深が変化することにより浅水変形を生じ、主に波高が変化する。等深線に対して波が斜めに入射すると屈折が起こって波向と波高が変化する。防波堤や突堤・離岸堤等の構造物がある場合、まず構造物の前面では反射が起こる。また、構造物の背面に波が回り込む回折も生じる。さらに水深が波高と同程度まで小さくなると、最も複雑で急激な波浪変形である碎波が起こる。また、海浜流や潮流を始めとする流れが存在する場合には、波と流れの相互干渉によって波浪変形が起こる。その他にも海底摩擦による波浪減衰などが考えられる。海岸工学上の多くの問題においては、長期間にわたる波浪観測結果あるいは波浪推算結果に基づいて深海での設計沖波波浪条件がまず与えられる。しかし、対象海域はしばしば浅海域であるから、与えられた沖波波浪の浅海域における変形を考慮して、対象地点での波浪条件を決定する必要が生じる。すなわち、浅海域における平面波浪場の予測計算が必要となる。平面波浪場の計算が必要となる代表的な工学的課題としては、構造物の設計計算、港内静穏度計算、海域静穏度計算、海浜流計算、汚染・温水拡散計算、海浜変形計算、景観設計などが挙げられる。

## 1. 2 平面波浪場解析のモデル方程式

平面波浪場の解析において、流体運動は鉛直方向を含めて3次元的な運動となる。従って、厳密には3次元の支配方程式を解く必要があるが、平面波浪場の計算対象となる領域の広さと現在の計算機の容量・速度を勘案するとこれは現実的ではない。このため、支配方程式を鉛直方向に積分して2次元問題に還元したモデル方程式を解き、これを用いて平面波浪場の解析を行う。2次元の支配方程式を導く際の考え方や仮定には種々のものがあり、その違いによって

それぞれ特徴を有する複数のモデル方程式が得られることになる。

波浪変形の諸要因は、境界条件の違いによって大きく、屈折系と回折系に分類される。屈折系とは水深が変化する場合の底面境界条件、つまり波速の非一様性が主因となる波浪変形であり、屈折と浅水変形が含まれる。回折系とは地形もしくは構造物の存在による側方境界条件が主因となる波浪変形であり、回折の他、平面境界で生じる反射や透過（伝達）も含まれる。砕波は、他のいずれとも性質の異なる複雑で難解な現象であるため、平面波浪場の予測計算においては、現状では経験的事実に基づいてモデル化するしかない。また、波と流れの相互干渉は、屈折または回折における付加的な波浪変形要素として取り込まれる。このように考えると、屈折および回折がまず基本的な波浪変形として挙げられる。研究の初期には屈折と回折のモデル方程式は独立に導かれ、実務的な問題に応じてそれぞれ用いられてきた。後に、緩勾配方程式（mild-slope equation）が導かれたことによって屈折と回折を同時に考慮することが出来るようになった。

屈折に対するモデル方程式としては、波向線法と呼ばれる方法に用いられる基礎方程式が一般的であり、Keller（1958）によって理論的に導かれた。この方法は、屈折計算においては最も初歩的な手法であり、波向き線を決めるための方程式（eikonal equation）と波高を決めるためのエネルギー保存式から成り立っている。波向き線方程式は1階の微分方程式であるため、数値計算は容易であるから、広領域の計算も可能である。また Karlsson（1969）によってエネルギー平衡方程式が導かれている。これは規則波の重ね合わせによる多方向不規則波の屈折計算を直接行うためのエネルギー保存式であり、本質的には波向き線法と同等である。

回折に対しては、微小振幅性と一様水深の仮定下で Helmholtz 方程式が導かれ、半無限堤の場合の解を始めとしていくつかの解析解が得られている。Helmholtz 方程式では、局所的な波浪場は進行波的なものに限られず重複波的なものを含む任意のものでよく、これが回折効果を許容している。また、平面境界条件を課すことにより、反射や透過を含む波浪場の計算が可能である。この方程式は、線形重ね合わせにより不規則波に適用することも出来る。一般的な条件に対する数値計算では、Helmholtz 方程式を積分方程式に変換して解く境界要素法（Barailler and Gaillard, 1967；Lee, 1971；Nishimura ら, 1994）が用いられている。また、不規則波の回折の数値計算を効率的に行うために開発された手法に、高山の方法（高山, 1981）がある。これは半無限防波堤防および島堤による規則波の回折に対する Sommerfeld の解析解を基本に使っているという点で、Helmholtz 方程式と同じく、微小振幅性と一様水深を仮定している。この方法は、大規模な港に対しても不規則波による港内静穏度を近似的ではあるが比較的短時間で計算することが出来る。しかし、防波堤からの回折と



反射を重ね合わせるため、多重反射が著しい港には適さない。

傾斜海浜上に構造物が設置されているような場合には、屈折と回折が同時に起こることになる。このような場合には、構造物近傍で回折のみを考慮し、それ以外で屈折のみを考慮するという便宜的な方法が取られてきた (Dunham, 1951)。しかし、Berkoff (1972) によって導かれた緩勾配方程式は屈折と回折を同時に含む基礎方程式であり、非定常緩勾配方程式や放物型波動方程式等種々の変形された形の方程式が派生的に提案されている。

緩勾配方程式では、微小振幅・緩勾配の仮定を設けているものの、任意の水深に適用でき、海底勾配の影響による屈折効果も入る。この方程式は屈折と回折を同時に含む方程式であるから、浅水変形、屈折、回折、および反射にはそのまま適用できる。また、線形方程式なので、重ね合わせ法により不規則波への適用も可能であり、碎波モデルの組み込みも行われている (Yu, 1992)。なお、実際には1/3までの海底勾配に適用可能であることが確かめられている (Berkoffら, 1982)。

緩勾配方程式では、屈折、回折、反射を同時に取り扱うことが出来るが、2階楕円型の偏微分方程式であり、数値的に扱い難い。そこで、緩勾配方程式との等価性を保ちつつ、数値的に取り扱いやすい形としたものが非定常緩勾配方程式である。西村ら (1983) は流速を水深方向に積分した線流量に相当する新たな物理量を導入することにより、緩勾配方程式を運動方程式と連続式に相当する1階の連立偏微分方程式系に変換した。一方、緩勾配方程式との等価性よりも線流量の物理的意味合いを重視した渡辺ら (1984) のモデルもある。

非定常緩勾配方程式を用いる場合には、時間ステップ毎に数値計算を行うことになるので、碎波モデルや境界条件の処理の組み込みが容易である。その適用範囲は原理的に緩勾配方程式と同じである。ただし、不規則波への拡張に際しては、計算時間の制約や碎波モデルの組み込みに問題を生じる。

放物型波動方程式は、緩勾配方程式において局所的な波浪場が進行性であると仮定することによって、楕円型偏微分方程式を放物型の偏微分方程式で近似したものである。数値計算において沖から岸に向かって順次解を求めていくことが出来るので、計算時間が大幅に短縮されるが、仮定により反射領域には適用できない。放物型波動方程式には誘導法によって多様なものがあり、それぞれ適用範囲が異なる。共通して浅水変形、屈折、および回折への適用が可能である。Radder (1979) による基本的な放物型波動方程式の他に、波向線と座標軸の方向のずれが大きくても精度が低下しないもの (Kirby, 1986) や、非線形効果を取り込んだもの (Kirby・Dalrymple, 1984)、流れの効果を含んだもの (Kirby, 1984)、不規則性や碎波モデルを含んだもの (磯部, 1986) などがある。

### 1. 3 Green 関数法による波浪場解析とその任意水深場への拡張

これまでに提案された波浪場の数値解析手法の中で、港湾施設や防波堤など、境界が複雑で、回折・多重反射・透過といった平面変形が卓越するような波浪場の解析に際しては、計算精度および境界条件の取り扱いの簡便さから、Green 関数法が最も合理的であることが知られている。この方法は一様水深水域を対象とし、Helmholtz 方程式をモデルとして用いる。Green 関数法には、Lee (1971) によって行われた円筒波の波動場についての Weber の定理を応用する方法と、境界に点波源の分布を想定し、個々の点源から発して半無限の平面水域に広がる波の素解を重ね合わせることによって、全域の波の分布を表現する方法がある。後者は一般に密度法と呼ばれる。

密度法を用いた波浪場解析として、Barailler・Gaillard (1967) は、計算対象領域の平面形状を考慮して凸多角形に領域分割し、それぞれの部分領域毎に解を求める解析手法を提案している。また西村ら (1993) は、分布波源強度の算定について、半無限境界より発する波を基本に詳細な議論を行っている。その結果、従来の方法に比べて、防波堤開口部から生じる回折波の解析について顕著な改良を加えることに成功している。一般に回折現象は波峰線方向の波高の不均等に起因する波動エネルギーの分散と、平面境界形状による波向変化の効果を内包するが、量的には後者の寄与がとくに重要である。Green 関数法はこれを簡便に、しかもほぼ完全な形で捉える殆ど唯一の計算手法と言える。

従来の密度法は、回折、多重反射については十分な結果を得ることが出来るが、Helmholtz 方程式をモデルとして用いているため屈折については考慮できない。Green 関数法の任意水深水域の波浪場への拡張を考える場合、一様水深における点源波の厳密解である Hankel 関数に変わるものとして、個々の点源波に対応する波の屈折・浅水変形等を考慮した素解を求めることが課題となる。緩勾配方程式の放物型近似式を用いた波浪場解析は、回折についての精度が不十分であるが、屈折系の波浪変形を精度よく解析できる。従って Green 関数法と放物型方程式を用いた数値解析法を組み合わせることができれば、お互いの欠点を補い合い、2つの解析法の利点を活かすことができると考えられる。

近年、この考えに基づいて郭・西村 (1997) が極座標表記された緩勾配方程式の放物型近似式の数値解を素解として用いた拡張 Green 関数法を提案し、一様勾配を持つ港湾モデルの波浪場解析に適用している。素解として数値解を用いる場合、特異点となる波源の近傍の取り扱いが問題となるが、ここでは便宜上一様水深と仮定して Hankel 関数を用いている。しかし、波源強度が境界に入射する波の勾配によって決定されることから、境界近傍に一様水深を仮定することは、最終的に得られる波浪場の数値解に影響することが考えられる。また境界上に分布する波源強度の算定には、一様水深場に対する西村ら (1993)

の算定式が用いられている。しかし、任意水深場では境界から発する波が屈折によりその境界へ再入射するため、これを考慮した新たな算定式が必要となる。本研究は、点源付近の水深変化を考慮できる新たな素解の構成法と、任意水深場における波源強度算定法の確立を目的とする。

## 1. 4 本研究の概要

本研究では、郭・西村（1997）の手法に従い新たな緩勾配方程式の Green 関数の構成法を提案する。まず特異点となる点源の近傍に対して緩勾配方程式の級数解を導出する。これを用いることにより素解は点源近傍の水深変化を考慮することができる。次に緩勾配方程式の放物型近似式を新たに導出し、その数値解を級数解と接合することにより素解を構成する。この手法は体系的であるため、他の工学分野で重要となるような変数係数偏微分方程式の Green 関数を求める場合にも応用可能である。本研究では、この手法を用いて構成される数値素解を、一様水深場および非一様水深場において解析的に得られている波動解と比較することで、この構成法の妥当性を検討する。任意水深場の Green 関数は、波の屈折、回折、浅水変形により一般に相反性が成立しないことが考えられる。しかし、実際の波浪場解析においては計算対象領域の水深変化は非常に緩やかであり、相反性が近似的に成立しているとして解析を行うことが可能であることを計算結果から示す。

密度法を任意水深場に拡張する場合、境界から発する波が屈折によりその境界へ再入射することを考慮した波源強度の算定式を新たに導く必要がある。本研究では、まず密度法の基礎となる直線境界で区切られた半無限領域の波動解を導き、これに基づいて各種境界条件に対する波源強度算定式の導出を行う。得られる算定式は、その点での波の振幅勾配のみでは決定されず境界上すべての強度が相互に影響し合うことが、一様水深場と異なる点であることを示す。

密度法を用いた波浪場解析では、素解を数値的に求める際、計算領域外の地形を仮想して計算を行う必要性がある。この仮想地形の波浪場解への影響を調べるため仮想地形を変化させて波浪場解析を行い、得られる解を比較する。これより、緩やかな底面地形が存在する領域を計算対象とする場合は、この技法が成立することを示す。

## 第 2 章. 平面波浪場の基礎方程式

本章では波浪場解析に用いられる基礎方程式について説明する. まず 2.1 節では一様水深場の基礎方程式である Helmholtz 方程式と, その解析解である Hankel 関数について説明する. 次に任意水深場の基礎方程式である緩勾配方程式について 2.2 節で説明する. 緩勾配方程式は Radder 変換により Helmholtz 型方程式と同型の方程式に変換される. 2.3 節では Green 関数法の基礎となる Green の定理を, Helmholtz 型方程式に対して適用する. 最後に 2.4 節で Green 関数法の基礎事項と本研究で注目する密度法について説明する.

### 2. 1 一様水深場の基礎方程式

#### 2. 1. 1 Helmholtz 方程式の導出

非圧縮で粘性を無視した水粒子の運動において, その運動が渦無しであるならば, 速度ポテンシャル  $\Phi$  を定義することができ, 水粒子の速度ベクトルは速度ポテンシャルの勾配で表せる. すなわち,  $\mathbf{u} = \nabla\Phi$  である. ここで  $\mathbf{u}$  は  $x, y, z$  方向の速度成分  $u, v, w$  からなる速度ベクトルであり,  $\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$  は勾配オペレーター,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の単位ベクトルである. 座標系の定義を図-2.1 に示す.

非圧縮性流体に対する連続式  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  と, 速度ポテンシャルの定義から, つぎの Laplace 方程式が得られる.

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.1.1)$$

問題は与えられた境界条件の下に, この Laplace 方程式を満たす速度ポテンシャル  $\Phi$  を決定することである. いま  $\Phi$  が水平面内の関数  $f(x, y)$ , 鉛直方向の関数  $Z(z)$ , および時間の関数  $T(t)$  の積によって与えられるものとし,

$$\Phi = f(x, y) \cdot Z(z) \cdot T(t) \quad (2.1.2)$$

と書く. これを式 (2.1.1) に代入して整理すると,

$$\frac{1}{f(x, y)} \left( \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \quad (2.1.3)$$

が得られる。上式が一般に成立するには、両辺が等しい定数となる必要がある。ここでは、関数  $f(x, y)$  が無限遠方で発散しないことを考慮し、分離定数を  $-k^2$  とする。これより、鉛直成分の関数  $Z(z)$  について、

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - k^2 Z(z) = 0 \quad (2.1.4)$$

また、一様水深における平面波浪場の基礎方程式として、次の Helmholtz 方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + k^2 f(x, y) = 0 \quad (2.1.5)$$

波の鉛直方向の分布関数  $Z(z)$  は底面での運動学条件、

$$\text{運動学条件: } \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0 \quad (2.1.6)$$

および線形化された運動学および力学的な自由表面条件、

$$\text{運動学条件: } \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.1.7)$$

$$\text{力学条件: } \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{y=0} + g\eta = 0 \quad (2.1.8)$$

を付加することにより決定され、最終的に速度ポテンシャル  $\Phi$  は次式で与えられる。

$$\Phi(x, y, z) = \frac{g}{i\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} f(x, y) e^{-i\omega t} \quad (2.1.9)$$

ここで、 $k$  は波数、 $\omega$  は角周波数、 $h$  は水深、 $g$  は重力加速度である。静水面からの水位変動  $\eta$  は、自由表面の力学条件 (2.1.8) を用いて次の様に表される。

$$\eta = -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{y=0} = f(x, y) e^{-i\omega t} \quad (2.1.10)$$

これより，水平面内の関数  $f(x, y)$  は波の複素振幅分布であることがわかる．

残された問題は，与えられた境界条件の下で Helmholtz 方程式 (2.1.5) を解き，  $f(x, y)$  を決定することである．

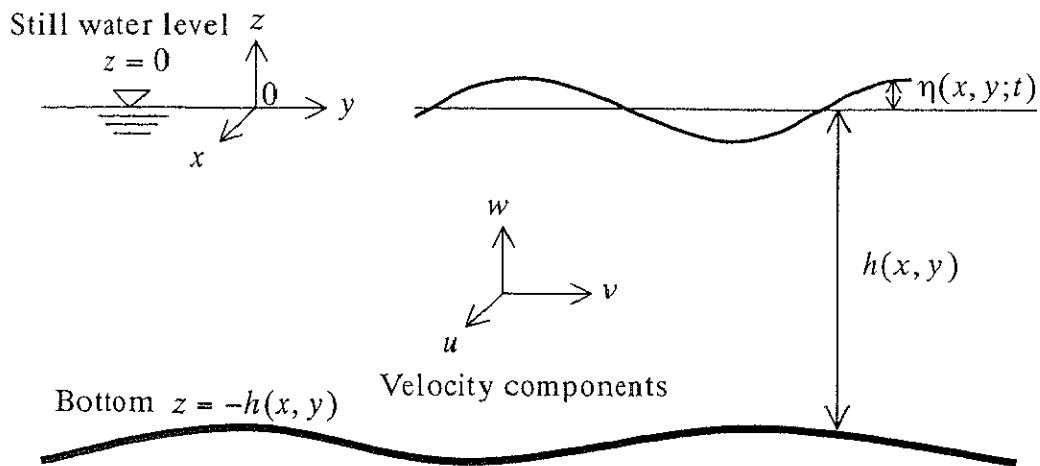


図-2.1 座標系の定義

## 2. 1. 2 Hankel 関数

Helmholtz 方程式 (2.1.5) は、極座標系  $(r, \theta)$  で表記すると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + k^2 f = 0 \quad (2.1.11)$$

となる。ここで  $r$  は原点からの距離、 $\theta$  は方位角である。関数  $f(r, \theta)$  を、距離成分の関数  $R(r)$  と方向成分  $\Theta(\theta)$  の関数を用いて変数分離し、式 (2.1.11) に代入すると、

$$\frac{1}{R} \left( r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \nu^2 \quad (2.1.12)$$

ここで、 $\nu$  は分離定数である。上式より次の Bessel 方程式を得る。

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - \nu^2) R = 0 \quad (2.1.13)$$

この方程式は 2 つの線形独立な解を持つ。

$J_\nu(kr)$  : Bessel 関数

$N_\nu(kr)$  : Neumann 関数

またこの 2 解の線形結合で定義される Hankel 関数も解となる。

$$H_\nu^{(1)}(kr) = J_\nu(kr) + iN_\nu(kr) \quad (2.1.14)$$

$$H_\nu^{(2)}(kr) = J_\nu(kr) - iN_\nu(kr) \quad (2.1.15)$$

とくに  $\theta$  方向の依存性を持たない 0 次の解 ( $\nu=0$ ) に注目すると、第 1 種 0 次の Hankel 関数  $H_0^{(1)}$  は、点源から湧き出して無限遠方に広がる波を表し、第 2 種 0 次の Hankel 関数 ( $H_0^{(2)}$ ) は、点源に吸い込まれる波を表現している。

## 2. 2 任意水深場の基礎方程式

### 2. 2. 1 緩勾配方程式の導出

#### (1) エネルギー保存則

完全流体を仮定し，自由表面と水底面を含む境界  $S$  で囲まれた領域  $D$  を考える．領域  $D$  内部のエネルギー保存は次式で表される．

$$\iint_S E' v_n ds + \frac{d}{dt} \iiint_D E dD = 0 \quad (2.2.1)$$

ここで

$v_n$  : 流体の境界  $S$  に対する外向き法線方向相対速度

$\vec{v}$  : 流体の速度ベクトル

$$E' = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + gz + \frac{P}{\rho}$$

$$E = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + gz$$

式 (2.2.1) の左辺第 1 項は，流体内部より境界  $S$  をとおって単位時間に流出するエネルギーフラックスを表し，エネルギーの中には外部の流体に対してなす仕事を表す圧力項を含んでいる．また第 2 項は領域  $D$  の内部エネルギー（位置・運動エネルギー）の時間変化を表している．この式では，波の持つエネルギーは考慮されておらず，流体内部でのエネルギー保存のみを表現している．また領域  $D$  は  $x$ - $y$  平面内の任意の閉領域  $A$  によって鉛直に切り取られた水柱とする．境界  $S$  は水柱の側面，およびそれに続く水面および水底からなる．鉛直面および水底は時間によって変化しないものとする．水面の位置は  $z - \eta = 0$  で与えられるものとする．

ここで Gauss の公式より，次式が成立する．

$$\iiint_D \operatorname{div}(E' \vec{v}) dD = \iint_S (E' \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \quad (2.2.2)$$

$\vec{n} : dS$  の外向き単位法線ベクトル．

上式の右辺は，式 (2.2.1) の左辺第 1 項と，水面での波による仕事の成分を含んでいる．波による仕事の成分は以下のように求められる．



$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \frac{\nabla(z-\eta)}{|\nabla(z-\eta)|} = \frac{(-\eta_x, -\eta_y, 1)}{|\nabla(z-\eta)|} \text{ より,} \\
&\iint_{S_1} (E'\vec{v}) \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_{S_1} (E'(u, v, w) \cdot (-\eta_x, -\eta_y, 1)) \Big|_{z=\eta} \frac{dS}{|\nabla(z-\eta)|} \\
&= \iint_{S_1} (E'(-u\eta_x - v\eta_y + w)) \Big|_{z=\eta} \frac{dS}{|\nabla(z-\eta)|},
\end{aligned}$$

ここで  $S_1$  は水面を表す。表面での運動学条件  $D\eta/Dt = w$  を用いて、

$$= \iint_{S_1} (E' \frac{\partial \eta}{\partial t}) \Big|_{z=\eta} \frac{dS}{|\nabla(z-\eta)|}. \quad (2.2.3)$$

ここで  $dA$  を考えると、これは  $dS$  の  $x$ - $y$  平面への射影となるので、 $z$  方向の単位ベクトル  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  を用いて、

$$\begin{aligned}
dA &= \vec{k} \cdot \vec{n} dS \\
&= (0, 0, 1) \cdot (-\eta_x, -\eta_y, 1) \frac{dS}{|\nabla(z-\eta)|} \\
&= \frac{dS}{|\nabla(z-\eta)|}
\end{aligned} \quad (2.2.4)$$

となり、最終的に、波による仕事の成分は、次の様になる。

$$\iint_A (E' \frac{\partial \eta}{\partial t}) \Big|_{z=\eta} dA \quad (2.2.5)$$

式 (2.2.1) の左辺第一項は、式 (2.2.2) の左辺から波による仕事の成分を差し引いたものになり、次式が得られる。

$$\iint_S E' v_n ds = \iiint_D \text{div}(E'\vec{v}) dD - \iint_A \left( E' \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \Big|_{z=\eta} dA \quad (2.2.6)$$

上式を用いると、式 (2.2.1) は次の様になる。

$$\iiint_D \text{div}(E'\vec{v}) dD - \iint_A \left( E' \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \Big|_{z=\eta} dA + \frac{d}{dt} \iiint_D E dD = 0 \quad (2.2.7)$$

式 (2.2.7) の体積積分を閉領域  $A$  に関する積分と水底 ( $z = -h(x, y)$ ) から水面 ( $z = \eta(x, y, t)$ ) までの  $z$  方向の積分によって表すと,

$$\iint_A \left\{ \int_{-h}^{\eta} \text{div}(E'\bar{v})dz - E' \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{z=\eta} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} E dz \right\} dA = 0 \quad (2.2.8)$$

式 (2.2.8) の第 3 項について,  $\eta$  が時間の関数であることに注意してライプニッツの公式を適用すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} E dz = \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial E}{\partial t} dz + E \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{z=\eta} - E \frac{\partial(-h)}{\partial t} \Big|_{z=-h} \quad (2.2.9)$$

の関係式が成立する. また領域  $A$  が任意であることから, 式 (2.2.8) より次式が得られる.

$$\int_{-h}^{\eta} \left\{ \text{div}(E'\bar{v}) + \frac{\partial E}{\partial t} \right\} dz + E \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{z=\eta} - E' \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{z=\eta} = 0 \quad (2.2.10)$$

水面 ( $z = \eta$ ) で  $P = 0$  であるので  $E = E'$  となり, 式 (2.2.10) は次の様になる.

$$\int_{-h}^{\eta} \left\{ \text{div}(E'\bar{v}) + \frac{\partial E}{\partial t} \right\} dz = 0 \quad (2.2.11)$$

次に, オイラーの運動方程式に流速を乗じた式を考える.

$$\bar{v} \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \text{grad})\bar{v} + \text{grad} \left( \frac{P}{\rho} + \Omega \right) \right\} = 0 \quad (2.2.12)$$

ここで,  $\Omega = (0, 0, gz)$  である. これを  $E$  と  $E'$  を用いて変形すると, 次の様になる.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \bar{v} \cdot \text{grad} E' = 0 \quad (2.2.13)$$

ただし,  $\partial(gz)/\partial t = 0$  を用いた. これより式 (2.2.11) の第 2 項を書き換えると,

$$\int_{-h}^{\eta} E' \operatorname{div} \bar{v} dz = 0 \quad (2.2.14)$$

となる。

次に、完全流体の渦無し流れを仮定して、速度ポテンシャル  $\Phi = \Phi(x, y, z)$  を用いると、ベルヌーイの定理は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \Phi \cdot \operatorname{grad} \Phi + \frac{P}{\rho} + g\eta = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + E' = 0 \quad (2.2.15)$$

となる。

以上のことより、エネルギーの保存則 (2.2.14) は次式で表される。

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) dz = 0 \quad (2.2.16)$$

あるいは  $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  を再定義し、これを用いると次の様になる。

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left( \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) dz = 0 \quad (2.2.17)$$

## (2) 波浪場への適用

ここでは、波浪場を考慮し以下のような3つの仮定を設ける。

i) 速度ポテンシャル  $\Phi$  が水平方向のみの関数  $\Psi(x, y, t)$  と鉛直方向の変化を表現する関数  $F(h, z)$  の積で表せるものと仮定する。

$$\Phi = \Psi F \quad (2.2.18)$$

ii) 鉛直方向の流速分布に関係する関数  $F$  は、水平床の場合と同様に、次式で与えられるものとする。

$$F = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \quad (2.2.19)$$

iii)  $k$  は微小振幅波理論の分散関係式、

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (2.2.20)$$

を満たすものとする.

また  $z=0$  において  $F=1$  であるから,  $\Psi$  は静水面での速度ポテンシャル (水表面ポテンシャル) を表している.

一方, 水面と水底の運動学条件は次のように書かれる.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \eta \cdot \nabla \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = \eta \quad (2.2.21)$$

$$\nabla h \cdot \nabla \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (2.2.22)$$

また  $\nabla \Phi$ ,  $\nabla^2 \Phi$  は,

$$\nabla \Phi = F \nabla \Psi + \Psi \nabla F \quad (2.2.23)$$

$$\nabla^2 \Phi = F \nabla^2 \Psi + 2 \nabla \Psi \nabla F + \Psi \nabla^2 F \quad (2.2.24)$$

で表される. 式 (2.2.17) に式 (2.2.18), (2.2.24) を代入し, 第 2 項を部分積分すると,

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left\{ F^2 \nabla^2 \Psi + 2 F \nabla \Psi \cdot \nabla F + F \Psi \nabla^2 F - \Psi \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right\} dz - \frac{\partial \Psi}{\partial t} F \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_{z=\eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} F \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h} = 0 \quad (2.2.25)$$

$\eta$ ,  $h$  が共に  $x$ ,  $y$  の関数であることに注意して, 微分と積分の順序を入れ換えると以下のようなになる.

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left\{ \nabla \cdot \int_{-h}^{\eta} F^2 \nabla \Psi dz - \Psi \int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 dz \right\} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left\{ \Psi \nabla \cdot \int_{-h}^{\eta} F \nabla F dz - \Psi \int_{-h}^{\eta} |\nabla F|^2 dz \right\} \\ & - \frac{\partial \Psi}{\partial t} F \left( -\Psi \frac{\partial F}{\partial z} + \nabla \eta \cdot \nabla (\Psi F) \right) \Big|_{z=\eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} F \left( \Psi \frac{\partial F}{\partial z} + \nabla h \cdot \nabla (\Psi F) \right) \Big|_{z=-h} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

上式の第 3, 第 4 項に運動学的条件を代入すると次式が得られる.

$$\nabla \cdot \int_{-h}^{\eta} F^2 \nabla \Psi dz - \Psi \int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 dz + F \Big|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \Psi \nabla \cdot \int_{-h}^{\eta} F \nabla F dz - \Psi \int_{-h}^{\eta} |\nabla F|^2 dz = 0 \quad (2.2.27)$$

この式は、厳密にエネルギー保存の条件を満たしている。

(3) 緩勾配方程式の導出

次に、以下のような微小振幅と緩勾配の仮定を設ける。

iv) 式 (2.2.27) の第 1, 第 2 項の積分を  $[-h, 0]$  と  $[0, \eta]$  に分割し,  $[0, \eta]$  の積分は  $[-h, 0]$  の積分に比べて十分小さいと仮定して, その積分を無視する (微小振幅の仮定)。

v) 第 3 項中の  $F|_{z=\eta}$  は  $z=0$  の周りにテイラー展開し, その第 1 項のみを採用する。

$$F|_{z=\eta} \cong 1 \quad (2.2.28)$$

vi) 海底勾配は十分小さいものとして,  $|\nabla h|^2$  または  $\nabla^2 h$  に比例する第 4, 第 5 項を無視する (緩勾配条件)。

ここで式 (2.2.19) の  $F$  を式 (2.2.27) 代入し, 積分を実行すると次式が得られる。

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Psi) - k^2 C^2 (1-n) \Psi + g \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (2.2.29)$$

ここで,  $C_g$  は群速度であり,  $n = C_g / C$  である。

すでに微小振幅の仮定を導入しているので, 水面の力学的な境界条件として, 線形化された表面条件,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (2.2.30)$$

を用いて式 (2.2.29) の  $\eta$  を消去すると, Smith & Sprinks (1975) が Green の公式を用いて導いた次式が得られる。

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Psi) - k^2 C^2 (1-n) \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.31)$$

また彼らの詳細な議論から, 緩勾配方程式の適用条件は次の様になることが知られている。

$$\mu = \frac{\nabla h}{kh} \ll 1, \quad \frac{\nabla \eta}{k\eta} = O(1) \quad (2.2.32)$$

最後に、 $\psi$ が角周波数 $\omega$ で周期的に変動するものとし、

$$\Psi(x, y, t) = f(x, y)e^{-i\omega t} \quad (2.2.33)$$

とおいて式(2.2.31)に代入すると、Berkhoff(1972)が導いた定常緩勾配方程式が得られる。

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla f) + k^2 CC_g f = 0 \quad (2.2.34)$$

ここで、 $f(x, y)$ は複素振幅関数である。

## 2. 2. 2 緩勾配方程式の Helmholtz 型方程式への変換

緩勾配方程式 (2.2.34) は, 次の Radder 変換 (1979) と呼ばれる関数変換を導入する.

$$f = \frac{\phi}{\sqrt{CC_g}} \quad (2.2.35)$$

上式を式 (2.2.34) に代入すると, 新たな複素振幅  $\phi$  について次の方程式を得る.

$$\nabla^2 \phi + k_c^2 \phi = 0 \quad (2.2.36)$$

ここで, 波数効果を表す  $k_c$  は

$$k_c^2 = k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}} \quad (2.2.37)$$

のように分散関係式 (2.2.20) を満たす通常の波数  $k$  と関係づけられる. 上式は, 緩勾配方程式の導出過程と同様に, 緩勾配条件を用いると,

$$k_c \equiv k \quad (2.2.38)$$

で近似することが出来る. したがって式 (2.2.36) は,

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (2.2.39)$$

と書かれる. この式は Helmholtz 方程式 (2.1.5) とまったく同形となるが, ここでは波数  $k$  が水深  $h$  に依存し, 空間変数  $x, y$  の緩やかな関数となっている点が異なっている.

