

相関型連想記憶モデルのダイナミクス
に関する研究

1999年 8月

川村 三樹

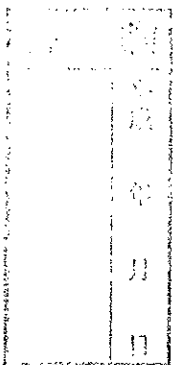
相関型連想記憶モデルのダイナミクス に関する研究

筑波大学 大学院 博士課程

工学研究科 電子・情報工学専攻

川村 正樹

平成11年3月



目次

第1章 序論	1
1.1 連想記憶モデル	1
1.2 連想記憶モデルの理論	2
1.3 本研究の目的	4
第2章 自己想起型連想記憶モデル	6
2.1 はじめに	6
2.2 自己想起モデル	7
2.3 SCSNA	8
2.3.1 巨視的状态方程式	8
2.3.2 Maxwellルール	11
2.4 ダイナミクスの解析	13
2.4.1 統計神経力学	13
2.4.2 想起過程と引き込み領域	16
第3章 相互想起型連想記憶モデル	19
3.1 はじめに	19
3.2 系列想起モデルのダイナミクス	20
3.3 定常状態	22
第4章 連想記憶モデルのダイナミクスの解析	23
4.1 はじめに	23
4.2 単調出力関数の場合	23
4.3 非単調出力関数の場合	27
4.4 スパース符号化	31
4.5 まとめ	34
第5章 HASPの絶対容量	38
5.1 はじめに	38
5.2 HASPの構成	38
5.3 絶対容量	40
5.4 結果とまとめ	44

第6章	1対多の連合を行う連想記憶モデル	50
6.1	はじめに	50
6.2	モデル	51
6.2.1	相互想起部	52
6.2.2	自己想起部	54
6.3	外部入力	55
6.4	結果	56
6.4.1	クロストークノイズの分布	56
6.4.2	1対多の連合の想起過程	57
6.4.3	モデルの比較	61
6.4.4	臨界記憶率 α_r	70
6.5	まとめ	79
第7章	まとめと結論	82
7.1	連想記憶モデルの想起過程	82
7.2	1対多の連合を行なう連想記憶モデル	83
	謝辞	85
	参考文献	85
	関連発表論文	92
付録A	統計神経力学	94
A.1	自己想起モデルの巨視的状態方程式	94
A.1.1	巨視的状態方程式	94
A.1.2	式(A.12)の証明	97
A.1.3	時間相関 $q_{t+1,\tau}$	97
A.1.4	時間相関 $C_{t,\tau-1}$	99
付録B	HASPの絶対容量	101
B.1	条件の説明	101
付録C	1対多の連合を行う連想記憶モデル	103
C.1	巨視的状態方程式	103
C.1.1	相互想起部	103
C.1.2	自己想起部	104

目次

2.1	Graphical representation of Maxwell rule	12
2.2	Temporal evolutions of overlap	17
2.3	Basin of attraction	18
4.1	(m, r) -plane of sequential recall	24
4.2	(m, r) -plane of autoassociative recall	25
4.3	Graphical solution of the saddle point equations.	26
4.4	Non-monotonic output functions: F_{eco} and F_{pwl}	28
4.5	Basin of attraction (Non-monotonic function F_{eco})	30
4.6	Basin of attraction (Non-monotonic function F_{pwl})	30
4.7	Function $Y = U/(1 - U)$ and $Y = U$	31
4.8	Storage capacity for sparse coding	35
4.9	Basin of attraction: $b = 0, c = -1$	36
4.10	Basin of attraction: $b \rightarrow -1, c = 0$	36
4.11	Basin of attraction: $b = c \rightarrow -1$	37
5.1	Probability of occurrence of crosstalk noise	46
5.2	Probability of residual crosstalk noise	47
5.3	Probability of occurrence of crosstalk noise (HASP)	48
5.4	Probability of occurrence of crosstalk noise	49
6.1	A schematic diagram of the present model	53
6.2	Distribution of crosstalk noise	58
6.3	Overlap \tilde{m} and variance of crosstalk noise \tilde{z}_i^0 and z_i^0	59
6.4	Overlaps for 1st- and 4th-order theory and simulations	60
6.5	Critical similarity a_c of Model 1	63
6.6	Critical similarity a_c of Model 2	64
6.7	Critical similarity and loading rate for $\tilde{m} = 0.4$	65
6.8	Critical similarity and initial overlap for $\alpha = 0.09$ and $\beta = 1.0$	66
6.9	Critical similarity and loading rate for Model 1	67
6.10	Critical similarity and loading rate for Model 2	68
6.11	Critical similarity and dimension ratio	69

6.12	Critical loading rate α_r and \tilde{m}	72
6.13	Critical loading rate α_r and β	73
6.14	Critical loading rate for Model 1	74
6.15	Critical loading rate for Model 2	75
6.16	The critical similarity a_c and the critical loading rate α_r of Model 1 with one-to-five associations ($k^\mu = 5$)	76
6.17	The critical similarity a_c and the critical loading rate α_r of Model 2 with one-to-five associations ($k^\mu = 5$)	77
6.18	The critical loading rate α_r for various k^μ : One-to- k^μ associations are stored.	78

第1章 序論

1.1 連想記憶モデル

連想記憶はヒトの情報処理において重要な機能である。ヒトは過去のエピソードを記憶し、必要に応じて思い出すことにより行動している。このような連想記憶をニューラル・ネットワークでモデル化したものが連想記憶モデルと呼ばれる。本研究では、中でも相関学習を行なう連想記憶を取り上げる。相関学習は一度切りの学習であり、統計的な学習アルゴリズムのような繰り返し学習は行なわない。相関型連想記憶モデルは、1972年にそれぞれ Nakano [37] と Kohonen [33] と Anderson [9] によって提案された。連想記憶モデルの特性を知るには、記憶したパターンが安定であるかを調べるために、平衡状態について解析する必要がある。また、記憶したパターンが想起できるかを調べるために、ネットワークの状態が初期状態から記憶パターンへ引き込まれることを解析する必要がある。Amari [1] は記憶パターンの平衡状態の安定性だけでなく、ネットワークのダイナミクスについても解析している。

ダイナミクスの解析においては、離散時間同期型ダイナミクスを用いる。時刻を t で表し、ネットワークの状態を x_i^t で表すと、離散時間同期型ダイナミクスは、

$$x_i^{t+1} = F \left(\sum_{j \neq i}^N J_{ij} x_j^t + h_i \right). \quad (1.1)$$

で与えられる。ここで、 J_{ij} はニューロン間のシナプス結合であり、 h_i はしきい値である。ニューロンの内部状態を、

$$u_i = \sum_{j \neq i}^N J_{ij} x_j^t + h_i, \quad (1.2)$$

とおくと、式(1.1)は内部状態 u_i に応じてニューロンが興奮するかないかを決定していることを示している。この興奮を決定するのが出力関数 $F(\cdot)$ である。しばしば興奮状態を $+1$ で興奮していない状態を -1 で表現する。この場合には、出力関数 $F(\cdot)$ として単調な符号関数、

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} +1 & , u > 0 \\ -1 & , u \leq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

が用いられる。記憶するパターンを $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$ とし、シナプス結合 J_{ij} を、

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad (1.4)$$

で決める場合、パターンの自己相関を記憶しているのが自己相関型連想記憶モデルと呼ばれる。このモデルは自己想起モデルの一種である。本研究では自己想起モデルの中でも自己相関型連想記憶モデルを扱う。自己想起モデルでは、パターンの一部をネットワークに与えると、最も近い記憶パターンを想起することができる。すなわち、パターンの修正が行なわれる。これは連想記憶の引き込み現象であり、記憶の重要な特性である。自己想起モデルでは、1つのパターンから別のパターンを想起することはできないが、このような想起をするモデルに相互想起モデルがある。相互想起モデルはキーパターン η^μ からそれに対応する連合パターン ξ^μ を想起するモデルである。キーパターンと連合パターンの相互相関を記憶した相互相関型連想記憶モデルの場合のシナプス結合 J_{ij} は、

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \eta_j^\mu, \quad (1.5)$$

で与えられる。この他に、出力を再びキーパターンとして入力し、 $\xi^1 \rightarrow \xi^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi^p \rightarrow \xi^1$ のように、相互想起を繰り返し行なう場合は特に系列想起モデルと呼ばれる。

ニューロンのダイナミクスには、この他に非同期型ダイナミクスや連続時間ダイナミクスがある。ダイナミクスの違いにより、想起過程の特性は異なる。さらに、同期型と非同期型ダイナミクスにおいては、状態の更新を決定論的に行なうか、確率的に遷移するかによっても想起過程の特性は異なる。しばしば、確率的な状態遷移の場合を熱ゆらぎと考え、有限温度の場合と呼ぶことがある。また、決定論的な状態遷移の場合は温度 $T = 0$ の場合と呼ぶ。ダイナミクスが異なる場合、平衡状態の特性が等しくなるとは限らないが、自己想起モデルの記憶容量は同期型や非同期型に依らずに等しくなる [13]。

1.2 連想記憶モデルの理論

1982年に Hopfield [22] が非同期型ダイナミクスの自己想起型連想記憶モデルとスピン・システムとの類似性を指摘して以来、自己想起型連想記憶モデルの解析にスピン・システムで用いる手法が導入されている。特に、レプリカ法 [7] は平衡状態を解析することができ、全ての平衡状態が不安定になる転移点として記憶容量 α_c を 0.138 と求めることができる。レプリカ法は任意の単調な出力関数に対して、平衡

状態を解析することができる理論である。また、ShiinoとFukaiによって提案されたSCSNA (Self-Consistent Signal-to-Noise Analysis) は、出力関数が非単調である場合や結合が非対称な場合についても解析できる平衡状態の理論である [49]。出力関数が非単調である場合には、単調である場合よりも記憶容量が大きくなることが知られている [35, 36, 50]。さらに、クロストークノイズの分散が0となる超想起相の存在も知られている [51]。

一方、離散時間同期型連想記憶モデルのダイナミクスの解析においては、AmariとMaginu [4]が統計神経力学と呼ばれる理論を提案した。Amari-Maginuの理論は、クロストークノイズが平均0、分散 σ_t^2 のガウス分布に従うと仮定して、ネットワークの現在の状態を用いて次の状態を求める1次近似の理論である。そのため、時刻 $t=1$ までしか厳密に求められず、定性的な解析しか行えない。クロストークノイズがガウス分布に従うという仮定は、想起が成功する場合においては成り立つことが大規模な計算機シミュレーションにより確認されている [39, 45]。Amari-Maginuの理論では記憶容量が $\alpha_c = 0.16$ となり平衡状態の理論よりも大きくなってしまふ。また、引き込み領域についてもシミュレーション結果よりも大きくなるという欠点がある。Gardnerら [15]は経路積分的な方法を用いて任意の時刻 t までを巨視的状态変数で表すことに成功した。しかしながら、現実的には $t=2$ までしか解析的に求められておらず、長期的な振舞は t 重積分を数値計算で求める必要がある。

Okada [41]はAmari-Maginuの理論で考慮されていなかったネットワークの過去の状態の時間相関を採り入れることにより、高次近似の理論を提案した。高次近似の理論では、記憶容量は近似の次数 n を上げていくと平衡状態の理論より得られる結果と一致する。高次近似理論は、 $n=1$ の場合はAmari-Maginuの理論と等価であり、記憶容量は $\alpha_c = 0.16$ となる。 $n=2, 3, 4$ の場合はそれぞれ $\alpha_c = 0.142, 0.140, 0.139$ となり0.138に漸近する。また、引き込み領域もシミュレーションと良く一致するためほぼ定量的にダイナミクスを解析することができる。計算量は $O(t^2)$ であり、経路積分法と比べてはるかに少ない。これは近似方法の違いによるものであり、高次近似理論ではクロストークノイズの平均値の項を0とみなしている。経路積分法では、この項を求めており計算量が多くなっている。経路積分法で平均値の項を0とみなすと高次近似理論と等価になる [44]。

また、非同期型連想記憶モデルのダイナミクスの解析ではCoolenとSherringtonが解析を行なっている [11, 12]。Coolen-Sherrington理論 (CS理論) では、クロストークノイズの分布をガウス分布と仮定しない点の特徴である。このように、連想記憶モデルに関する理論は、平衡状態だけでなくダイナミクスも解析できるようになった。

1.3 本研究の目的

これまで、相関型連想記憶モデルの解析は平衡状態を中心に行われてきた。非単調出力関数を用いたり [35, 36, 14], スパース符号化 [7, 5] を行なうと記憶容量は増大する。また、シナプス結合にノイズを付加した場合やシナプス結合の切断を導入した場合における記憶容量も解析されている [52, 43]。Sompolinsky [52] はシナプス結合の切断はシナプス・ノイズに帰着できることを示した。統計神経力学 [4] が提案されて以来、ダイナミクスの定量的な解析が可能になった。高次近似理論を用いれば、得られる記憶容量は平衡状態の理論と同じ結果になる [41]。さらに、ネットワークの動的な振舞いを調べることができるため、引き込み領域を求めることができる。しかしながら、統計神経力学では、クロストークノイズに関して、平均が0で分散が σ_t のガウス分布に従うことを仮定している。想起が成功する場合はこの仮定は成り立つが [39, 45], 失敗する境界付近からは理論とシミュレーション結果の間に僅かなずれが現れる。そこで、第4章において統計神経力学によって、ダイナミクスがどれくらい良く表されているかを系列想起モデルと自己想起モデルの想起過程で検証する。また、平衡状態の理論から得られる不安定平衡点との関係を述べる [29]。さらに、第4.3節において理論と計算機シミュレーションによる結果との差異を明らかにするために、出力関数が非単調である場合について想起過程を調べる。非単調出力関数を用いた場合のダイナミクスの理論は Nishimori と Opris [38] によって導出されている。この理論は非単調関数の場合の Amari-Maginu 理論 ($n = 1$) に対応する。しかしながら、Nishimori-Opris 理論は任意の非単調関数で成り立つわけではない。実際、非単調関数の場合は高次近似の理論は破綻し、過去の時間相関を全て取り込んだ full-order の理論のみが有効である [29]。

第4.4節において、スパース符号化した場合における想起過程を議論する。連想記憶モデルの記憶容量は、出力関数に非単調関数を用いた場合以外にも記憶するパターンをスパース符号化した場合 [5, 7, 55, 58] に増大することが知られている。パターンの成分の ± 1 の割合を偏らせた場合は、バイアス・パターンと呼ばれる。バイアス・パターンの各成分が確率、

$$\text{Prob} [\xi_i^\mu = \pm 1] = \frac{1 \pm b}{2}, \quad (1.6)$$

で ± 1 の値をとる場合、シナプス結合 J_{ij} は、

$$J_{ij} = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu=1}^P (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b), \quad (1.7)$$