## 2. 3 Green の定理

### 2. 3. 1 Green の定理の導出

いま  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  をスカラー関数とし, ベクトル  $\vec{F} = f \nabla g$  がある領域  $V$  において次の Gauss の発散定理を満足するものとする.

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dD \quad (2.3.1)$$

ここで  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ,  $V$  はベクトル場  $\vec{F}$  内の領域,  $D$  はその境界面,  $\vec{n}$  は  $D$  の単位法線方向ベクトルである. このとき,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \nabla \cdot (f \nabla g) \\ &= \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla \cdot (\nabla g) \\ &= \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

であり,  $f$  はスカラー関数であるから,

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{n} &= f \nabla g \cdot \vec{n} \\ &= f (\vec{n} \cdot \nabla g) \\ &= f \frac{\partial g}{\partial n} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

ここで,  $\partial/\partial n$  は境界面  $S$  に対して外向き法線ベクトル  $\vec{n}$  の方向微分である. したがって, 式 (2.3.1) は

$$\iiint_V (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_D f \frac{\partial g}{\partial n} dD \quad (2.3.4)$$

となる. この式を Green の定理の第 1 形式(first form of Green's theorem)という. また,  $f$  と  $g$  を入れ換えた式を作り, 上式から引き算すると,

$$\iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_D \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dD \quad (2.3.5)$$

となる. 上式を Green の定理の第 2 形式(second form of Green's theorem)という.



### 2. 3. 2 Helmholtz 型方程式への応用

前節で導いた Green の定理 (2.3.5) は, 2 次元の場合においても同様に成り立つ.

$$\iint_D (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dD = \int_C \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds \quad (2.3.6)$$

ここで,  $\nabla^2$  は 2 次元の Laplacian とする.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.3.7)$$

この  $\nabla^2$  に  $k^2$  の項を加えても, 上記の Green の定理 (2.3.6) が同様に成り立つことは明らかである. そこで微分演算子,

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \quad (2.3.8)$$

を考える. 上式を式 (2.3.6) に適用すると, Helmholtz 型方程式に対する Green の定理を得る.

$$\iint_D (fL[g] - gL[f]) dD = \int_C \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds \quad (2.3.9)$$

ここで  $f(x, y)$  および  $g(x, y)$  は平面領域  $D$  内の任意の関数,  $C$  は領域  $D$  の外縁,  $\partial/\partial n$  は領域  $D$  に対する外向き法線方向の微分である. 波数  $k$  が空間変数に依存する場合にも Green の定理 (2.3.9) が成立することは, 西村ら (1993) が提案した一様水深場の波浪場解析手法が, 任意水深場にも応用可能であることを示している. しかし, Green 関数法を任意水深場に適用する場合, 第 5 章に示すように境界条件の定式化について再検討する必要がある.

緩勾配方程式 (2.2.34) は, 自己随伴の線形微分方程式であることから広義の Green の定理を適用することが出来る.

$$\iint_D (fL'[g] - gL'[f]) dD = \int_C CC_s \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds \quad (2.3.10)$$

ここで演算子  $L'$  は,

$$L' \equiv CC_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} + CC_s \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial CC_s}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial CC_s}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + k^2 CC_s = 0 \quad (2.3.11)$$

である. 式 (2.3.10) の導出は Appendix A.1 に詳細に示す.

本論文 3.6 節で示すように, Helmholtz 型方程式の Green 関数は近似的に相反性が成立し, これが計算量の低減をもたらすことから, 本研究では, Helmholtz 型方程式に対して成立する Green の定理 (2.3.9) を基礎として, Green 関数法における境界条件の定式化を行う.

## 2. 4 Green 関数法

Green の定理 (2.3.9) について, スカラー関数  $f(x, y)$  を Helmholtz 型方程式の解  $\phi(x, y)$ ,  $g(x, y)$  を領域  $D$  内の点  $(x_0, y_0)$  に特異性を持つ Green 関数  $G(x, y; x_0, y_0)$  とすると, Green 関数の定義式,

$$L[G] = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \quad (2.3.12)$$

より, 式 (2.3.9) は次の様になる.

$$\phi(x_0, y_0) = -\int_C \left( G(x, y; x_0, y_0) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} - \phi(x, y) \frac{\partial G(x, y; x_0, y_0)}{\partial n} \right) ds \quad (2.3.13)$$

これより Helmholtz 型方程式の一般解は, その境界値および境界上の法線方向微係数のみから構成されることがわかる.

本研究では, 波浪場解析手法として Green 関数法の一つである密度法に注目する. この手法は, 計算領域のすべての境界上に波源分布を想定し, そこから発生する点源波の線形重ね合わせによる総和として最終的な波の場を表現する. ここでは, すべての境界上で与えられた条件を満たすように波源強度を定めることが課題となる. 第 4 章では, 密度法の基礎となる直線境界で区切られた半無限領域の波動解を求める. 続いて第 5 章では, この波動解を基本として各種境界における分布波源強度の算定法を確立する.

上記の手法により Helmholtz 型方程式の解  $\phi(x, y)$  が求められる. 緩勾配方程式 (2.2.34) の解である複素振幅分布  $f(x, y)$  は,  $\phi$  について Radder 変換  $f = \phi / \sqrt{CC_g}$  を行うことにより, 最終的に決定される.

### 第3章. 緩勾配方程式の Green 関数

任意水深域の波浪場を Green 関数法で解析する際の問題は, 緩勾配方程式 (2.2.34) の特異点を持つ解を求めることに帰着する. 以後これを素解と呼ぶことにする. 本研究では, まず特異点の近傍における Helmholtz 型方程式 (2.2.39) の級数解と, 遠方における Helmholtz 型方程式の放物型近似式を導出する. この級数解と放物型近似式の数値解を接合することにより素解を構成する. 3.1 節では上記の方法を一様水深場の基礎方程式である Helmholtz 方程式に適用し, 得られる数値素解を Hankel 関数と比較することでその妥当性を検討する. 3.2 節では緩勾配方程式の級数解, 放物型近似式の導出および両者の接合方法を示す. 本方法の特徴について郭・西村 (1997) の方法と比較して 3.3 節にまとめる. また数値素解の計算法について 3.4 節で説明する. 3.5 節では, 一様および非一様水深地形について既に得られている厳密解と数値素解を比較し, 本方法の妥当性を検討する. 最後に任意水深場における Green 関数の相反性について 3.6 節で議論する.

#### 3. 1 一様水深場の Green 関数構成法

一様水深場の Green 関数は, 一般的に第 1 種 0 次の Hankel 関数  $H_0^{(1)}(kr)$  を用いて構成されている. 本節では, まず Hankel 関数を用いた Green 関数の特徴についてまとめる. 次に Helmholtz 方程式について, 本研究で提案する Green 関数構成法を適用し, 得られる数値素解を Hankel 関数と比較することで, その妥当性を検討する.

##### 3. 1. 1 一様水深場の Green 関数

Hankel 関数  $H_0^{(1)}(kr)$  は点源 ( $r=0$ ) で実数部 (Bessel 関数) は 1, 虚数部 (Neumann 関数) は負の無限大になる. これより点源そのものは特異点となるため, この点では数値的な取り扱い是不可能である.

Hankel 関数の特異点の強度は, 次の様な手順で解析的に求められる. ここでは,  $r=0$  の近傍における半径  $r=\varepsilon$  の微小円を考える. Green の定理 (2.3.9) において,  $f=1$ ,  $g=H_0^{(1)}(kr)$  とすると,

$$\iint_{D'} \{L[H_0^{(1)}(kr)] - k^2 H_0^{(1)}(kr)\} dD' = \int_C \frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial n} ds \quad (3.1.1)$$

図-3.1 から外向き法線方向 ( $n$ ) と  $r$  の方向が一致するため、 $\partial/\partial n = \partial/\partial r$  と置き換えることが出来る。

$$\iint_{D'} \{L[H_0^{(1)}(kr)] - k^2 H_0^{(1)}(kr)\} dD' = \int_C \frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial r} ds \quad (3.1.2)$$

$r \rightarrow 0$  のとき、

$$\begin{aligned} J_0(kr) &\cong 1, & N_0(kr) &\cong \frac{2}{\pi}(\gamma + \log \frac{kr}{2}) \\ H_0^{(1)}(kr) &\cong 1 + i \frac{2}{\pi}(\gamma + \log \frac{kr}{2}) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

となる。ここで、 $\gamma$  は Euler 定数 ( $\gamma = 0.577216$ ) である。したがって、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{D'} H_0^{(1)}(kr) dD' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ 1 + i \frac{2}{\pi}(\gamma + \log \frac{kr}{2}) \right\} \cdot \pi \epsilon^2 = 0 \quad (3.1.4)$$

また、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 1 + i \frac{2}{\pi}(\gamma + \log \frac{kr}{2}) \right\} \cong i \frac{2}{\pi r} \quad (3.1.5)$$

となることから、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_C \frac{\partial H_0^{(1)}(kr)}{\partial r} ds = 4i \quad (3.1.6)$$

式 (3.1.4) および (3.1.6) を式 (3.1.2) に代入すると、 $H_0^{(1)}(kr)$  の特異点強度が求められる。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{D'} L[H_0^{(1)}(kr)] dD' = 4i \quad (3.1.7)$$

次に第 1 種 1 次以降の Hankel 関数を用いた Helmholtz 方程式の解が、Green 関数となるか検討する。第 1 種 1 次の Hankel 関数を用いた Helmholtz 方程式の解  $f$  は、

$$f(r, \theta) = (a \cos \theta + b \sin \theta) H_1^{(1)}(kr) \quad (3.1.8)$$

ここで  $a, b$  は任意定数である.  $f$  について  $r \rightarrow 0$  の極限を考えると, 得られる極値は  $\theta$  に依存して 0, あるいは正または負の無限大を取ることがわかる. したがって  $f$  は原点で真性特異点を持ち, 特異点強度を定めることが出来ない. このことから, Helmholtz 方程式は, 0 次の Hankel 関数解のみを Green 関数として持つことがわかる.

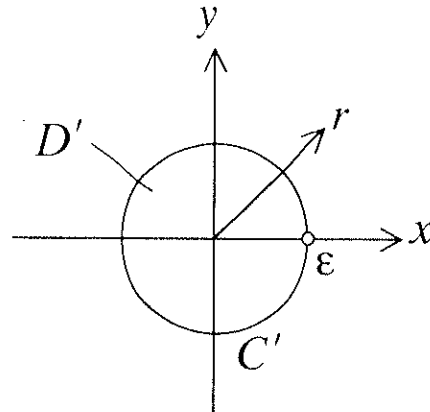


図-3.1 点源近傍の微小円

### 3. 1. 2 特異点近傍の級数解

極座標表示による Helmholtz 方程式は、次の様になる。

$$L[\phi] = 0, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \quad (3.1.9)$$

ここで、波数  $k$  は定数であり、 $\theta$  依存性のないグリーン関数が存在する。素解は、原点で単位強度の特異性を持つとして次の様に定義する。

$$L[\phi^*] = \delta(r) \quad (3.1.10)$$

ここで特異点周りの級数解の形を次の様に仮定する。

$$\phi^* = \phi_{scr} \equiv \log kr \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n (kr)^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n (kr)^n \quad (3.1.11)$$

ここでは解の特異性を、 $\log kr$  の項で表現する。この特異性を、 $(1/r)^n$  等で表現することを考える。この場合、Green の定理 (2.3.8) の右辺経路積分において、経路上に特異点が存在する場合は、その積分値は無限大となる。これより  $(1/r)^n$  の特異性を持つ解は、Green 関数として適さないことがわかる。また  $p_n$ ,  $q_n$  は定数係数であり、 $[m^3/s]$  の次元量である。これを式 (3.1.9) に代入し、 $\log kr$  の項および  $kr$  の冪でまとめると、 $p_n$ ,  $q_n$  についてそれぞれ以下の漸化式を得る。

$$p_{n+2} = -\frac{p_n}{(n+2)^2}, \quad q_{n+2} = -\frac{q_n + 2(n+2)p_{n+1}}{(n+2)^2} \quad (3.1.12)$$

この級数は初項である 2 つの未定係数  $p_0$ ,  $q_0$  を含むことに注意する。これらは以降で示すように、特異点の強度および一方向波の条件から決定される。特に係数  $p_0$  は特異点の強度のみから決定される。

### 3. 1. 3 Helmholtz 方程式の放物型近似式

Helmholtz 方程式の放物型近似式を次の様に仮定する.

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = A\phi_s, \quad \phi^* = \phi_s(r) \quad (3.1.13)$$

上記 1 階の微分方程式が式 (3.1.9) の解となるように係数  $A$  を決定する. 式 (3.1.13) を  $r$  で微分し, さらに式 (3.1.13) を用いると,

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial r^2} = \left( \frac{dA}{dr} + A^2 \right) \phi_s \quad (3.1.14)$$

を得る. 式 (3.1.13), (3.1.14) を式 (3.1.9) に代入し, これが任意の  $\phi_s$  について成り立つ条件から,  $A$  の満たすべき非線形微分方程式が得られる.

$$A^2 + k^2 + \frac{A}{r} + \frac{dA}{dr} = 0 \quad (3.1.15)$$

この方程式は, Helmholtz 方程式に陽に現れる変数  $r$  についての依存性を考慮して, 係数  $A$  を次の様に  $1/r$  の冪級数で展開することによって求められる.

$$A = A_0 + \frac{1}{r}A_1 + \frac{1}{r^2}A_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.1.16)$$

ここでは,  $1/r$  について 2 次まで考慮する. 式 (3.1.16) を式 (3.1.15) に代入し,  $1/r$  の冪で整理する. この方程式が任意の  $r$  で成立する条件から  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  についての方程式がそれぞれ得られる.

$$A_0^2 + k^2 = 0, \quad A_0 + 2A_0A_1 = 0, \quad A_1^2 + 2A_0A_2 = 0 \quad (3.1.17)$$

ここで式 (3.1.17) の第 1 式より,  $A_0$  は  $ik$  および  $-ik$  を解に持つ. これらはそれぞれ, 点源からの湧き出し波および点源への吸込み波の解に相当する. ここでは一方向波の方程式が, 湧き出し波を表現するように  $ik$  を選択する. 最終的に  $r$  が大きいときの漸近解は, 次の様になる.

$$A = ik - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} + \dots \quad (3.1.18)$$

級数 (3.1.18) の収束半径  $1/r$  は 1 に比べて小さくなるが, 級数を  $1/r^2$  までで切り捨てれば実用上は問題なくこれを適用できる.



### 3. 1. 4 級数解と放物型方程式の接合

Helmholtz 方程式の解である級数解 (3.1.11) は、点源からの湧き出し波、および吸込み波を表現することが出来る。ここでは一方向波を表現する放物型方程式と接合することにより、その湧き出し波成分のみを取り出す。これにより未定係数  $p_0$ 、 $q_0$  が決定される。

接合では、まず級数解 (3.1.11) を放物型方程式 (3.1.13) に代入する。

$$\frac{\partial \phi_{ser}}{\partial r} = A \phi_{ser} \quad (3.1.19)$$

ここで両者は  $kr_m = 1$  を満たす半径  $r = r_m$  で接合するとし、この  $r_m$  を上式に代入すると未定係数に  $p_0$ 、 $q_0$  についての方程式が得られる。係数  $p_0$  が特異点の強度より決定されれば、 $q_0$  も決定される。

本方法の妥当性を確かめるため、ここで得られる級数解の初項  $q_0$  を厳密解である Hankel 関数と比較する。特異点の強度  $p_0$  は式 (3.1.10) の定義より  $1/2\pi$  を与える。図-3.2 は、放物型方程式と  $kr$  について  $n$  次の冪まで考慮した級数解との接合により得られる初項  $q_{0ap}$  の相対誤差、

$$\Delta_{q_0} = \frac{q_{0ext} - q_{0ap}}{q_{0ext}}, \quad q_{0ext} = -\frac{i}{4} + \frac{1}{2\pi}(\gamma - \log 2) \quad (3.1.20)$$

をプロットしたものである。ここで  $q_{0ext}$  は単位強度を持つとして正規化した Hankel 関数  $H_0^{(1)}(kr)/4i$  を  $kr$  について級数展開した初項である。ここでは  $k = r_m = 1$  とした。級数解を  $n = 2$  次まで考慮すると、相対誤差は 4.8% で最小となった。それ以上次数を上げた場合でも、誤差は 6.3% 程度で一定となり、精度の向上は見られなかった。これは、放物型方程式が含む誤差のためである。また初項  $q_0$  の誤差が比較的大きいものとなっているが、これは数値素解が、特異点近傍で対数関数に大きく依存しているためである。点源からの距離  $r$  が大きくなるにつれてその依存性は小さくなり、それにつれて数値素解に含まれる誤差も次第に小さくなっていく。3.5 節では、一様水深場における数値素解が Hankel 関数を  $kr = 0.0 \sim 30.0$  の範囲で非常に精度良く表現できることを示す。

図-3.3 に、Hankel 関数と、その級数展開式について  $kr = 0.0 \sim 3.0$  までプロットしたものを示す。これらと比較した結果、級数を  $n = 2$  次まで考慮すれば、級数解の適用範囲内で十分に Hankel 関数を表現出来ることがわかる。これより次節で示す緩勾配方程式の Green 関数の構成では、級数解は  $n = 3$  次まで考慮する。

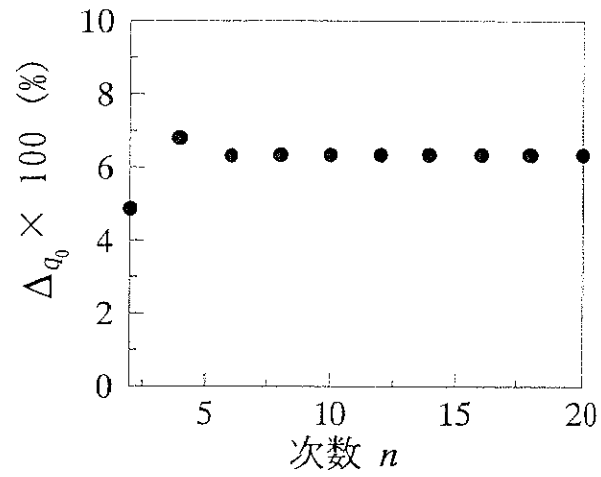


図-3.2 初項の相対誤差

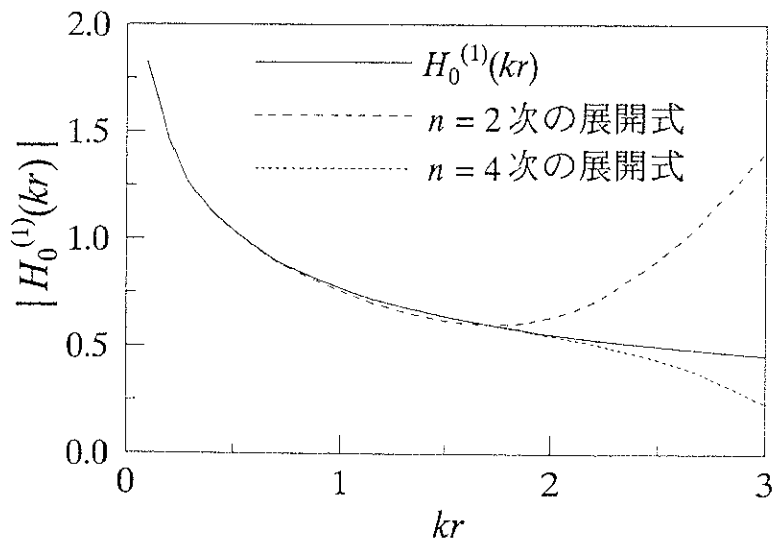


図-3.3 Hankel 関数の級数展開式の精度

### 3. 2 任意水深場の Green 関数構成法

#### 3. 2. 1 特異点近傍の級数解

特異点を原点とする, Helmholtz 型方程式の極座標表記は, 次のようになる.

$$L[\phi]=0, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \quad (3.2.1)$$

上式の波数  $k$  は, 次の様に  $r$  について Taylor 展開して用いる. また  $k$  の  $\theta$  方向依存性については, 第 2 項で考慮している. ここで,  $k$  についての 2 階以上の微分項は緩勾配条件より無視される.

$$k = k|_{r=0} + \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right)_{r=0} \cos \theta + \left( \frac{\partial k}{\partial y} \right)_{r=0} \sin \theta r \equiv k_0 + k_r r \quad (3.2.2)$$

特異点周りの級数解は, 一様水深場の場合と同様に, 次の様に仮定する.

$$\phi^* = \phi_{ser} \equiv \log k_0 r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n (k_0 r)^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n (k_0 r)^n \quad (3.2.3)$$

ここでは, 解の  $\theta$  方向依存性を  $p_n, q_n$  で考慮する. 上式を式 (3.2.1) に代入し  $\log k_0 r$  の項および  $k_0 r$  の冪でまとめると,  $p_n, q_n$  に対する方程式を得る.

$$\begin{aligned} p_{n+2\theta 0} + (n+2)^2 p_{n+2} + p_n + 2 \frac{k_r}{k_0^2} p_{n-1} &= 0 \\ q_{n+2\theta 0} + (n+2)^2 q_{n+2} + q_n + 2 \frac{k_r}{k_0^2} q_{n-1} &= -2(n+2)p_{n+2} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

ここでは, 式 (3.2.4) を  $p_n, q_n = 0, n < 0$ , として  $n=3$  次まで解くことを考える. 式 (3.2.4) の第 2 式において,  $p_n$  が外力項として現れていることに注意する. これより, 第 2 式から得られる  $q_n$  が, 共振を生じる解とならない様に  $p_n$  を決定する. 最終的に  $p_n, q_n$  は次のようになる.

$$\begin{aligned}
p_0 &= \text{const.}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{4}p_0, \quad p_3 = -\frac{p_0}{4k_0^2}k_r, \\
q_0 &= \text{const.}, \quad q_1 = q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta, \\
q_2 &= \frac{1}{4}(p_0 - q_0) + q_{2c} \cos 2\theta + q_{2s} \sin 2\theta, \\
q_3 &= \frac{1}{8}\left(\frac{3p_0}{2k_0^2} - \frac{2q_0}{k_0^2}\right)k_r - (q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta) + q_{3c} \cos 3\theta + q_{3s} \sin 3\theta.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

ここで未定係数は  $p_0, q_0, q_{1c}, q_{1s}, q_{2c}, q_{2s}, q_{3c}, q_{3s}$  である. この変数係数  $p_n, q_n$  の解の導出は, Appendix A.2 に詳細に示す.

### 3. 2. 2 緩勾配方程式の放物型近似式

Helmholtz 型方程式 (3.2.1) の放物型近似式として

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = A\phi_s + B\frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} + C\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2}, \quad \phi^+ = \phi_s(r, \theta) \quad (3.2.6)$$

を仮定する. ここでは, 上式が点源からの湧き出し波を表現するように, 変数係数  $A, B, C$  を決定する. 上式を用いて式 (3.2.1) 中の  $r$  微分を, すべて  $\phi_s$  および  $\phi_s$  の  $\theta$  微分項に変換する. 得られる式が任意の  $\phi_s, \partial \phi_s / \partial \theta$  および  $\partial^2 \phi_s / \partial \theta^2$  に対して成立する条件から, 係数  $A, B, C$  についての非線形連立微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} A^2 + k^2 + \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} + B\frac{\partial A}{\partial \theta} + C\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} &= 0, \\ 2AB + BC + \frac{B}{r} + B\frac{\partial B}{\partial \theta} + 2\frac{\partial A}{\partial \theta}C + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2}C &= 0, \\ 2AC + B^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{C}{r} + \frac{\partial C}{\partial r} + 2\frac{\partial B}{\partial \theta}C + B\frac{\partial C}{\partial \theta} + C\frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

この方程式系を解くため, 係数  $A, B, C$  を次の 2 つの空間変動スケールを考慮して展開する. ひとつは式 (3.2.1) に陽に現れている距離  $r$  についての依存性であり, 式 (3.1.8) と同様に  $A, B, C$  を  $1/r$  の冪で展開する.

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \frac{1}{r}A_1 + \frac{1}{r^2}A_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ B &= B_0 + \frac{1}{r}B_1 + \frac{1}{r^2}B_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ C &= C_0 + \frac{1}{r}C_1 + \frac{1}{r^2}C_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

もう一つは波数  $k$  と同様に緩やかに変動する空間スケールである. ここでは  $A_m, B_m, C_m, m=0, 1, 2,$  について, その空間微分が  $O(\epsilon)$  の大きさを持つとして, 次の様に摂動展開を行う.

$$\begin{aligned} A_0 &= a_{00} + \epsilon a_{01}, & A_1 &= a_{10} + \epsilon a_{11}, & A_2 &= a_{20} + \epsilon a_{21}, \\ B_0 &= b_{00} + \epsilon b_{01}, & B_1 &= b_{10} + \epsilon b_{11}, & B_2 &= b_{20} + \epsilon b_{21}, \\ C_0 &= c_{00} + \epsilon c_{01}, & C_1 &= c_{10} + \epsilon c_{11}, & C_2 &= c_{20} + \epsilon c_{21}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

式 (3.2.8) を式 (3.2.7) に代入し,  $1/r$  の冪の次数ごとにまとめ, これが任意の  $r$  で成立する条件より,  $A_m, B_m, C_m$ ,  $m=0,1,2$ , についての微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
A_0^2 + k^2 + \frac{\partial A_0}{\partial r} &= 0, \\
2A_0A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial r} + A_0 &= 0, \\
2A_0C_2 + \frac{\partial C_2}{\partial r} + 1 &= 0, \\
2A_0B_2 + \frac{\partial B_2}{\partial r} + 2\frac{\partial A_0}{\partial r}C_2 &= 0, \\
2A_0A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial r} + A_1^2 + \frac{\partial A_0}{\partial r}B_2 + \frac{\partial^2 A_0}{\partial r^2}C_2 &= 0 \\
B_0 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_0 = 0, \quad C_1 = 0
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

これらを式 (3.2.9) を用いて展開して解くことにより, 最終的に得られる一方向波の方程式は, 次の様になる.

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = \left\{ ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{8kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right\} \phi_s - \frac{i}{2k^2 r^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} + \frac{1}{2kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2} \tag{3.2.11}$$

上式では,  $r$  に関して  $1/r^2$  の項まで, 緩やかに変化する空間変数に関しては, 緩勾配条件より 1 階微分までが考慮されている. この放物型近似式の導出については, Appendix A.3 で詳細に示す.

### 3. 2. 3 級数解と放物型方程式の接合

ここでは、特異点近傍で得られた級数解 (3.2.3) が放物型方程式 (3.2.11) を満たすように未定係数を決定する。解の接合点  $r = r_m$  は  $k_0 r_m = 1$  を満たすように選ぶ。級数解を放物型方程式に代入し、これが任意の  $\theta$  に対して成立する条件から、未定係数を求める方程式が得られる。最終的に未定係数は次のように定まる。

$$p_0 = \frac{1}{2\pi} \quad (3.2.12)$$

$$q_0 = \left(-\frac{67}{745} - \frac{1224}{745}i\right)p_0 = -\frac{67}{1490\pi} - \frac{612}{745\pi}i \quad (3.2.13)$$

$$q_{1c} = 2\lambda p_0 \frac{k_{x0}}{k_0^2} = \lambda \frac{k_{x0}}{k_0^2 \pi}, \quad q_{1s} = 2\lambda p_0 \frac{k_{y0}}{k_0^2} = \lambda \frac{k_{y0}}{k_0^2 \pi}, \quad (3.2.14)$$

$$\lambda = \frac{4023047}{17430020} - \frac{886024}{4357505}i$$

$$q_{2c} = q_{2s} = q_{3c} = q_{3s} = 0. \quad (3.2.15)$$

$$k_0 = k|_{r=0}, \quad k_{x0} = \left. \frac{\partial k}{\partial x} \right|_{r=0}, \quad k_{y0} = \left. \frac{\partial k}{\partial y} \right|_{r=0} \quad (3.2.16)$$

これらを用いると、級数解は次の様になる。

$$\begin{aligned} \phi_{ver} = & p_0 \left\{ 1 - \frac{(k_0 r)^2}{4} - \frac{k_0 r^3}{4} (k_{x0} \cos \theta + k_{y0} \sin \theta) \right\} \log k_0 r \\ & + p_0 \left\{ \frac{(k_0 r)^2}{4} + \frac{3}{16} k_0 r^3 (k_{x0} \cos \theta + k_{y0} \sin \theta) \right\} \\ & + q_0 \left\{ 1 - \frac{(k_0 r)^2}{4} - \frac{k_0 r^3}{4} (k_{x0} \cos \theta + k_{y0} \sin \theta) \right\} \\ & + \left\{ k_0 r - \frac{(k_0 r)^3}{8} \right\} (q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

これより、級数解は特異点の強度  $p_0$  に比例する相似解であり、 $\theta$  については 1 次のモードのみを持つことがわかる。これは解を接合する際に放物型方程式に含まれる  $k$  の  $\theta$  依存性を、緩勾配条件より 1 次までしか考慮しなかったためである。

放物型方程式の解は、接合点  $r = r_m$  での級数解の値を境界条件として、点源に対して外向きに marching scheme によって数値的に求める。接合点での境界条件は、次のようになる。

$$\phi_s|_{r=r_m} = \frac{68 - 459i}{745\pi} + \frac{1337543 + 119626i}{4357505\pi} \left( \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{r=0} \cos \theta + \frac{\partial k}{\partial y} \Big|_{r=0} \sin \theta \right) \frac{1}{(k|_{r=0})^2} \quad (3.2.18)$$

が得られる。とくに上式に対して近似、

$$\left( \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{r=0} \cos \theta + \frac{\partial k}{\partial y} \Big|_{r=0} \sin \theta \right) r_m \approx k|_{r=r_m} - k|_{r=0} \quad (3.2.19)$$

を用いれば、式 (3.2.19) は簡便な表示

$$\phi_s|_{r=r_m} = -\frac{939811 + 2804317i}{4357505\pi} + \frac{1337543 + 119626i}{4357505\pi} \frac{k|_{r=r_m}}{k|_{r=0}} \quad (3.2.20)$$

で置き換えることができる。なお、この解の接合で行われている式の展開等は、Appendix A.4 で詳細に示す。



### 3. 3 Green 関数構成法の特徴

本研究で提案する Green 関数法の特徴を、過去に提案された郭・西村 (1997) の方法と比較して示す。

特異点近傍には、郭・西村の方法では、一様水深を仮定して Hankel 関数を用いているが、本方法では緩勾配方程式の級数解を用いることで、そこでの水深変化を考慮することが出来る。また特異点遠方の放物型近似式は、変数係数の空間変動スケールを考慮した摂動法を用いて導出している。本方法は郭・西村の方法と同様に、式 (3.2.6) より点源からの湧き出し波成分と吸い込み波成分を分離できると仮定している。また、湧き出し波の進行に伴って生じる底面からの反射波は、非常に小さいとして無視している。本方法で得られる放物型近似式 (3.2.11) は、郭・西村の式と比較して右辺第 1, 3 項における  $k$  の高次累乗成分と、第 2 項における  $k$  の  $\theta$  依存性を考慮した項が付加される。とくに前者は、長波を考慮する場合、その効果が有意になると考えられる。郭・西村の手法により得られる放物型近似式は次のようになる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left\{ ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} \right\} \phi + \frac{i}{2kr^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (3.3.1)$$

本研究で提案する Green 関数構成法の特徴は、その導出過程において緩勾配方程式の変数係数の空間変数に対する依存性と、その方程式に含まれている仮定である緩勾配条件のみを考慮している点である。ここでは、一様水深場における素解である Hankel 関数を利用するといった、付加的な知識を一切用いていない。このため、他の工学分野で重要となるような、変数係数偏微分方程式の Green 関数の導出にも、本方法は応用可能であると考えられる。

### 3. 4 数値計算法

数値計算法としては、点源を中心として $r$ 方向刻みを $\Delta r$ 、 $\theta$ 方向の刻みを $\Delta\theta$ とするそれぞれ一定間隔の計算格子をとり、導かれた放物型波動方程式(3.2.11)を差分して、Crank-Nicolson法により任意水深場の点源波解を求める。点源波そのものは特異点であり、これを数値的に取り扱うことは不可能である。そこで接合半径 $r=r_m$ 内の微小円領域は3.2.1節で導いた緩勾配方程式の級数解を用い、その外縁から外側に向かって marching scheme の計算を行うこととする。

3.2.2節で求めた放物型波動方程式(3.2.11)をもう一度書くと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial r} &= \left\{ ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{8kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right\} \phi - \frac{i}{2k^2 r^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ &= (A_0 + \frac{1}{r} A_1 + \frac{1}{r^2} A_2) \phi + \frac{1}{r^2} B_2 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} C_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\end{aligned}$$

上式を整理すると次式のようになる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + E \frac{\partial \phi}{\partial r} + F \phi = 0 \quad (3.4.1)$$

ここで、

$$D = \frac{B_2}{C_2} = \frac{\partial k}{\partial \theta} \left/ \left( \frac{i}{k} \frac{\partial k}{\partial r} - k \right) \right. \quad (3.4.2)$$

$$E = -\frac{r^2}{C_2} = -2kr^2 \left/ \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right. \quad (3.4.3)$$

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{C_2} (r^2 A_0 + r A_1 + A_2) \\ &= 2k \left\{ r^2 \left( ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) - \frac{r}{2} + \frac{1}{8k} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right\} \left/ \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right.\end{aligned} \quad (3.4.4)$$

である。図-3.4のような計算格子を用いて、式(3.4.1)をCrank-Nicolson型の差分公式に展開する。すなわち、図-3.4に示す対象地点の値を想定して $i$ 番目、 $i+1$ 番目の半径において $\theta$ 方向には中央差分の平均を、 $r$ 方向には前進差分をとる。式(3.4.1)中の各偏微分項を差分式で表示すると次の様になる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_{i+1,j+1} - 2\phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j-1}}{\Delta \theta^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta \theta^2} \right) \quad (3.4.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1}}{2\Delta \theta} + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta \theta} \right) \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta r} \quad (3.4.7)$$

$$\phi = \frac{1}{2} (\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j}) \quad (3.4.8)$$

これらを式 (3.4.1) に代入して整理すると、差分化された基礎方程式が次の様に得られる。

$$-\alpha_j \phi_{i+1,j+1} + \beta_j \phi_{i+1,j} - \gamma_j \phi_{i+1,j-1} = \delta_j \quad (3.4.9)$$

ここに、 $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $\delta_j$  は、

$$\alpha_j = -\frac{1}{2\Delta \theta^2} - \frac{D}{4\Delta \theta} \quad (3.4.10)$$

$$\beta_j = -\frac{1}{\Delta \theta^2} + \frac{E}{\Delta r} + \frac{F}{2} \quad (3.4.11)$$

$$\gamma_j = -\frac{1}{2\Delta \theta^2} + \frac{D}{4\Delta \theta} \quad (3.4.12)$$

$$\delta_j = \alpha_j \phi_{i,j+1} + \left( \frac{1}{\Delta \theta^2} + \frac{E}{\Delta r} - \frac{F}{2} \right) \phi_{i,j} + \gamma_j \phi_{i,j-1} \quad (3.4.13)$$

である。



### 3. 5 数値素解の精度

本研究で提案する Green 関数構成法の妥当性を検討するため，一様及び非一様水深地形について既に得られている厳密解との比較を試みる．

#### 3. 5. 1 一様水深場における点源波

一様水深場における数値素解を，水深 5.0 m，周期 10.0 s の条件の下で  $r = 0 \sim 300.0$  m まで計算し，Hankel 関数解と比較する．図-3.5 (a)，(b) は両者の実数部と虚数部の値をそれぞれ比較したものである．ここで Hankel 関数解は，数値素解と同様に原点で単位強度の特異性を持つように，正規化して示す．数値素解の差分間隔について  $\Delta r = 5.0, 1.0$  m の 2 ケースの結果を同時に示している．また  $\theta$  方向については  $\Delta\theta = 2\pi/72$  rad で固定している．その結果，波長の  $1/30$  の差分間隔となる  $\Delta r = 1.0$  m で計算した場合は，Hankel 関数を，非常に精度よく表現することがわかった．

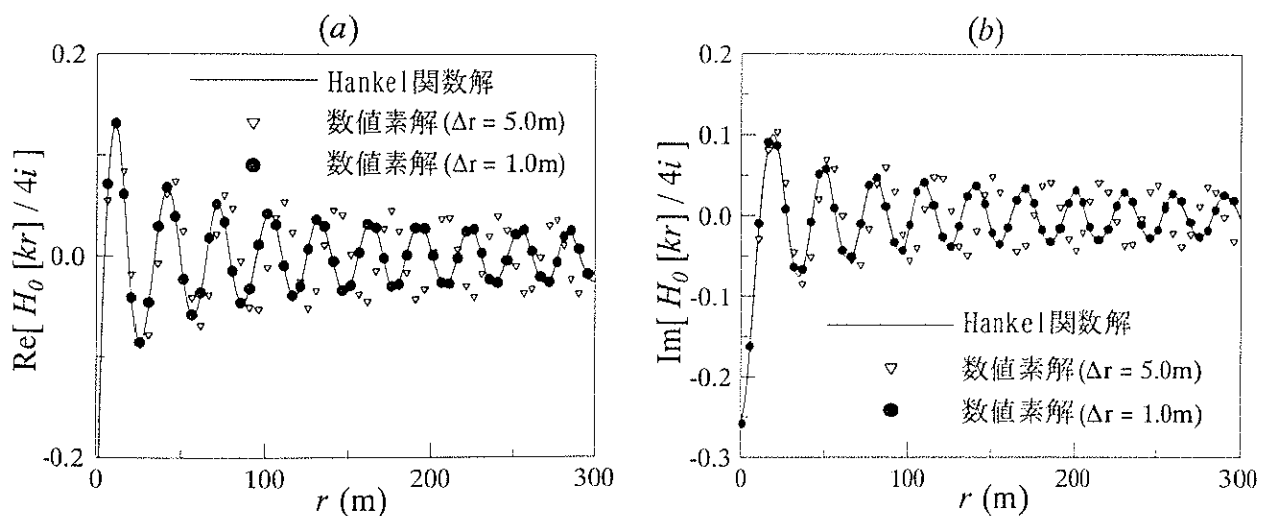


図-3.5 Hankel 関数との比較  
(a) 実数部，(b) 虚数部

### 3. 5. 2 平行等深線斜面上における点源波

波速が岸沖方向に線形的に変化する平行等深線斜面上の点源から発する波について数値解析を行い、厳密解との比較をする。このような地形上の点源から発する波について、波向き線法を用いた等位相面の厳密解が郭（1998）によって求められている（この厳密解の導出の詳細は、Appendix A.6 参照）。ここで波速  $C$  を次のように考えると、

$$C = 0.1x \quad (3.5.1)$$

波峰線方程式は次のようになる。

$$(x - x_0 \cosh 0.1t)^2 + y^2 = (x_0 \sinh 0.1t)^2 \quad (3.5.2)$$

これは点源  $(x_0, 0)$  より発した波の波峰線が、時刻  $t$  で点  $(x_0 \cosh 0.1t, 0)$  を中心とする半径  $x_0 \sinh 0.1t$  の円環状に広がっていくことを示す。

また、水深  $h$  は分散関係式

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (3.5.3)$$

より

$$h = \frac{C}{2\omega} \log \frac{g + \omega C}{g - \omega C} \quad (3.5.4)$$

となる。この波向き線法の適用範囲は、 $\nabla h/kh \ll O(1)$  である（Mei, 1984）。

点源  $x = 30.0$  m より発する、周期  $T = 2\pi/\omega = 4.0$  s の波に対する位相変化について、数値解と厳密解を図-3.6 に示す。このとき水深は図-3.7 のようになる。数値計算においては差分間隔を  $\Delta r = 0.2$  m,  $\Delta\theta = 2\pi/72$  rad とした。実線は数値解、破線は厳密解を表す。両者が非常によく一致していることから、本研究で提案する Green 関数構成法の妥当性が示されるものと考えられる。また、この条件において数値計算から得られた波高変化  $|f|$  を図-3.8 に示す。波高は点源の近いところで大きくなり点源の中心では無限大になる。そして、水深が浅くなるにしたがって波高は大きくなるが、屈折および浅水効果によるものであると思われる。

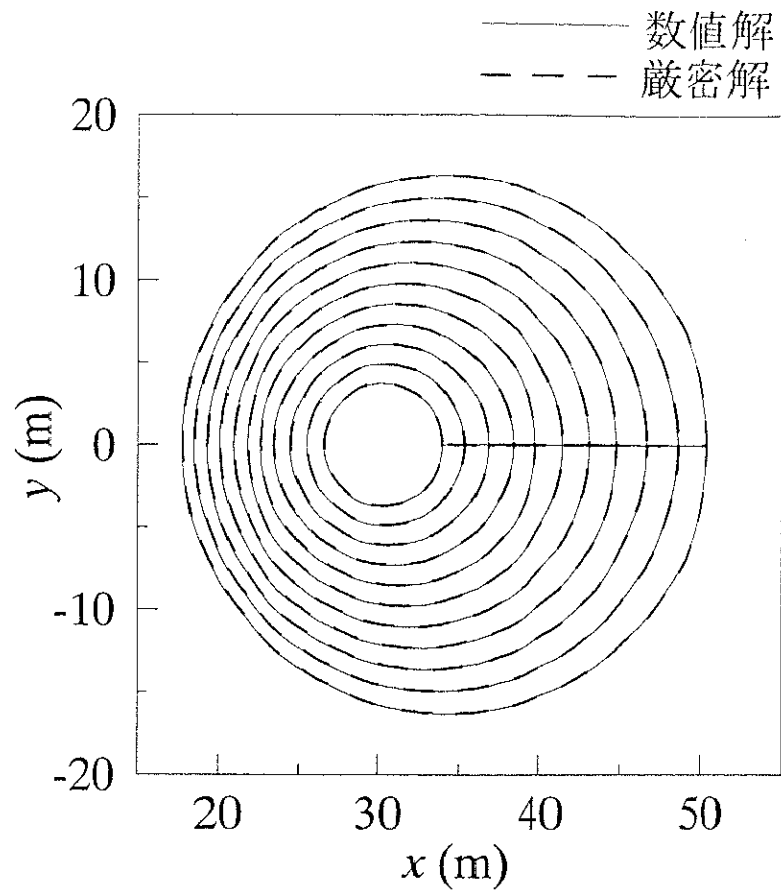


図-3.6 厳密解と数値解の波峰線

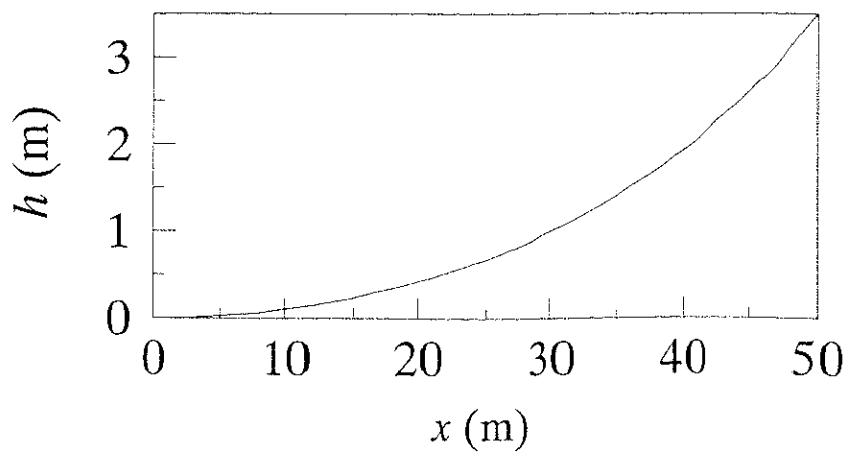


図-3.7 波速  $C = 0.1x$  のときの水深変化

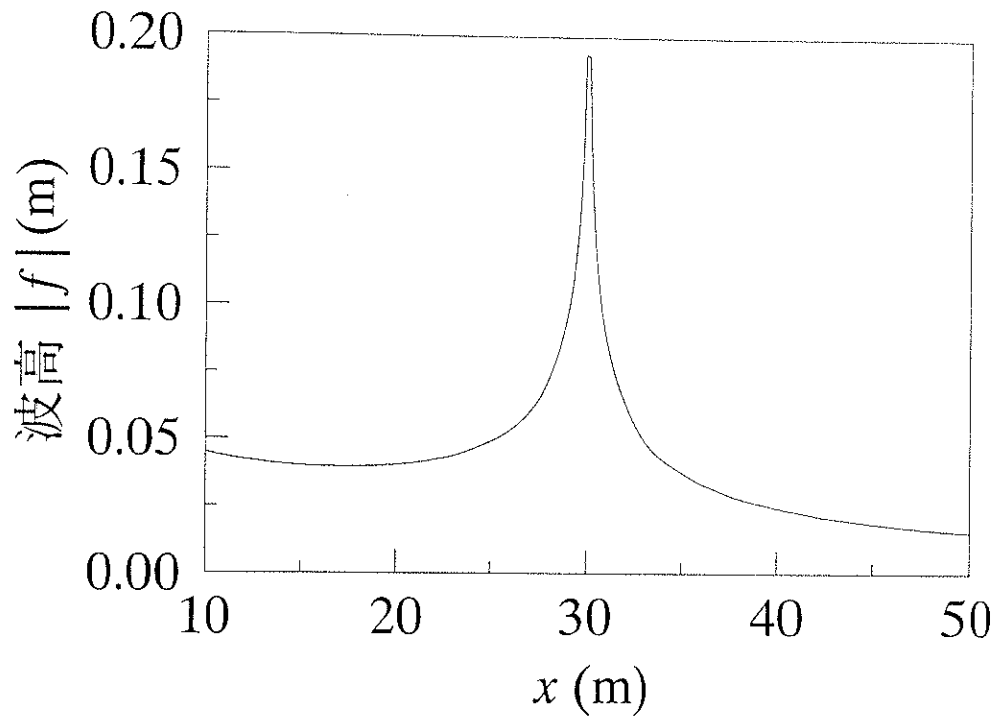


图-3.8 波高变化



### 3. 6 任意水深場における Green 関数の相反性

図-3.9 のようなモデル港湾の境界上に 2 点  $P_1$ ,  $P_2$  を考え,  $P_1$  から発し  $P_2$  へ達する Green 関数値を,

$$G_1 = G(P_2; P_1) \quad (3.6.1)$$

と定義する. 逆に  $P_2$  から  $P_1$  への値を,

$$G_2 = G(P_1; P_2) \quad (3.6.2)$$

とする. 一様水深場の場合, Green 関数つまり Hankel 関数は 2 点間の距離によって値が決定されるので, 一般に

$$G(P_2; P_1) = G(P_1; P_2) \quad (3.6.3)$$

となる. これは Green 関数の相反性と呼ばれている. 任意水深場では, 波の屈折, 回折, 浅水変形により一般に Green 関数値は 2 点間の距離のみに依存せず, 相反性が成立しないことが考えられる. 3.6.1 節では, Helmholtz 型方程式が波の屈折, 回折, 浅水変形といった波の変形をどの程度考慮しているのか, 解析的に検討する. 次に 3.6.2 節では, 具体的に一様勾配を持つモデル地形について数値素解の計算を行い, 任意水深場の Green 関数の相反性を議論する. 最後に 3.6.3 節では, 数値素解が満たすべき必要条件である Green の定理に基づいて, Green 関数の相反性について議論する.

#### 3. 6. 1 Helmholtz 型方程式の特徴

波浪場解析に用いる Helmholtz 型方程式は, 緩勾配方程式に, Radder 変換を作用することにより得られる. これらをもう一度書くと,

$$\text{緩勾配方程式} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( CC_g \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( CC_g \frac{\partial f}{\partial y} \right) + k^2 CC_g f = 0 \quad (3.6.4)$$

$$\text{Radder 変換} \quad f = \phi / \sqrt{CC_g} \quad (3.6.5)$$

$$\text{Helmholtz 型方程式} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = 0 \quad (3.6.6)$$

ここで Helmholtz 型方程式は，地形変化の効果を波数  $k$  のみで考慮している。

まず，緩勾配方程式が波の変形を考慮していることを西村（1989）の方法を用いて解析的に示す．式（3.6.4）に支配される複素関数  $f$  の振幅および位相を，それぞれ滑らかな関数  $A(x, y)$ ， $\psi(x, y)$  とすれば，

$$f = Ae^{i\psi} \quad (3.6.7)$$

となる．上式を式（3.6.4）に代入すると，実数部および虚数部より次の連立系を得る．

$$\frac{1}{CC_g A} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (CC_g \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (CC_g \frac{\partial A}{\partial y}) \right] + k^2 - \psi_x^2 - \psi_y^2 = 0 \quad (3.6.8)$$

$$\frac{\partial \psi_x CC_g A^2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y CC_g A^2}{\partial y} = 0 \quad (3.6.9)$$

$\psi_x$  および  $\psi_y$  はそれぞれ  $x$ ， $y$  に関する  $\psi$  の偏導関数であるが，これらを独立した未知量と考えるならば，さらに自明の関係式，

$$\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} = 0 \quad (3.6.10)$$

を補うことにより系が完備する．

直進する進行波の位相関数  $\psi = kx \cos \alpha + ky \sin \alpha$  において，波数  $k$  が  $x$ ， $y$  の弱い関数とすれば，近似的に  $\psi_x = k \cos \alpha$ ， $\psi_y = k \sin \alpha$  である．ここで  $\alpha$  は波向き角である．このとき式（3.6.10）は波数ベクトルの非回転性を，式（3.6.9）は波動エネルギーの保存則を示している．これらは，それぞれ波の屈折および浅水変形に対応している．また式（3.6.8）の第1項は，振幅  $A$  のラプラシアンを成している．したがってこの式は振幅の非一様性が波長変化によって緩和されることを示し，波の回折に対応している．

Helmholtz 型方程式についても同様に，関数  $\phi$  の振幅を  $A'(x, y)$ ，位相を  $\psi'(x, y)$  とし，

$$\phi = A'e^{i\psi'} \quad (3.6.11)$$

を式（3.6.6）に代入すると，

$$\frac{1}{A'} \left( \frac{\partial^2 A'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A'}{\partial y^2} \right) + k^2 - \psi_x'^2 - \psi_y'^2 = 0 \quad (3.6.12)$$

$$\frac{\partial \psi_x' A'^2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y' A'^2}{\partial y} = 0 \quad (3.6.13)$$

が得られる。

位相を  $\psi'(x,y)$  は、緩勾配方程式の場合と同様に式 (3.6.10) と同形の自明な方程式を満たす。したがって Helmholtz 型方程式は、緩勾配方程式と同程度に波の屈折を考慮している。

式 (3.6.13) は波の浅水変形の効果を考慮しているが、緩勾配方程式と比べて  $CC_g$  の空間微分を含む項が無視されている。このため Helmholtz 型方程式で支配される複素関数  $\phi$  は、浅水変形の考慮が不十分となっていることがわかる。浅水変形の効果は、 $\phi$  に対して Radder 変換を逆に作用することによって、最終的に複素振幅  $f$  に考慮される。図-3.10 に 3.5.2 節と同様の条件の下で解いた点源波の波高変化を  $|f|$  および  $|\phi|$  について同時に示し、両者を比較する。複素振幅  $|f|$  は、水深が浅くなるにつれて波高が大きくなり、とくに水深が 0 となる  $x=0$  で波高は無限大となる。一方、水深変形の考慮が不十分である  $|\phi|$  では、むしろ水深が大きくなるにつれて波高が大きくなっている。複素振幅  $|f|$ ,  $|\phi|$  の水深  $h$  に対する依存性は、Appendix A.7 で詳細に議論する。

式 (3.6.12) は、波の回折の効果を考慮しているが、式 (3.6.13) と同様に  $CC_g$  の空間微分を含む項が無視されている。ただし式 (3.6.8), (3.6.12) に含まれる振幅の 2 階微分項は、緩勾配条件によりその寄与が小さいと仮定している項である。これより緩勾配方程式自体に含まれる回折の効果は非常に小さいことがわかる。同様に Helmholtz 型方程式中でも、この効果は非常に小さいと考えられる。実際の波浪場解析結果に現れる波の回折現象では、これらの式で考慮される効果よりも、計算対象領域の平面境界形状による波向き変化の効果による寄与が重要となる。

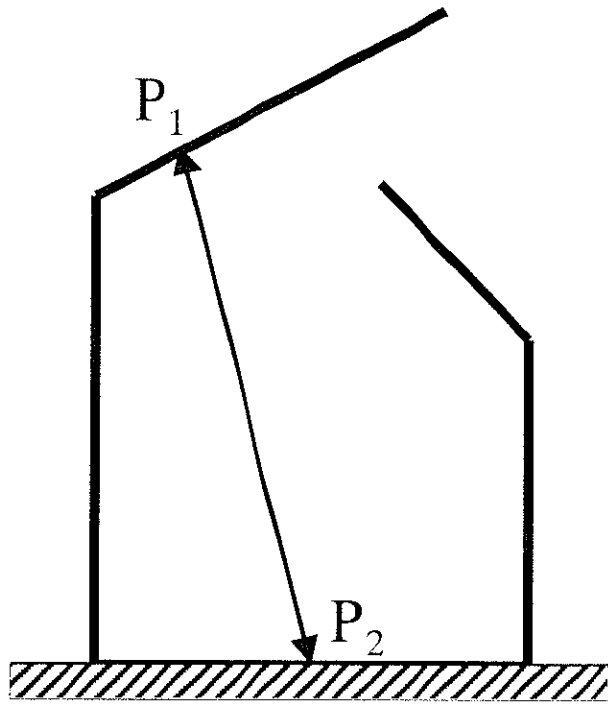


図-3.9 モデル港湾

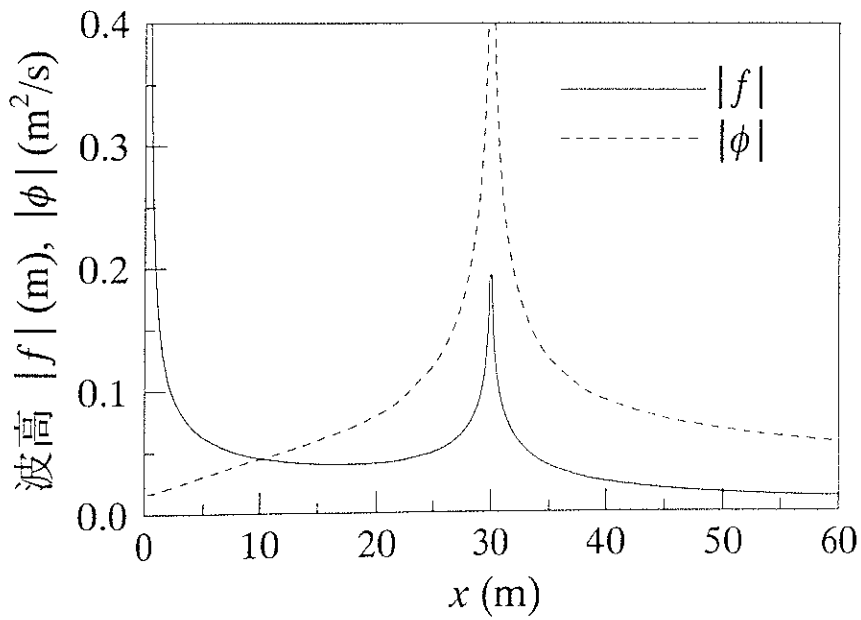


図-3.10 波高 $|f|$ ,  $|\phi|$ の比較

### 3. 6. 2 数値素解の相反性

波浪場解析において、Green 関数の相反性が成立しないことは、次のような問題を生じる。本研究で着目している解析手法である密度法は、波源強度を算定する際、各直線境界ごとに逐次強度を求めていく収束計算を行っている（第6章参照）。このとき各直線境界から発する Green 関数の値は、影響係数として計算機のメモリーに記憶されるが、相反性が成立しない場合、相異なる境界上に存在する2点間の Green 関数値は異なり、それぞれ独立に記憶する必要が生じる。これは結果的にメモリーの使用量の増加を生じることになる。ここでは、具体的に計算を行って得られる結果より、任意水深場の Green 関数の相反性を議論する。

計算対象領域は、図-3.11 のように  $x$  方向にのみ地形変化をしている平行等深線地形を考える。ここでは  $x=0.0\text{m}$  の水深を  $h=3.0\text{m}$  とし、 $x$  正方向に一様勾配  $s_i$  で水深が深くなっていくとする。なお水深が  $h=1.0\text{m}$  より浅くなる領域は、便宜上  $h=1.0\text{m}$  の一様水深としている。ここでは  $s_i$  について  $1/3$ ,  $1/5$ ,  $1/10$  の3ケースを考える。このような底面地形を持つ水平面領域（図-3.12）に2点  $P_1$ ,  $P_2$  を考え、その間の距離を  $\Delta P_1 P_2$  とする。またこの2点を結ぶ線分と  $x$  軸、つまり底面勾配の主方向とのなす角を  $\theta$  とする。計算ではこの2つのパラメータを変化させながら、式 (3.6.1), (3.6.2) で定義される  $G_1$ ,  $G_2$  の値を計算し、両者を比較する。ここで Green 関数値は複素数であるので、次のように極形式に変換し、その振幅と位相について議論する。

$$G = |G|e^{i\arg G} \quad (3.6.14)$$

数値素解は、特異点から離れるほど計算精度が悪くなる。これは差分間隔  $\Delta\theta$  を固定しているためである。実用上は、計算過程において半径  $r$  が大きくなるにつれて、 $\theta$  方向の差分間隔を小さくして解の精度を保つ手法も考えられる。ここでは、 $\theta$  方向に一定の差分間隔  $\Delta\theta = 2\pi/72$ ,  $2\pi/120$ ,  $2\pi/240$  の3ケースを考え、得られる数値素解の値を比較した。その結果  $\Delta\theta = 2\pi/120$  より小さな差分間隔を取れば、得られる解に差異は生じなかった。ここでは  $\Delta\theta = 2\pi/120$ ,  $\Delta r = 0.5$  とした場合の結果を示す。

図-3.13 は、底面勾配  $s_i = 1/3$  で  $G_1$ ,  $G_2$  の差異が一番大きくなった  $\theta = 65^\circ$  の、Green 関数値の振幅  $|G|$  および位相差  $\arg G_1 - \arg G_2$  を比較したものである。この場合、振幅について見られる両者の差異は、それが最大となる  $\Delta P_1 P_2 = 80.0\text{m}$  でも  $3.4\%$  となった。また位相差について見られる差異は、ごくわずかとなった。底面勾配  $s_i = 1/5$ ,  $s_i = 1/10$  の場合の結果をそれぞれ図-3.14, 3.15 に示す。底面勾配が緩やかになるにつれて、振幅に見られる差異は非常に小さくなり、 $s_i = 1/10$  の場合、最大でも約  $1\%$  程度であった。実際の波浪場解析においては、

この勾配よりも更に緩やかな勾配を持つ地形を対象とする場合が主であり、この結果から実用上は、Green 関数の相反性がほぼ成立しているとして解析を行うことが可能であると考えられる。