で定義される。ニューロン数 N に比べて非常に $+1$ の割合 (発火率 $f = (1+b)/2$)

が少ないパターンはスパース・パターンと呼ばれる。発火率 f を $f \rightarrow 0$ としたとき、記憶容量は $1/(f \log f)$ のオーダーで増大する。

連想記憶モデルのダイナミクスを解析することができるようになり、これまで解析できなかった連想記憶モデルの特性を調べることができるようになった。例えば、1対多の連合を行う連想記憶モデルは、1つのキー項目に対して複数の連合項目が対応するため、多重マッチの解消が必要である。多重マッチの解消は想起過程を議論する必要があり、平衡状態の理論では解析できない。そこで、これまで解析が困難であった1対多の連合を行う連想記憶モデルを取り上げ、ダイナミクスを含めた解析を行う。

連想記憶モデル HASP [18, 19] は1対多の連合を扱ったモデルであり、複数のキー項目に連合した項目の積集合や和集合などを検索することができる。HASP は相互想起型連想記憶回路と自己想起を行う相互抑制回路の二つの回路から構成されている。相互想起部では1対多の連合を記憶している。自己想起部には連合ベクトルが記憶され、1つの連合ベクトルを選択する機構が含まれている。また、相互想起部の出力にクロストークノイズが含まれている場合、自己想起部は引き込み現象により、それを除去する能力をもつ。これまでに、HASP の特性を利用して、足し算過程やプライミング効果などの記憶に関する認知心理学的現象が説明されている [21, 34]。そこで、第5章において連想記憶モデル HASP の絶対容量を求める [23, 24]。

第6章において1対多の連合を行なう連想記憶モデルを取り上げる。1対多の連合はヒトの連想記憶システムにおいて重要な特徴であり、ヒトは文脈を用いて適切な連想処理を行なっている。例えば、同音異義語は1つの読みに対して複数の語義があり、また、1つの語においても複数の意味を持つ。このような多義性の解消をヒトは脳の中で行なっている。従って、1対多の連合を行なう連想記憶モデルを取り上げることは、脳の情報処理を議論する上で重要な研究となる。そこで、1対多の連合を行なう連想記憶モデルを提案し、本モデルの想起過程を統計神経力学を用いて解析する [25, 26, 27, 28, 30]。1対多の連合を行った場合には、対応する連合パターンが複数あるため、その中の1つを想起するためには、文脈からの情報に相当する外部入力を導入する必要がある。本研究では、外部入力と想起パターンとの類似度によって、どのように多重マッチを解消できるかを定量的に議論する。

第2章 自己想起型連想記憶モデル

2.1 はじめに

Hopfield [22] が非同期の自己想起型連想記憶モデルとスピン・システムとの類似性を指摘して以来、自己想起型連想記憶モデルの解析が数多くなされてきた。特に、Amitら [7] が導入したレプリカ法は、平衡状態を解析することができ、その安定性から記憶容量を求めることができる。レプリカ法は任意の単調な出力関数に対して、平衡状態を解析することができる理論である。しかしながら、シナプス結合の対称性を仮定していたり、非単調な出力関数には適用できないという制限がある。Shiino と Fukai によって提案された SCSNA (Self-Consistent Signal-to-Noise Analysis)[49, 50] は、出力関数が非単調である場合や結合が非対称な場合についても解析できる平衡状態の理論である。

一方、連想記憶モデルのダイナミクスの理論では、Amari と Maginu [4] が統計神経力学と呼ばれる理論を提案し、Okada [41] によって改良された。Okada の理論はネットワークの状態の n ステップ前までの時間相関を考慮するため、高次近似理論と呼ばれる。Amari-Maginu 理論は 1 次近似理論 ($n = 1$) に相当する。近似の次数 n を上げていくと、記憶容量は平衡状態の理論より得られる結果と一致する。

ニューロンの動作方程式は、連続時間のものと離散時間のものがある。さらに、離散時間のものは状態の更新を同期して行うか、非同期に行うかによって異なる。

連続時間ダイナミクス

$$\frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_{j \neq i}^N J_{ij} x_j + h_i, \quad (2.1)$$

$$x_j = F(u_j). \quad (2.2)$$

非同期型ダイナミクス

$$x_i := F\left(\sum_{j \neq i}^N J_{ij} x_j + h_i\right). \quad (2.3)$$

同期型ダイナミクス

$$x_i^{t+1} = F \left(\sum_{j \neq i}^N J_{ij} x_j^t + h_i^t \right). \quad (2.4)$$

ここで、 x_i, u_i はニューロンの状態を表し、 J_{ij} はシナプス結合を表す。 $F(\cdot)$ は出力関数である。記号 $:=$ は右辺の値を左辺に代入することを示す。

これらの平衡状態は全て、

$$x_i = F \left(\sum_{j \neq i}^N J_{ij} x_j + h_i \right), \quad (2.5)$$

を満たす状態として定義することができる。平衡状態の理論では、この平衡状態を議論する。一方、統計神経力学では、式(2.4)で表せる離散時間同期のモデルを扱う。これは時間相関を考慮するために、離散時間同期である必要があるからである。そこで、以下の本論文のダイナミクスの議論においては、離散時間同期のモデルを扱う。

本章において、平衡状態の理論である SCSNA と統計神経力学について、そのモデルと手法について述べる。

2.2 自己想起モデル

自己想起モデルに記憶するベクトルを $\xi^\mu = (\xi_i^\mu)$ とする。 ξ^μ は N 次元のベクトルである。ベクトルの各成分は次の確率で ± 1 の値をとる。

$$\text{Prob} [\xi_i^\mu = \pm 1] = \frac{1 \pm b}{2}. \quad (2.6)$$

ここで、 b はパターンの偏り (bias) の程度を示す量である。 $b = 0$ のときは、 ξ_i^μ は確率 $1/2$ で ± 1 の値をとるので、ランダム・パターン (非バイアス・パターン) と呼ばれる。 $b \neq 0$ のときはバイアス・パターンと呼ばれ、さらに $N \rightarrow \infty$ で $b \rightarrow -1$ となるとき、スパース (sparse) パターンと呼ばれる。ここで、 $\xi_i^\mu = +1$ である割合を発火率、

$$f = \frac{1+b}{2}, \quad (2.7)$$

と定義する。

ニューロンの状態 x_i^{t+1} は次の動作方程式で与えられ、離散時間同期で状態が更新される。

$$x_i^{t+1} = F \left(\sum_{j \neq i}^N J_{ij} x_j^t + h^t \right). \quad (2.8)$$

ここで、 h^i はしきい値であり、出力関数 $F(\cdot)$ は任意である。シナプス結合 J_{ij} は共分散学習を用いて、

$$J_{ij} = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} (\xi_i^\mu - b)(\xi_j^\mu - b), \quad (2.9)$$

で与えられる。 α は記憶率と呼ばれ、 p 個のベクトルを記憶したとき、 $p = \alpha N$ で与えられる。ここでは、 $p \sim O(N)$ とする。

2.3 SCSNA

2.3.1 巨視的状态方程式

Shiino と Fukai によって提案された SCSNA (Self-Consistent Signal-to-Noise Analysis) [49, 50] は平衡状態の理論であり、バイアス・パターン ($b \neq 0$) や任意の出力関数 $F(\cdot)$ について解析することができる。本節では、SCSNA について概説する。SCSNA では内部状態を信号成分とノイズ成分に分けるだけでなく、実効的な自己結合を考慮する点が特徴である。

まず、各記憶ベクトル ξ^μ とネットワークの状態 x^t とのオーバラップ (方向余弦) を次のように定義する。

$$m^\mu = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{i=1}^N (\xi_i^\mu - b) x_i. \quad (2.10)$$

第1番目の記憶ベクトル ξ^1 を想起するベクトル (信号成分) とする。式 (2.5) より、 m^μ を使って内部状態を表すと、

$$\begin{aligned} x_i &= F \left(\frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b)(\xi_j^\mu - b) x_j + h \right) \\ &= F \left(\sum_{\mu=1}^{\alpha N} (\xi_i^\mu - b) m^\mu - \alpha x_i + h \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。ここで、 αx_i は自己結合に相当する項である。但し、 m^μ にも自己結合に相当する項が含まれるので、この項を考慮する必要がある。まず、両辺に x_i を含むので、これを x_i について形式的に解いて、

$$x_i = \mathcal{F} \left(\sum_{\mu=1}^{\alpha N} (\xi_i^\mu - b) m^\mu + h \right), \quad (2.12)$$

とおく. これを式(2.10)に代入すると, $\mathcal{F}(\cdot)$ は ξ_i^μ の関数であるので, $m^\mu (\mu \geq 2)$ に関して ξ_i^μ で展開すると,

$$\begin{aligned}
m^\mu &= \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{i=1}^N (\xi_i^\mu - b) \mathcal{F} \left(\sum_{\nu=1}^{\alpha N} (\xi_i^\nu - b) m^\nu + h \right) \\
&= \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{i=1}^N (\xi_i^\mu - b) \mathcal{F} \left(\sum_{\nu \neq \mu}^{\alpha N} (\xi_i^\nu - b) m^\nu + h \right) \\
&\quad + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{i=1}^N (\xi_i^\mu - b)^2 m^\mu \mathcal{F}' \left(\sum_{\nu \neq \mu}^{\alpha N} (\xi_i^\nu - b) m^\nu + h \right) \\
&= \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{i=1}^N (\xi_i^\mu - b) x_i^{(\mu)} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m^\mu \mathcal{F}' \left(\sum_{\nu \neq \mu}^{\alpha N} (\xi_i^\nu - b) m^\nu + h \right) \\
&= \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{i=1}^N (\xi_i^\mu - b) x_i^{(\mu)} + U m^\mu, \tag{2.13}
\end{aligned}$$

を得る. ここで,

$$U = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{F}' \left(\sum_{\nu \neq \mu}^{\alpha N} (\xi_i^\nu - b) m^\nu + h \right), \tag{2.14}$$

$$x_i^{(\mu)} = \mathcal{F} \left(\sum_{\nu \neq \mu}^{\alpha N} (\xi_i^\nu - b) m^\nu + h \right), \tag{2.15}$$

と定義する. $x_i^{(\mu)}$ と ξ_i^μ は独立になる. 式(2.13)より, m^μ に関して整理すると,

$$m^\mu = \frac{1}{N(1-b^2)(1-U)} \sum_{i=1}^N (\xi_i^\mu - b) x_i^{(\mu)}, \tag{2.16}$$

となる. 従って, 式(2.11)より, 信号成分とノイズ成分と実効的な自己結合の項に分離すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{j \neq i} J_{ij} x_j &= (\xi_i^1 - b) m^1 + \frac{1}{N(1-b^2)(1-U)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j=1}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^{(\mu)} \\
&\quad - \alpha x_i \\
&= (\xi_i^1 - b) m^1 + \frac{1}{N(1-b^2)(1-U)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^{(\mu)} \\
&\quad + \frac{\alpha U}{1-U} x_i \\
&= (\xi_i^1 - b) m^1 + z_i + \Gamma x_i, \tag{2.17}
\end{aligned}$$

となる。但し, z_i は,

$$z_i = \frac{1}{N(1-b^2)(1-U)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^{(\mu)} \quad (2.18)$$

である。また,

$$\Gamma = \frac{\alpha U}{1-U}, \quad (2.19)$$

であり, シナプス結合の自己結合が $J_{ii} = 0$ であっても, 実効的な自己結合 Γ があることを示す。この項はクロストークノイズの平均値に相当する項でもある。ここで, z_i は平均 0, 分散 σ^2 の正規分布に従う。分散 σ^2 は,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(z_i)^2] \\ &= \frac{1}{N^2(1-b^2)^2(1-U)^2} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b)^2 (\xi_j^\mu - b)^2 (x_j^{(\mu)})^2 \\ &= \frac{\alpha}{N(1-U)^2} \sum_{j \neq i}^N (x_j^{(\mu)})^2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

より,

$$\sigma^2 = \frac{\alpha q}{(1-U)^2}, \quad (2.21)$$

$$q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^{(\mu)})^2, \quad (2.22)$$

である。

以上より, SCSNA の巨視的状态方程式は,

$$m^1 = \frac{1}{1-b^2} \left\langle \int Dz (\xi - b) Y(\xi, z) \right\rangle_\xi, \quad (2.23)$$

$$q = \left\langle \int Dz Y(\xi, z)^2 \right\rangle_\xi, \quad (2.24)$$

$$U = \frac{1}{\sigma} \left\langle \int Dzz Y(\xi, z) \right\rangle_\xi, \quad (2.25)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha q}{(1-U)^2}, \quad (2.26)$$

となる。但し,

$$Y(\xi, z) = F((\xi - b)m^1 + \Gamma Y(\xi, z) + \sigma z + h), \quad (2.27)$$

である。また、

$$Dz = \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad (2.28)$$

と定義する。

SCSNAの巨視的状态方程式を解くためには、式(2.12)で表されるように関数 $\mathcal{F}(\cdot)$ を用いるので、式(2.27)の解を求める必要がある。レプリカ法では、自由エネルギーを最小にする解としてMaxwellルールを用いて解を求めることができる[48]。エネルギーを定義しないSCSNAにおいては恣意的ではあるが、Maxwellルールを用いて解を求めることになる[49, 50, 51, 14]。これはレプリカ法から得られる方程式とSCSNAの方程式が一致するからであり、これらの結果が一致しない場合は解を与える保証はない。

2.3.2 Maxwell ルール

式(2.27)の解を求めるためのMaxwellルールについて述べる。ここでは、具体的に $F(u) = \text{sgn}(u) - c$ である場合について考える。但し、 c は定数であり、関数 sgn をシフトする大きさを表す。その他の場合については、文献[51]を参照されたい。式(2.27)は、

$$Y(\xi, z) = \text{sgn}\left((\xi - b)m^1 + \Gamma Y(\xi, z) + \sigma z + h\right) - c, \quad (2.29)$$

となる。これより、式(2.29)を満たす解は、次の2線の交点で与えられる。

$$H = (\xi - b)m^1 + \sigma z + h + \Gamma Y = H_0 + \Gamma Y, \quad (2.30)$$

$$H = F^{-1}(Y). \quad (2.31)$$

これらの位置関係を図2.1に示す。 H_0 が非常に小さい場合や大きい場合では、解は1つであり、それぞれ $Y = -1 - c$ と $Y = +1 - c$ になる。ある範囲では式(2.29)の解が3個になることがわかる。このときは自由エネルギーを最小にする解が選ばれる。自由エネルギーの大きさは2線で囲まれた領域(斜線部分)に現れる。従って、 $H = \Gamma Y + c\Gamma$ のときを境界として、解が $Y = -1 - c$ から $Y = +1 - c$ へジャンプすることになる。すなわち、 $H_0 = c\Gamma$ となるとときに解が変化するので、式(2.29)の解は、

$$Y(\xi, z) = \text{sgn}\left((\xi - b)m^1 + \sigma z + h - c\Gamma\right) - c, \quad (2.32)$$