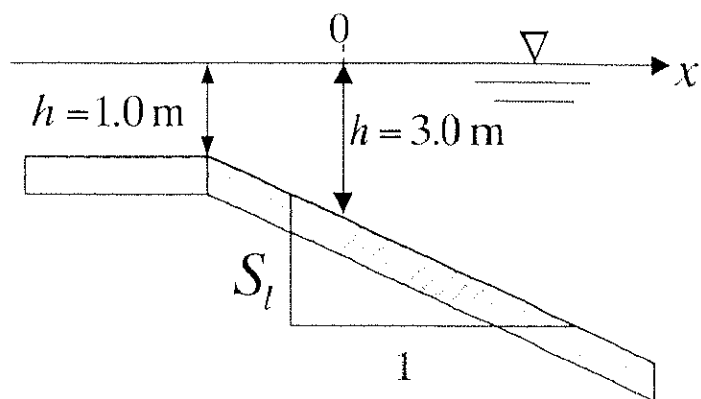


図-3.11 計算対象地形

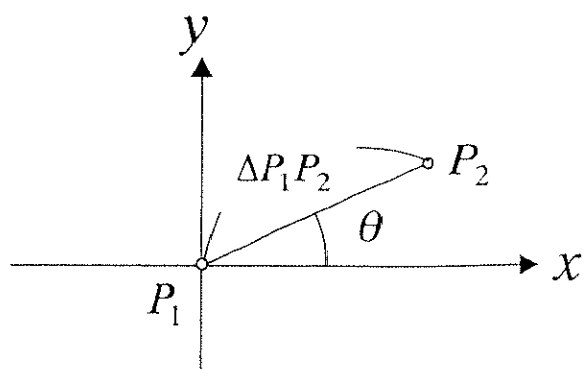


図-3.12 水平面領域

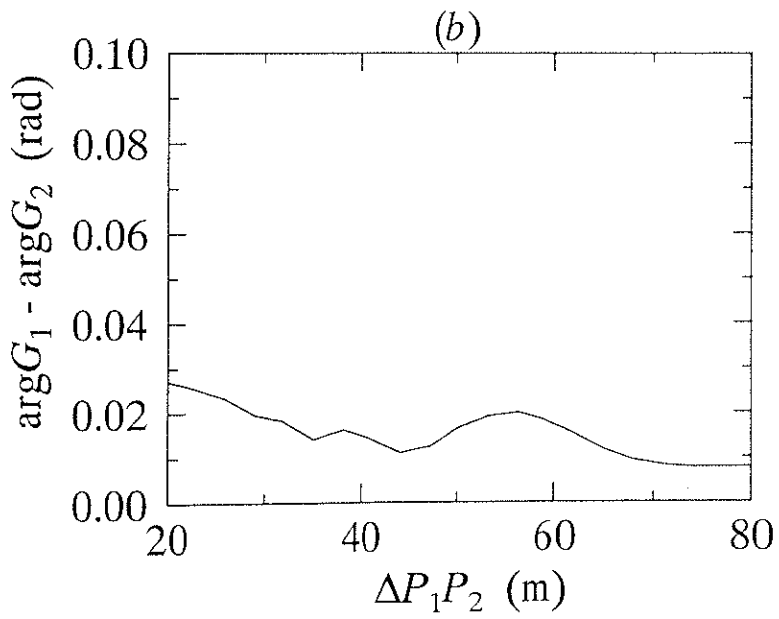
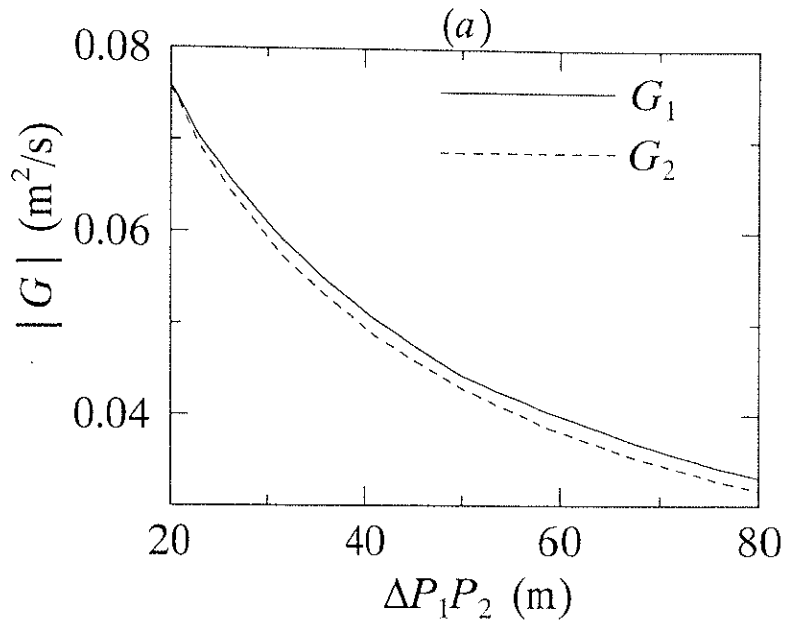


図-3.13 Green 関数値  $G_1$ ,  $G_2$  の比較  
 底面勾配  $s_f = 1/3$ ,  $\theta = 65^\circ$   
 (a) 振幅, (b) 位相差

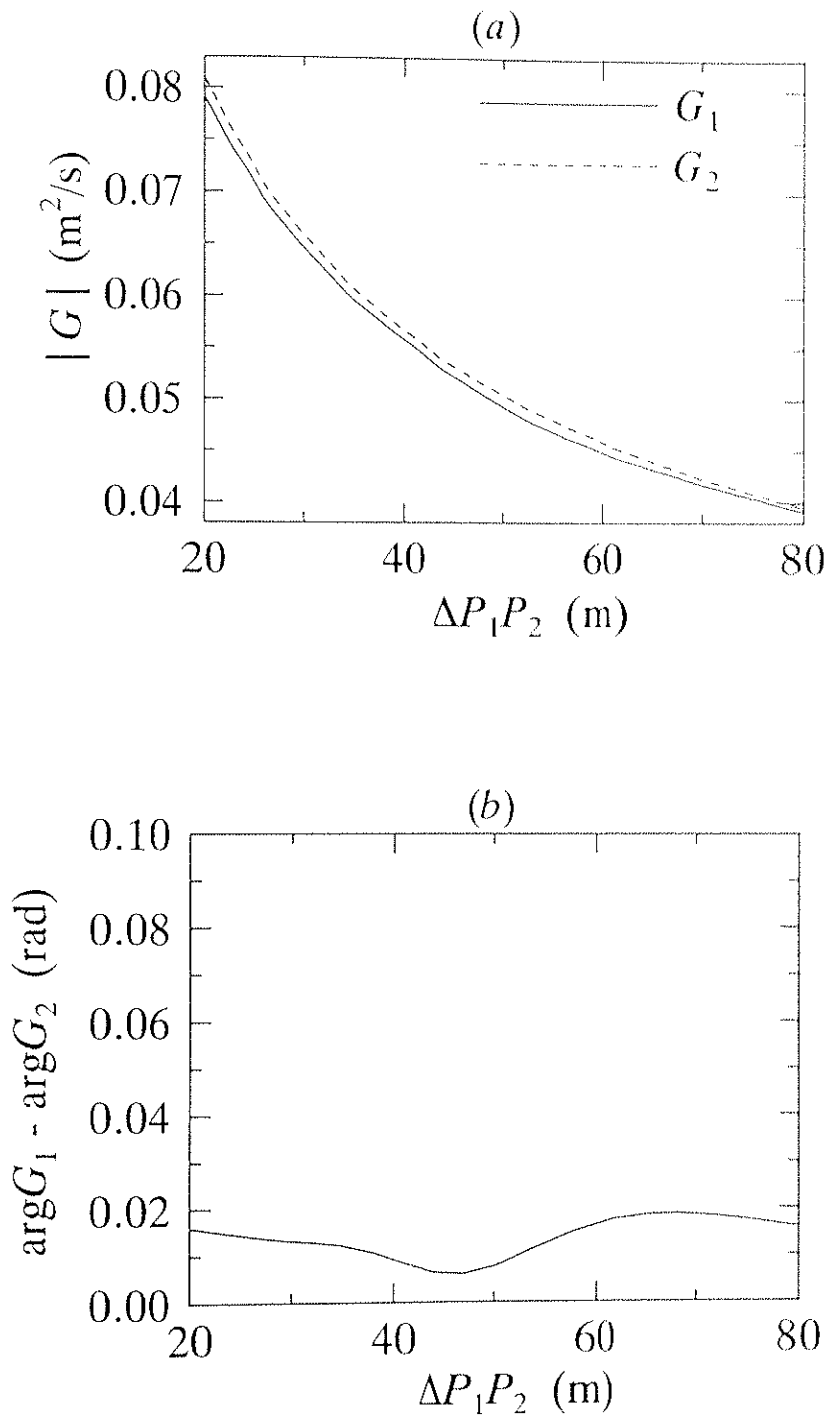


図-3.14 Green 関数値  $G_1$ ,  $G_2$  の比較  
 底面勾配  $s_f = 1/5$ ,  $\theta = 0^\circ$   
 (a) 振幅, (b) 位相差



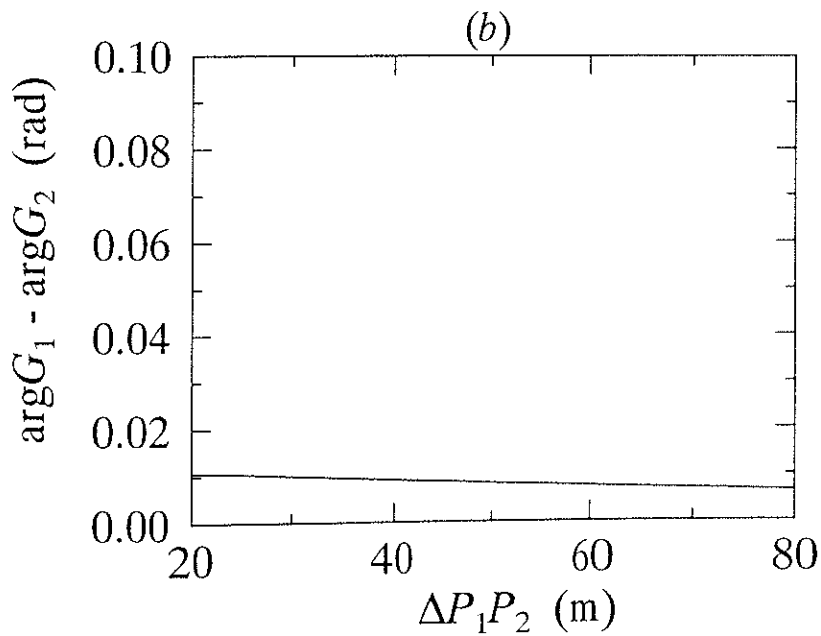
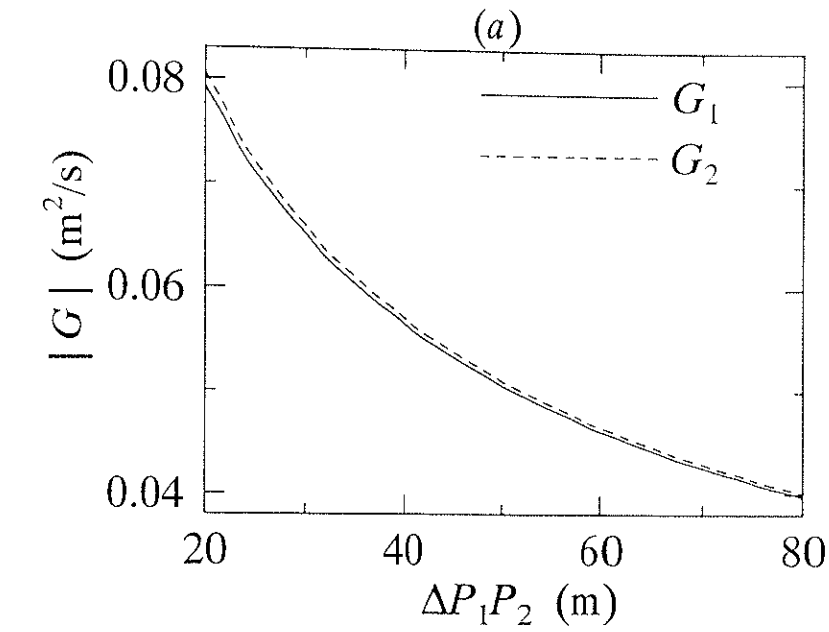


図-3.15 Green 関数値  $G_1$ ,  $G_2$  の比較  
 底面勾配  $s_f = 1/10$ ,  $\theta = 0^\circ$   
 (a) 振幅, (b) 位相差

### 3. 6. 3 Green 関数の相反性と Green の定理

図-3.16 で示すような閉曲線  $C$  で囲まれた閉領域  $D$  に成立する Green の定理は次の様になる.

$$\int_D (\phi^+ L[\phi] - \phi L[\phi^+]) dD = \int_C (\phi^+ \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \phi^+}{\partial n}) ds \quad (3.6.15)$$

ここで領域内の 2 点  $P_1, P_2$  より発する Green 関数を考え,  $\phi = G(Q; P_1)$ ,  $\phi^+ = G(Q; P_2)$  とし, 閉境界  $C$  を無限遠にとると上式は次の様になる.

$$\begin{aligned} G(P_1; P_2) - G(P_2; P_1) &= \int_C (G(Q; P_2) \frac{\partial G(Q; P_1)}{\partial n} - G(Q; P_1) \frac{\partial G(Q; P_2)}{\partial n}) ds \\ &= \int_C (G(Q; P_2) \frac{\partial G(Q; P_1)}{\partial r} - G(Q; P_1) \frac{\partial G(Q; P_2)}{\partial r}) ds \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

一様水深場の場合, Green 関数は次の Sommerfeld の放射条件を満たし,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} - ikG \right) = 0 \quad (3.6.17)$$

従って式 (3.6.16) の右辺は 0 となり, 最終的に相反定理が導かれる.

$$G(P_2; P_1) = G(P_1; P_2) \quad (3.6.18)$$

任意水深場の場合, 放物型近似式,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left\{ ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{8kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right\} \phi - \frac{i}{2k^2 r^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (3.6.19)$$

より  $r \rightarrow \infty$  で, 上式の  $O(1/r)$  まで項を残すと,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left( ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} \right) \phi \quad (3.6.20)$$

となり, Sommerfeld の放射条件は成立しない. このことは, この放射条件が一様水深場で成立する条件であり, 無限遠の地形変化を考慮する場合, それに

対応する波数  $k$  の変化を包含するような新たな放射条件が必要となることを示している。便宜上無限遠で一様水深場を想定すれば、Sommerfeld の放射条件は成立し、任意水深場でも近似的に相反性が成立すると考えられる。また式 (3.6.20) を解くと、無限遠での  $\phi$  の解析解

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{kr}} \exp(i \int_0^r k dr) \quad (3.6.21)$$

が得られる。

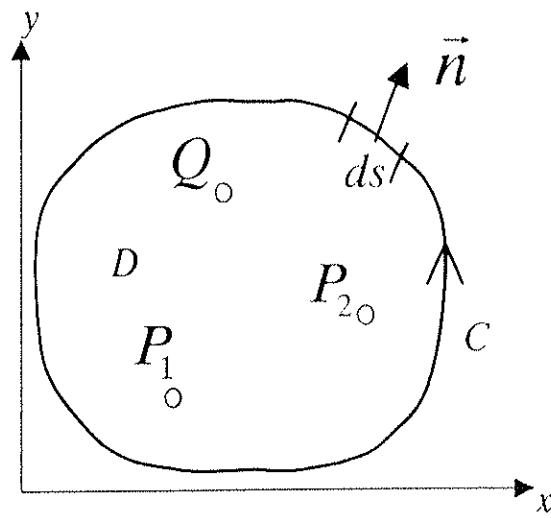


図-3.16 閉領域

## 第4章. 半無限平面における波動解

本研究で注目する波浪場解析手法は、Green 関数法の一つである密度法である。この手法では、すべての境界上に波源の分布を想定し、そこから発生する点源波の総和として最終的な波の場を表現することを基本方針とする。そして得られる波浪場が、入射波条件および境界条件をすべて満たすように分布波源の強度を決定することを最終目的とする。本章では、本手法の基礎となる直線境界で区切られた半無限領域の波動解を求める。まず 4.1 節では、本手法で用いる Green 関数について説明する。次に直線境界に到達する波の解について 4.2 節で、直線境界から発する波の解について 4.3 節でそれぞれ示す。最後に、一様水深場で一般的に用いられている鏡像法の任意水深場への拡張性について 4.4 節で議論する。

### 4. 1 半無限平面内の波動に関する Green 関数

本研究では任意水深場の半無限領域の Green 関数として、点源  $P$  からの湧き出し波を表現する数値素解  $\phi_s(Q;P)$  を用いる。すなわち、

$$G(Q;P) = \phi_s(Q;P) \quad (4.1.1)$$

である。ここで Green 関数の特性を再び示すと、

$$L[G] = 0 \quad \text{for } Q \neq P \quad (4.1.2)$$

$$\iint_{\delta} L[G] dx dy = 1 \quad \text{for } Q = P \quad (4.1.3)$$

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \quad (4.1.4)$$

である。ここで  $\delta$  は  $P$  点近傍の無限小領域とする。また 3.6.3 節で示すように無限遠で一様水深場を仮定すると、Green 関数は Sommerfeld の放射条件を満たす。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} - ikG \right) = 0 \quad (4.1.5)$$

この条件は、波が無限遠方で進行性であり、かつ十分小さな複素振幅を持つと規定している。

## 4. 2 直線境界に到達する波

計算対象領域として、図-4.1 のように、 $x$  軸に沿う直線境界  $C_0$  と無限遠境界  $C_1$  にとり囲まれている半無限領域  $D$  ( $y \geq 0$ ) を考える。領域内の点  $P_1$  に強度  $\mu$  の点波源が存在し、

$$f_1(Q) = \mu \cdot \phi_s(Q; P_1) \quad (4.2.1)$$

となる波が生じている状況を考える。このとき、

$$L[f_1] = 0 \quad \text{for } Q \neq P_1 \quad (4.2.2)$$

$$\iint_D L[f_1] dx dy = \mu \quad \text{for } Q = P_1 \quad (4.2.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial f_1}{\partial r} - ikf_1 \right) = 0 \quad \text{on } C_1 \quad (4.2.4)$$

である。

ここで、2つの関数  $f, g$  に関してこの領域で成立する Green の定理

$$\iint_D (fL[g] - gL[f]) dD = \int_{C_0+C_1} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds \quad (4.2.5)$$

において、 $f = f_1(Q)$ 、 $g = G(Q; P)$  とすれば、前節に示した Green 関数の特性から、

$$\begin{aligned} f_1(P) - \mu \cdot G(P_1; P) &= \int_{C_0} (f_1(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P)}{\partial n} - G(Q_0; P) \cdot \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n}) ds \\ &\quad + \int_{C_1} (f_1(Q_1) \cdot \frac{\partial G(Q_1; P)}{\partial n} - G(Q_1; P) \cdot \frac{\partial f_1(Q_1)}{\partial n}) ds \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

を得る。ここで、式 (4.1.5) および (4.2.4) を用いると、 $C_1$  上の積分は、

$$\begin{aligned} &\int_{C_1} (f_1(Q_1) \cdot \frac{\partial G(Q_1; P)}{\partial n} - G(Q_1; P) \cdot \frac{\partial f_1(Q_1)}{\partial n}) ds \\ &\approx \left[ \left( ik - \frac{1}{2r} \right) - \left( ik - \frac{1}{2r} \right) \right] f_1(Q_1) \cdot G(Q_1; P) \cdot \pi r \\ &\rightarrow 0 \quad (r = \infty) \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

従って、式 (4.2.6) より

$$f_1(P) = \mu \cdot G(P_1; P) + \int_{C_0} (f_1(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P)}{\partial n} - G(Q_0; P) \cdot \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n}) ds \quad (4.2.8)$$

が得られる。とくに点  $P$  を境界  $C_0$  上の点  $P_0$  に漸近させる場合、

$$\begin{aligned} 0 - \mu \cdot G(P_1; P_0) &= \int_{C_0 - C_\epsilon} (f_1(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P_0)}{\partial n} - G(Q_0; P_0) \cdot \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n}) ds \\ &+ \lim_{P_0 \rightarrow P_0} \int_{C_\epsilon} (f_1(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P_0)}{\partial n} - G(Q_0; P_0) \cdot \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n}) ds \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

ここで  $C_\epsilon$  は積分経路より、特異点を除外するための半円経路であり、この半円内の  $P_0$  近傍で複素振幅  $f_1$  は、ほぼ一定と考える。また Green 関数は相反性が近似的に成立していると考えて、

$$G(P_1; P_0) \cong G(P_0; P_1) \quad (4.2.10)$$

とする。最終的に、境界上における点源波の振幅とその勾配の関係が得られる。

$$f_1(P_0) = -2 \int_{C_0 - C_\epsilon} (f_1(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P_0)}{\partial n} - G(Q_0; P_0) \cdot \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n}) ds \quad (4.2.11)$$

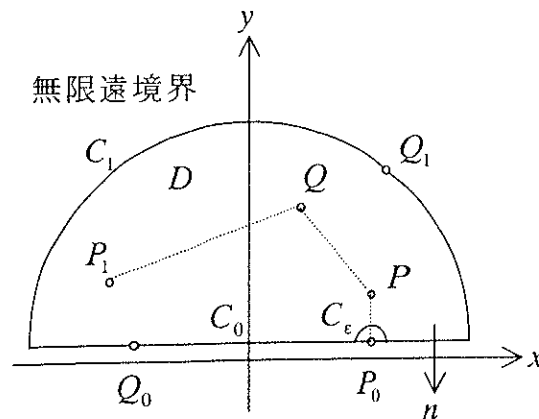


図 - 4.1 直線境界に到達する波

とくに、一様水深場の場合、

$$\phi_s(Q; P) = H_0^{(1)}(\overline{kPQ})/4i \quad (4.2.12)$$

となる。ここで、Hankel 関数で表現される湧き出し波の波峰線は点源を中心とした同心円状になることから、

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(\overline{kP_0Q_0})}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\partial H_0^{(1)}(\overline{kP_0Q_0})}{\partial \theta} = 0 \quad (4.2.13)$$

となる。従って式 (4.2.11) は次の様になる。

$$f_1(P_0) = \frac{1}{2i} \int_{C_0-C_\epsilon} \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n} \cdot H_0^{(1)}(\overline{kP_0Q_0}) ds \quad (4.2.14)$$

任意の曲線  $\Gamma$  上の分布波源  $\mu(P_1)$  が作る波 (図-4.2)、

$$f_1(Q) = \int_{\Gamma} \mu(P_1) \cdot \phi_s(Q; P_1) ds \quad (4.2.15)$$

が境界  $C_0$  上に入射する場合についても上記の議論はまったく同様に成立する。領域内の任意の点での波動は、

$$f_1(P) = \int_{\Gamma} \mu(P_1) \cdot G(P_1; P) ds + \int_{C_0} (f_1(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P)}{\partial n} - G(Q_0; P) \cdot \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n}) ds \quad (4.2.16)$$

となる。とくに境界  $C_0$  上では、

$$f_1(P_0) = -2 \int_{C_0-C_\epsilon} (f_1(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P_0)}{\partial n} - G(Q_0; P_0) \cdot \frac{\partial f_1(Q_0)}{\partial n}) ds \quad (4.2.17)$$

となり、結局、一般の波の場に対しても式 (4.2.11) の関係が得られる。

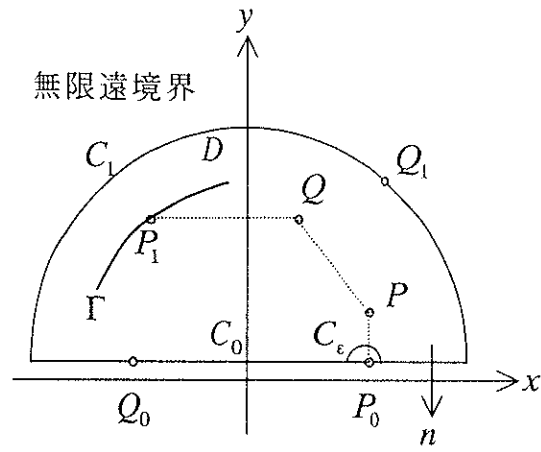


図-4.2 領域内の任意波源分布



### 4. 3 直線境界から発する波

直線境界  $C_0$  から発して半無限領域  $D$  に伝播する波  $f_2$  について調べる。この波は Helmholtz 型方程式を満たし、

$$L[f_2] = 0 \quad (4.3.1)$$

また無限遠方境界  $C_1$  では Sommerfeld の放射条件を満たすものとする。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial f_2}{\partial r} - ikf_2 \right) = 0 \quad \text{on } C_1 \quad (4.3.2)$$

Green の定理 (4.2.5) において、 $f = f_2(Q)$ 、 $g = G(Q; P)$  として整理すると、

$$\begin{aligned} f_2(P) = & \int_{C_0} (f_2(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P)}{\partial n} - G(Q_0; P) \cdot \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n}) ds \\ & + \int_{C_1} (f_2(Q_1) \cdot \frac{\partial G(Q_1; P)}{\partial n} - G(Q_1; P) \cdot \frac{\partial f_2(Q_1)}{\partial n}) ds \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

無限遠方境界  $C_1$  上では、外向き法線方向  $n$  と半径  $r$  の方向が一致するので、上式において右辺第 2 項の積分は、次の様に書くことができる。

$$J(P) = \int_{C_1} (f_2(Q_1) \cdot \frac{\partial G(Q_1; P)}{\partial r} - G(Q_1; P) \cdot \frac{\partial f_2(Q_1)}{\partial r}) ds \quad (4.3.4)$$

境界  $C_1$  上 ( $r \rightarrow \infty$ ) では、

$$J(P) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r (f_2(Q_1) \cdot \frac{\partial G(Q_1; P)}{\partial r} - G(Q_1; P) \cdot \frac{\partial f_2(Q_1)}{\partial r}) ds \quad (4.3.5)$$

ここで、式 (3.6.21) および Sommerfeld の放射条件 (4.1.5) を用いて、

$$\begin{aligned} J(P) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{kr}} e^{i \int_0^r kdr} (ikf_2 - \frac{\partial f_2}{\partial r}) r d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{i \int_0^r kdr} \sqrt{r} (ikf_2 - \frac{\partial f_2}{\partial r}) d\theta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

となる。

これより式 (4.3.3) は

$$f_2(P) = \int_{C_0} (f_2(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P)}{\partial n} - G(Q_0; P) \cdot \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n}) ds \quad (4.3.7)$$

さらに  $P \rightarrow P_0$  で,

$$f_2(P_0) = 2 \int_{C_0 - C_\epsilon} (f_2(Q_0) \cdot \frac{\partial G(Q_0; P_0)}{\partial n} - G(Q_0; P_0) \cdot \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n}) ds \quad (4.3.8)$$

となる. とくに一様水深場では, 式 (4.2.12), (4.2.13) を用いて,

$$f_2(P_0) = -\frac{1}{2i} \int_{C_0 - C_\epsilon} \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n} \cdot H_0^{(1)}(kP_0Q_0) ds \quad (4.3.9)$$

次に, 波の場を壁面境界  $C_0$  上に分布した強度  $\mu(Q_0)$  の波源より発する波の総和により表現する密度法を考える. これより  $f_2$  は,

$$f_2(P) = \int_{C_0} \mu(Q_0) \cdot \phi_s(P; Q_0) ds \quad (4.3.10)$$

となる. この境界法線方向微分は,

$$\frac{\partial f_2(P)}{\partial n} = \int_{C_0} \mu(Q_0) \cdot \frac{\partial \phi_s(P; Q_0)}{\partial n} ds \quad (4.3.11)$$

ここで  $P \rightarrow P_0$  とすると,

$$\frac{\partial f_2(P_0)}{\partial n} = -\frac{1}{2} \mu(P_0) + \int_{C_0 - C_\epsilon} \mu(Q_0) \cdot \frac{\partial \phi_s(P_0; Q_0)}{\partial n} ds \quad (4.3.12)$$

となり, 波源強度  $\mu(Q_0)$  は次のように求められる.

$$\mu(Q_0) = -2 \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n} + 2 \int_{C_0 - C_\epsilon} \mu(Q'_0) \cdot \frac{\partial \phi_s(Q_0; Q'_0)}{\partial n} ds \quad (4.3.13)$$

上式は右辺第 1 項に比べて第 2 項が小さいと仮定できる場合,

$$\mu(Q_0) \cong -2 \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n} - 4 \int_{C_0 - C_\epsilon} \frac{\partial f_2(Q'_0)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_s(Q_0; Q'_0)}{\partial n} ds \quad (4.3.14)$$

と近似することが出来る。このように波源強度 $\mu(Q_0)$ は、波浪場 $f_2$ の境界法線方向勾配によって決定されることがわかる。上式右辺第2項は、境界より発した波が屈折により同一境界へ再入射する効果を表現している。これは波源強度が、その点での波の振幅勾配のみでは決定されず、同一境界上の他の波源強度すべてが相互に影響し合うことを示している。

式(4.3.10)について $P \rightarrow P_0$ を考えると、

$$f_2(P_0) = \int_{C_0 - C_\epsilon} \mu(Q_0) \cdot \phi_S(P_0; Q_0) ds + \lim_{Q_0 \rightarrow P_0} \int_{C_\epsilon} \mu(Q_0) \cdot \phi_S(P_0; Q_0) ds \quad (4.3.15)$$

ここで、半円領域 $C_\epsilon$ 内で波源強度 $\mu(P_0)$ はほぼ一定であるとし、点源波 $\phi_S(P_0; Q_0)$ を級数解の初項、

$$\phi_S(P_0; Q_0) \cong p_0 \log(k_0 \overline{P_0 Q_0}) + q_0 \quad (4.3.16)$$

で近似すると、式(4.3.15)の右辺第2項は、

$$\begin{aligned} & \lim_{Q_0 \rightarrow P_0} \mu(P_0) \cdot \int_{C_\epsilon} \{p_0 \log(k_0 \overline{P_0 Q_0}) + q_0\} ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\mu(P_0) \cdot \int_0^\epsilon (p_0 \log k_0 r + q_0) ds \quad (4.3.17) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\mu(P_0) \cdot [p_0 (r \log k_0 r - r) + q_0 r]_0^\epsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となり、分布波源は自分自身の存在する位置での複素振幅には寄与しないことがわかる。これより分布波源 $\mu(Q_0)$ で表現される境界 $C_0$ 上での複素振幅 $f_2$ は、波源に存在する特異性が現れず有限値となることがわかる。従って境界付近の複素振幅分布は滑らかであり、 $C_0$ 上で有限値の $\partial f_2 / \partial n$ が存在し、波源強度 $\mu(P_0)$ も有限値となることがわかる。これより式(4.3.10)は、

$$\begin{aligned} f_2(P_0) &= \int_{C_0 - C_\epsilon} \mu(Q_0) \cdot \phi_S(P_0; Q_0) ds \\ &= -2 \int_{C_0 - C_\epsilon} \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n} \cdot \phi_S(P_0; Q_0) ds - 4 \int_{C_0 - C_\epsilon} \left( \int_{C_0 - C_\epsilon} \frac{\partial f_2(Q'_0)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_0; Q'_0)}{\partial n} ds' \right) \cdot \phi_S(P_0; Q_0) ds \quad (4.3.18) \end{aligned}$$

となる。とくに一様水深場を考えると、上式は、

$$f_2(P_0) = -\frac{1}{2i} \int_{C_0 - C_\epsilon} \frac{\partial f_2(Q_0)}{\partial n} \cdot H_0^{(1)}(k \overline{P_0 Q_0}) ds \quad (4.3.19)$$

となり，式 (4.3.9) に一致する.

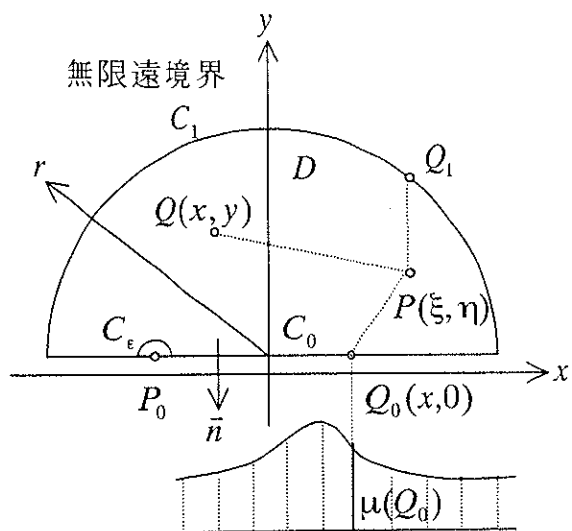


図-4.3 直線境界から発する波と波源強度分布

#### 4. 4 鏡像法の任意水深場への拡張性

一様水深場の波浪場解析の場合，一般に Green 関数としていわゆる鏡像法を適用したものが用いられる．このとき Green 関数は次の様になる．

$$G(Q;P) = \left( H_0^{(1)}(k\overline{PQ}) + H_0^{(1)}(k\overline{P'Q}) \right) / 4i \quad (4.4.1)$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

$$\overline{P'Q} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}$$

ただし  $P'$  は  $x$  軸に関して  $P$  と対称の位置  $(\xi, -\eta)$  を表している (図-4.4)．この Green 関数の境界  $C_0$  上での外向き法線方向微分を考えると，

$$\frac{\partial G(Q;P)}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C_0 \quad (4.4.2)$$

となる．西村ら (1993) は，この Green 関数を用いて波動解の導出および境界条件の定式化を行っている．この場合， $\partial G/\partial n$  を要素として含む項を 0 とすることにより，波動解の導出過程で式が簡略化されるが，最終的には式 (4.2.14) (4.3.9) と全く同形の解が得られる．

任意水深場では， $y \leq 0$  に領域  $D$  と  $x$  軸に関して対称となる地形変化を持つ領域を仮想することにより鏡像法を適用することが出来る．さらに，基礎方程式の適用条件である緩勾配条件を満足するために，

$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{y=0} = 0 \quad (4.4.3)$$

となる必要がある．このため一般的な地形変化を持つ任意水深場では鏡像法を用いることが出来ない．

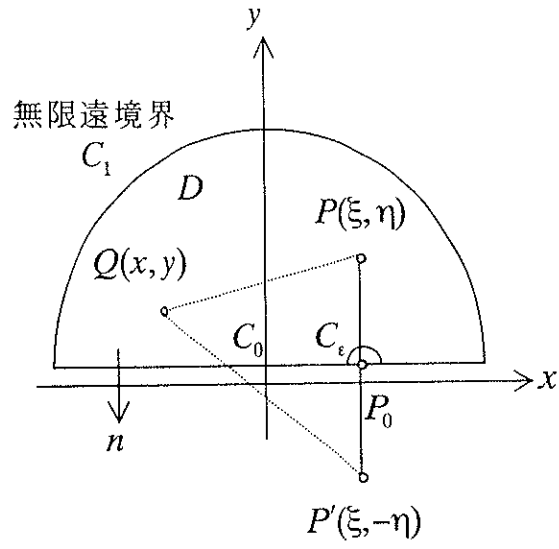


図-4.4 半無限平面と座標系

## 第5章. 境界条件

本章では, 半無限領域の Green 関数 (4.1.1) を利用して 4.2, 4.3 節で導いた半無限領域の波動解を基本として境界条件の定式化を行い, さらに分布波源強度の算定法を示す. まず 5.1 節では自由透過境界での接続条件について述べる. 5.2 節では半無限長の壁面境界 (閉境界) における波源強度の算定法を示す. 最後に 5.3 節では, 有限長の自由透過境界 (開境界) が存在する半無限領域における解の接続手法について述べる.

### 5. 1 無障害接続条件

無限領域を  $x$  軸で分割し, 波が単純に  $y < 0$  なる領域  $D_l$  から  $y > 0$  なる領域  $D_r$  へと伝播する状況を考える (図-5.1).

領域  $D_l$  内で  $x$  軸に入射する波  $\phi_l(Q_l)$  について式 (4.2.11) が成立する. すなわち,

$$\phi_l(P_0) = -2 \int_{c_0-c_\epsilon} (\phi_l(Q_0) \cdot \frac{\partial \phi_s(Q_0; P_0)}{\partial y} - \phi_s(Q_0; P_0) \cdot \frac{\partial \phi_l(Q_0)}{\partial y}) ds \quad (5.1.1)$$

ここで  $\partial/\partial n = \partial/\partial y$  である. 一方, 領域  $D_r$  内で  $x$  軸から発する波  $\phi_r(Q_r)$  について式 (4.3.18) が成立するので,

$$\phi_r(P_0) = 2 \int_{c_0-c_\epsilon} \frac{\partial \phi_r(Q_0)}{\partial y} \cdot \phi_s(P_0; Q_0) ds - 4 \int_{c_0-c_\epsilon} \left( \int_{c_0-c_\epsilon} \frac{\partial \phi_r(Q'_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_s(Q_0; Q'_0)}{\partial y} ds' \right) \cdot \phi_s(P_0; Q_0) ds \quad (5.1.2)$$

となる. ここでは,  $\partial/\partial n' = -\partial/\partial n = -\partial/\partial y$  を用いた. 従って領域  $D_l$  および  $D_r$  内の波浪場を接続する場合, 境界  $C_0$  上での両者の複素振幅およびその勾配を共に接続する必要がある. とくに一様水深場の場合, 式 (4.2.14), (4.3.19) より,

$$\phi_l(P_0) = \frac{1}{2i} \int_{c_0-c_\epsilon} \frac{\partial \phi_l(Q_0)}{\partial y} \cdot H_0^{(1)}(k \overline{P_0 Q_0}) ds \quad (5.1.3)$$

$$\phi_r(P_0) = \frac{1}{2i} \int_{c_0-c_\epsilon} \frac{\partial \phi_r(Q_0)}{\partial y} \cdot H_0^{(1)}(k \overline{P_0 Q_0}) ds \quad (5.1.4)$$

となり，境界  $C_0$  上での両者の勾配のみを接続すれば，自動的に  $\phi_I(Q_0) = \phi_T(Q_0)$  となって振幅も合致することになる。

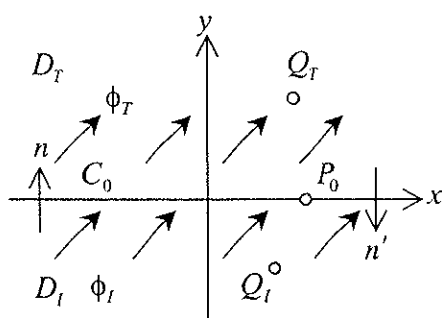


図-5.1 無障害接続



## 5. 2 閉境界

$x$  軸に沿って直線状の壁境界が存在し、これに波が入射する状況を考える (図-5.2). 入射波の場を  $f_I$ , 壁面による反射波の場を  $f_R$  とすると, これが重合して形成する重複波の場は  $f_I + f_R$  となる. この  $f_I, f_R$  に対して成立する境界条件は, Radder 変換された複素振幅  $\phi_I, \phi_R$  に対しても同様に成立する. 壁面で完全反射が生じている場合には, 壁面に垂直な方向の振幅勾配は 0 でなければならぬから,

$$\frac{\partial \phi_I(Q_0)}{\partial y} + \frac{\partial \phi_R(Q_0)}{\partial y} = 0 \quad \text{on } C \quad (5.2.1)$$

そこで 4.3 節の議論に基づき,  $x$  軸上に反射波の波源強度分布  $\mu_R(Q_0)$  を想定すれば,

$$\phi_R(P) = \int_C \mu_R(Q_0) \cdot \phi_S(P; Q_0) ds \quad (5.2.2)$$

ここで式 (5.2.1) を用いれば, 波源強度分布  $\mu_R(Q_0)$  は式 (4.3.14) より,

$$\begin{aligned} \mu_R(Q_0) &= -2 \frac{\partial \phi_R(Q_0)}{\partial y} - 4 \int_{C-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_R(Q'_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_0; Q'_0)}{\partial y} ds \\ &= 2 \frac{\partial \phi_I(Q_0)}{\partial y} + 4 \int_{C-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_I(Q'_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_0; Q'_0)}{\partial y} ds \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

となる. ここで  $\partial/\partial n = \partial/\partial y$  である.

壁面で部分反射が生じる場合には, その流体力学的なメカニズムに応じて適切な境界条件を設定しなければならない. 最も単純に, 入射波に反射率  $\beta$  を乗じたものがそのまま反射すると考えれば, 反射波源の強度は

$$\mu_R(Q_0) = 2\beta \frac{\partial \phi_I(Q_0)}{\partial y} + 4\beta \int_{C-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_I(Q'_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_0; Q'_0)}{\partial y} ds \quad (5.2.4)$$

である.

とくに, 波が壁面で完全に吸収されて反射が生じない場合は,  $\beta = 0$ , 従って  $\mu_R(Q_0) = 0$  となる. これは, 単に境界上に波源が存在しないことを意味している. このような自由透過境界の取り扱い, 差分法による解析では最も困難な問題の一つであるが, この手法では単に点源を置かないことによって極めて自然に解決する.

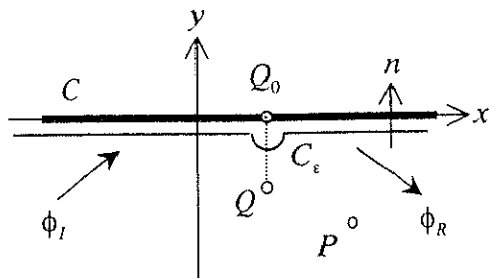


图-5.2 閉境界

### 5. 3 有限長開境界における解の接続

解析の対象となる水域の平面形状，あるいはそこに存在する構造物等の境界形状が複雑な場合には，ある境界から見て他の境界の背後に当たる水域が生じ得る．このような状況の下では，全領域を複数の凸多角形領域に分割しそれぞれの部分領域毎に解を求め，隣り合う部分領域間の共有境界では両側の解の接続を図る必要がある．半閉鎖水域の入射境界，透過境界等も，無限に広い外海域との接続境界と考えられる．

開境界上では，両側の水域の振幅，流速およびそれらの位相が一致しなければならない．この条件は，両側の水域の複素振幅，ならびにその境界に垂直な方向の勾配が共に合致することによって満たされる．

図-5.3 に示すように， $x$  軸上の部分区間  $C_1$  が開境界，残余の区間  $C_2$  が閉境界となる直線境界で区切られた平面領域  $D_I, D_T$  の解の接続を考える．ここで  $\phi_I$  は領域  $D_I$  の沖側より直線境界に入射する波， $\phi_R$  は境界  $C_1, C_2$  からの反射波， $\phi_T$  は境界  $C_1$  からの透過波を表現している．ここでは沖側からの入射波  $\phi_I$  が既知である場合の， $\phi_R, \phi_T$  を表現する波源強度  $\mu_R, \mu_T$  の算定法を示す．

まず境界  $C_1$  上における接続条件は次の様になる．

$$\phi_I(Q_1) + \phi_R(Q_1) = \phi_T(Q_1) \quad \text{on } C_1 \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial \phi_I(Q_1)}{\partial y} + \frac{\partial \phi_R(Q_1)}{\partial y} = \frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial y} \quad \text{on } C_1 \quad (5.3.2)$$

ここでは，議論を一般化するため境界  $C_2$  を  $x$  軸に沿う一様な反射率  $\beta$  の半無限閉境界とすると，その境界条件は，

$$\beta \frac{\partial \phi_I(Q_2)}{\partial y} + \frac{\partial \phi_R(Q_2)}{\partial y} = 0 \quad \text{on } C_2 \quad (5.3.3)$$

となる．

$\phi_R$  を境界  $C_1, C_2$  上の分布波源より発する波の重合波として表現すると，

$$\phi_R(Q) = \int_{C_1} \mu_{R1}(Q_1) \cdot \phi_S(Q; Q_1) ds + \int_{C_2} \mu_{R2}(Q_2) \cdot \phi_S(Q; Q_2) ds \quad (5.3.4)$$

となる．ここで波源強度の添字 1, 2 は波源の分布する境界  $C_1, C_2$  に対応している．

同様に透過波  $\phi_T$  についても波源強度  $\mu_T$  を用いて,

$$\phi_T(Q) = \int_{C_1} \mu_T(Q_1) \cdot \phi'_S(Q; Q_1) ds \quad (5.3.5)$$

となる. ここで  $\phi_S, \phi'_S$  は, それぞれ領域  $D_I, D_T$  を伝播する点源波である. 式 (5.3.4) の境界法線方向微分を考えると,

$$\frac{\partial \phi_R(Q)}{\partial n} = \int_{C_1} \mu_{R_1}(Q_1) \cdot \frac{\partial \phi_S(Q; Q_1)}{\partial n} ds + \int_{C_2} \mu_{R_2}(Q_2) \cdot \frac{\partial \phi_S(Q; Q_2)}{\partial n} ds \quad (5.3.6)$$

となる. ここで  $\partial/\partial n = \partial/\partial y$  に注意して点  $Q$  を  $Q_1, Q_2$  に近づけると,

$$\mu_{R_1}(Q_1) = -2 \frac{\partial \phi_R(Q_1)}{\partial y} + 2 \left\{ \int_{C_1 - C_\epsilon} \mu_{R_1}(Q'_1) \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_1; Q'_1)}{\partial y} ds + \int_{C_2} \mu_{R_1}(Q_2) \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_1; Q_2)}{\partial y} ds \right\} \quad (5.3.7)$$

$$\mu_{R_2}(Q_2) = -2 \frac{\partial \phi_R(Q_2)}{\partial y} + 2 \left\{ \int_{C_1} \mu_{R_1}(Q_1) \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q_1)}{\partial y} ds + \int_{C_2 - C_\epsilon} \mu_{R_1}(Q'_2) \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q'_2)}{\partial y} ds \right\} \quad (5.3.8)$$

が得られる. ここで式 (5.3.7), (5.3.8) について, 右辺第 2 項が他の項に比べて十分小さいと仮定して繰り込みを行うと,

$$\mu_{R_1}(Q_1) \cong -2 \frac{\partial \phi_R(Q_1)}{\partial y} - 4 \left\{ \int_{C_1 - C_\epsilon} \frac{\partial \phi_R(Q'_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_1; Q'_1)}{\partial y} ds + \int_{C_2} \frac{\partial \phi_R(Q_2)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_1; Q_2)}{\partial y} ds \right\} \quad (5.3.9)$$

$$\mu_{R_2}(Q_2) \cong -2 \frac{\partial \phi_R(Q_2)}{\partial y} - 4 \left\{ \int_{C_1} \frac{\partial \phi_R(Q_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q_1)}{\partial y} ds + \int_{C_2 - C_\epsilon} \frac{\partial \phi_R(Q'_2)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q'_2)}{\partial y} ds \right\} \quad (5.3.10)$$

となる. 同様に式 (5.3.5) について境界法線方向微分を考える. ここで  $\partial/\partial n' = -\partial/\partial y$  に注意すると,

$$\mu_T(Q_1) \cong 2 \frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial y} - 4 \int_{C_1 - C_\epsilon} \frac{\partial \phi_T(Q'_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi'_S(Q_1; Q'_1)}{\partial y} ds \quad (5.3.11)$$

が得られる.

次に境界条件 (5.3.2), (5.3.3) より得られる関係式,

$$\frac{\partial \phi_R(Q_1)}{\partial y} = \frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial y} - \frac{\partial \phi_I(Q_1)}{\partial y} \quad \text{on } C_1 \quad (5.3.12)$$

$$\frac{\partial \phi_R(Q_2)}{\partial y} = -\beta \frac{\partial \phi_I(Q_2)}{\partial y} \quad \text{on } C_2 \quad (5.3.13)$$

を用いて式 (5.3.9), (5.3.10) を  $\phi_I$  の法線方向微分で表現する. これより波源強度の関係式中に現れる未知量は  $\partial \phi_T(Q_i)/\partial y$  のみとなる.

$$\begin{aligned} \mu_{R_1}(Q_1) &= 2 \frac{\partial \phi_I(Q_1)}{\partial y} + 4 \left\{ \int_{C_1-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_I(Q'_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_1; Q'_1)}{\partial y} ds + \beta \int_{C_2} \frac{\partial \phi_I(Q_2)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_1; Q_2)}{\partial y} ds \right\} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial y} - 4 \int_{C_1-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_T(Q'_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_1; Q'_1)}{\partial y} ds \\ &= R_1(Q_1) - 2 \frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial y} - 4 \int_{C_1-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_T(Q'_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_1; Q'_1)}{\partial y} ds \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

$$\begin{aligned} \mu_{R_2}(Q_2) &= 2\beta \frac{\partial \phi_I(Q_2)}{\partial y} + 4 \left\{ \int_{C_1} \frac{\partial \phi_I(Q_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q_1)}{\partial y} ds + \beta \int_{C_2-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_I(Q'_2)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q'_2)}{\partial y} ds \right\} \\ &\quad - 4 \int_{C_1} \frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q_1)}{\partial y} ds \\ &= R_2(Q_2) - 4 \int_{C_1} \frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q_1)}{\partial y} ds \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

$$\mu_T(Q_1) = 2 \frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial y} - 4 \int_{C_1-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_T(Q'_1)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi'_S(Q_1; Q'_1)}{\partial y} ds \quad (5.3.16)$$

これらの波源強度に現れる  $R_1(Q_1)$ ,  $R_2(Q_2)$  は,  $\phi_I$  の法線方向微分で表現される既知量である. 境界  $C_1$  上における振幅の接続条件 (5.3.1) をこれらの波源強度を用いて表現すると,

$$\begin{aligned} &\phi_I(Q_1) + \int_{C_1-C_\epsilon} \mu_{R_1}(Q'_1) \cdot \phi_S(Q_1; Q'_1) ds + \int_{C_2} \mu_{R_2}(Q_2) \cdot \phi_S(Q_1; Q_2) ds \\ &= \int_{C_1-C_\epsilon} \mu_T(Q'_1) \cdot \phi'_S(Q_1; Q'_1) ds \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

ここで既知量を右辺，未知量を左辺にまとめると，

$$\begin{aligned}
 & \int_{c_1-c_\epsilon} \left( \frac{\partial \phi_T(Q_1')}{\partial y} \cdot \{ \phi_S'(Q_1; Q_1') + \phi_S(Q_1; Q_1') \} \right) ds \\
 & - 2 \int_{c_1-c_\epsilon} \left( \int_{c_1-c_\epsilon} \frac{\partial \phi_T(Q_1'')}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S'(Q_1'; Q_1'')}{\partial y} ds' \right) \cdot \phi_S'(Q_1; Q_1') ds \\
 & + 2 \int_{c_1-c_\epsilon} \left( \int_{c_1-c_\epsilon} \frac{\partial \phi_T(Q_1'')}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_1'; Q_1'')}{\partial y} ds' \right) \cdot \phi_S(Q_1; Q_1') ds \\
 & + 2 \int_{c_2} \left( \int_{c_1} \frac{\partial \phi_T(Q_1')}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q_1')}{\partial y} ds \right) \cdot \phi_S(Q_1; Q_2) ds \\
 & = \frac{1}{2} \left[ \phi_I(Q_1) + \int_{c_1-c_\epsilon} R_1(Q_1') \cdot \phi_S(Q_1; Q_1') ds + \int_{c_2} R_2(Q_2) \cdot \phi_S(Q_1; Q_2) ds \right]
 \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

透過波の法線方向勾配  $\partial \phi_T(Q_1)/\partial y$  は，この積分方程式を解くことで得られる．  
これを用いて，式 (5.3.14) ~ (5.3.16) より最終的に波源強度が得られる．

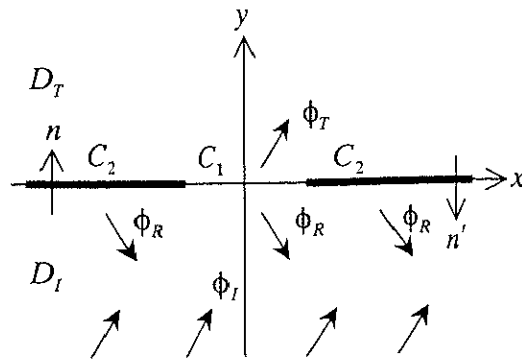


図-5.3 開境界

## 第 6 章 密度法の詳細

### 6. 1 基本姿勢

密度法では，計算領域のすべての境界上に波源分布を想定し，そこから発生する点源波の線形重ね合わせによる総和として最終的な波の場を表現する．実際の数値計算においては，各境界を十分短い要素で分割し，各境界要素の midpoint を，その境界要素を発する波の点源として代表させて離散化を行う．こうして作られた解が領域内で Helmholtz 型方程式を満たすことは明らかである．従って，すべての境界で与えられた条件を満たすように波源強度を定めることが課題となる．開境界における解の接続に関するプロセスに伴い，全境界の波源強度分布計算を 1 つの連立系に記述できなくなるため，境界毎の漸次補正により数値解を求める工夫が必要となる．ここでは，直線境界から発する波を基本に，各直線境界に入射した波を第 5 章の境界条件に関する議論に基づき定常状態になるまで繰り返し計算し，境界における波源強度分布を定めることを考える．

### 6. 2 計算領域の分割

ここでは半無限領域における点源波を素解として用いる．従って，個々の計算領域は凸多角形の形状とする必要がある．すなわち，1 つの計算領域の外縁を折線境界とすると，隣り合う境界になす内角は  $180^\circ$  以下でなければならない．分割された凸形状の領域は，仮想境界により接続される．この仮想境界には開境界における手法が適用されるため，連立一次方程式を解くことになる．

### 6. 3 分布波源強度の算定

#### 6. 3. 1 直線境界に入射する波の法線方向勾配の算定

ある直線境界  $C_0$  に、波  $\phi_I$  が入射したとする (図-6.1)。この  $\phi_I$  は、 $C_0$  以外のすべての境界から発する波の総和であるとする。第5章の議論より、境界  $C_0$  から発する波を表現する分布波源強度を算定する場合、 $\phi_I$  の境界外向き法線方向勾配を予め計算しておく必要がある。ただしここでは、領域の形状は凸多角形を前提とする。

いま、 $C_0$  以外の境界を  $C_1$  とし、その境界上の各点  $Q_1$  に波源分布  $\mu(Q_1)$  を想定すれば、 $C_0$  上の各点  $P_0$  に入射する波は、

$$\phi_I(P_0) = \int_{C_1} \mu(Q_1) \cdot \phi_s(P_0; Q_1) ds \quad (6.3.1)$$

となる。この入射波の点  $P_0$  での境界  $C_0$  に対する外向き法線方向微分は、

$$\frac{\partial \phi_I(P_0)}{\partial n} = \frac{\partial \phi_I(P_0)}{\partial r} \sin(\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_I(P_0)}{\partial \theta} \cos(\alpha_1 - \alpha_0) \quad (6.3.2)$$

ここで  $\partial/\partial r$ ,  $\partial/\partial \theta$  は、波源  $Q_1$  を原点とする極座標を考えた場合の方向微分である。また  $\alpha_0$  は境界  $C_0$  と  $x$  軸が反時計周りになす角、 $\alpha_1$  は波向角である。ここで角  $\alpha_0$  は、境界  $C_0$  の端点について、時計周りに始点  $A(x_a, y_a)$ 、終点  $B(x_b, y_b)$  を考えて、

$$\cos \alpha_0 = \frac{x_b - x_a}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}}, \quad \sin \alpha_0 = \frac{y_b - y_a}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}} \quad (6.3.3)$$

を満たす  $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$  の角度と定義する。

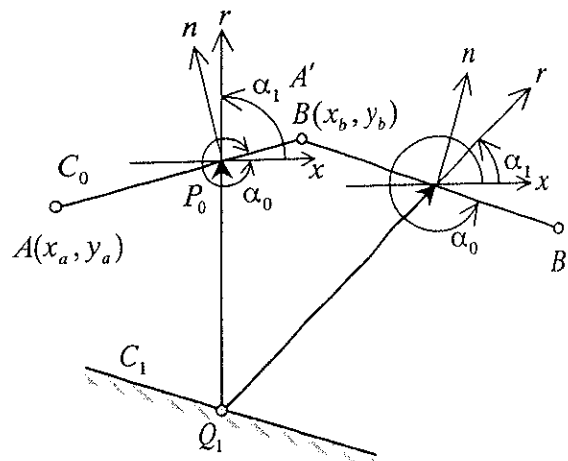


図-6.1 直線境界に入射する波



### 6. 3. 2 入射境界における分布波源強度

入射境界はある領域に対して人為的に設定する仮想境界であり，開境界の接続による取り扱いが必要となる．そこで必要となる複素振幅および振幅勾配を次の様に与える．

入射波波高  $A$ ，入射角  $\alpha$ ，初期位相  $\theta$  の規則入射波の場合，複素振幅は

$$f_E = A \exp\{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha + \theta)\} \quad (6.3.4)$$

である．この複素振幅に対し Radder 変換 (2.2.35) を作用して，

$$\phi_E = \sqrt{CC_g} f_E \quad (6.3.5)$$

となる．従って入射境界では，複素振幅  $\phi_E$  を持つ波を表現する波源強度を与える．

振幅  $\phi_E$  の勾配は， $x$  軸と入射境界とのなす角を  $\alpha_0$  とすると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_E}{\partial n} &= -\sin \alpha_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial x} + \cos \alpha_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial y} \\ &= ikA \sqrt{CC_g} \sin(\alpha - \alpha_0) \exp\{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha + \theta)\} \\ &= ik \sin(\alpha - \alpha_0) \phi_E \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

となる．

港口等に入射境界を設定するときは，式 (5.3.18) を解き，入射波源として  $\mu_r$  を算定する．とくに港口の両側側方延長線が無反射壁であれば，式 (5.3.18) において壁境界  $C_2$  に関する積分項をすべて無視できる．また入射境界で一様水深を仮定すると，

$$\phi_s(Q_i; Q'_i) = \phi'_s(Q_i; Q'_i), \quad \frac{\partial \phi_s(Q_i; Q'_i)}{\partial n} = 0 \quad (6.3.7)$$

となる．このとき式 (5.3.18) は，

$$2 \int_{C_1-C_e} \frac{\partial \phi_r(Q'_i)}{\partial n} \cdot \phi_s(Q_i; Q'_i) ds = \frac{1}{2} \left[ \phi_E(Q_i) + \int_{C_1-C_e} 2 \frac{\partial \phi_E(Q'_i)}{\partial n} \cdot \phi_s(Q_i; Q'_i) ds \right] \quad (6.3.8)$$

となる．

ここで入射波  $\phi_E$  を式 (4.2.17) を用いて表現すると、上式の右辺は、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[ \int_{C_1-C_\epsilon} 2 \frac{\partial \phi_E(Q'_1)}{\partial y} \cdot \phi_S(Q_1; Q'_1) ds + \int_{C_1-C_\epsilon} 2 \frac{\partial \phi_E(Q'_1)}{\partial n} \cdot \phi_S(Q_1; Q'_1) ds \right] \\ &= 2 \int_{C_1-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_E(Q'_1)}{\partial n} \cdot \phi_S(Q_1; Q'_1) ds \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

従って、

$$\frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial n} = \frac{\partial \phi_E(Q_1)}{\partial n} \quad (6.3.10)$$

が得られる。これより入射波源強度は式 (5.3.16) を用いて、

$$\mu_T(Q_1) = 2 \frac{\partial \phi_E(Q_1)}{\partial n} \quad (6.3.11)$$

より決定される。一般の条件下では、港外部にもいくつかの領域を設け、港口境界への入射波を求める必要がある。港内から港外に向かう波にとっては、港口境界は通常の開境界であるが、港外が計算領域外であれば、透過波は算定する必要がない。

### 6. 3. 3 閉境界における分布波源強度

閉境界  $C$  における波源強度算定式 (5.2.4) を再び書くと,

$$\mu_R(Q_0) = 2\beta \frac{\partial \phi_I(Q_0)}{\partial n} + 4\beta \int_{C-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_I(Q'_0)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_0; Q'_0)}{\partial n} ds \quad (6.3.12)$$

となる. 計算では, 微小要素  $ds$  を用いて境界  $C$  を  $N$  個に分割し, 各境界要素の midpoint に代表波源を考える. ここで  $i$  番目の微小要素の midpoint を  $q_i$  とすると,

$$\mu_R(q_i) = 2\beta \frac{\partial \phi_I(q_i)}{\partial n} + 4\beta \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_I(q_j)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_S(q_i; q_j)}{\partial n} ds \quad (6.3.13)$$

となる. ここで  $q_j = q_i$  となるとき, 点源波  $\phi_S$  がその波源近傍で生じる屈折現象は小さく, ほぼ同心円環状の波峰を持つと仮定して,

$$\frac{\partial \phi_S(q_i; q_i)}{\partial n} \cong 0 \quad (6.3.14)$$

とする. 式 (6.3.13) において,  $\beta = 1$  のときが完全反射,  $\beta = 0$  のときが無反射 (完全吸収) である. さらに反射に際して位相変化が伴う場合には,  $\beta$  は複素数とすれば良い. 入射波  $\phi_I$  の境界法線方向勾配 (6.3.2) を用いれば, 閉境界における波源分布を算定することが出来る.