と表すことができる。

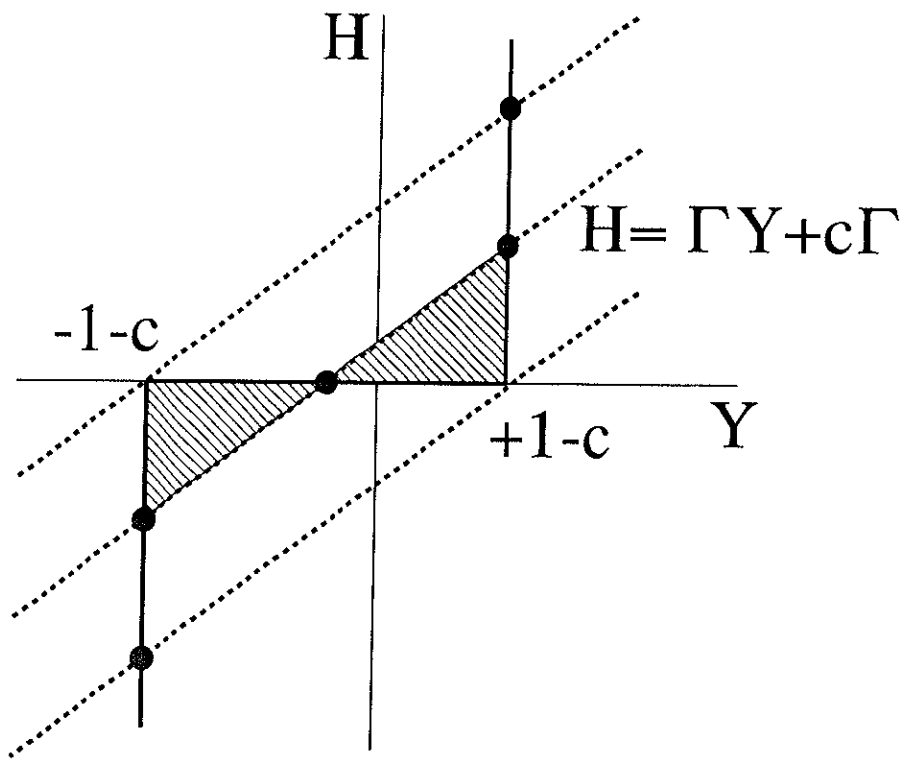


図 2.1: Maxwell rule : a graphical representation of Eq. (2.29) for solving Y .

2.4 ダイナミクスの解析

2.4.1 統計神経力学

自己想起モデルのダイナミクスを統計神経力学 [4, 41] を用いて解析する。ここでは、スパース符号化されたパターンを記憶した場合を考える。また、出力関数 $F(\cdot)$ は任意とする。まず、各記憶ベクトル ξ^μ と時刻 t のネットワークの状態 \mathbf{x}^t とのオーバーラップ (方向余弦) を次のように定義する。

$$m_i^\mu = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{i=1}^N (\xi_i^\mu - b) x_i^t. \quad (2.33)$$

想起するベクトルを第1番目の記憶ベクトルであるとする。式(2.8)と式(2.9)より、信号成分とノイズ成分に分けて、

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= F\left(\frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^t + h_i^t\right) \\ &= F\left((\xi_i^1 - b) m_i^1 + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^t + h_i^t\right) \\ &= F\left((\xi_i^1 - b) m_i^1 + z_i^t + h_i^t\right), \end{aligned} \quad (2.34)$$

となる。ここで、 z_i^t は想起すべきベクトル以外の寄与であり、クロストークノイズ、

$$z_i^t = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^t, \quad (2.35)$$

を表す。クロストークノイズ z_i^t は平均0、分散 σ_i^2 の正規分布に従うと仮定する。この仮定はネットワークが想起に成功した場合には成り立つが、失敗した場合には成り立たないことが知られている [39, 45]。

ネットワークの状態 x_j^{t+1} は ξ_i^μ の項を含んでいるので、 $F(\cdot)$ に関して x_j^{t+1} を展開すると、

$$\begin{aligned} x_j^{t+1} &= F\left((\xi_j^1 - b) m_i^1 + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\nu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\nu - b) (\xi_k^\nu - b) x_k^t + h_j^t\right) \\ &= F\left((\xi_j^1 - b) m_i^1 + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\nu \neq 1, \mu}^{\alpha N} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\nu - b) (\xi_k^\nu - b) x_k^t + h_j^t\right) \\ &\quad + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\mu - b) (\xi_k^\mu - b) x_k^t F'(\mu) \end{aligned}$$

$$= x_j^{t+1,(\mu)} + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\mu - b) (\xi_k^\mu - b) x_k^t F'(\mu), \quad (2.36)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} x_j^{t+1,(\mu)} &= F(\mu) \\ &= F \left((\xi_j^1 - b) m_i^1 + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\nu \neq 1, \mu}^{\alpha N} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\nu - b) (\xi_k^\nu - b) x_k^t + h_j^t \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

と定義する。 $x_j^{t+1,(\mu)}$ は ξ_j^μ と独立になる。式(2.35)より、時刻 $t+1$ のクロストークノイズの項 z_i^{t+1} を式(2.36)を用いて展開すると、

$$\begin{aligned} z_i^{t+1} &= \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^{t+1,(\mu)} \\ &\quad + \frac{1}{N^2(1-b^2)^2} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b)^2 (\xi_k^\mu - b) F'(\mu) \\ &= z_i^{t+1,(\mu)} + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{k \neq j}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_k^\mu - b) \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N F'(\mu) \\ &= z_i^{t+1,(\mu)} + U_{t+1} z_i^t, \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる。ここで、

$$z_i^{t+1,(\mu)} = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^{t+1,(\mu)}, \quad (2.39)$$

$$U_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N F'(\mu), \quad (2.40)$$

と定義する。

クロストークノイズの分散 σ_{t+1}^2 は、

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}^2 &= E \left[(z_i^{t+1})^2 \right] \\ &= E \left[(z_i^{t+1,(\mu)} + U_{t+1} z_i^t)^2 \right] \\ &= E \left[(z_i^{t+1,(\mu)})^2 \right] + U_{t+1}^2 \sigma_t^2 + E \left[z_i^{t+1,(\mu)} z_i^t \right] U_{t+1} \\ &= \alpha q_{t+1} + U_{t+1}^2 \sigma_t^2 + 2\alpha \sum_{r=t+1-n}^t q_{t+1, \tau} \prod_{k=\tau+1}^{t+1} U_k, \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる。ここで、

$$q_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^{t+1})^2, \quad (2.42)$$

$$q_{t+1,\tau} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{t+1} x_i^\tau, \quad (2.43)$$

と定義する。途中に用いた式の展開は付録第 A.1 章を参照されたい。
これより、自己想起モデルの巨視的状态方程式は、

$$m_{t+1} = \left\langle \int Dz (\xi - b) F((\xi - b) m_t + \sigma_t z + h^t) \right\rangle_\xi, \quad (2.44)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha q_{t+1} + U_{t+1}^2 \sigma_t^2 + 2\alpha \sum_{\tau=t-n+1}^t q_{t+1,\tau} \prod_{r=\tau+1}^{t+1} U_r, \quad (2.45)$$

$$U_{t+1} = \frac{1}{\sigma_t} \left\langle \int Dz z F((\xi - b) m_t + \sigma_t z + h^t) \right\rangle_\xi, \quad (2.46)$$

$$q_{t+1} = \left\langle \int Dz F((\xi - b) m_t + \sigma_t z + h^t)^2 \right\rangle_\xi, \quad (2.47)$$

で与えられる。但し、 $\langle \cdot \rangle_\xi$ は ξ に関する平均を表す。

ここで、記憶ベクトルの偏りを $b = 0$ とし、出力関数を $F(u) = \text{sgn}(u)$ とした場合の巨視的状态方程式を具体的に解いてみよう (式 (1.3) 参照)。これより、式 (2.8) と式 (2.9) は、

$$x_i^{t+1} = \text{sgn} \left(\sum_{j \neq i}^N J_{ij} x_j^t \right), \quad (2.48)$$

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad (2.49)$$

となる。この場合、式 (2.44)、式 (2.46)、式 (2.47) は解析的に解くことができ、

$$m_{t+1} = \text{erf} \left(\frac{m_t}{\sqrt{2}\sigma_t} \right), \quad (2.50)$$

$$U_{t+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_t^2}} \exp \left(-\frac{m_t^2}{2\sigma_t^2} \right), \quad (2.51)$$

$$q_{t+1} = 1, \quad (2.52)$$

となる。但し、関数 $\text{erf}(\cdot)$ は、

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad (2.53)$$

である。この結果は次の節と第 4 章で議論する。

2.4.2 想起過程と引き込み領域

導出した巨視的状态方程式と計算機シミュレーションを用いて、想起過程を調べる。図2.2は偏りを $b = 0$ とし、出力関数を符号関数 $F(u) = \text{sgn}(u)$ とした場合の4次近似理論から得られるオーバーラップ m_t^1 の時間変化を示す。初期オーバーラップ m_0^1 が大きい場合 ($m_0^1 > 0.2$) には、記憶ベクトルに引き込まれ、想起に成功する。一方、初期オーバーラップ m_0^1 が小さい場合 ($m_0^1 \leq 0.2$) には、一旦はオーバーラップが大きくなるが、その後は記憶ベクトルから遠ざかり想起に失敗することがわかる。すなわち、 $0.2 < m_0^1 < 0.3$ の間に想起の成否を決める境界値 m_c が存在する。

この臨界オーバーラップ m_c を様々な記憶率 α に対して求めたものが、図2.3である。下側の曲線は臨界オーバーラップ m_c を示し、上側の曲線は初期状態を $m_0^1 = 1.0$ よりはじめたときの平衡状態における平衡オーバーラップ m_∞^1 を示す。 m_∞^1 は平衡状態における記憶ベクトルの安定性を示す。ある記憶率のところ、臨界オーバーラップ m_c が m_∞^1 まで急激に変化する。このときの記憶率は記憶容量 α_c を与え、これ以上パターンを記憶すると、全ての記憶パターンが想起できなくなる。臨界オーバーラップ m_c と m_∞^1 で囲まれた領域を引き込み領域と言う。この引き込み領域内では、記憶パターンが全て想起できる。シミュレーション結果はニューロン数 $N = 10000$ で、10回平均をとったものである。エラー・バーは標準偏差を示す。これより、近似の次数が高くなるにつれてシミュレーション結果に漸近することがわかる。また、記憶容量 α_c も 1st-, 2nd-, 3rd-, 4th-, full-order の順に、 $\alpha_c = 0.160, 0.142, 0.140, 0.139, 0.138$ となる。理論から得られた引き込み領域がシミュレーション結果よりも α が大きなところでわずかに狭くなっているが、この点については第4.2節で議論する。

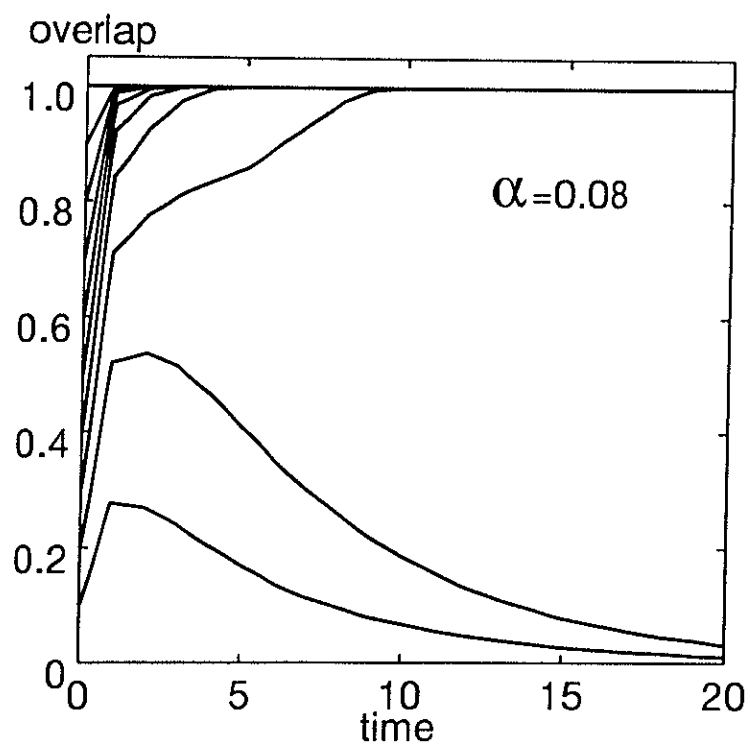


図 2.2: Temporal evolutions of overlap m^1 . Shown is a case where the loading rate is $\alpha = 0.08$.

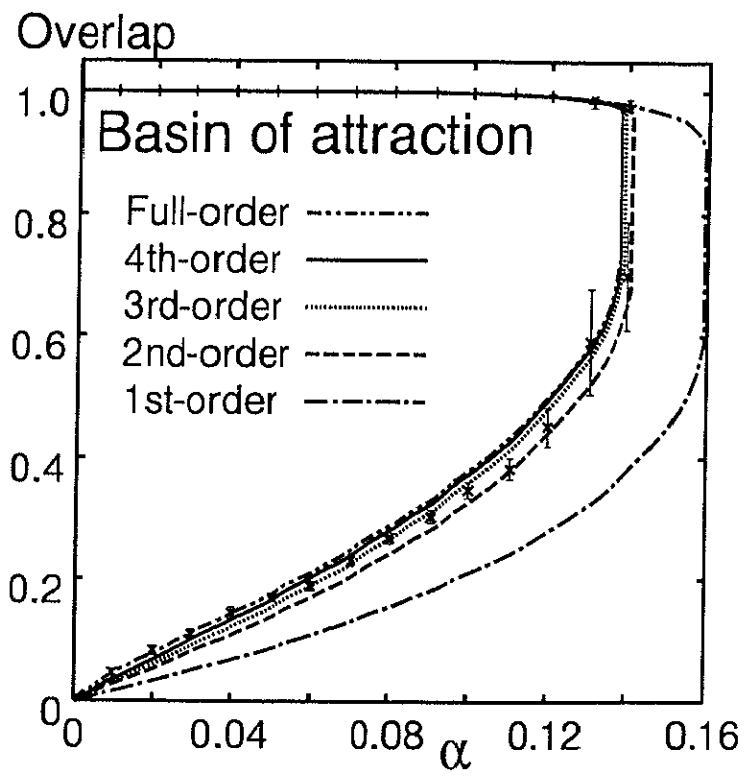


図 2.3: Basin of attraction. The lines indicate the results by 1st-,2nd-,3rd-,4th-,full-order theories.