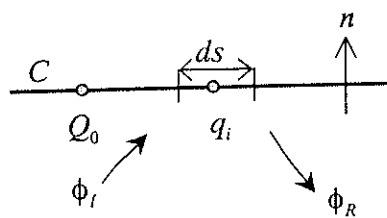


図-6.2 閉境界における波源分布

### 6. 3. 4 開境界における分布波源強度

凸形状に分割された計算領域の接続部分が開境界である．図-6.3 のように同一直線境界に自由透過境界  $C_1$  および一様な反射率  $\beta$  を持つ壁境界  $C_2$  が存在する場合を考える．

境界  $C_2$  の反射波源強度  $\mu_{R_2}$  の算定式は，式 (5.3.15) より，

$$\begin{aligned} \mu_{R_2}(Q_2) = & 2\beta \frac{\partial \phi_I(Q_2)}{\partial n} + 4\beta \int_{C_2-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_I(Q'_2)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q'_2)}{\partial n} ds \\ & + 4 \int_{C_1} \left( \frac{\partial \phi_I(Q_1)}{\partial n} - \frac{\partial \phi_T(Q_1)}{\partial n} \right) \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q_1)}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

である．前節で示した一般的な開境界の算定式 (6.3.12) と比較して，自由透過境界からの反射波による波源相互作用項 (右辺第 3 項) が付加されている．この項は，繰り返し計算の前ステップで得られた  $\mu_{R_1}$  を用いて近似的に評価することが出来，上式は次の様になる．

$$\begin{aligned} \mu_{R_2}(Q_2) \approx & 2\beta \frac{\partial \phi_I(Q_2)}{\partial n} + 4\beta \int_{C_2-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_I(Q'_2)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q'_2)}{\partial n} ds \\ & + 2 \int_{C_1} \mu_{R_1}(Q_1) \cdot \frac{\partial \phi_S(Q_2; Q_1)}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (6.3.16)$$

つぎに，境界  $C_1$  上の反射波源強度  $\mu_{R_1}$  および透過波源強度  $\mu_T$  の算定式を示す．式 (5.3.18) を，式 (6.3.16) を用いて書き改めると，

$$\begin{aligned} & \int_{C_1-C_\epsilon} \left( \frac{\partial \phi_T(Q'_1)}{\partial n} \cdot \{ \phi'_S(Q_1; Q'_1) + \phi_S(Q_1; Q'_1) \} \right) ds \\ & - 2 \int_{C_1-C_\epsilon} \left( \int_{C_1-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_T(Q''_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi'_S(Q'_1; Q''_1)}{\partial n} ds' \right) \cdot \phi'_S(Q_1; Q'_1) ds \\ & + 2 \int_{C_1-C_\epsilon} \left( \int_{C_1-C_\epsilon} \frac{\partial \phi_T(Q''_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_S(Q'_1; Q''_1)}{\partial n} ds' \right) \cdot \phi_S(Q_1; Q'_1) ds \\ & = \frac{1}{2} \left[ \phi_I(Q_1) + \int_{C_1-C_\epsilon} R_1(Q'_1) \cdot \phi_S(Q_1; Q'_1) ds + \int_{C_2} \mu_{R_2}(Q_2) \cdot \phi_S(Q_1; Q_2) ds \right] \\ & = \phi_I^*(Q_1) \end{aligned} \quad (6.3.17)$$

となる．境界  $C_1$  を微小要素  $ds$  で分割し上式を離散化すると， $\partial \phi_T / \partial n$  を求める連立方程式が導かれる．

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N \left[ \left\{ \phi'_s(q_i; q_k) + \phi_s(q_i; q_k) \right\} ds - \sum_{j=1}^N 2 \frac{\partial \phi'_s(q_j; q_k)}{\partial n} \cdot \phi'_s(q_i; q_j) ds^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^N 2 \frac{\partial \phi_s(q_j; q_k)}{\partial n} \cdot \phi_s(q_i; q_j) ds^2 \right] \cdot \frac{\partial \phi_T(q_k)}{\partial n} \\
& = \phi_I^*(q_i)
\end{aligned} \tag{6.3.18}$$

ここで  $q_k = q_i$  となる場合,  $\phi_s(q_i; q_k)$  は特異点であり無限大の値を持ち, 数値計算では  $\phi_s(q_i; q_i) \cdot ds$  の値を有限値で近似する工夫が要求される. 4.3 節の議論より,

$$\lim_{Q_0 \rightarrow P_0} \int_{C_\varepsilon} \phi_s(P_0; Q_0) ds = 0 \tag{6.3.19}$$

となり,  $\phi_s$  の特異点周りの積分値が 0 となることに留意して, ここでは

$$\int_{-ds/2}^{ds/2} \phi_s(q_{i+\varepsilon}; q_i) d\varepsilon \tag{6.3.20}$$

を数値積分することによって,  $\phi_s(q_i; q_i) \cdot ds$  を評価する. 式 (6.3.18) を解くことにより  $\partial \phi_T / \partial n$  が求められ, これを用いて式 (5.3.14), (5.3.16) より最終的に  $\mu_{R_1}$  および  $\mu_T$  が決定される. ここで, 各  $\mu_{R_1}, \mu_{R_2}, \mu_T$  の算定式に含まれる積分項を微小要素  $ds$  で離散化したものを改めて示す.

$$\begin{aligned}
\mu_{R_1}(q_i) = & 2 \frac{\partial \phi_I(q_i)}{\partial n} + 4 \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_I(q_j)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_s(q_i; q_j)}{\partial n} ds + 2 \sum_{j=1}^{N'} \mu_{R_2}(q_j) \cdot \frac{\partial \phi_s(q_i; q_j)}{\partial n} ds \\
& - 2 \frac{\partial \phi_T(q_i)}{\partial n} - 4 \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_T(q_j)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_s(q_i; q_j)}{\partial n} ds
\end{aligned} \tag{6.3.21}$$

$$\mu_{R_2}(q_i) = 2\beta \frac{\partial \phi_I(q_i)}{\partial n} + 4\beta \sum_{j=1}^{N'} \frac{\partial \phi_I(q_j)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi_s(q_i; q_j)}{\partial n} ds + 2 \sum_{j=1}^N \mu_{R_1}(q_j) \cdot \frac{\partial \phi_s(q_i; q_j)}{\partial n} ds \tag{6.3.22}$$

$$\mu_T(q_i) = 2 \frac{\partial \phi_T(q_i)}{\partial n} - 4 \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi_T(q_j)}{\partial n} \cdot \frac{\partial \phi'_s(q_i; q_j)}{\partial n} ds \tag{6.3.23}$$

上式に含まれる  $N, N'$  はそれぞれ境界  $C_1, C_2$  の分割数である. また式 (6.3.21) の右辺第 1 項から第 3 項までの和は, 式 (6.3.18) 右辺中の  $R_1(q_i)$  である.

一連の開境界についての計算は、領域  $D_I, D_T$  より境界  $C_1$  に入射する波についてそれぞれ行う。従って境界  $C_1$  の両側で  $\mu_{R1}$  および  $\mu_T$  が存在する。他の直線境界の波源強度を算定する際、境界  $C_1$  から発する波の波源強度としては  $\mu_{R1}$  と  $\mu_T$  の和を用いる。

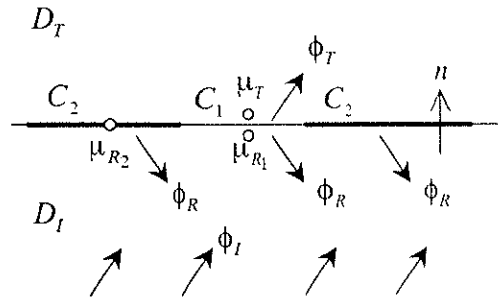


図-6.3 開境界における波源分布

### 6. 3. 5 漸次補正および収束判定方法

計算では、対象領域の境界の一部（入射境界あるいは接続開境界）で透過波源分布を与える。このとき、他の境界上では波源分布の初期値を0とおき、前節までの議論に基づいて各直線境界ごとに波源強度を算定する。これを各凸型分割領域毎に繰り返し行うことで、最終的にすべての境界条件を満たすような波源強度の収束値を求める。これは実際の現象である多重反射を取り扱うことに相当する。数値計算においては、漸近補正により新たな波源分布の算定を行うことになる。

$$\varepsilon = (\mu(Q_0))_{now} - (\mu(Q_0))_{before} \quad (6.3.24)$$

$$(\mu(Q_0))_{next} = (\mu(Q_0))_{before} + rate \times \varepsilon \quad (6.3.25)$$

ここで *before* は前回求めた波源分布、*now* は新たな入射波により決定された波源分布、*next* は漸次補正された新たな波源分布を表す。上式中における *rate* を1としたとき、入射波をそのまますべて折り返すことになるが、計算上収束しなくなる可能性が高くなる。本論文では、はじめの1回目だけを *rate* = 1.0とし、2回目以降は *rate* = 0.3として漸次補正を行った。

収束判定については、対象領域の定常状態を判断するのと等価であると考えられる。Green 関数法の議論によれば、定常状態は対象領域におけるすべての閉境界において、入射する波と反射する波の法線方向勾配が釣り合うときであると理解できる。つまり、すべての閉境界上の点源において、前回求めた波源分布 (*before*) と、補正された他の点源からの影響を考慮した入射波より求められる新たな波源分布 (*next*) との差が0になったときが定常状態であるといえる。本論文中の計算においては、対象領域の各点源におけるその差の最大値が、各波源分布の最大値の1/1000以下となることを収束条件とした。

$$\varepsilon = MAX \left[ |(\mu(Q_0))_{next} - (\mu(Q_0))_{before}| \right] \quad (6.3.26)$$

$$\varepsilon \leq \frac{1}{1000} \times MAX \left[ |(\mu(Q_0))| \right] \quad (6.3.27)$$

ここで、 $MAX[ ]$  は対象領域における最大値を意味する。

## 6. 4 計算領域外地形の影響

密度法を用いた任意水深水域の波浪場解析では、半無限領域に伝播する点源波を Green 関数として用いている。この Green 関数を数値的に求める際、計算領域外に地形を仮想して計算を行う必要がある。ここでは図-6.4 のように  $y=50.0$  m に半無限長の壁面境界が存在し、底面勾配  $S_b$  が  $1/5, 1/10, 1/15$  となるモデル地形を考える。このとき境界背後では斜面を  $y=y_p$  の地点まで保ち、 $y < y_p$  の地点では一様水深となる地形を考える。ここでは  $y_p = 30.0$  m および  $y_p = 40.0$  m の 2 ケースについて、 $x=0.0$  m,  $y=70.0$  m の地点より発する発する点源波によって生じる重複波解を求め、得られる解を比較することで、計算領域外地形の影響を調べることとする。

図-6.5 (a) は、 $S_b = 1/5$  のケースについて上記の計算を行い、得られる反射波の波源強度分布を比較したものである。わずかながら両者に差異が現れている。この差異は閉境界の波源強度の算定式 (6.3.13) における右辺第 2 項、すなわち境界上の分布波源の相互作用を代表する項より生じている。これは、仮想した背後地形上に生じる半円環状の波の影響である。図-6.5 (b), (c) で見られるように、背後地形の影響は底面勾配が緩やかであるほど小さくなることがわかる。これより、実際の波浪場計算において、境界背後の地形を仮想することによる数値解への影響は、十分に小さいと考えられる。

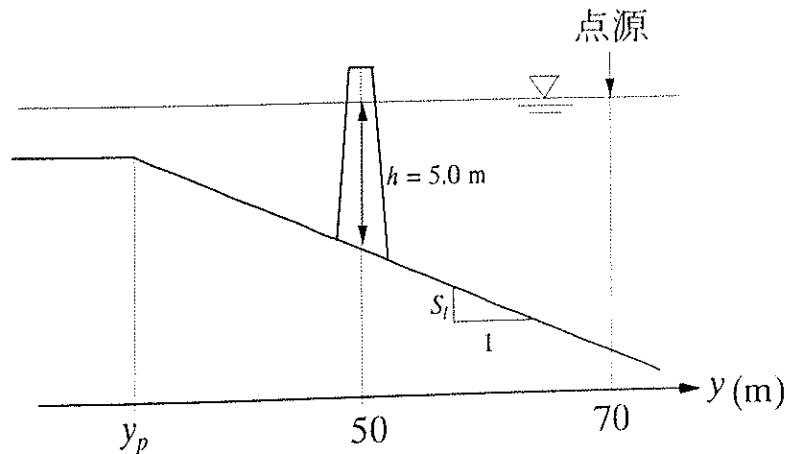


図-6.4 地形図



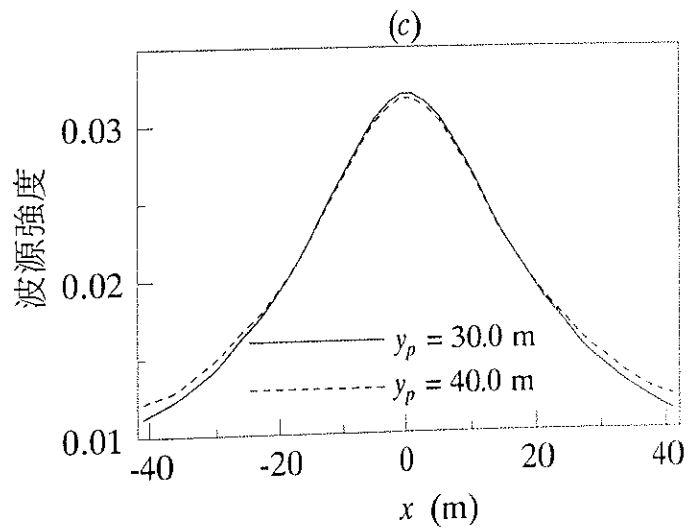
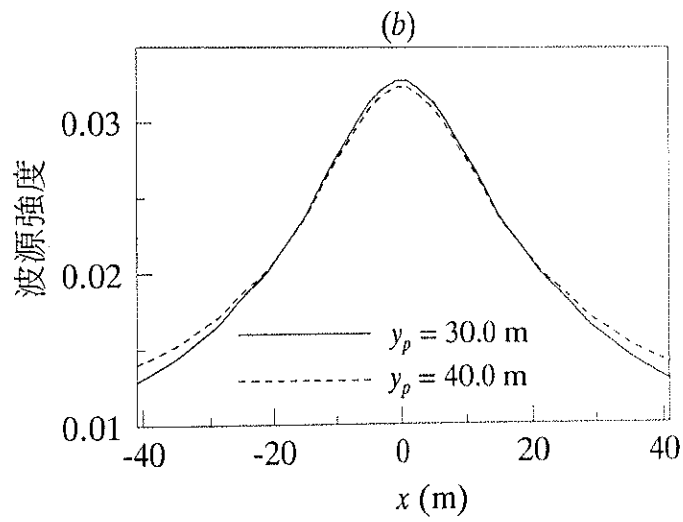
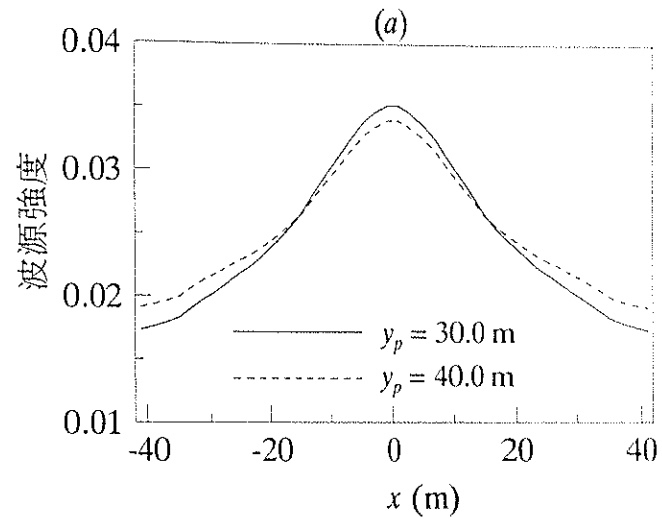


圖-6.5 反射波源強度分布

底面勾配 (a)  $S_i = 1/5$ , (b)  $S_i = 1/10$ , (c)  $S_i = 1/15$

## 第7章 数値計算による境界条件の検討

### 7.1 半無限長壁面境界

図-7.1 に示す様な平行等深線モデル地形を考える。ここでは波速  $C$  および水深  $h$  を次の様に与える。

$$C = 5.0c \cosh 0.01(y - 50.0) \quad (7.1.1)$$

$$h = \frac{C}{2\omega} \log \frac{g + \omega C}{g - \omega C} \quad (7.1.2)$$

この半無限領域内の  $y = 50.0\text{m}$  地点に完全反射を生じる半無限長の壁面境界を想定し、 $x = 0.0\text{m}$ 、 $y = 80.0\text{m}$  地点から単位強度、周期  $T = 10.0\text{s}$  の点源波が生じる場合の波高分布  $|f|$  を求める。得られる波高分布は、壁面に対して対象な位置、 $x = 0.0\text{m}$ 、 $y = 20.0\text{m}$  に同じ強度の点源が存在する場合の重複波の波高分布に一致するので、それと比較する。

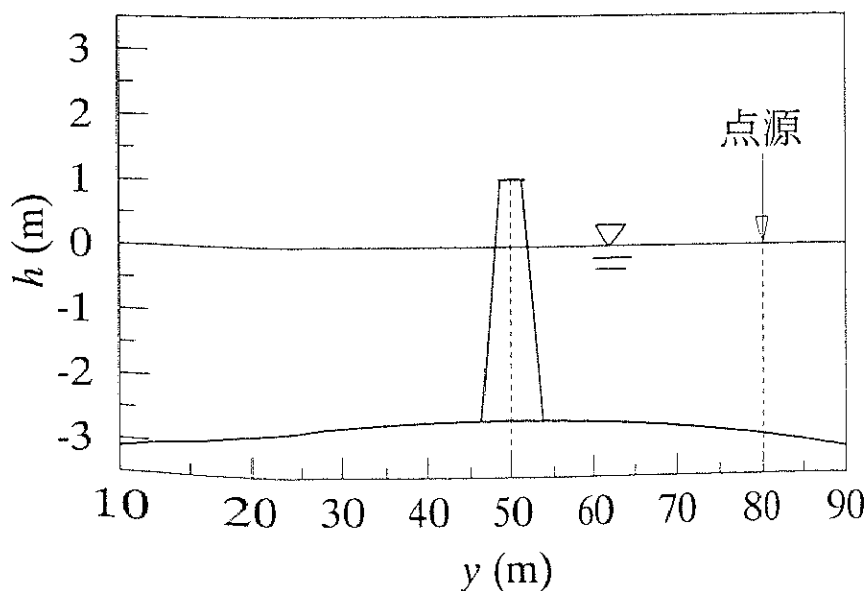


図-7.1 平行等深線モデル地形

壁面境界上に分布する反射波源強度  $\mu_R$  は、5.2 節の議論より、

$$\mu_R(x_0) = -2 \frac{\partial \phi_I(x_0)}{\partial y} + 4 \int_{c-c_\epsilon} \frac{\partial \phi_I(x'_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_S(x_0; x'_0)}{\partial y} ds \quad (7.1.3)$$

となる。ここで底面地形は壁面に対して対称となるので、壁面上で  $\partial h / \partial y = 0$  である。従ってこの場合、

$$\frac{\partial \phi_S(x_0; x'_0)}{\partial y} = 0 \quad (7.1.4)$$

となり、式 (7.1.3) の第 2 項つまり波源の相互作用項は 0 となる。

点源波と壁面からの反射波の重ね合わせとして得られる波高分布  $|f|$  を図 7.2 に示す。図中には波高のコンターも同時に示す。波高は点源で無限大となるため、その付近で波高分布は円錐形となるが、壁面付近では、入、反射波の波高は同程度となりその重ね合わせにより生じる波高は、ほぼ壁面に平行なコンターをなす分布となる。次にこの波高分布と、対称な位置に点源を想定した重複波の解との比較を比較する。ここでは両者の  $y$  軸上の波高分布を図 7.3 に示す。得られる数値解は、対称点源を仮想した重複波解と非常によく一致している。半無限長境界から発する反射波が有意な精度を持つためには、波源強度分布は十分に広い範囲で考慮する必要がある。このケースでは、境界要素の分割長さを  $ds = 2.0 \text{ m}$  とし、 $y = -62.0 \sim 62.0 \text{ m}$  の範囲で波源強度を算定している。

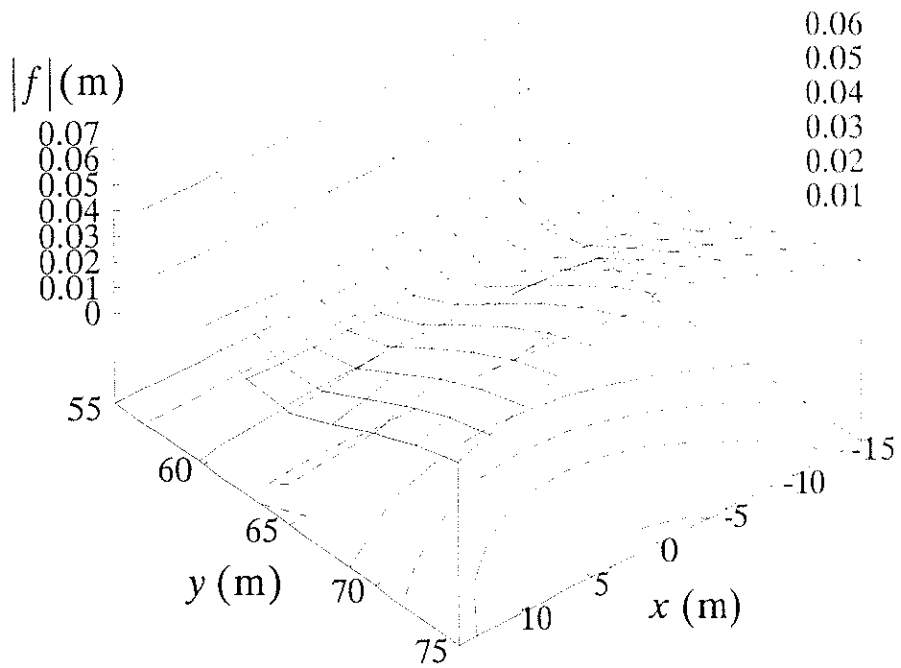


図-7.2 波高分布

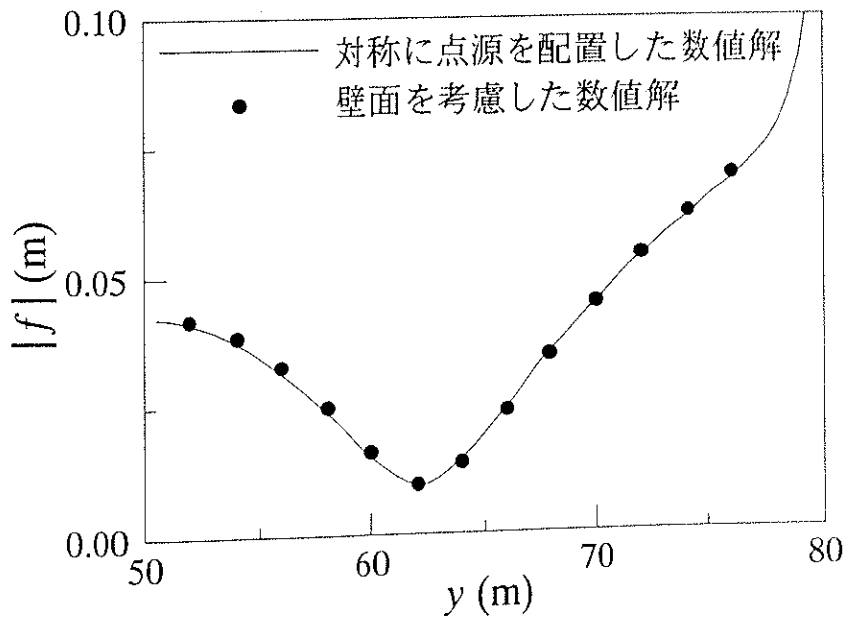


図-7.3  $y$  軸上の波高分布

## 7. 2 波源強度に及ぼす波源相互作用項の寄与

任意水深場における波源強度の算定では，境界法線方向に底面勾配が0となるような特別な場合を除いて，同一境界上の波源との相互作用項を考慮する必要がある．ここでは波源強度に及ぼす相互作用項の寄与を調べるため，一様勾配 $S_i$ の斜面上 $y = 50.0\text{m}$ に壁面境界を想定し，そこに点源波が入射することにより生じる反射波の波源強度を算定する（図-7.4）．点源は $x = 0.0\text{m}$ ， $y = 70.0\text{m}$ 地点に存在する．

図-7.5 (a)，(b) は，それぞれ底面勾配 $S_i = 1/10, 1/15$ とした場合の波源強度分布を示している．図中の実線は式(7.1.3)の相互作用項（第2項）を評価した場合，破線はこの項を無視した場合の波源強度である．後者は一様水深場の算定式に相当し，この両者の差が相互作用項の寄与である．底面勾配 $S_i$ が緩やかなほど波の屈折の効果は小さくなり，相互作用項の値もそれにしたがって小さくなるが，波源強度に及ぼす寄与としては十分に有意なものであることがわかる．

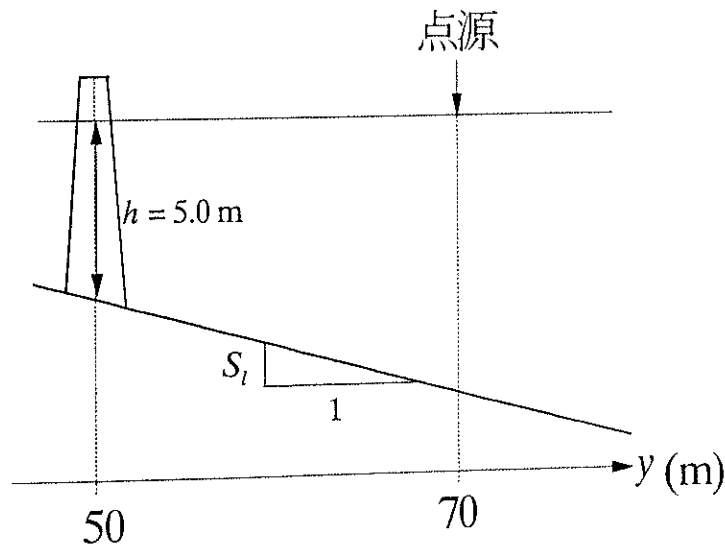


図-7.4 地形図

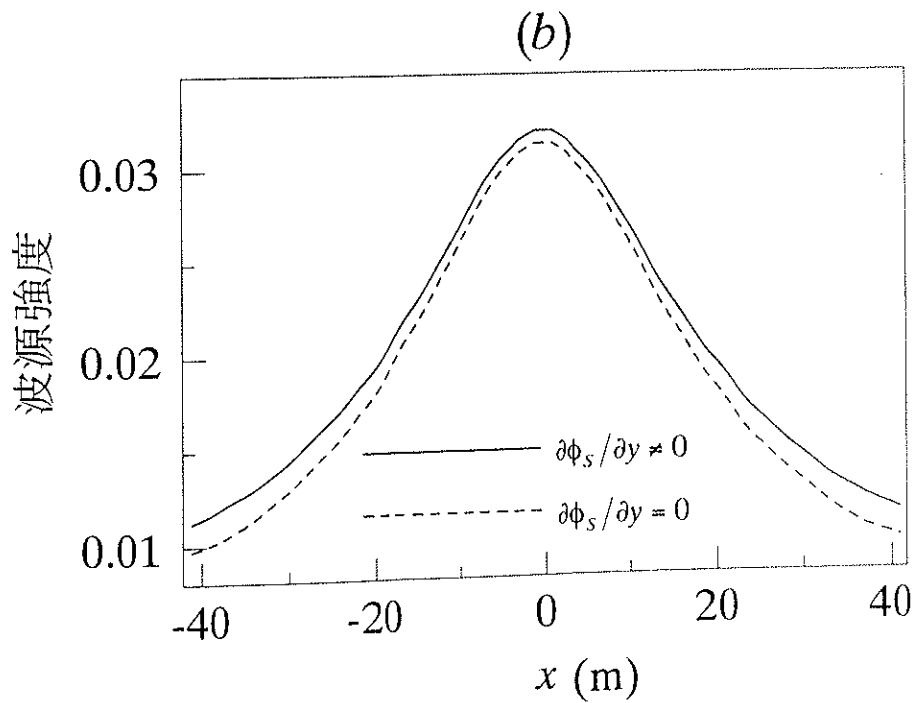
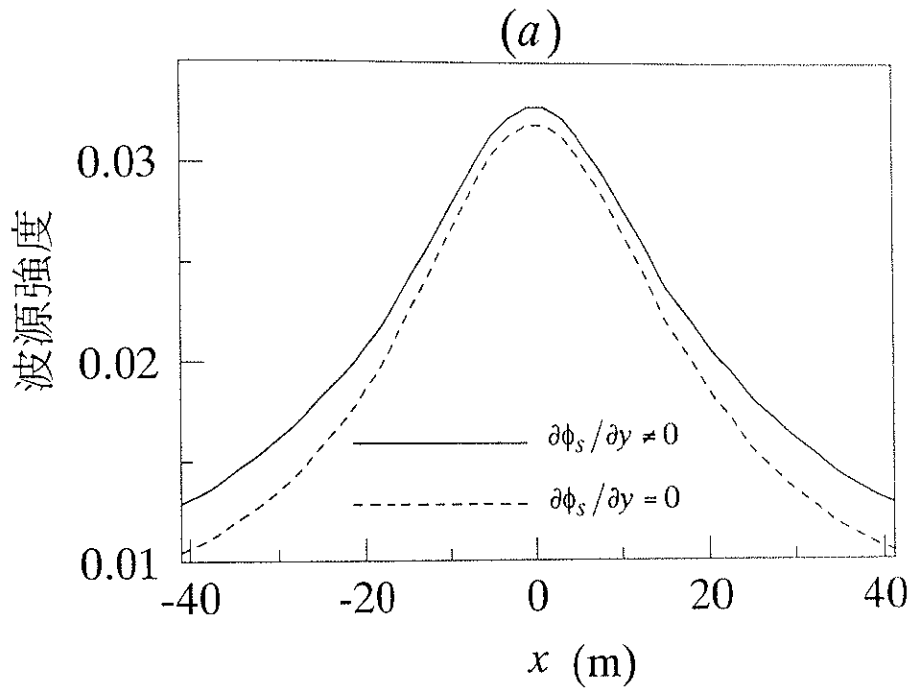