第3章 相互想起型連想記憶モデル

3.1 はじめに

自己想起型連想記憶モデルでは、初期状態を与えるとその状態に最も近い記憶パターンが想起された。しかしながら、これだけでは連想記憶の機能は十分ではない。あるパターンから別のパターンを想起したいこともあるだろう。このような連想記憶は相互想起型連想記憶と呼ばれる。連想記憶モデルに与えるパターンをキー項目(キーベクトル)と呼び、それに対応して想起されるパターンを連合項目(連合ベクトル)と呼ぶ。

キー項目から連合項目を1ステップで想起するモデルとして、Willshawモデル[55, 56]がある。このモデルの解析はWillshawら[57, 58]やPalm[46]によって行なわれ、スパース符号化した場合に記憶できるパターンの情報量が最大となるパターンの偏りの大きさが求められている。また、連想記憶モデルHASP[18]はWillshawモデルの相互想起モデルを用いた連想記憶モデルであり、認知心理学的な現象を説明することができる[19, 21, 34]。HASPの絶対容量については第5章で述べる。また、HASPは1対多の連合を扱うことができるモデルであり、第6章においてHASP型の1対多の連合を行なう連想記憶モデルを取り上げる。

相互想起モデルでは、キー項目から想起された連合項目を再びキー項目として入力すると、系列想起を行なうことができる。系列想起モデルの解析では、平衡状態が存在しないため、ダイナミクスを考慮する必要がある。これまでに、統計神経力学を用いて、スパース符号化した場合における系列想起モデルの引き込み領域が求められている[32]。系列想起では、各パターンが無相関であるとき、各時刻間におけるネットワークの状態もほぼ無相関になるため、自己想起モデルで表れた実効的な自己結合を無視することができる。

3.2 系列想起モデルのダイナミクス

$p = \alpha N$ 個のパターンの系列を記憶し, $\xi^1 \rightarrow \xi^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi^p \rightarrow \xi^1$ の様に想起する場合を考える. 各パターンは式(2.6)を用いて作られ, シナプス結合は,

$$J_{ij} = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu=1}^p (\xi_i^{\mu+1} - b) (\xi_j^\mu - b), \quad (3.1)$$

で与えられる. 但し, $p+1$ 番目のパターンは 1 番目のパターンであるとする. 動作方程式は,

$$x_i^{t+1} = F \left(\sum_{j=1}^N J_{ij} x_j^t + h_i^t \right), \quad (3.2)$$

である. 時刻 t において第 ρ 番目のパターンが想起されているとすると, 式(2.33)より,

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= F \left(\frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \sum_{j=1}^N (\xi_i^{\mu+1} - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^t + h_i^t \right) \\ &= F \left(m_i^\rho \xi_i^\rho + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq \rho}^{\alpha N} \sum_{j=1}^N (\xi_i^{\mu+1} - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^t + h_i^t \right) \\ &= F \left(m_i^\rho \xi_i^\rho + z_i^t + h_i^t \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる. ここで, z_i^t はクロストークノイズ,

$$z_i^t = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq \rho}^{\alpha N} \sum_{j=1}^N (\xi_i^{\mu+1} - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^t, \quad (3.4)$$

である.

時刻 $t+1$ のクロストークノイズの項 z_i^{t+1} を展開すると,

$$\begin{aligned} z_i^{t+1} &= \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq \rho+1}^{\alpha N} \sum_{j=1}^N (\xi_i^{\mu+1} - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^{t+1,(\mu-1)} \\ &\quad + \frac{1}{N^2(1-b^2)^2} \sum_{\mu \neq \rho+1}^{\alpha N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (\xi_i^{\mu+1} - b) (\xi_j^\mu - b)^2 (\xi_k^{\mu-1} - b) x_k^t F'(\mu-1) \\ &= z_i^{t+1,(\mu-1)} + U_{t+1} \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq \rho}^{\alpha N} \sum_{k=1}^N (\xi_i^{\mu+2} - b) (\xi_k^\mu - b) x_k^t, \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる. ここで,

$$x_j^{t+1,(\mu-1)} = F(\mu-1)$$

$$= F \left(\frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\nu \neq \mu-1}^{\alpha N} \sum_{k=1}^N (\xi_j^{\nu+1} - b) (\xi_k^\nu - b) x_k^t + h_j^t \right), \quad (3.6)$$

$$U_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F'(\mu-1), \quad (3.7)$$

である。これより、クロストークノイズの分散 σ_{t+1}^2 は、

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}^2 &= E \left[\left(z_i^{t+1,(\mu-1)} + U_{t+1} \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq \rho}^{\alpha N} \sum_{k=1}^N (\xi_i^{\mu+2} - b) (\xi_k^\mu - b) x_k^t \right)^2 \right] \\ &= \alpha q_{t+1} + U_{t+1}^2 \sigma_t^2 \\ &\quad + 2U_{t+1} \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq \rho}^{\alpha N} \sum_{k=1}^N (\xi_i^{\mu+2} - b) (\xi_k^\mu - b) x_k^t z_i^{t+1,(\mu-1)}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。無相関なパターンの系列想起であるので、状態の時間相関は無視できる。従って、式(3.8)の最後の項は無視でき、分散は、

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha q_{t+1} + U_{t+1}^2 \sigma_t^2, \quad (3.9)$$

となる[32]。

以上より、系列想起モデルの巨視的状态方程式は、

$$m_{t+1}^{\rho+1} = \left\langle \int Dz (\xi^{\rho+1} - b) F \left((\xi^\rho - b) m_t^\rho + \sigma_t z + h^t \right) \right\rangle_{(\xi)}, \quad (3.10)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha q_{t+1} + U_{t+1}^2 \sigma_t^2 \quad (3.11)$$

$$U_{t+1} = \frac{1}{\sigma_t} \left\langle \int Dz z F \left((\xi^\rho - b) m_t^\rho + \sigma_t z + h^t \right) \right\rangle_{(\xi)}, \quad (3.12)$$

$$q_{t+1} = \left\langle \int Dz F \left((\xi^\rho - b) m_t^\rho + \sigma_t z + h^t \right)^2 \right\rangle_{(\xi)}, \quad (3.13)$$

で与えられる。但し、 $\langle \cdot \rangle_{(\xi)}$ は ξ^ρ に関する平均を表す。

ここで、記憶ベクトルの偏りを $b=0$ とし、出力関数を $F(u) = \text{sgn}(u)$ とした場合の巨視的状态方程式を具体的に解いてみよう。式(3.10)と式(3.12)は、

$$m_{t+1}^{\rho+1} = \text{erf} \left(\frac{m_t^\rho}{\sqrt{2}\sigma_t} \right), \quad (3.14)$$

$$U_{t+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_t^2}} \exp \left(-\frac{(m_t^\rho)^2}{2\sigma_t^2} \right), \quad (3.15)$$

$$q_{t+1} = 1, \quad (3.16)$$

となる。この結果は次章で議論する。

3.3 定常状態

自己想起型連想記憶モデルの場合には、状態の更新が行なわれない平衡状態が存在する。一方、系列想起モデルの場合には、想起するパターンが時刻毎に異なるため平衡状態は存在しない。しかしながら、式(3.10)～式(3.13)で表されるように、巨視的方程式は自己想起モデルのものと同様に表される。従って、巨視的変数から想起するパターンのインデックス ρ をとることによって、巨視的変数を用いて系列想起モデルの定常状態を議論することができる。すなわち、 $m^\rho, \rho = 1, 2, \dots, p$ を m で表す。

定常状態の方程式は、第2.3節で述べた SCSNA を用いると、

$$m = \frac{1}{1-b^2} \left\langle \int Dz (\xi - b) Y(\xi, z) \right\rangle_\xi, \quad (3.17)$$

$$q = \left\langle \int Dz Y(\xi, z)^2 \right\rangle_\xi, \quad (3.18)$$

$$U = \frac{1}{\sigma} \left\langle \int Dz z Y(\xi, z) \right\rangle_\xi, \quad (3.19)$$

$$\sigma^2 = \alpha q + U^2 \sigma^2 = \frac{\alpha q}{1-U^2}, \quad (3.20)$$

となる。但し、

$$Y(\xi, z) = F((\xi - b)m + \sigma z + h), \quad (3.21)$$

である。ここで、前節で述べたように、系列想起の場合には時刻毎に想起するパターンが異なるため、ネットワークの状態の時間相関を無視することができることに注意する。従って、式(3.21)において、実効的な自己結合の項(Γ 項)がなくなる。この結果は第4章で議論する。

第4章 連想記憶モデルのダイナミクスの解析

4.1 はじめに

第2.4節において巨視的状态方程式を導出し、オーバラップ m_t^1 の時間変化を調べた。しかしながら、巨視的状态方程式には他にもオーダパラメータがあり、これらを用いて状態遷移を調べることもできる。ここでは、オーバラップ m_t^1 と分散 $\sigma_t^2 = \alpha r_t$ を用いて、ダイナミクスを調べることにする。

On-line 学習では、ネットワークの状態が不安定平衡点に近付いた後に、安定平衡点に向かう現象がしばしばみられる。ここでは、相関型連想記憶モデルの想起ダイナミクスを調べ、相関学習においても不安定平衡点に近づく性質が現れるかを系列想起及び自己想起の場合について検証した。連想記憶モデルの想起ダイナミクスは統計神経力学を用いて、いくつかのオーダパラメータで記述することができる。そこで、オーバラップ m_t^1 とクロストークノイズの分散¹ r_t を用いて、ネットワークの状態遷移を調べた。

はじめに単調な出力関数を用いた自己想起モデルと系列想起モデルを調べ、ネットワークの状態がどのように遷移するかを議論する。次に、非単調な出力関数を用いた自己想起モデルを取り上げ、統計神経力学の有効性を検証する。本章の最後で、スパース符号化した場合の想起過程を議論する。

4.2 単調出力関数の場合

想起過程を議論するために、離散時間同期ダイナミクスの場合を考える。また、各パターンの偏りは $b=0$ とする。出力関数は符号関数 $\text{sgn}(\cdot)$ とする。このときの系列想起モデルの巨視的状态方程式は式 (3.14) ~ 式 (3.16) であり、自己想起モデルの巨視的状态方程式は式 (2.50) ~ 式 (2.52) である。

図 4.1 と図 4.2 にそれぞれ系列想起モデルと自己想起モデルの想起過程を示す。ただし、系列想起モデルの場合では時刻によって異なるベクトルを想起しているため、異なる m_t^1 を同一平面上に描いていることに注意する。横軸はオーバラップ m であ

¹厳密には、分散は $\sigma_t^2 = \alpha r_t$ であり、 r_t は α で正規化した分散を表す。

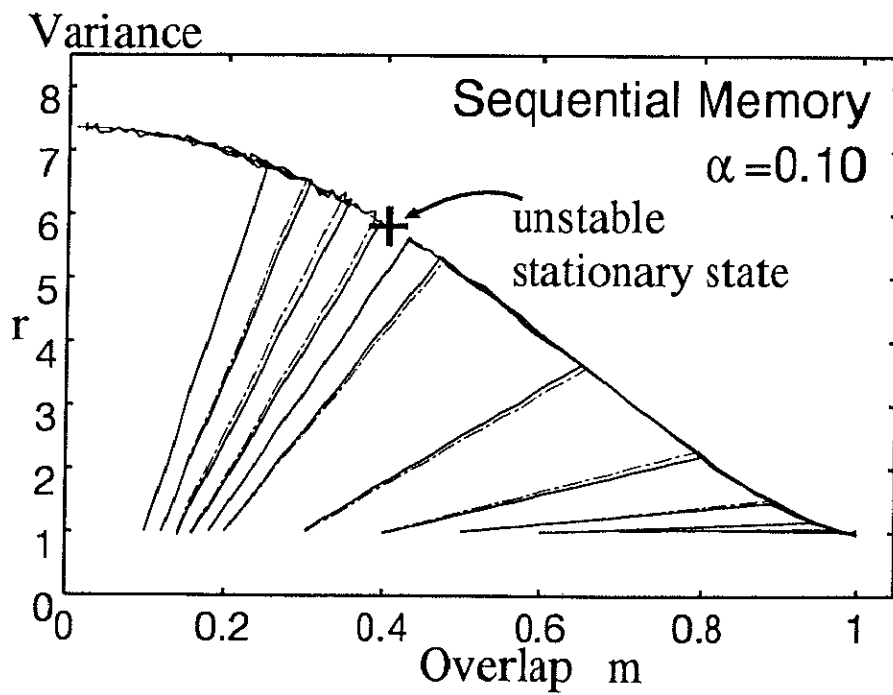


図 4.1: Recall process in the sequential recall. The loading rate is $\alpha = 0.10$. Solid lines and dotted lines show the results obtained by the statistical neurodynamics and the computer simulations, respectively. The unstable stationary state is from Eq.(4.4).

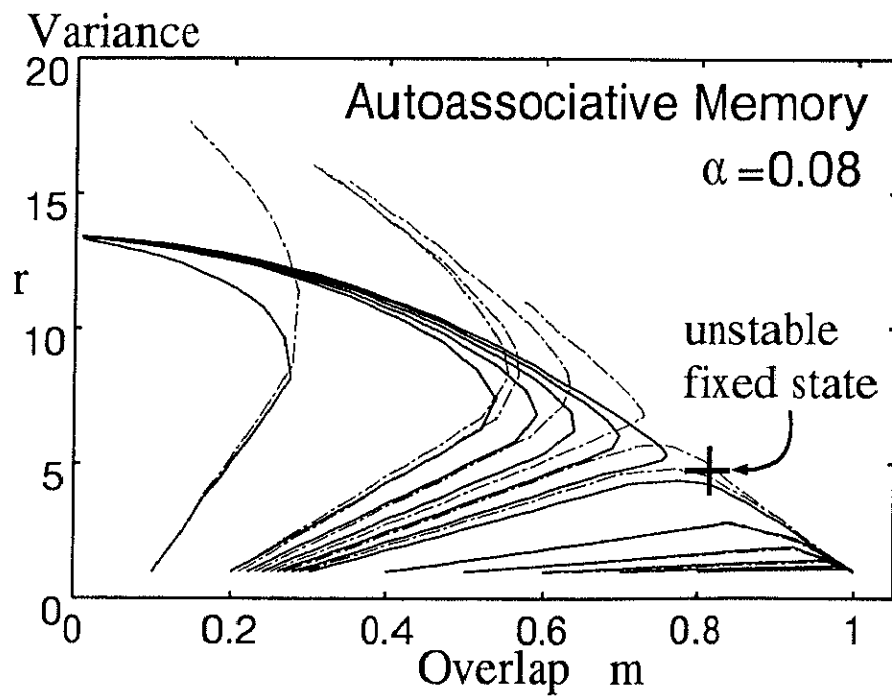


図 4.2: Recall process in the autoassociative recall. The loading rate is $\alpha = 0.10$. Solid lines and dotted lines show the results obtained by the statistical neurodynamics and the computer simulations, respectively. The unstable fixed state is from Eq.(4.8).