図-7.5 相互作用項の波源強度への寄与  
 (a)  $S_i = 1/10$ , (b)  $S_i = 1/15$

## 第8章 結論

本研究で得られた結論を列記すると以下の通りである。

1. 緩勾配方程式の Green 関数の導出手法を示した。本手法では、特異点となる点源近傍に対して緩勾配方程式の級数解を用い、点源近傍の水深変化を考慮した。一様水深場における厳密解である Hankel 関数および平行等深線モデル地形に対する点源波の解析解と本手法による解を比較した結果、非常によい一致を見たことから本手法の妥当性が示された。本手法は緩勾配方程式に限らず、様々な工学分野で問題となる変数係数偏微分方程式の解析に適用可能である。
2. 密度法を用いた任意水深場の波浪場解析では、波源強度はその点での振幅勾配のみでは決定されず、境界上のすべての強度が相互に影響し合う。これは境界より発した波が屈折により同一境界に再入射する効果を表わす。この効果は、実港湾に見られるような緩やかな底面勾配を持つ地形においても有意となることが、数値解析結果より示された。
3. Green 関数として点源波を用いる場合、計算領域外の地形を仮想して計算を行う必要がある。仮想地形を変化させて波浪場解析を行い、その解を比較した結果、得られる波浪場の数値解に生じる差異は、対象とする領域の底面勾配が緩やかになるほど小さくなり、その影響は実用上極めて小さいことがわかった。これより波浪場解析において、計算領域外の地形を仮想するという技法が成立すると判断される。また計算領域が緩やかな底面勾配を持つ場合、Green 関数の相反定理が近似的に成立しているとして解析を行うことが可能である。

## 参考文献

- 磯部雅彦 (1985) : 波向線座標における放物型方程式を用いた屈折・回折の計算法, 第 32 回海岸工学論文集, pp.95-99.
- 磯部雅彦 (1986) : 放物型方程式を用いた不規則波の屈折・回折・砕波変形の計算法, 第 33 回海岸工学論文集, pp.134-138.
- 磯部雅彦・佐藤典之・杉浦 淳・泉宮尊司 (1987) : 港内波高分布の数値計算における境界条件に関する研究, 第 34 回海岸工学論文集, pp.86-90.
- 郭 文秀・西村仁嗣 (1997) : Green 関数法による任意水深水域の波浪場解析, 第 44 回海岸工学論文集, pp.26-30.
- 郭 文秀 (1998) : Green 関数法による任意水深水域の波浪場解析に関する研究, 筑波大学工学研究科博士論文, 157p.
- 高山知司 (1981) : 波の回折と港内波高分布に関する研究, 港灣技研資料, No.367, 140p.
- 土木学会海岸工学委員会編 (1994) : 海岸波動—波・構造物・地盤の相互作用の解析法—, pp.8-118.
- 西村仁嗣・丸山康樹・平口博丸 (1983) : 直接数値積分による波の場の解析, 第 30 回海岸工学論文集, pp.123-127.
- 西村仁嗣 (1987) : エネルギー平衡方程式の積分に伴う数値分散について, 第 36 回海岸工学論文集, pp.95-98.
- 西村仁嗣 (1989) : 屈折・回折を含む波の場の解析法に関する考察, 第 34 回海岸工学論文集, pp.11-15.
- 西村仁嗣・松岡道男・松本 朗・篠田伸昌 (1993) : グリーン関数法による港内静穏度解析, 第 40 回海岸工学論文集, pp.51-55.
- 藤井信太郎・福島雅紀・郭 文秀・京藤敏達・西村仁嗣 (1998) : 緩勾配方程式のグリーン関数および一般解の導出, 第 45 回海岸工学論文集, pp.1-5.
- 渡辺 晃・丸山康樹 (1984) : 屈折・回折・砕波変形を含む波浪場の数値解析法, 第 31 回海岸工学論文集, pp.103-107.
- Barailler, L. and P. Gaillard (1967) : Evolution recente des modeles mathematiques dagitation due a la houl : Calcul de la diffraction en profondeur non uniforme, La Houille Blanche, Vol.22, No. 8, pp.861-869.
- Berkhoff, J. C. W. (1972) : Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13<sup>th</sup> ICCE, pp.471-490.
- Berkhoff, J. C. W., N. Booij and A. C. Radder (1982) : Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, Coastal Eng., Vol.6, pp.225-279.



- Dunham, J. W. (1951) : Refraction and diffraction diagrams, Proc.1<sup>st</sup> ICCE, pp.33-49.
- Karlsson, T. (1969) : Refraction of continuous ocean wave spectra, J. Waterways and Harbors Division, Proc. ASCE, Vol.95, pp.437-448.
- Keller, J. B. (1958) : Surface waves on water of non-uniform depth, J. Fluid Mech., Vol.4, pp.607-614.
- Kirby, J. T. (1984) : A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, J. Geophys. Res., Vol. 89, pp.745-747.
- Kirby, J. T. and R. A. Dalrymple (1984) : Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves, Coastal Eng., Vol.8, pp.219-232.
- Kirby, J. T. (1986) : Rational approximations in the parabolic equation method for water waves, Coastal Eng., Vol. 10, pp.355-378.
- Lee, J.-J. (1971) : Wave-induced oscillations in harbor of arbitrary geometry, J. Fluid Mech., Vol.45, part 2, pp.375-394.
- Nishimura, H., M. Matsuoka and A. Matsumoto (1994) : A generalized Green-function method for wave field analysis, Proc. 24<sup>th</sup> ICCE, pp.442-454.
- Radder, A. C. (1979) : On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech., Vol.95, Part 1, pp.159-176.
- Smith, R. and T. Spinks (1975) : Scattering of surface waves by a conical island, J. Fluid Mech., Vol.72, pp.373-384.
- Yu, X.-P., M. Isobe and A. Watanabe (1992) : Finite element solution of water field around structures in nearshore zone, Coastal Eng. in Japan, Vol.35, pp.21-33.
- Mei, C. C. (1984) : *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific Publishing, 740p.

## 謝辞

筑波大学水工学研究室に所属した6年間、研究面での親身な御指導のみならず、大変貴重なお話を数多く拝聴させて頂きました筑波大学構造工学系教授西村仁嗣先生に心から深く感謝いたします。また終始貴重な御助言を頂きました山梨大学学長、元筑波大学構造工学系教授椎貝博美先生に感謝の意を表させて頂きます。

卒業研究の御指導を初めとしまして、長い間公私にわたり御指導、御鞭撻頂きました筑波大学構造工学系助教授京藤敏達先生に感謝いたします。また研究室のゼミや日々の生活において数多くのアドバイスを頂きました筑波大学構造工学系助教授武若聡先生ならびに講師風間聡先生に感謝いたします。

博士論文の審査に当たり、お忙しい時間を割いて頂き、丁寧な審査と御助言をして頂きました筑波大学構造工学系教授松内一雄先生ならびに助教授正司秀信先生に感謝いたします。

筑波大学水工学研究室の先輩、後輩の皆様には御助言・御協力をいただき大変感謝しております。最後に、9年間にわたるつくばでの学生生活を、精神的・経済的に援助してくれた両親と、心からの応援をくれた家族に感謝の意を表します。

## Appendix A.1 緩勾配方程式に対する Green の定理

(1) 自己随伴型微分方程式と Green の定理

2 変数関数  $f(x, y)$  に関する 2 階の線形微分方程式  $L[f]$  が,

$$L[f] = Af_{xx} + 2Bf_{xy} + Cf_{yy} + Df_x + Ef_y + Ff = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

で与えられるものとする. 一般に (線形) 微分式  $L[f]$  に対して, 2 つの関数  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  と変数  $x, y$  について恒等的に

$$gL[f] - fM[g] = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q \quad (\text{A.1.2})$$

と書けるような微分式  $M$  と関数  $P, Q$  があるとき,  $M$  を  $L$  の随伴偏微分演算子 (作用素, adjoint partial differential operator) という. このとき, 逆に  $L$  は  $M$  の随伴でもある. ここで, 式 (A.1.1) に対して  $M, P, Q$  は次の様になる.

$$M[g] = (Ag)_{xx} + 2(Bg)_{xy} + (Cg)_{yy} + (Dg)_x + (Eg)_y + Fg = 0 \quad (\text{A.1.3})$$

$$P = A(gf_x - fg_x) + B(gf_y - fg_y) + (D - A_x - B_y)fg \quad (\text{A.1.4})$$

$$Q = B(gf_x - fg_x) + C(gf_y - fg_y) + (E - B_x - C_y)fg \quad (\text{A.1.5})$$

とくに,  $L = M$  となる場合には自己随伴 (self adjoint) という. このとき, 自己随伴の条件は次式で与えられる.

$$D = Ax + By, \quad E = Bx + Cy \quad (\text{A.1.6})$$

式 (A.1.2) の両辺を領域  $D$  で積分する (図 - A.1).

$$\begin{aligned} \iint_D (gL[f] - fM[g]) da &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q \right) ds \\ &= \int_C (Px_n + Qy_n) ds \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

すなわち,

$$\iint_D (gL[f] - fM[g]) da = \int_C (Px_n + Qy_n) ds \quad (\text{A.1.8})$$

が得られる. これは Green の定理の拡張形であり, 広義の Green の定理 (Green's formula of wide sense) と呼ばれる.

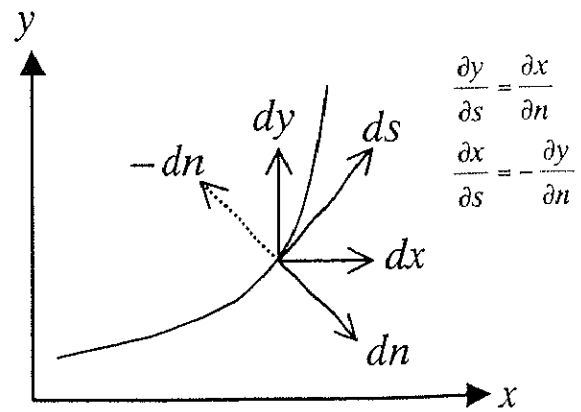
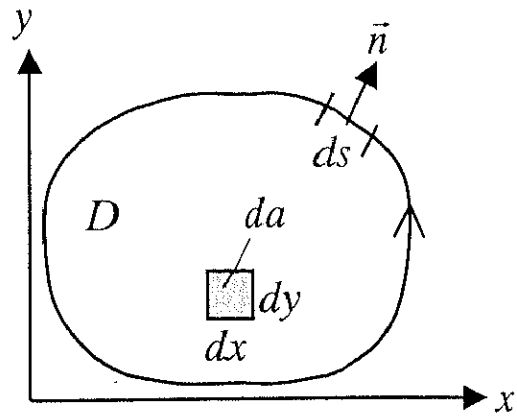


図 - A.1 閉領域と座標系

(2) 緩勾配方程式への適用

平面波浪場のためのもっとも一般的な線形の基礎方程式である緩勾配方程式 (2.2.33) をもう一度書くと,

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla f) + k^2 CC_g f = 0 \quad (\text{A.1.9})$$

上式を式 (A.1.1) の形に書き改めると, 次式のようなになる.

$$L[f] = CC_g f_{xx} + CC_g f_{yy} + (CC_g)_x f_x + (CC_g)_y f_y + k^2 CC_g f = 0 \quad (\text{A.1.10})$$

すなわち, 式 (A.1.1) と対比させると,

$$A = CC_g, \quad B = 0, \quad C = CC_g$$

$$D = (CC_g)_x, \quad E = (CC_g)_y, \quad F = k^2 CC_g$$

であり, 式 (A.1.10) は自己随伴 ( $L = M$ ) の条件 (A.1.6) を満足することがわかる.

従って, 式 (A.1.8) の Green の定理を適用すると,

$$\iint_D (gL[f] - fL[g]) da = \int_C (Px_n + Qy_n) ds \quad (\text{A.1.11})$$

ここで,

$$P = CC_g (gf_x - fg_x) \quad (\text{A.1.12})$$

$$Q = CC_g (gf_y - fg_y) \quad (\text{A.1.13})$$

式 (A.1.11) の左辺の線積分は,

$$\begin{aligned} Px_n + Qy_n &= CC_g (gf_x - fg_x)x_n + CC_g (gf_y - fg_y)y_n \\ &= CC_g (gf_x x_n + gf_y y_n - fg_x x_n - fg_y y_n) \\ &= CC_g \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

ここで,

$$\frac{\partial f}{\partial n} = f_x x_n + f_y y_n, \quad \frac{\partial g}{\partial n} = g_x x_n + g_y y_n \quad (\text{A.1.15})$$

である. したがって式 (A.1.15) は,

$$\int_C (Px_n + Qy_n) ds = \int_C CC_g \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \quad (\text{A.1.16})$$

上式を式 (A.1.11) に戻すと, 緩勾配方程式に対する Green の定理が次式のように得られる.

$$\iint_D (gL[f] - fL[g]) da = \int_C CC_g \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds \quad (\text{A.1.17})$$

上式は Helmholtz 方程式に対する Green の定理 (2.3.8) と比較すると, 右辺の線積分に  $CC_g$  が追加されていることがわかる.

## Appendix A.2 緩勾配方程式の級数解の導出

ここでは第3章 3.2.1 節に示す緩勾配方程式の特異点近傍における級数解の導出過程について詳細に示す。級数解は、次のように形を仮定する。

$$\phi_{ser} = \log(k_0 r) \sum_{n=0}^{\infty} p_n (k_0 r)^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n (k_0 r)^n \quad (\text{A.2.1})$$

ここでは、解の  $\theta$  方向依存性を考慮する未定係数  $p_n$ ,  $q_n$  についての連立微分方程式、

$$\begin{aligned} p_{n+2\theta\theta} + (n+2)^2 p_{n+2} + p_n + 2 \frac{k_r}{k_0^2} p_{n-1} &= 0 \\ q_{n+2\theta\theta} + (n+2)^2 q_{n+2} + q_n + 2 \frac{k_r}{k_0^2} q_{n-1} &= -2(n+2)p_{n+2} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

を、 $p_n, q_n = 0$ ,  $n < 0$ , の条件の下で解く。

式 (A.2.2) より  $n = 0$  次の連立方程式は、

$$p_{0\theta\theta} = 0, \quad q_{0\theta\theta} = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

となり、これより解は、

$$p_0 = \text{const.}, \quad q_0 = \text{const.} \quad (\text{A.2.4})$$

となる。また  $p_1$  についての連立方程式は、

$$p_1 + p_{1\theta\theta} = 0 \quad (\text{A.2.5})$$

となり、これより  $p_1$  の解は、

$$p_1 = p_{1c} \cos \theta + p_{1s} \sin \theta \quad (\text{A.2.6})$$

となる。ここで  $p_{1c}$ ,  $p_{1s}$  は未定定数である。また  $q_1$  についての連立方程式は、

$$q_1 + q_{1\theta\theta} = -2p_1 \quad (\text{A.2.7})$$

となる。ここで右辺は外力項であり、 $q_1$  が物理的に有意な解を持つためには、

$$p_1 = 0 \quad (\text{A.2.8})$$

となる。このとき  $q_1$  の解は、

$$q_1 = q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta \quad (\text{A.2.9})$$

となる。ここで  $q_{1c}$ ,  $q_{1s}$  は未定定数である。以降についても  $n = 1$  次の連立微分方程式と同様に、微分方程式中に現れる外力項に注意して解く。

$n = 2$  次の連立微分方程式は,

$$4p_2 + p_{2\theta\theta} = -p_0 \quad (\text{A.2.10})$$

$$4q_2 + q_{2\theta\theta} = -q_0 - 4p_2 \quad (\text{A.2.11})$$

となり, これらを解くと  $p_2$ ,  $q_2$  の解,

$$\begin{aligned} p_2 &= -\frac{1}{4}p_0 + p_{2c} \cos 2\theta + p_{2s} \sin 2\theta \\ &= -\frac{1}{4}p_0 \end{aligned} \quad (\text{A.2.12})$$

$$q_2 = \frac{1}{4}(p_0 - q_0) + q_{2c} \cos 2\theta + q_{2s} \sin 2\theta \quad (\text{A.2.13})$$

が得られる. ここで  $q_{2c}$ ,  $q_{2s}$  は未定定数である. 同様に  $n = 2$  次の連立微分方程式は,  $p_3$  について,

$$\begin{aligned} 9p_3 + p_{3\theta\theta} &= -\frac{2k_r}{k_0^2}p_0 - p_1 \\ &= -\frac{2p_0}{k_0^2}(k_x|_{r=0} \cos \theta + k_y|_{r=0} \sin \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

となり, その解は,

$$\begin{aligned} p_3 &= -\frac{p_0}{4k_0^2}(k_x|_{r=0} \cos \theta + k_y|_{r=0} \sin \theta) + p_{3c} \cos 3\theta + p_{3s} \sin 3\theta \\ &= -\frac{p_0}{4k_0^2}(k_x|_{r=0} \cos \theta + k_y|_{r=0} \sin \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

となる.  $q_3$  についての微分方程式は,

$$\begin{aligned} 9q_3 + q_{3\theta\theta} &= -\frac{2k_r}{k_0^2}q_0 - q_1 - 6p_3 \\ &= -\frac{2q_0}{k_0^2}(k_x|_{r=0} \cos \theta + k_y|_{r=0} \sin \theta) - (q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta) \\ &\quad + \frac{3p_0}{2k_0^2}(k_x|_{r=0} \cos \theta + k_y|_{r=0} \sin \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

となり, その解は,

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{1}{8}\left(\frac{3p_0 - 4q_0}{2k_0^2}k_x|_{r=0} - q_{1c}\right) \cos \theta + \frac{1}{8}\left(\frac{3p_0 - 4q_0}{2k_0^2}k_y|_{r=0} - q_{1s}\right) \sin \theta \\ &\quad + q_{3c} \cos 3\theta + q_{3s} \sin 3\theta \end{aligned} \quad (\text{A.2.17})$$

となる. ここで  $q_{3c}$ ,  $q_{3s}$  は未定定数である. 以上のように  $p_n$ ,  $q_n$  は求められる.

(補足)

級数解の形は次の様に仮定することも可能である.

$$\phi_{ser} = \log\{(k_0 + k_r r)r\} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \{(k_0 + k_r r)r\}^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{(k_0 + k_r r)r\}^n \quad (\text{A.2.18})$$

しかし, この場合式 (A.2.2) に相当する  $p_n$ ,  $q_n$  についての関係式の導出は, 式が煩雑となるため困難となる. また得られる  $p_n$ ,  $q_n$  の関係式は非線形となり式 (A.2.1) の級数解を用いるのに比べて導出過程が複雑になる. 本研究ではこのように形を仮定した級数解は導いていない.



## Appendix A.3 放物型近似式の導出法とその問題

ここではまず第3章 3.2.2 節に示す緩勾配方程式の放物型近似式の導出過程について詳細に示す。次に、級数展開を用いて変数係数  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を決定する際、その収束半径  $1/r$  が 1 に比べて小さくなる問題について、一様水深場を例に詳細に検討する。

### (1) 放物型近似式の導出

Helmholtz 型方程式

$$L[\phi] = 0, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \quad (\text{A.3.1})$$

を満たす一方向波の方程式,

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = A \phi_s + B \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} + C \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.3.2})$$

の変数係数  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を求める。式 (A.3.2) を用いて式 (A.3.1) の  $r$  方向微分をすべて  $\phi_s$  および  $\phi_s$  の  $\theta$  微分項に変換する。これより得られる方程式は  $\phi_s$ ,  $\partial \phi_s / \partial \theta$ ,  $\partial^2 \phi_s / \partial \theta^2$ ,  $\partial^3 \phi_s / \partial \theta^3$ ,  $\partial^4 \phi_s / \partial \theta^4$  の項を含む。これらの項のうち  $\phi_s$ ,  $\partial \phi_s / \partial \theta$ ,  $\partial^2 \phi_s / \partial \theta^2$  の係数が任意の  $\phi_s$  で 0 となる条件から、係数  $A$ ,  $B$ ,  $C$  についての非線形連立微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} A^2 + k^2 + \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} + B \frac{\partial A}{\partial \theta} + C \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} &= 0, \\ 2AB + BC + \frac{B}{r} + B \frac{\partial B}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial A}{\partial \theta} C + \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} C &= 0, \\ 2AC + B^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{C}{r} + \frac{\partial C}{\partial r} + 2 \frac{\partial B}{\partial \theta} C + B \frac{\partial C}{\partial \theta} + C \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

この方程式系を解くため、係数  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を次のように展開する。

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \frac{1}{r} A_1 + \frac{1}{r^2} A_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ B &= B_0 + \frac{1}{r} B_1 + \frac{1}{r^2} B_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ C &= C_0 + \frac{1}{r} C_1 + \frac{1}{r^2} C_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.3.4})$$

これらを式 (A.3.3) に代入し、 $1/r$  の幂の次数ごとにまとめ、これが任意の  $r$  で成立する条件より、 $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$ ,  $m=0, 1, 2$ , についての微分方程式が得られる。

$$A_0^2 + k^2 + \frac{\partial A_0}{\partial r} = 0, \quad (\text{A.3.5})$$

$$2A_0B_1 + \frac{\partial B_1}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.3.6})$$

$$2A_0A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial r} + A_0 + \frac{\partial A_0}{\partial r} B_1 = 0, \quad (\text{A.3.7})$$

$$2A_0C_2 + \frac{\partial C_2}{\partial r} + B_1^2 + 1 = 0, \quad (\text{A.3.8})$$

$$2A_0B_2 + 2A_1B_1 + \frac{\partial B_2}{\partial r} + B_1 \frac{\partial B_1}{\partial r} + 2 \frac{\partial A_0}{\partial r} C_2 = 0, \quad (\text{A.3.9})$$

$$2A_0A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial r} + A_1^2 + \frac{\partial A_0}{\partial r} B_2 + \frac{\partial A_1}{\partial r} B_1 + \frac{\partial^2 A_0}{\partial r^2} C_2 = 0 \quad (\text{A.3.10})$$

ここで  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  は, 波数  $k$  およびその空間微分項を含む式となることがわかる. また式 (A.3.2) の各項について次数がそろった観点から,

$$B_0 = 0, \quad C_0 = 0, \quad C_1 = 0 \quad (\text{A.3.11})$$

であることがわかる.

まず式 (A.3.5) を解く.  $A_0$  の空間微分が  $O(\varepsilon)$  の大きさを持つとして,

$$A_0 = a_{00} + \varepsilon a_{01} \quad (\text{A.3.12})$$

のように摂動展開し, 式 (A.3.5) に代入する. これを整理すると  $\varepsilon$  の 0 次の方程式は,

$$a_{00}^2 + k^2 = 0 \quad (\text{A.3.13})$$

となり, この解は  $a_{00} = \pm ik$  となる. ここでは最終的に得られる放物型近似式が, 点源からの湧き出し波を表現するように解を選択する. ここでは, 緩勾配方程式の導出過程で水位変動  $\eta$  を,

$$\eta = fe^{-i\omega t} \quad (\text{A.3.14})$$

と仮定していることから,

$$a_{00} = ik \quad (\text{A.3.15})$$

を解として選択する. また  $\varepsilon$  の 1 次の方程式は,

$$\frac{\partial a_{00}}{\partial r} + 2a_{00}a_{01} = 0 \quad (\text{A.3.16})$$

となる. ここで  $a_{00}$  は既に解が得られているので,  $a_{01}$  は代数的に求められる.

$$a_{01} = -\frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} \quad (\text{A.3.17})$$

式 (A.3.6) についても同様に求める.  $B_1$  の摂動展開を次のように考え,

$$B_1 = b_{10} + \varepsilon b_{11} \quad (\text{A.3.18})$$

式 (A.3.6) に上式を代入し整理すると,  $\varepsilon$  の 0 次, 1 次の方程式はそれぞれ,

$$2a_{00}b_{10} = 0 \quad (\text{A.3.19})$$

$$2a_{00}b_{11} + 2a_{01}b_{10} + \frac{\partial b_{10}}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.3.20})$$

となる。これらを解くと、

$$b_{10} = b_{11} = 0 \quad (\text{A.3.21})$$

となる。

上記の手法を用いてすべての方程式を解くことが出来る。以降では各微分方程式の  $\varepsilon$  について 0 次および 1 次の方程式と、その解を示す。

$$\begin{aligned} \cdot \text{式 (A.3.7)} : A_1 &= a_{10} + \varepsilon a_{11} \\ \varepsilon^0 \text{次} \quad a_{00} + 2a_{00}a_{10} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.22})$$

$$\varepsilon^1 \text{次} \quad a_{01} + 2a_{00}a_{11} + 2a_{01}a_{10} + \frac{\partial a_{10}}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.3.23})$$

$$a_{10} = -\frac{1}{2}, \quad a_{11} = 0 \quad (\text{A.3.24})$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{式 (A.3.8)} : C_2 &= c_{20} + \varepsilon c_{21} \\ \varepsilon^0 \text{次} \quad 2a_{00}c_{20} + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.25})$$

$$\varepsilon^1 \text{次} \quad 2a_{00}c_{21} + 2a_{01}c_{20} + \frac{\partial c_{20}}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.3.26})$$

$$c_{20} = \frac{i}{2k}, \quad c_{21} = \frac{1}{2k^3} \frac{\partial k}{\partial r} \quad (\text{A.3.27})$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{式 (A.3.9)} : B_2 &= b_{20} + \varepsilon b_{21} \\ \varepsilon^0 \text{次} \quad 2a_{00}b_{20} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.28})$$

$$\varepsilon^1 \text{次} \quad 2a_{00}b_{21} + 2a_{01}b_{20} + \frac{\partial b_{20}}{\partial r} + 2 \frac{\partial a_{00}}{\partial \theta} c_{20} = 0 \quad (\text{A.3.29})$$

$$b_{20} = 0, \quad b_{21} = -\frac{1}{2k^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \quad (\text{A.3.30})$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{式 (A.3.10)} : A_2 &= a_{20} + \varepsilon a_{21} \\ \varepsilon^0 \text{次} \quad a_{10}^2 + 2a_{00}a_{20} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3.31})$$

$$\varepsilon^1 \text{次} \quad 2a_{10}a_{11} + 2a_{00}a_{21} + 2a_{01}a_{20} + \frac{\partial a_{20}}{\partial r} + 2 \frac{\partial a_{00}}{\partial \theta} b_{20} = 0 \quad (\text{A.3.32})$$

$$a_{20} = \frac{i}{8k}, \quad a_{21} = \frac{1}{8k^3} \frac{\partial k}{\partial r} \quad (\text{A.3.33})$$

以上の解をまとめると次のようになる。

$$A_0 = ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} \quad (\text{A.3.34})$$

$$A_1 = -\frac{1}{2r} \quad (\text{A.3.35})$$

$$A_2 = \frac{1}{8k} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \quad (\text{A.3.36})$$

$$B_2 = -\frac{i}{2k^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \quad (\text{A.3.37})$$

$$C_2 = \frac{1}{2k} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \quad (\text{A.3.38})$$

これらを用いて変数係数  $A$ ,  $B$ ,  $C$  が表現される。最終的に放物型方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = \left\{ ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{8kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right\} \phi_s - \frac{i}{2k^2 r^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} + \frac{1}{2kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.3.39})$$

## (2) 変数係数 $A$ , $B$ , $C$ の級数展開式の収束性

Helmholtz 方程式の放物型近似式は、その形を次のように仮定する (3.1.2 節参照)。

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = A \phi_s \quad (\text{A.3.40})$$

これを Helmholtz 方程式に代入し整理すると、 $A$  の満たすべき非線形微分方程式が得られる。

$$A^2 + k^2 + \frac{A}{r} + \frac{dA}{dr} = 0 \quad (\text{A.3.41})$$

この方程式を解くために、Helmholtz 方程式に陽に現れる変数  $r$  についての依存性を考慮して  $A$  を  $1/r$  について級数展開して用いる。

$$A = A_0 + \frac{1}{r} A_1 + \frac{1}{r^2} A_2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (\text{A.3.42})$$

上式を Helmholtz 方程式に代入して得られる式が、任意の  $r$  について成立する条件から級数  $\{A_m\}$ , ( $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) の漸化式が得られる。

$$A_m + \frac{1}{2A_0} \left\{ (2-m)A_{m-1} + \sum_{l=1}^{m-1} A_{m-l} \cdot A_l \right\} \quad (m \geq 1) \quad (\text{A.3.43})$$

$$A_0 = ik \quad (\text{A.3.44})$$

この級数の収束半径  $\rho$  を次のように定義する。

$$\frac{A_m}{A_{m+1}} = \frac{1}{r} = \rho \quad (\text{A.3.45})$$

これを  $m = 1 \sim 20$  の範囲で数値的に求め、得られる  $\rho$  を図-A.3.1 に示す。その結果、収束半径は  $\rho \leq 1$  となることがわかる。これより級数  $\{A_m\}$  は発散級数であることがわかる。これは  $A$  の  $r$  についての依存性を  $1/r$  のみで表現するためである。

この変数係数  $A$  の厳密解は、Helmholtz 方程式の解析解である Hankel 関数を用い、式 (A.3.40) より次のように得られる。

$$A = \frac{\partial \phi_s}{\partial r} = \frac{H_1^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)}(kr)} \quad (\text{A.3.46})$$

放物型近似式を解析的に導出する場合，上式を用いて係数  $A$  の  $r$  依存性を検討し， $1/r$  の他に  $r$  で級数展開する要素を求める必要がある。

図 - A.3.2 に，式 (A.3.46) による係数  $A$  の実数部および虚数部の厳密値，およびこれらを  $1/r$  の級数で表現した近似値をプロットし，両者を比較する。その結果， $kr = 1.0 \sim 10.0$  の範囲では  $1/r$  の級数のみで，係数  $A$  を十分な精度で表現出来ることがわかる。さらに 3.5.1 節で示すように，本論文で提案する手法で構成される素解が， $kr = 1.0 \sim 30.0$  の範囲で Hankel 関数を精度よく表現できることから，実用上は放物型近似式 (A.3.39) を用いても差し支えないと考えられる。