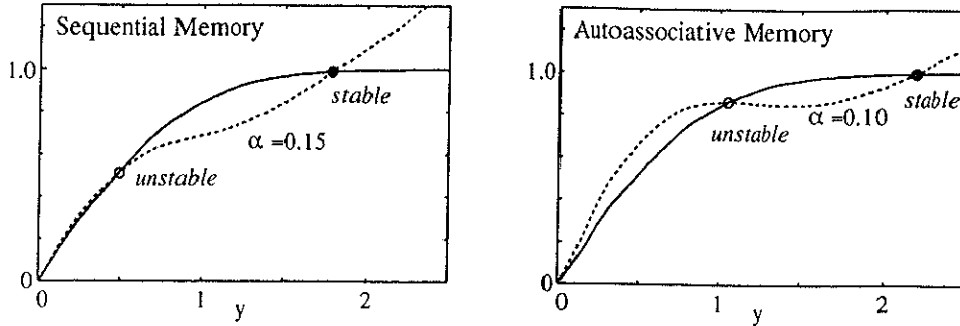


図 4.3: Graphical solution of the saddle point equations.

り、縦軸はクロストークノイズの分散 r を示す。実線は統計神経力学による結果であり、1点鎖線はシミュレーション結果 ($N = 50000$) を表す。系列想起モデルの場合には、常に想起するパターンが変化するため、平衡状態は存在しない。しかしながら、自己想起モデルと同様に考えると、 (m, r) 平面で表される状態空間に定常状態を考えることができる。図 4.1 より、系列想起の場合では不安定な定常状態と安定な定常状態が存在し、不安定な定常状態を境界として、想起が成功するか失敗するかが決定されることがわかる。

系列想起モデルの定常状態の方程式を自己想起モデルと同様に平衡状態の理論 [7, 17] より求めると、第 3.3 節で示した方程式で表される。出力関数が $\text{sgn}(\cdot)$ であり、ランダム・パターンを用いる場合の定常状態の方程式は、

$$m = \text{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2\alpha r}}\right), \quad (4.1)$$

$$U = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha r}} \exp\left(-\frac{m^2}{2\alpha r}\right), \quad (4.2)$$

$$r = 1 + U^2 r = \frac{1}{1 - U^2}, \quad (4.3)$$

となる。これより、 $y = m/\sqrt{2\alpha r}$ と置くと、

$$y\sqrt{2\alpha + \frac{4}{\pi}\exp(-2y^2)} = \text{erf}(y), \quad (4.4)$$

となり、この方程式を満たす解を求めることができる。式 (4.4) は記憶容量を越えない範囲で $m \neq 0$ の解を 2 つ持ち、1 つは想起状態を表す $m \simeq 1$ の安定解であり、もう 1 つは不安定解である (図 4.3 参照)。得られた不安定解を図 4.1 に十字で示した。これより、鞍点方程式の不安定解はこの不安定な定常状態に一致することがわかる。

図 4.2 より, 自己想起モデルの場合においても, 不安定平衡点が存在し, この点を境に想起が成功するか失敗するかが決定されている. 自己想起モデルの鞍点方程式は,

$$m = \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2\alpha r}}\right), \quad (4.5)$$

$$U = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha r}} \exp\left(-\frac{m^2}{2\alpha r}\right), \quad (4.6)$$

$$\tau = \frac{1}{(1-U)^2}, \quad (4.7)$$

で与えられる [7, 17]. これより, $y = m/\sqrt{2\alpha r}$ と置くと,

$$y \left\{ \sqrt{2\alpha} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2) \right\} = \operatorname{erf}(y), \quad (4.8)$$

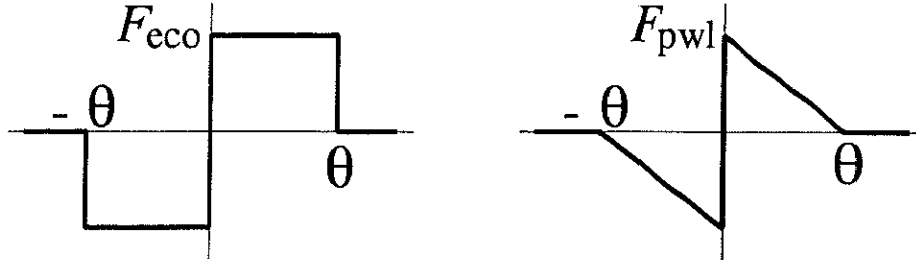
となり, この方程式を満たす解を求めることができる. 式 (4.8) は記憶容量 $\alpha < 0.138$ の範囲で $m \neq 0$ の解を 2 つ持ち, 1 つは想起状態を表す $m \simeq 1$ の安定解であり, もう 1 つは不安定解である (図 4.3 参照). 得られた不安定解を図 4.2 に十字で示した. しかしながら, 系列想起モデルの場合と異なり, 自己想起モデルの場合では不安定平衡点と不安定解は厳密には一致していない. これは統計神経力学におけるクロストークノイズの近似の扱いが原因であると考えられる. しかしながら, 近似的には不安定平衡点に近付いた後に, 安定平衡点へ向かうことがわかる. シミュレーション結果と比較すると, 理論では引き込み領域がわずかに小さくなっている (図 2.3 参照).

4.3 非単調出力関数の場合

自己想起モデルの場合において, 理論による引き込み領域がシミュレーション結果よりも小さくなっていることが示された (図 2.3, 図 4.2 参照). この様な現象が出力関数を変えた場合においても現れるか, 出力関数を非単調関数にした場合を用いて理論の近似能力を検討した. 非単調関数を用いると記憶容量が増加することが知られている [35, 36, 14]. 今回用いた非単調関数は,

$$F_{\text{eco}}(u) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(u) & , |u| < \theta \\ 0 & , |u| \geq \theta \end{cases}, \quad (4.9)$$

$$F_{\text{pwl}}(u) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(u) - u/\theta & , |u| < \theta \\ 0 & , |u| \geq \theta \end{cases}, \quad (4.10)$$


 図 4.4: Non-monotonic output functions: F_{eco} and F_{pwl}

の2種類である [14]. どちらも $\theta \rightarrow \infty$ で sgn 関数に等しくなる.

非単調関数の場合の巨視的状态方程式は式 (2.44) ~ 式 (2.47) と同じである. 出力関数 $F(\cdot)$ を具体的に代入して求めると以下の方程式を得る.

• $F_{\text{eco}}(u)$ の場合 :

$$m_{t+1} = \text{erf}\left(\frac{m_t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) + \frac{1}{2} \left\{ \text{erf}\left(\frac{\theta - m_t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) - \text{erf}\left(\frac{\theta + m_t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) \right\}, \quad (4.11)$$

$$U_{t+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \left\{ 2 \exp\left(-\frac{m_t^2}{2\sigma_t^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\theta - m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\theta + m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \right\}, \quad (4.12)$$

$$q_{t+1} = \frac{1}{2} \left\{ \text{erf}\left(\frac{\theta - m_t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) + \text{erf}\left(\frac{\theta + m_t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) \right\}. \quad (4.13)$$

• $F_{\text{pwl}}(u)$ の場合 : 式 (4.11) ~ 式 (4.13) の $F_{\text{eco}}(u)$ の場合の $m_{t+1}, U_{t+1}, q_{t+1}$ をそれぞれ $m_{\text{eco}}, U_{\text{eco}}, q_{\text{eco}}$ と置く.

$$m_{t+1} = m_{\text{eco}} - \frac{m}{2\theta} \left\{ \text{erf}\left(\frac{\theta - m_t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) + \text{erf}\left(\frac{\theta + m_t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) \right\} + \frac{\sigma_t}{\sqrt{2\pi}\theta} \left\{ \exp\left(-\frac{(\theta - m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\theta + m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \right\}, \quad (4.14)$$

$$U_{t+1} = U_{\text{eco}} - \frac{1}{2\theta} \left\{ \text{erf}\left(\frac{\theta - m_t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) + \text{erf}\left(\frac{\theta + m_t}{\sqrt{2}\sigma_t}\right) \right\} \quad (4.15)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} \left\{ \exp\left(-\frac{(\theta - m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\theta + m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \right\}, \quad (4.16)$$

$$q_{t+1} = q_{\text{eco}} - \frac{2\sigma_t}{\sqrt{2\pi}\theta} \left\{ 2 \exp\left(-\frac{m_t^2}{2\sigma_t^2}\right) - \exp\left(-\frac{(\theta - m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \exp\left(-\frac{(\theta + m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)\left\} - \frac{\sigma_t}{\sqrt{2\pi}\theta^2} \left\{ (\theta + m_t) \exp\left(-\frac{(\theta - m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \right. \\
& \left. + (\theta - m_t) \exp\left(-\frac{(\theta + m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \right\}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

非単調関数の場合では、1次近似理論は Nishimori-Opris の理論 [38] に一致する。しかしながら、パラメータ θ によっては理論が破綻する。これは Nishimori-Opris の理論では、 $q_{t+1} = 1$ であることを仮定しているからである。用いた非単調関数 $F_{\text{eco}}(u)$ と $F_{\text{pwl}}(u)$ の場合では、 $|u| > \theta$ の範囲で0となるので、 $q_{t+1} < 1$ となることがある。また、巨視的変数 U_{t+1} も非単調性より負の値をとる。そのため、 θ によって、式 (2.45) のクロストークノイズの分散 σ_{t+1}^2 が負になることがある。2次以上の近似理論では近似による打ち切りにより破綻する。従って、打ち切りを行わない full-order の理論のみが成り立つ。

図 4.5 と図 4.6 に非単調関数を用いたモデルの引き込み領域を示す。計算機シミュレーションに用いたニューロン数は $N = 10000$ である。また、理論の値は full-order の理論と1次近似理論の結果である。ただし、1次近似理論が破綻しない θ を選んである。full-order の理論から得られる記憶容量は $F_{\text{eco}}(u)$ の場合、 $\theta = 1.6$ のとき $\alpha_c = 0.222$ であり、 $F_{\text{pwl}}(u)$ の場合、 $\theta = 2.5$ のとき $\alpha_c = 0.252$ である。これより、非単調関数の場合においても、 α が小さな範囲では非常に良く理論と合うが、 α が大きな範囲では差が見られることが分かる。ずれが α に依存することから、この原因はクロストークノイズの平均値の項 ($\sim \alpha U$) にあると思われる。

非単調出力関数の場合では、1次近似理論でも記憶容量の良い近似値を与えていることがわかる。これは式 (2.45) のクロストークノイズの分散 σ_{t+1}^2 の第3項以降と関係がある。分散 σ^2 は、平衡状態の理論では、

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\alpha q}{(1-U)^2} \\
&= \alpha q + U^2 \sigma^2 + 2q \frac{U}{1-U}, \tag{4.18}
\end{aligned}$$

である。一方、1次近似理論では、

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha q_{t+1} + U_{t+1}^2 \sigma_t^2 + 2\alpha q_{t+1,i} U_{t+1}, \tag{4.19}$$

である。ここで、

$$\frac{U}{1-U} = U + U^2 + U^3 + \dots, \tag{4.20}$$

であるから、1次近似理論は第1項までを採り入れていることがわかる。さらに、非

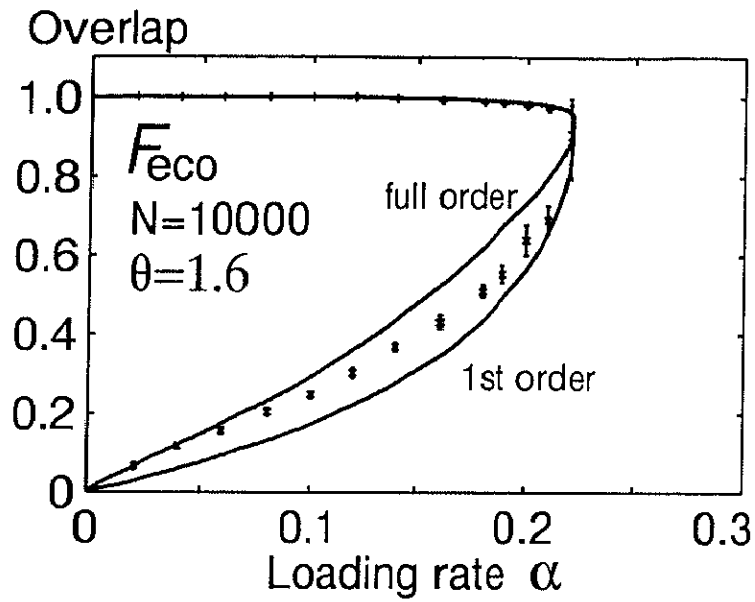


図 4.5: Basin of attraction for non-monotonic output function F_{eco} .

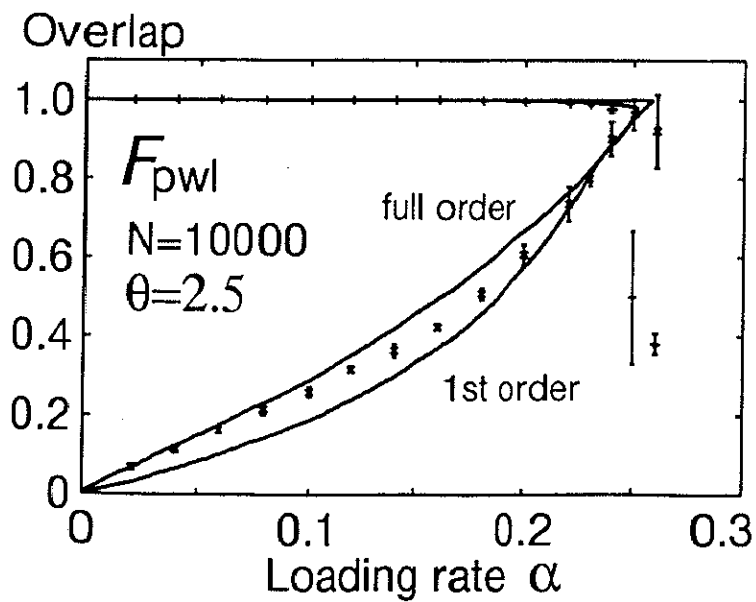


図 4.6: Basin of attraction for non-monotonic output function F_{pwl} .

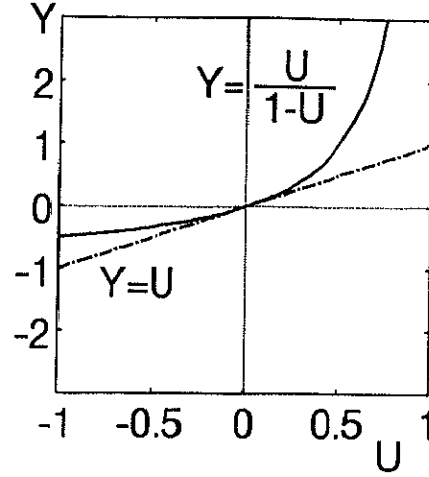


図 4.7: Function $Y = U/(1 - U)$ and $Y = U$.

単調性より U_{t+1} が負の値をとることを考えると、 $U < 0$ では、

$$\frac{U}{1-U} \approx U, \quad (4.21)$$

は良い近似になっていることがわかる (図 4.7)。同様に単調関数の場合は $U > 0$ であるので、高次近似を考慮する必要があることがわかる。

4.4 スパース符号化

これまでは、パターンの偏りが $b = 0$ である場合を議論してきた。本節では、スパース符号化したパターンの場合について議論する。スパース・パターンとは、ニューロンの数 N に対して、パターンの発火率 f が非常に小さい場合を指す。平衡状態の理論により、スパース符号化したパターンを記憶させた場合には、記憶容量が飛躍的に増大することが知られている (図 4.8 参照) [7]。ただし、1つのパターンに含まれる情報量はスパース符号化すると減少してしまう。スパース符号化して、記憶パターン数が増えても、記憶総情報量が減ってしまっはあまり有効であるとは言えなくなってしまう。しかしながら、スパース符号化した場合においても総情報量が増加することが示された。また、総情報量が最大となるパターンの偏りも求められている [46, 55, 58]。

スパース符号化の場合のダイナミクスは、Amari [5] によって検討された。Amari はパターンが安定して想起されるためには、各時刻における状態の活動度が記憶パ

ターンの活動度と等しく保たれる必要があることを示した。スパース符号化した場合においては、活性 $\xi_i^\mu = +1$ である割合が非常に少ないため、想起過程において +1 の数(発火率)が少しでも変化すると、記憶パターンに対するネットワークの発火率の変動の比が大きくなってしまふからである。一方、パターンの偏りが $b=0$ である場合には、 $\xi_i^\mu = +1$ と $\xi_i^\mu = -1$ が同数あるため、発火率が変動しても記憶パターンに対する発火率の変動の比は大きくなり安定的である。これまでに、発火率を一定にする制限をつけた場合 [47] が議論されたが、ニューロンの状態を逐次観測し、発火率を一定にすることは現実的ではない。この他に、シナプス結合に側抑制を設けた場合が議論されている [10, 49, 47]。この場合では、側抑制によるフィードバックがかかり、活動度が一定に保たれるように働く。

統計神経力学をスパース符号化の場合に適用すると、理論と計算機シミュレーションにずれがみられ、理論が定性的にしか解析できないことが示唆された [47]。そこで、スパース符号化した場合における統計神経力学の能力を検証する。ここでは、動作方程式は式 (2.8) で表され、シナプス結合は式 (2.9) とほぼ同様であるが、側抑制の項を導入し、

$$J_{ij} = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) - \frac{g}{N}, \quad (4.22)$$

で表される場合を取り上げる。各記憶パターン ξ^μ はスパース符号化されているので、出力関数には符号関数をシフトした関数 F_{shift} ,

$$F_{\text{shift}}(u) = \text{sgn}(u) - c, \quad (4.23)$$

を用いる。ここで、 c は sgn 関数をシフトする大きさを表す。クロストークノイズの分散を最小にするシフトの大きさは $c=b$ のときである [40]。理論の検証を行なうために、次の3つの場合について検討を行なう。

1. ランダム・パターン ($b=0$) で、出力関数をシフトさせる場合 ($c=-1$)。
2. スパース・パターン ($b \rightarrow -1$) で、出力関数をシフトさせない場合 ($c=0$)。
3. スパース・パターン ($b \rightarrow -1$) で、出力関数をシフトさせる場合 ($c=b$)。

ただし、記憶容量が大きくなるように、しきい値 h_i^c や側抑制の項の g はそれぞれ適切に設定する。

図 4.9 ~ 図 4.11 にそれぞれの場合の引き込み領域を示す。曲線は理論による結果を示し、エラーバー付の点は計算機シミュレーションによる結果を示す。理論はそれぞれ 1 次, 2 次, 3 次, 4 次近似の理論と full-order の理論である。計算機シミュレーションはニューロン数が $N=10000$ であり、20 回の平均を表す。各パターンの

成分の値 ξ_i^a は式(2.6)を用いて確率的に決める必要がある。そのため、各パターンの偏りは正確に b にはならない。ここで、正確に各パターンの偏りが b となるようにパターンを生成することも可能であるが、この場合には理論と計算機シミュレーションが一致しない [47]。

図 4.9 は 1. の場合である。これは記憶パターンに 0 と 1 の 2 値を用いた場合と等価である。出力関数が sgn 関数である場合 (図 2.3) と異なる点は、出力関数が非奇関数になったことである。図 4.9 より、理論と計算機シミュレーションは非常によく一致する。記憶容量は SCSNA と full-order の近似理論より求めた値はいずれも $\alpha_c = 0.069$ である。従って、統計神経力学が非奇関数の場合にも適用でき、定量的に解析することができることがわかる。

図 4.10 は 2. の場合であり、出力関数に sgn 関数を用い、記憶パターンのみをスパース符号化した場合である。用いた記憶パターンは偏りの大きさを $b = -0.8$ とした。ここでは、発火率を一定にするために側抑制を用いた。側抑制を用いない場合では、発火率の変動するために想起が失敗し、記憶容量はかなり小さくなってしまう。側抑制の大きさは $g = 3.0$ であり、しきい値は常に $h_i^i = b + bg = -3.2$ とした。記憶容量は SCSNA と full-order の近似理論より求めた値はいずれも $\alpha_c = 0.161$ である。

図 4.11 は 3. の場合であり、スパース符号化したパターンを用い、出力関数もシフトした場合である。シフトの大きさはパターンの偏りと等しく、 $b = c = -0.8$ とした。また、しきい値は記憶容量が大きくなるように選んだ ($h_i^i = -0.98$)。SCSNA より求めた記憶容量は $\alpha_c = 0.454$ であるが、full-order の近似理論より求めた値は $\alpha_c = 0.480$ である。また、図 4.10 と図 4.11 より、記憶容量に近いところで臨界オーバーラップ m_c にずれがみられる。このずれは α が大きな領域でみられるので、第 4.2 節や第 4.3 節で議論したように、クロストークノイズの平均値の項が原因であると考えられる。

SCSNA では式(2.27)で表されるように、統計神経力学では無視している実効的な自己結合の項 ΓY を考慮している。Maxwell ルールを考慮に入れて、実効的な出力関数 F を求めると、式(2.32)のようになる。従って、実効的な出力関数 F はシフトの大きさ c と Γ に依存する。1. の場合では、記憶容量 α_c が小さくなったため、 Γ の値も小さくなり、自己結合の項の影響がでなかったと考えられる。また、2. の場合では、シフトの大きさが $c = 0$ であるため、自己結合の項の影響がでなかったと考えられる。一方、3. の場合では、シフトの大きさが $c \neq 0$ であり、記憶容量 α_c も非常に大きくなったため、自己結合の項の影響が大きく現れたと考えられる。

ここで、SCSNA からの結果と統計神経力学からの結果の差が、実効的な自己結合

の項であることを検証する。統計神経力学では、自己結合の項を無視している。それゆえに、SCSNAにおいて $\Gamma = 0$ とおけば、統計神経力学からの結果に等しくなるはずである。そこで、SCSNAで $\Gamma = 0$ としたときの記憶容量と統計神経力学から求めた記憶容量を比較する。図4.8は統計神経力学とSCSNAで Γ 項を考慮する場合と $\Gamma = 0$ とした場合の記憶容量を示す。偏り、シフトの大きさやしきい値は全て等しくした($b = c = h$)。側抑制は $g = 0$ である。これより、統計神経力学とSCSNAで $\Gamma = 0$ としたときの記憶容量はかなり良く一致し、 Γ 項を考慮したSCSNAとの差異が実効的な自己結合の項の影響であることが確認できた。

4.5 まとめ

相関型連想記憶モデルのダイナミクスを統計神経力学を用いて解析した。想起過程を調べるために、 (m, r) 平面における状態遷移を調べた。その結果、不安定平衡点や不安定定常状態を境界として想起の成否が決定されることがわかった。系列想起では、平衡状態の理論と統計神経力学より得られる不安定定常状態は一致するが、自己想起の場合ではわずかにずれることがわかった。これはクロストークノイズの時間相関が原因であることが考えられる。なぜならば、系列想起では各時刻毎に異なる記憶ベクトルが想起されるため、状態の時間相関を無視することができるからである。一方、自己想起の場合では時間相関を考慮しなければならない。

統計神経力学は非単調出力関数の場合やスパース符号化した場合においても、想起過程をほぼ定量的に解析できることがわかった。但し、記憶率 α が大きな範囲で、引き込み領域における臨界オーバーラップ m_c が理論とシミュレーション結果でわずかにずれることが確認された。このずれが α に依存することから、統計神経力学において考慮していないクロストークノイズの平均値の項(実効的な自己結合の項)が原因であると考えられる。また、スパース符号化した場合においては、平衡状態の理論(SCSNA)から得られる記憶容量と統計神経力学より得られる記憶容量に差がみられた。SCSNAにおいて実効的な自己結合の項 Γ を0とおくことにより、統計神経力学の結果に良く一致することから、記憶容量の差が実効的な自己結合の項が原因であることが確認できた。今後、実効的な自己結合の項を採り入れることが必要である。

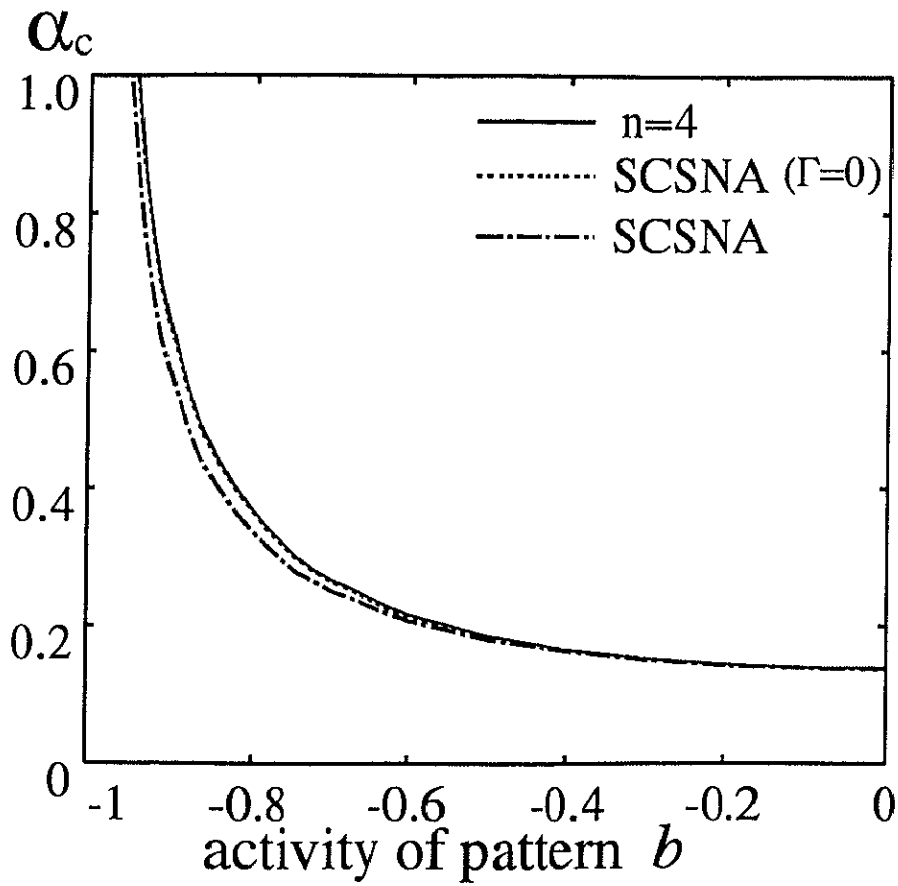


図 4.8: Activity of pattern b and storage capacity α_c in the case of $b = c = h, g = 0.0$. When patterns are sparsely encoded ($b \rightarrow -1$), the storage capacity α_c becomes large. The theoretical results were obtained using the 4th-order theory and the SCSNA where $\Gamma \neq 0$ and $\Gamma = 0$.

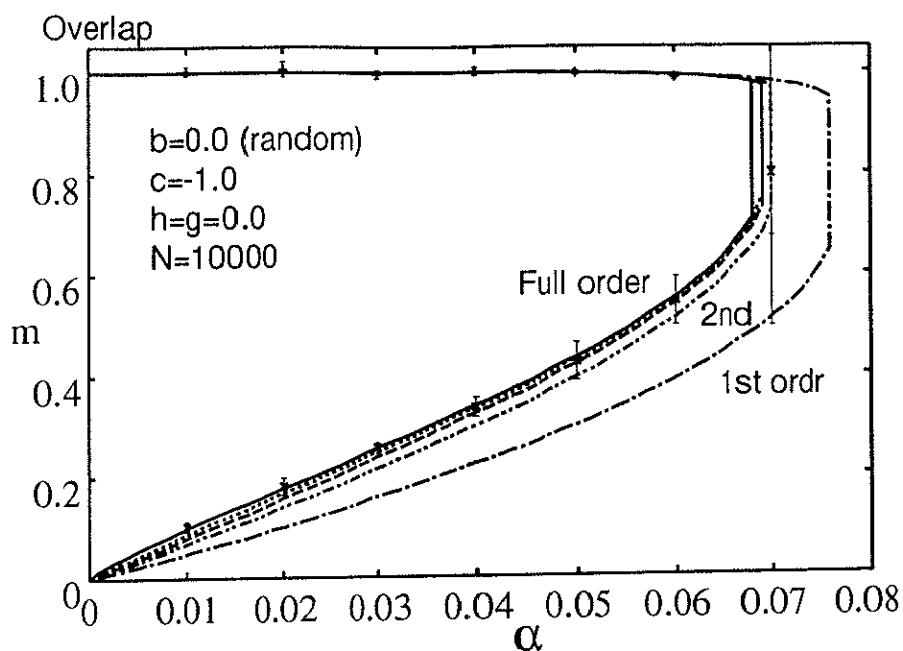


図 4.9: Basin of attraction for random patterns $b = 0$ and shifted output function $c = -1$. The storage capacity is $\alpha_c = 0.069$.