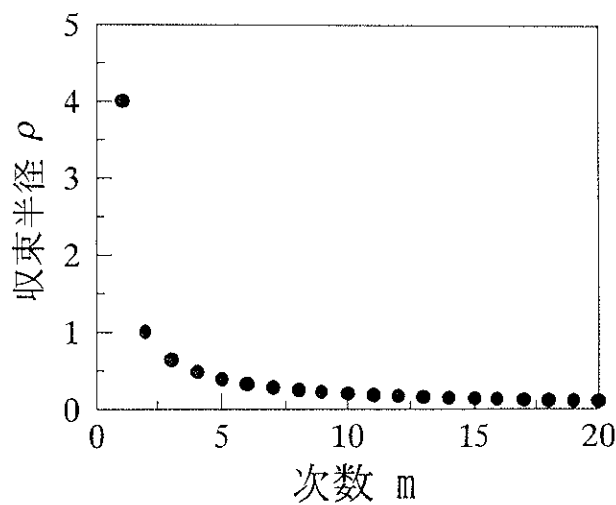
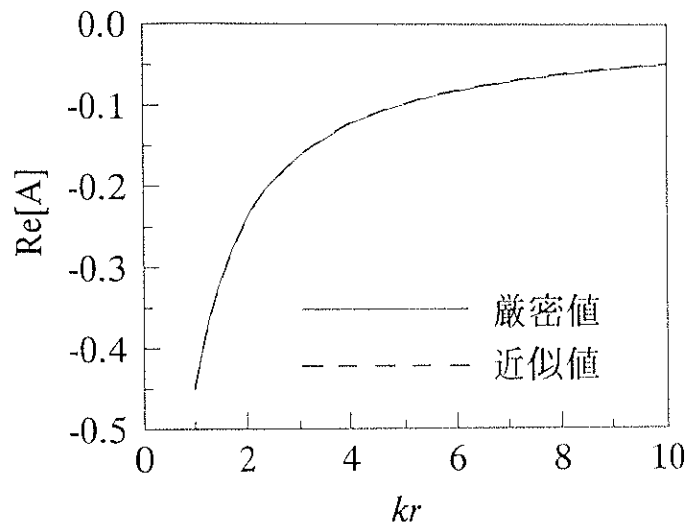
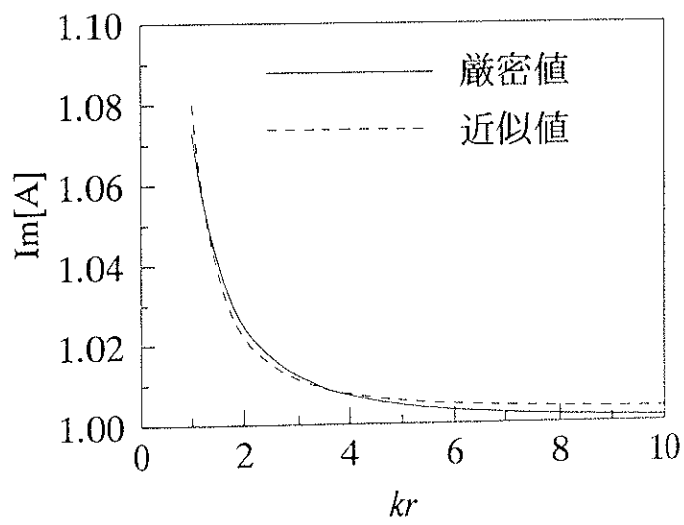


図 - A.3.1 級数  $\{A_m\}$  の収束半径



(a) 実数部



(b) 虚数部

図-A.3.2 変数係数  $A$  の厳密値と近似値の比較

## Appendix A.4 級数解と放物型近似式の接合

特異点近傍の緩勾配方程式の級数解, および遠方場の放物型近似式は,

$$\phi_{ser} \equiv \log k_0 r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n (k_0 r)^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n (k_0 r)^n \quad (\text{A.4.1})$$

$$\begin{aligned} p_0 &= \text{const.}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{4} p_0, \quad p_3 = -\frac{p_0}{4k_0^2} k_r, \\ q_0 &= \text{const.}, \quad q_1 = q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta, \\ q_2 &= \frac{1}{4} (p_0 - q_0) + q_{2c} \cos 2\theta + q_{2s} \sin 2\theta, \\ q_3 &= \frac{1}{8} \left( \frac{3p_0}{2k_0^2} - \frac{2q_0}{k_0^2} \right) k_r - (q_{1c} \cos \theta + q_{1s} \sin \theta) + q_{3c} \cos 3\theta + q_{3s} \sin 3\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} = \left\{ ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{8kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right\} \phi_s - \frac{i}{2k^2 r^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} + \frac{1}{2kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.4.3})$$

$$k = k|_{r=0} + \left( \frac{\partial k}{\partial x} \Big|_{r=0} \cos \theta + \frac{\partial k}{\partial y} \Big|_{r=0} \sin \theta \right) r \equiv k_0 + k_r r \quad (\text{A.4.4})$$

となる. 両者の解を次の条件を満たす接合半径  $r_m$ ,

$$r = r_m, \quad k_0 r_m = 1 \quad (\text{A.4.5})$$

で接合し, 未定定数  $p_0, q_0, q_{1c}, q_{1s}, q_{2c}, q_{2s}, q_{3c}, q_{3s}$  を決定する.

ここで波数  $k$  の空間微分は  $O(\varepsilon)$  の大きさを持つとして, 次のようにオーダーを評価する.

$$k = k_0 + \varepsilon k_r \quad (\text{A.4.6})$$

また未定定数についても, 同様に摂動展開する.

$$q_m = q_{m0} + \varepsilon q_{m1} \quad (m = 1, 2, 3) \quad (\text{A.4.7})$$

これらを考慮して, 級数解 (A.4.1) を放物型近似式 (A.4.3) に代入し  $\varepsilon$  の次数で整理する. また得られる方程式について, 各  $\varepsilon$  の次数ごとに  $\theta$  の依存性を考慮して  $e^0, e^{i\theta}, e^{i2\theta}, e^{i3\theta}$  の要素を持つ項毎に整理する. 任意の  $\theta$  で方程式が成立する条件から, 未定定数を求める方程式系が得られる.

以降ではこの方程式系を解くことにより未定定数を決定する. ここで  $p_0$  は, 級数解の定義  $L[\phi_{ser}] = \delta(r)$  より天下りの的に,

$$p_0 = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{A.4.8})$$

を与える.

まず  $\varepsilon^0$  次,  $e^{z^{i0}}$ ,  $e^{z^{i20}}$ ,  $e^{z^{i30}}$  の係数より得られる方程式系は,

$$e^{z^{i0}} : \left(-\frac{17}{32} + \frac{35}{128}i\right)k_0(q_{1c0} + iq_{1s0}) = 0 \quad (\text{A.4.9})$$

$$\left(-\frac{17}{32} + \frac{35}{128}i\right)k_0(-q_{1c0} + iq_{1s0}) = 0 \quad (\text{A.4.10})$$

$$e^{z^{i20}} : \left(-\frac{5}{4} - \frac{7}{16}i\right)k_0(q_{2c0} + iq_{2s0}) = 0 \quad (\text{A.4.11})$$

$$\left(-\frac{5}{4} - \frac{7}{16}i\right)k_0(q_{2c0} - iq_{2s0}) = 0 \quad (\text{A.4.12})$$

$$e^{z^{i30}} : \left(-\frac{7}{4} - \frac{27}{16}i\right)k_0(q_{3c0} + iq_{3s0}) = 0 \quad (\text{A.4.13})$$

$$\left(-\frac{7}{4} - \frac{27}{16}i\right)k_0(q_{3c0} - iq_{3s0}) = 0 \quad (\text{A.4.14})$$

となり, これらを解くと,

$$q_{1c0} = q_{1s0} = q_{2c0} = q_{2s0} = q_{3c0} = q_{3s0} = 0 \quad (\text{A.4.15})$$

が得られる. また  $e^0$  の係数より得られる方程式,

$$\left(-\frac{11}{8} + \frac{9}{32}i\right)k_0 p_0 + \left(\frac{1}{8} + \frac{27}{32}i\right)k_0 q_0 = 0 \quad (\text{A.4.16})$$

より  $q_0$  が求められる.

$$q_0 = \left(-\frac{67}{745} - \frac{1224}{745}i\right)p_0 = -\frac{67}{1490\pi} - \frac{612}{745\pi}i \quad (\text{A.4.17})$$

次に  $\varepsilon^1$  次,  $e^{z^{i0}}$  の係数より得られる方程式系は,

$$(576 - 2503i)\frac{k_x|_{r=0}}{k_0} p_0 + (2503 + 576i)\frac{k_y|_{r=0}}{k_0} p_0 - (3392 - 2432i)k_0(q_{1c1} + iq_{1s1}) = 0 \quad (\text{A.4.18})$$

$$(576 - 2503i)\frac{k_x|_{r=0}}{k_0} p_0 - (2503 + 576i)\frac{k_y|_{r=0}}{k_0} p_0 + (2432 + 3392i)k_0(iq_{1c1} + q_{1s1}) = 0 \quad (\text{A.4.19})$$

となる. これらを解くと,

$$q_{1c1} = 2\lambda p_0 \frac{k_x|_{r=0}}{k_0^2} = \lambda \frac{k_x|_{r=0}}{k_0^2 \pi}, \quad q_{1s1} = 2\lambda p_0 \frac{k_y|_{r=0}}{k_0^2} = \lambda \frac{k_y|_{r=0}}{k_0^2 \pi}, \quad (\text{A.4.20})$$

$$\lambda \equiv \frac{4023047}{17430020} - i \frac{886024}{4357505}$$

が得られる. また  $e^{z^{i20}}$ ,  $e^{z^{i30}}$  の係数より得られる方程式系は,

$$e^{z^{i20}} : \left(-\frac{5}{4} - \frac{7}{16}i\right)k_0(q_{2c1} + iq_{2s1}) = 0 \quad (\text{A.4.21})$$

$$\left(-\frac{5}{4} - \frac{7}{16}i\right)k_0(q_{2c1} - iq_{2s1}) = 0 \quad (\text{A.4.22})$$



$$e^{\pm i3\theta} : \quad \left(-\frac{7}{4} - \frac{27}{16}i\right)k_0(q_{3c1} + iq_{3s1}) = 0 \quad (\text{A.4.23})$$

$$\left(-\frac{7}{4} - \frac{27}{16}i\right)k_0(q_{3c1} - iq_{3s1}) = 0 \quad (\text{A.4.24})$$

となり，これらを解くと，

$$q_{2c1} = q_{2s1} = q_{3c1} = q_{3s1} = 0 \quad (\text{A.4.25})$$

が得られる．最終的に未定定数は次のように決定される．

$$p_0 = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{A.4.26})$$

$$q_0 = \left(-\frac{67}{745} - \frac{1224}{745}i\right)p_0 = -\frac{67}{1490\pi} - \frac{612}{745\pi}i \quad (\text{A.4.27})$$

$$q_{1c} = 2\lambda p_0 \frac{k_{x0}}{k_0^2} = \lambda \frac{k_{x0}}{k_0^2 \pi}, \quad q_{1s} = 2\lambda p_0 \frac{k_{y0}}{k_0^2} = \lambda \frac{k_{y0}}{k_0^2 \pi}, \quad (\text{A.4.28})$$

$$\lambda = \frac{4023047}{17430020} - i \frac{886024}{4357505} \quad (\text{A.4.29})$$

$$q_{2c} = q_{2s} = q_{3c} = q_{3s} = 0. \quad (\text{A.4.29})$$

$$k_0 = k|_{r=0}, \quad k_{x0} = \frac{\partial k}{\partial x}|_{r=0}, \quad k_{y0} = \frac{\partial k}{\partial y}|_{r=0} \quad (\text{A.4.30})$$

これより級数解は $\theta$ について1次の依存性のみを持つことがわかる．

式 (A.4.11) ~ (A.4.14) および式 (A.4.21) ~ (A.4.24) で明らかのように， $\varepsilon$ の1次のオーダーまでに，級数解の $\theta$ について2次モード以降の項とつりあう波数 $k$ のモードは存在しない．実際は， $k$ に含まれる $\theta$ の1次モードと級数解の1次モードとの積により2次モードの項が生じるが，これは $\varepsilon^2$ のオーダーとなり緩勾配条件より無視される．このため級数解は2次以降の $\theta$ 依存性を考慮することは出来ないことがわかる．

## Appendix A.5 郭・西村の手法による放物型近似式の導出

郭・西村 (1997) により提案された，緩勾配方程式の Green 関数構成法では，素解の特異点近傍に一様水深場を仮定して Hankel 関数を用い，特異点遠方には，Radder (1979) の splitting matrix 法を用いて導出した放物型近似式の数値解を用い，両者を経験的に得た接合半径，

$$r_m = \frac{L}{8} \quad (L: \text{代表波長}) \quad (\text{A.5.1})$$

で接合することにより Green 関数を構成している．ここでは放物型近似式の導出法について示し，そこに含まれる仮定について詳細に議論する．

Radder は，水平面内のほぼ一方向に伝播する波の運動を表現する緩勾配方程式の放物型近似式を，splitting matrix 法を用いて導いている．この手法では，波浪場  $f$  およびその主方向 ( $x$ ) への偏導関数  $\partial f / \partial x$  が，進行波  $f^+$  および反射波  $f^-$  による波浪場の重ね合わせで表現できるとし，次のような仮定を行っている．

$$\begin{pmatrix} f^+ \\ f^- \end{pmatrix} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} f \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \mathbb{T}: \text{splitting matrix} \quad (\text{A.5.2})$$

郭・西村の手法は，Helmholtz 型方程式，

$$L[\phi] = 0, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k^2 \quad (\text{A.5.3})$$

について Radder と同様に，波浪場  $\phi$  が点源からの湧き出し波  $\phi^+$  および吸込み波  $\phi^-$  の重ね合わせで表現できると仮定して放物型近似式を求めている．ここでは上記の関係を次のように表現する．

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad (\text{A.5.4})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = A\phi^+ + B\phi^- \quad (\text{A.5.5})$$

この仮定は，湧き出し波および吸込み波の進行に伴って底面地形の変化により生じる反射波を，微小であるとして無視していることに相当する．ここでは点源からの湧き出し波のみを考えるので，式 (A.5.4)，(A.5.5) より  $\phi^-$  を消去すると，

$$\phi^+ = \frac{B}{B-A} \phi - \frac{1}{B-A} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (\text{A.5.6})$$

となる．ここで  $\phi^+$  および  $\phi^-$  は  $r \rightarrow \infty$  で近似的に一様水深場の波と一致すると仮定して，Hankel 関数の漸近展開式の初項を用いることとする．

従って,

$$\phi^+ \approx a \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \quad (\text{A.5.7})$$

$$\phi^- \approx b \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} \quad (\text{A.5.8})$$

より, 式 (A.5.7), (A.5.8) を  $r$  について微分すると

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial r} = \left( -\frac{1}{2r} + ik \right) \phi^+ = A \phi^+ \quad (\text{A.5.9})$$

$$\frac{\partial \phi^-}{\partial r} = \left( -\frac{1}{2r} - ik \right) \phi^- = B \phi^- \quad (\text{A.5.10})$$

となり, 式 (A.5.6) は

$$\phi^+ = \alpha \phi + \beta \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (\text{A.5.11})$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{i}{4kr} \quad (\text{A.5.12})$$

$$\beta = -\frac{i}{2k} \quad (\text{A.5.13})$$

となる. 以上のように  $\phi$  と  $\phi^+$  の関係式が導かれる. ここまでの議論は, 一様水深場を前提として成立している. そのため, 地形変化を考慮した波数  $k$  の,  $\theta$  方向の偏導関数を含む項は自明的に存在しない. これらの項は, 以下のように Helmholtz 型方程式を用いて付加的に与えている. 式 (A.5.11) を  $r$  について微分すると,

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial r} = \frac{\partial \alpha}{\partial r} \phi + \left( \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (\text{A.5.14})$$

上式と Helmholtz 型方程式 (A.5.3) から  $\partial^2 \phi / \partial r^2$  を消去すると,

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial r} = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \beta k^2 - \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi + \left( \alpha + \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\beta}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (\text{A.5.15})$$

が得られる. 上式は方程式の  $\theta$  依存性について, Helmholtz 型方程式を直接用いることにより 2 階微分のみを考慮している. このため放物型近似式に本来現れるであろう  $\partial \phi / \partial \theta$  の項を式の中に含むことは出来ない.

この手法による放物型近似式は, 式 (A.5.4), (A.5.5) を式 (A.5.15) に代入した後, 式 (A.5.9), (A.5.10) を用いて得られる  $\phi^+$ ,  $\phi^-$  の関係式について, 吸込み波成分  $\phi^-$  を無視することにより得られる.

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial r} = \left( \frac{i}{4kr^2} + \frac{i}{4k^2 r} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{ik}{2} + \frac{i}{2kr^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \phi^+ + \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{4kr} + \frac{i}{2k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \left( ik - \frac{1}{2r} \right) \frac{\partial^2 \phi^+}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.5.16})$$

$$\frac{\partial \phi^+}{\partial r} = \left\{ ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2} \right\} \phi^+ + \frac{i}{2kr^2} \frac{\partial^2 \phi^+}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.5.17})$$

## Appendix A.6 波向き線法による波峰線方程式の厳密解

波速が岸沖方向に線形的に変化する平行等深線斜面上の点源から発する波について、波向き線法を用いた等位相面の厳密解が郭（1998）によって求められている。ここではその導出法を示す。

ここで波向き線法の適用範囲は、

$$\frac{\nabla h}{kh} \ll O(1) \quad (\text{A.6.1})$$

である（Mei, 1984）。これは波の代表波長が、水深変化の長さ方向スケールに比べて充分短いとした短波の条件である。

### (1) 波向き線群の方程式の導出

一般に波浪場に非回転性より次の屈折方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial k \sin \alpha}{\partial x} - \frac{\partial k \cos \alpha}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.6.2})$$

ここで  $k$  は波数、 $\alpha$  は屈折角である。図-A.6.1 のように、 $y$  方向に平行な等深線海浜に一樣な波が斜め入射する場合、 $k$  と  $\alpha$  は  $x$  のみの関数であるから、式 (A.6.2) は、

$$k \sin \alpha = \frac{\omega}{C} \sin \alpha = \text{const.} \quad (\text{A.6.3})$$

ここで、 $\omega$  は角振動数、 $C$  は波速である。波速が直線的に変化するとして ( $C = \beta x$ )、 $x = x_s$  で  $\alpha = \alpha_1$  とすると、

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x_1}{\sin \alpha_1} = R = \text{const.} \quad (\text{A.6.4})$$

となる。

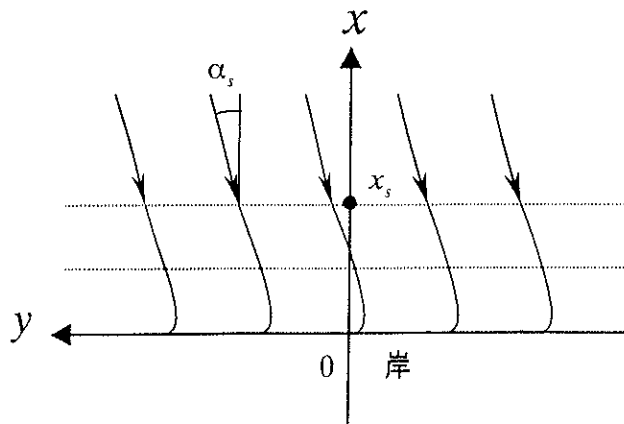


図-A.6.1 斜め入射

また波向き線の方程式は,

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{x/R}{\sqrt{1 - (x/R)^2}} \quad (\text{A.6.5})$$

両辺を  $dx$  で微分すると,

$$\int dy = \int \frac{x/R}{\sqrt{1 - (x/R)^2}} dx \quad (\text{A.6.6})$$

よって,

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -R\sqrt{1 - (x/R)^2} \\ x^2 + (y - y_0)^2 &= R^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6.7})$$

ただし,  $y_0$  は積分定数である. したがって点  $(x_s, 0)$  を通過する波向き線の方程式は (図-A.6.2),

$$\begin{aligned} x_s^2 + y_0^2 &= R^2 \\ y_0 &= \sqrt{R^2 - x_s^2} = R \cos \alpha_s \end{aligned} \quad (\text{A.6.8})$$

従って, 求める波向き線群の方程式は,

$$x^2 + (y - R \cos \alpha_s)^2 = R^2 \quad (\text{A.6.9})$$

ただし,

$$R = \frac{x_s}{\sin \alpha_s}$$

である. 式 (A.6.9) を見ると, 波速が線形的に変化する場合波向き線群は圆弧状になることがわかる.

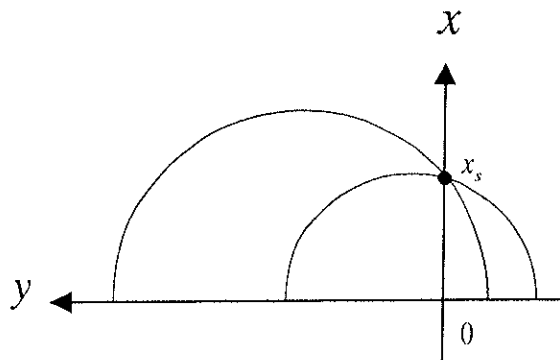


図-A.6.2 点  $(x_s, 0)$  を通過する波

(2) 波峰線方程式の導出

次に、式 (A.6.9) を満たす波峰線方程式を導く。図-A.6.3 のように、波が波向  $\alpha_s$  から波向  $\alpha$  の位置まで伝播するのに要する時間  $t$  は、

$$t = \int_{\alpha}^{\alpha_s} \frac{R}{C} d\alpha = \int_{\alpha}^{\alpha_s} \frac{1}{\beta \sin \alpha} d\alpha \quad (\text{A.6.10})$$

となる。ここで変数変換  $\xi = \cos \alpha$  を考えると、 $d\xi = -\sin \alpha d\alpha$  となるから、

$$\begin{aligned} t &= \int_{\cos \alpha_s}^{\cos \alpha} \frac{d\xi}{\beta \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\beta} \int_{\cos \alpha_s}^{\cos \alpha} \frac{d\xi}{1 - \xi^2} \\ &= \frac{1}{2\beta} \int_{\cos \alpha_s}^{\cos \alpha} \left( \frac{1}{1 + \xi} + \frac{1}{1 - \xi} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\beta} \left[ \log \left( \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) \right]_{\cos \alpha_s}^{\cos \alpha} \\ &= \frac{1}{2\beta} \log \left( \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha_s}{1 + \cos \alpha_s} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.6.11})$$

となる。上式を  $\cos \alpha$  について解くと

$$\begin{aligned} (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha_s) &= e^{2\beta t} (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha_s) \\ \cos \alpha \cdot \{e^{2\beta t} (1 + \cos \alpha_s) + (1 - \cos \alpha_s)\} &= e^{2\beta t} (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha_s) \\ \cos \alpha &= \frac{(e^{2\beta t} - 1) + (e^{2\beta t} + 1) \cos \alpha_s}{(e^{2\beta t} + 1) + (e^{2\beta t} - 1) \cos \alpha_s} \\ &= \frac{\left[ \left( \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \right) + \left( \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} \right) \cos \alpha_s \right] 2e^{\beta t}}{\left[ \left( \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} \right) + \left( \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \right) \cos \alpha_s \right] 2e^{\beta t}} \\ &= \frac{\sinh \beta t + \cosh \beta t \cdot \cos \alpha_s}{\cosh \beta t + \sinh \beta t \cdot \cos \alpha_s} \\ &= \frac{\tanh \beta t + \cos \alpha_s}{1 + \tanh \beta t \cdot \cos \alpha_s} \end{aligned} \quad (\text{A.6.12})$$

となる。図-A.6.3 において

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \left( \frac{x}{R} \right)^2 = \left( \frac{x}{x_s} \sin \alpha_s \right)^2 \\ &= 1 - \left( \frac{\tanh \beta t + \cos \alpha_s}{1 + \tanh \beta t \cdot \cos \alpha_s} \right)^2 \\ &= \frac{(1 + \tanh \beta t \cdot \cos \alpha_s)^2 (\tanh \beta t + \cos \alpha_s)^2}{(1 + \tanh \beta t \cdot \cos \alpha_s)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1 - \tanh^2 \beta t)(1 - \cos^2 \alpha_s)}{(1 + \tanh \beta t \cdot \cos \alpha_s)^2} \\
&= \frac{\sin^2 \alpha_s}{\cosh^2 \beta t \cdot (1 + \tanh \beta t \cdot \cos \alpha_s)} \\
\therefore \frac{x}{x_s} &= \frac{1}{\cosh \beta t \cdot (1 + \tanh \beta t \cdot \cos \alpha_s)}
\end{aligned}$$

従って,

$$\frac{x_s}{x} = \cosh \beta t + \sinh \beta t \cdot \cos \alpha_s \quad (\text{A.6.13})$$

また, 図 - A.6.3 より

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{y_0 - y}{R} = \cos \alpha_s - \frac{y}{x_s} \sin \alpha_s \\
\therefore \frac{y}{x_s} &= \frac{1}{\sin \alpha_s} (\cos \alpha_s - \cos \alpha) \\
&= \frac{1}{\sin \alpha_s} \left( \cos \alpha_s - \frac{\tanh \beta t + \cos \alpha_s}{1 + \tanh \beta t \cdot \cos \alpha_s} \right) \\
&= \frac{1}{\sin \alpha_s} \cdot \frac{\tanh \beta t \cdot (\cos^2 \alpha_s - 1)}{1 + \tanh \beta t \cdot \cos \alpha_s} \\
&= - \frac{\sinh \beta t \cdot \sin \alpha_s}{\cosh \beta t + \sinh \beta t \cdot \cos \alpha_s} \quad (\text{A.6.14})
\end{aligned}$$

式 (A.6.13) より,

$$\sinh \beta t \cdot \sin \alpha_s = \frac{x_s}{x} - \cosh \beta t \quad (\text{A.6.15})$$

式 (A.6.13) および (A.6.14) より,

$$\sinh \beta t \cdot \sin \alpha_s = -\frac{y}{x} \quad (\text{A.6.16})$$

上記の式 (A.6.15), (A.6.16) より  $\alpha_s$  を消去して

$$\begin{aligned}
\left( \frac{x_s}{x} - \cosh \beta t \right)^2 + \left( \frac{y}{x} \right)^2 &= \sinh^2 \beta t \\
x_s^2 - 2x_s x \cosh \beta t + x^2 + y^2 &= 0 \\
(x - x_s \cosh \beta t)^2 + y^2 &= (x_s \sinh \beta t)^2 \quad (\text{A.6.17})
\end{aligned}$$

これが波峰線群の方程式である.

式 (A.6.17) より, 波速が  $C = \beta x$  で与えられた場合, 点源  $(x_s, 0)$  から発した波の波峰線は, 時刻  $t$  で点  $(x_s \cosh \beta t, 0)$  を中心とする半径  $x_s \sinh \beta t$  の円環状に広がっていくことがわかる.

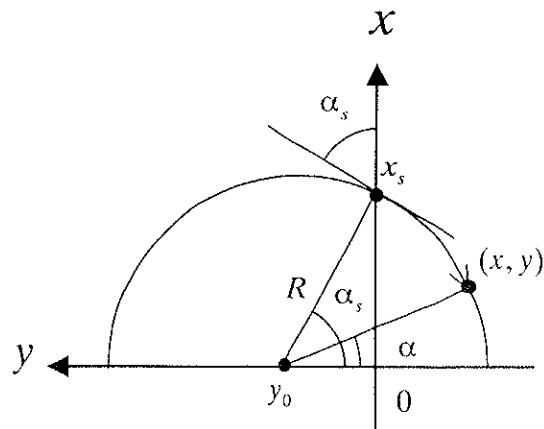


図-A.6.3 点源  $(x_s, 0)$  から発する波の伝播



## Appendix A.7 複素振幅 $f$ , $\phi$ の水深 $h$ に対する依存性

緩勾配方程式の複素振幅  $f$  は、水深  $h$  が浅くなるにつれて浅水変形により増加し、 $h \approx 0$  付近で無限大となる。逆に Helmholtz 型方程式の複素振幅  $\phi$  は、水深  $h$  が浅くなるにつれてその値は減少していく。ここでは、上記のような複素振幅の水深依存性を解析的に示す。

緩勾配方程式の放物型近似式、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left\{ ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} - \frac{1}{2r} + \frac{1}{8kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \right\} \phi - \frac{i}{2k^2 r^2} \frac{\partial k}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2kr^2} \left( i + \frac{1}{k^2} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.7.1})$$

について、簡単のため  $r \rightarrow \infty$  を考えて式中の  $\theta$  依存性を無視すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left( ik - \frac{1}{2k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \phi \quad (\text{A.7.2})$$

と近似できる。ここでは上式について振幅の変化に影響する右辺第 2 項のみを考えた式、

$$\frac{d\phi'}{dr} = -\frac{1}{2k} \frac{dk}{dr} \phi' \quad (\text{A.7.3})$$

に注目する。この解は、

$$\log|\phi'| = -\frac{1}{2} \log k + \text{const.} \quad (\text{A.7.4})$$

$$\therefore |\phi'| \propto k^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7.5})$$

ここで

$$k \propto h^{-\frac{1}{2}} \quad \left( k = \frac{\omega}{C} \right) \quad (\text{A.7.6})$$

より、最終的に

$$|\phi| \approx |\phi'| \propto h^{\frac{1}{4}} \quad (\text{A.7.7})$$

が得られる。従って  $h \rightarrow 0$  で、 $\phi \rightarrow 0$  となることがわかる。

次に Radder 変換  $f = \phi / \sqrt{CC_g}$  について、浅水域で  $C \approx C_g \propto \sqrt{h}$  となるから、

$$\sqrt{CC_g} \propto h^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7.8})$$

$$\therefore |f| = |\phi| / \sqrt{CC_g} \propto h^{-\frac{1}{4}} \quad (\text{A.7.9})$$

が得られる。従って  $h \rightarrow 0$  で、 $f \rightarrow \infty$  となることがわかる。

筑波大学附属図書館



1 00990 12356 4

本学関係

---