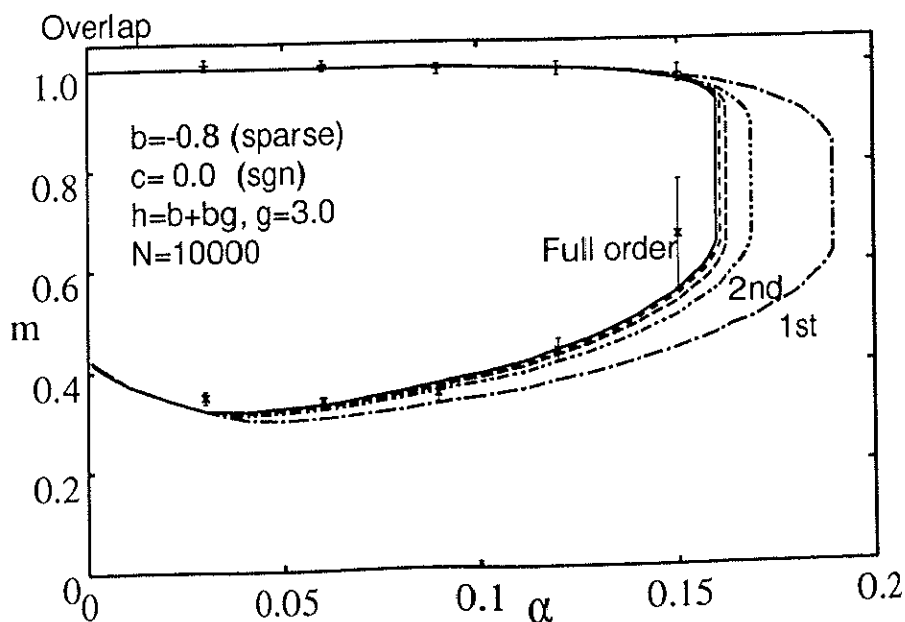


図 4.10: Basin of attraction for random patterns $b = -0.8$ and shifted output function $c = 0$. The storage capacity is $\alpha_c = 0.161$.

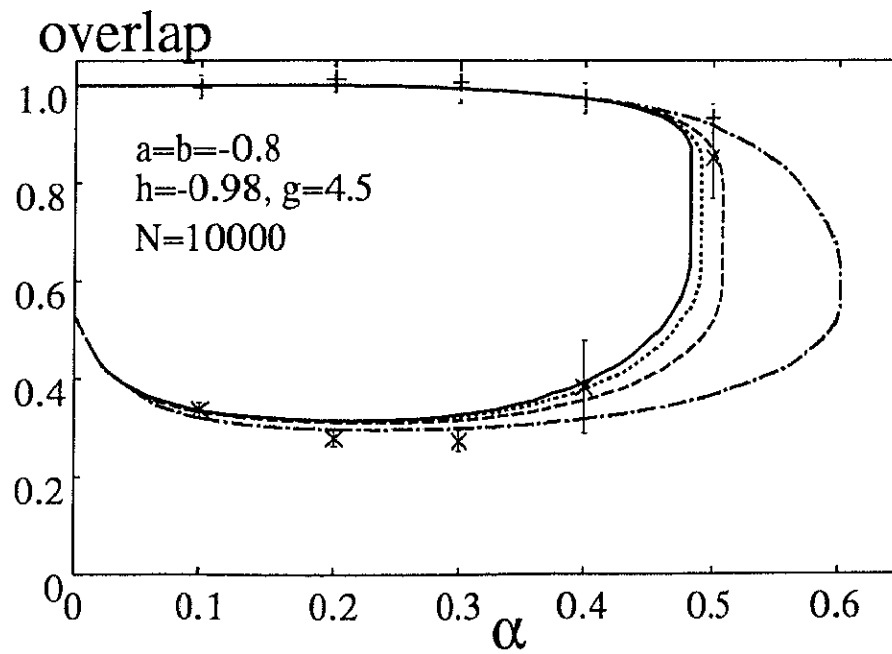


図 4.11: Basin of attraction for random patterns $b = -0.8$ and shifted output function $c = b$. The storage capacity obtained by the SCSNA is $\alpha_c = 0.454$, and that obtained by the full-order theory is $\alpha_c = 0.480$.

第5章 HASPの絶対容量

5.1 はじめに

Hiraiによって提案された連想記憶モデル HASPは、従来の相互想起型連想記憶回路と相互抑制回路から構成されている。この相互抑制回路は、1対多の連合を行った場合に生じる重複した連合ベクトルの分離を可能とし、また1対1の連合を行った場合のクロストークノイズ発生率を抑えることができる。連想記憶モデルの評価はクロストークノイズ発生率より求められる記憶容量を比較することによって行われる。まず、記憶したパターンが確実に想起できるかを評価するために、絶対容量について解析する。

既に、相互想起型連想記憶回路におけるクロストークノイズ発生率に関しては、Willshawら [55, 57, 58]やPalm [46]によって解析が行われている。HASPのクロストークノイズの発生率に関する解析を行うには、相互想起型連想記憶回路で発生したクロストークノイズが相互抑制回路に残存する割合を求める必要がある。そこで本論文では、相互抑制回路に残存するクロストークノイズをWillshawらが行ったクロストークノイズ発生率に関する解析法と同様の視点から求め、HASPの記憶容量の増加の割合を求める。

5.2 HASPの構成

HASPは、相互想起型連想回路(S層)、相互抑制回路(A層)、読出し制御回路の三つの回路で構成される。従来の相互想起型連想記憶回路では、キーベクトルと連合ベクトルの1対多の連合を行うと連合ベクトルが重複してしまうが、HASPではA層において読出し制御回路からの制御を受け、重複した連合ベクトルから目的のベクトルを一つずつ取り出すことができる。また、A層は相互抑制回路によりS層で生じたクロストークノイズを除去することができ、記憶容量を増加させることが可能となる。ここでは、従来の相互想起型連想記憶モデルとの比較を行うために1対1の連合の場合について解析する。読出し制御回路は1対1の連合の場合には用いないので、S層とA層の機構を説明する。

HASPは連続時間の動作方程式で記述されているが、S層は離散時間を用いても等価なので、解析には離散時間モデルを用いることにする。今、 p 個のキーベクトル $\boldsymbol{\eta}^\mu = (\eta_i^\mu)$ と連合ベクトル $\boldsymbol{\xi}^\mu = (\xi_i^\mu)$ の対を記憶する場合を考える。キーベクトルの次元は M であり、連合ベクトルの次元は N であるとする。また、各ベクトルの成分は 0 または 1 の値を取るとする。HASPはパターンやシナプス結合の値に 0 と 1 の2値を用いる点に注意する。これは Willshaw らのモデル [55] に準じているからである。従って、HASPの絶対容量の解析においても、Willshaw らの解析手法を用いることができる。ここで、各ベクトルの活動度をそれぞれ、

$$a_y = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \eta_i, \quad a_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad (5.1)$$

と定義する。

S層へ入力 $\boldsymbol{y} = (y_i)$ が与えられると、S層の出力 $\boldsymbol{S} = (S_i)$ は、

$$S_i = \phi \left(\sum_{j=1}^N J_{ij}^s y_j - \theta \right), \quad (5.2)$$

で表される。ここで、 θ はしきい値であり、 $\theta = a_y M - \varepsilon$ である。 ε は正の微小な定数とする。すなわち、内部状態がキーベクトルの大きさ $a_y M$ になった場合に、ニューロン S_i は出力 1 を出す。また、 J_{ij}^s は第 j 番目の入力 y_j から第 i 番目の出力 S_i へのシナプス結合であり、

$$J_{ij}^s = \phi \left(\sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \eta_j^\mu \right), \quad (5.3)$$

で与えられる。但し、関数 $\phi(\cdot)$ は、

$$\phi(u) = \begin{cases} 1 & , u > 0 \\ 0 & , u \leq 0 \end{cases}, \quad (5.4)$$

である。出力 S_i には、想起すべきシグナル成分の他にクロストークノイズを含んでいる。

A層は相互抑制回路であり、連続時間の動作方程式で表される。A層の内部状態を $A_i^*(t)$ とし、出力を $A_i(t)$ とすると、動作方程式は、

$$\frac{dA_i^*(t)}{dt} = -A_i^*(t) - \sum_{j=1}^N J_{ij}^a A_j + S_i, \quad (5.5)$$

$$A_i(t) = \phi \left(A_i^*(t) \right) A_i^*(t), \quad (5.6)$$

で表される。出力 $A_i(t)$ の値は非負の値になっている。ここで、 J_{ij}^a は第 j 番目のニューロン $A_j(t)$ から第 i 番目のニューロン $A_i(t)$ へのシナプス結合であり、

$$J_{ij}^a = 1 - \phi \left(\sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \right), \quad (5.7)$$

で与えられる。すなわち、記憶した連合ベクトル ξ^μ が A 層に入力されたときには、その成分間には抑制が働かないが、それ以外のクロストークノイズの成分には抑制が働くようになっている。これより、A 層によってクロストークノイズが除去されることになる。

しかしながら、シナプス結合 J_{ij}^a に連合ベクトルを記憶させていくと、次第にシナプス結合数が少なくなり抑制が働かなくなるため、クロストークノイズが除去されなくなっていく。従って、残存するクロストークノイズの割合を解析することが必要となる。

5.3 絶対容量

HASPのクロストークノイズ発生率 P_{HASP} は、S層におけるクロストークノイズ発生率 P_S と A 層に残存するクロストークノイズの割合 P_A より $P_{\text{HASP}} = P_S P_A$ で求められる。本研究では、絶対容量を以下の様に定義する。

定義 1 クロストークノイズ発生率 P が $1/N$ となる最大記憶ベクトル数 p_{max} を絶対容量と定義する。

$$p_{\text{max}} = \max_p \left\{ p \mid P \leq \frac{1}{N} \right\}.$$

S層のクロストークノイズ発生率 P_S は、活動度 a_y のキーベクトルが入力されたとき、内部状態、

$$d = \sum_{j=1}^M J_{ij}^s y_j, \quad (5.8)$$

がしきい値 θ を越える確率として求めることができる。あるニューロンのシナプス結合のいずれかが、 p 回の学習のうち r 回強化される確率は、確率 a_y を持つ二項分布に従い、

$$B(r; p, a_y) = \binom{p}{r} a_y^r (1 - a_y)^{p-r}, \quad (5.9)$$

で表される。ここで、 $B(x; n, q)$ は確率 q で発生する事象が n 回中に x 回発生する確率を表し、

$$B(x; n, q) = \binom{n}{x} q^x (1 - q)^{n-x}, \quad (5.10)$$

で与えられる。

この r 回強化されるニューロンにおいて、 M 個のシナプス結合のうち強化されるシナプスの割合 $\rho_S(r)$ は、

$$\rho_S(r) = 1 - (1 - a_x)^r, \quad (5.11)$$

で表される。従って、キーベクトルが入力されたとき、 r 回強化されたニューロンの荷重和 d が値 h を取る確率は、確率 $\rho_S(r)$ をもつ二項分布に従い、

$$B(h; a_y M, \rho_S(r)) = \binom{a_y M}{h} \{\rho_S(r)\}^h \{1 - \rho_S(r)\}^{a_y M - h}, \quad (5.12)$$

となる。但し、 $r = 0$ の場合は確率1で $d = 0$ となる。従って、すべての可能な r についての総和をとれば、ニューロンの荷重和 d が値 h をとる確率を、

$$\begin{aligned} N_S(h; a_y M) \\ &= \sum_{r=1}^p B(r; p, a_y) \cdot B(h; a_y M, \rho_S(r)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$= \sum_{r=1}^p \binom{p}{r} a_y^r (1 - a_y)^{p-r} \cdot \binom{a_y M}{h} \{\rho_S(r)\}^h \{1 - \rho_S(r)\}^{a_y M - h}, \quad (5.14)$$

で求めることができる [58]。

しきい値 θ は $a_y M$ よりわずかに小さいので、荷重和が値 $h = a_y M$ となる場合にクロストークノイズが発生する。すなわち、クロストークノイズの発生率 P_S は、

$$P_S = N_S(a_y M; a_y M), \quad (5.15)$$

で表される。これより、S層には $(1 - a_x) N P_S$ 個のクロストークノイズが発生し、クロストークノイズを含む入力A層に入力される。

A層はリカレントネットワークになっており、ニューロンの状態は時刻によって常に変動する。従って、ダイナミクスを追う必要がある。しかしながら、絶対容量を求める場合においては、クロストークノイズが非常に少ないと仮定しているため、状態変化を全て追う必要がなくなる。ここで、S層からの入力 S をシグナル成分 \mathbf{x} とクロストークノイズ成分 \mathbf{z} に分けて考えよう。

$$\mathbf{S} = \mathbf{x} + \mathbf{z}, \quad (5.16)$$

であり、クロストークノイズ \mathbf{z} の活動度を a_z とする。各成分が入力されるニューロンの集合をそれぞれニューロン群 X とニューロン群 Z と呼ぶことにする。クロ

ストークノイズ z が出力に残存する条件は、他のニューロンからの入力 S 層からの入力よりも下回る場合であり、

$$\Delta_i = S_i - \sum_{k=1}^N J_{ij}^a A_j, \quad (5.17)$$

が $\Delta_i > 0$ ($i \in Z$) となる場合である。同様にシグナル成分 x が出力に残るための条件は、ニューロン群 Z からの入力 S 層からの入力よりも下回る場合、 $\Delta_i > 0$ ($i \in X$) となる場合である。

この Δ_i の値は、式 (5.17) より活性であるシナプス結合数とニューロンの状態に依存することがわかる。活性であるシナプス結合数は Willshaw らと同様の手法を用いて解析することができる。しかしながら、 A 層のニューロンの状態は式 (5.5) より時刻によって変化するため解析は困難なので、本解析ではクロストークノイズの大きさが $a_z N = 1$ の場合についてのみ解析する。

まず、活性であるシナプス結合数を求める。式 (5.7) より、ニューロン群 X では連合ベクトル ξ^μ の成分間には抑制が働かないので、ニューロン群 Z のみから抑制を受けることになる。従って、考慮すべきシナプス結合数の最大値は $a_z N$ である。また、ニューロン群 Z では、自己結合は 0 であるので $(a_z N - 1)$ 個のクロストークノイズとニューロン群 X とシナプス結合をもつので、その最大値は $a_x N + a_z N - 1$ である。

p 個のベクトルを記憶した場合に活性であるシナプス結合の割合を求める。あるニューロンのシナプス結合のいずれかが p 回の学習のうち r 回脱強化される確率は、確率 a_x を持つ二項分布、

$$B(r; p, a_x) = \binom{p}{r} a_x^r (1 - a_x)^{p-r}, \quad (5.18)$$

に従う。この r 回脱強化されるニューロンにおいて、シナプス結合が活性である割合 $\rho_A(r)$ を求めよう。学習する前はすべてのシナプス結合が活性であるので、

$$\rho_A(0) = 1, \quad (5.19)$$

である。1 回脱強化されるニューロンでは、自己結合を含めた N 本中 $a_x N$ 本のシナプス結合が不活性になるので、

$$\rho_A(1) = 1 - \frac{a_x N}{N} = 1 - a_x, \quad (5.20)$$

である。また $r (> 1)$ 回脱強化されるニューロンでは、自己結合は既に不活性であることがわかっているので、シナプス結合 $N - 1$ 本中自己結合を除く $a_x N - 1$ 本ずつ

の割合で不活性になり, $\rho_A(r)$ に関する漸化式,

$$\rho_A(r) = \left(1 - \frac{a_x N - 1}{N - 1}\right) \rho_A(r - 1) \quad (5.21)$$

を得る. 従って, 式(5.19)~(5.21)より, シナプス結合が活性である割合は,

$$\rho_A(r) = \begin{cases} 1 & , r = 0 \\ \frac{N - 1}{N} \left(1 - \frac{a_x N - 1}{N - 1}\right)^r & , r \geq 1 \end{cases}, \quad (5.22)$$

である.

ニューロンのシナプス結合 n 本のうち h 本が活性である確率は, 確率 $\rho_A(r)$ を持つ二項分布に従い,

$$B(h; n, \rho_A(r)) = \binom{n}{h} \{\rho_A(r)\}^h \{1 - \rho_A(r)\}^{n-h}, \quad (5.23)$$

となる. 但し, $r = 0$ の場合, すべての結合が活性であるので確率1で $h = n$ となる. 従って, すべての可能な r についての総和をとることで, ニューロンのシナプス結合 n 本のうち h 本が活性である確率を,

$$N_A(h; n) = \sum_{r=1}^p B(r; p, a_x) \cdot B(h; n, \rho_A(r)) \quad (5.24)$$

$$= \sum_{r=1}^p \binom{p}{r} a_x^r (1 - a_x)^{p-r} \cdot \binom{n}{h} \{\rho_A(r)\}^h \{1 - \rho_A(r)\}^{n-h} \quad (5.25)$$

と求めることができる. これより, ニューロン群 X では, 最大 $a_x N$ 本のシナプス結合のうち h_x 本が活性である確率は $N_A(h_x; a_x N)$ となる. 同様にニューロン群 Z では, 最大 $a_x N + a_z N - 1$ 本のシナプス結合のうち h_z 本が活性である確率は $N_A(h_z; a_x N + a_z N - 1)$ となる.

次に, ニューロンの状態について考えよう. A層のニューロンの状態は式(5.5)より時刻によって変化する. そのため, 抑制性のシナプス結合が存在していてもニューロンが発火していなければ抑制は働かない. 従って, クロストークノイズが残存する割合はニューロンの状態を各時刻ごとに求める必要がある. しかしながら, 絶対容量の定義より, クロストークノイズの大きさ $a_x N$ を $a_x N = 1$ とすることができ, 時間変化を追わなくとも $\Delta_i > 0$ となる条件を求めることができる. この場合では, ニューロン群 X では, たとえニューロン群 Z から抑制を受けたとしても, $\Delta_i > 0$ ($i \in X$)を常に満たしているので, ニューロン群 X のニューロン, すなわちシグナル成分は全て残っている(付録B.1参照). 一方, ニューロン群 Z では, ニューロン群 X の

ニューロンがすべて発火しているので、シナプス結合数 h_z が $0 \leq h_z \leq 1$ の場合のみ $\Delta_i > 0$ ($i \in Z$) を満たす。従って、A層に残存するクロストークノイズの割合は、

$$P_A = \sum_{h_u=0}^1 N_A(h_x; a_x N), \quad (5.26)$$

で表される。

$a_z N > 1$ の場合、ニューロン群 Z のニューロンに対する抑制量が小さく、発火状態である場合がある。そのためニューロン群 X のニューロンが抑制されてしまう場合が存在する。この場合を解析することは困難である。

絶対容量を議論する場合においては、記憶した連合ベクトルが誤りなく想起できることが必要とされるので、クロストークノイズが非常に少ない場合を考えればよい。そこで本解析では、 $a_z N > 1$ の場合においても、ニューロン群 Z のニューロンはそれぞれ独立に式 (5.26) の確率で残存すると仮定する。従って、クロストークノイズの各成分は確率 P_A で残存するものとし、A層に残存するクロストークノイズの割合を、式 (5.26) で表すことにする。

以上より、HASPのクロストークノイズ発生率を求めることができる。S層におけるクロストークノイズ発生率は式 (5.15) より P_S である。また、A層に入力されたクロストークノイズは式 (5.26) より確率 P_A で残存する。従って、HASPのクロストークノイズ発生率は、

$$P_{\text{HASP}} = P_A \cdot P_S, \quad (5.27)$$

と求めることができる。

5.4 結果とまとめ

導出したクロストークノイズ発生率 P_S と P_{HASP} を評価するために、計算機シミュレーションを行った。シミュレーションでは、キーベクトルおよび連合ベクトルの次元を $M = N = 100$ とし、活動度が $a_x = a_y = 0.03, 0.05, 0.10$ の場合について求めた。各ベクトルの成分は活動度がそれぞれ a_x, a_y となるように、ランダムに0または1の値をとる。それぞれの場合について、20回試行し、その平均値を求めた。

図5.1に相互想起型連想回路(S層)における記憶ベクトル数に対するクロストークノイズの生起頻度(点)と式(5.15)から求めた値(破線)を示した。これは、Willshawら[55]の解析と同様の結果となっている。

相互抑制回路単独の残存クロストークノイズの解析では、ランダムに生成した大きさ $a_z N = 1$ のノイズを連合ベクトルに加え残存ノイズを求めた。図5.2に相互抑

$a_x = a_y$	0.03	0.05	0.10
相互想起部	242	176	78
HASP	512	314	123

表 5.1: Absolute capacity of HASP (error rate 1%)

制回路における記憶ベクトル数に対する残存するクロストークノイズの割合(点)と式(5.26)から求めた値(破線)を示した。これより、残存するクロストークノイズの割合が式(5.26)で表せることが確認できた。

図 5.3 に HASP における記憶ベクトル数に対するクロストークノイズの生起頻度(点)と式(5.27)から求めた値(破線)を示した。ベクトルの大きさが $a_x = a_y = 0.1$ の場合、記憶ベクトル数が 300 ~ 500 で誤差が見られる。これはクロストークノイズが多数発生し、A 層で用いた仮定が成り立たないためであると考えられる。しかしながら、記憶容量を求める場合においてはクロストークノイズの発生率が $N = M = 100$ の場合、1% 近傍について求められればよいので、上記の誤差は記憶容量の解析には影響しない。従って、1% 近傍の HASP のクロストークノイズの発生率は式(5.27)で近似することができる。

図 5.4 に S 層のみと HASP のクロストークノイズ発生率を示す。絶対容量を求めると、表 5.1 のようになる。これより、HASP は相互想起型連想記憶回路のみよりも絶対容量が大きく、特にスパースな $a_x = a_y = 0.03$ の場合は 2 倍以上もあることがわかる。また、クロストークノイズ発生率の基準を厳しく(0.1%に)すれば、この傾向は更に顕著になる。 $a_x = a_y = 0.03$ の場合は 3 倍に、 $a_x = a_y = 0.05$ の場合も 2 倍以上になっている。

本解析の目的は絶対容量を求めることであるため、A 層の解析においてクロストークノイズが非常に少ない場合について考えた。図 5.4 よりこの仮定を用いたとしても HASP のクロストークノイズ発生率のよい推定値を与え、十分に絶対容量を評価できることがわかる。HASP は相互抑制回路を設けることにより、相互想起型連想記憶回路よりもシナプス結合の数が 2 倍になっているので、最大記憶ベクトル数が 2 倍になることは当然と言える。しかしながら、 $a_x = a_y = 0.03$ の場合においては 2 倍以上になり、更に、クロストークノイズ発生率の基準を厳しくすることにより、 $a_x = a_y = 0.05, 0.10$ の場合においても 2 倍以上になり得る。従って、HASP のようなクロストークノイズ除去の機構が有効であることが分かった [23]。

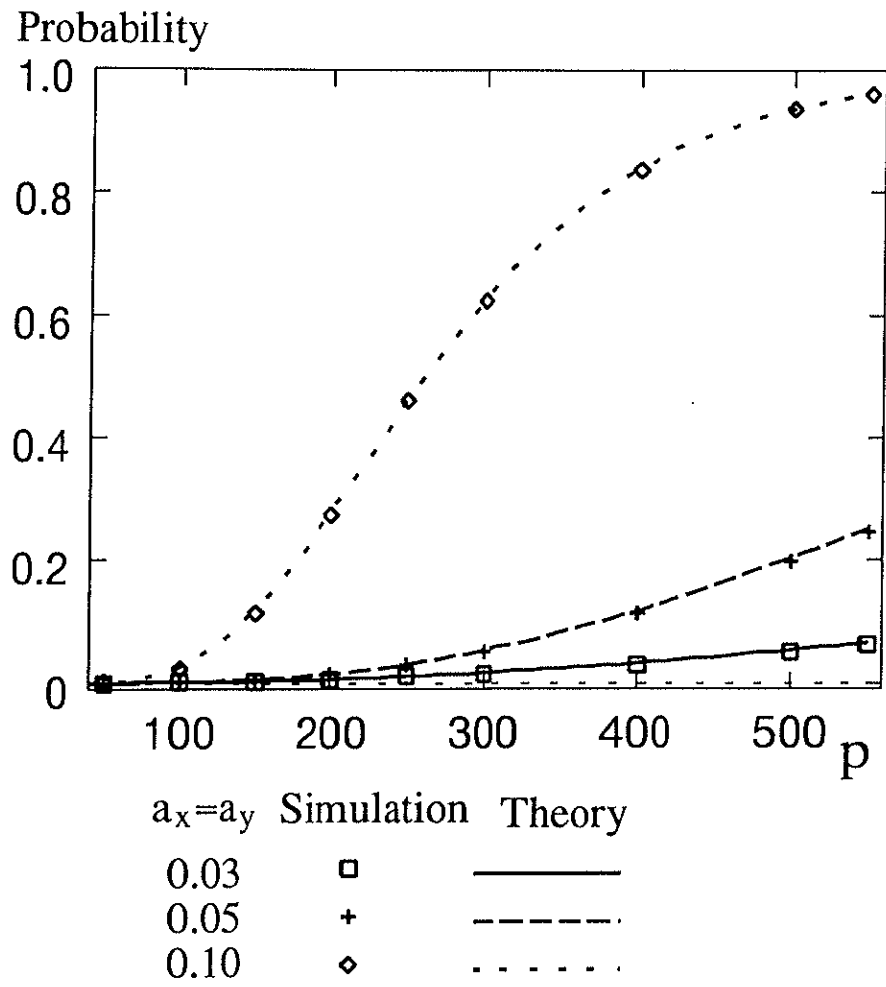


図 5.1: Probability of occurrence of crosstalk noise appeared at the output of heteroassociative network.

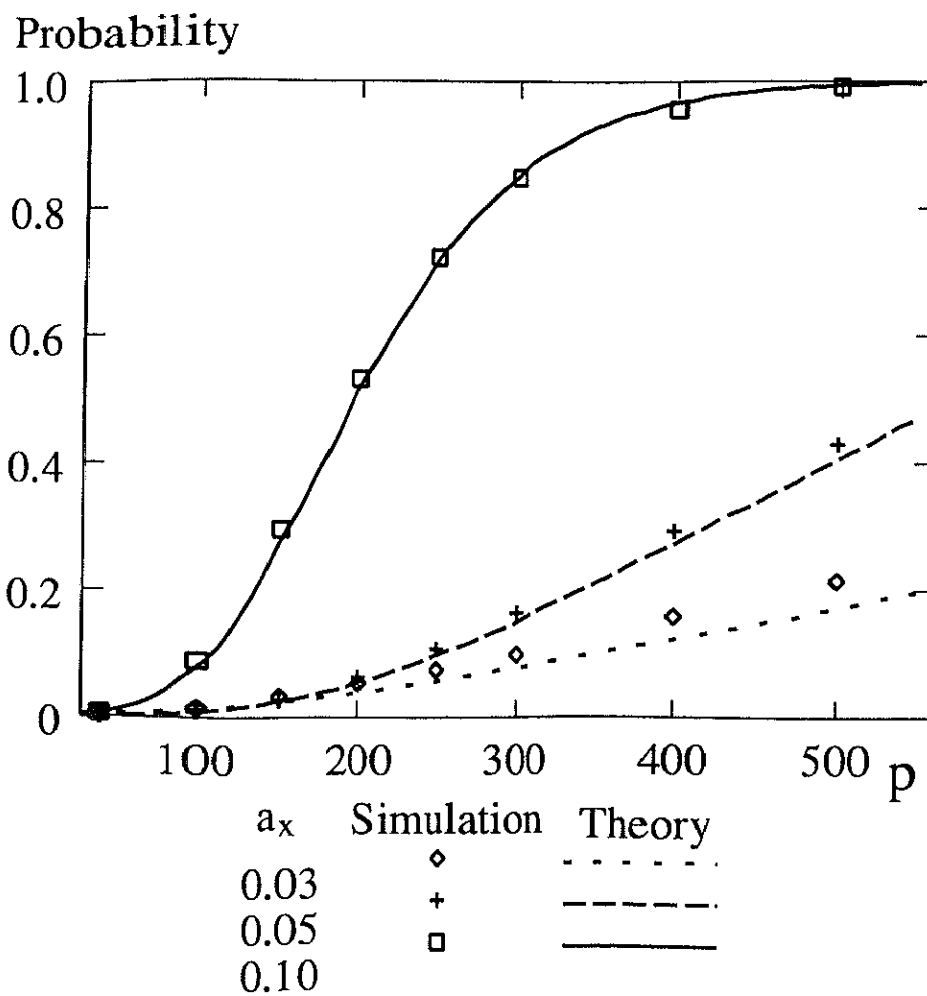


図 5.2: Probability of residual crosstalk noise after a mutually inhibitory network.

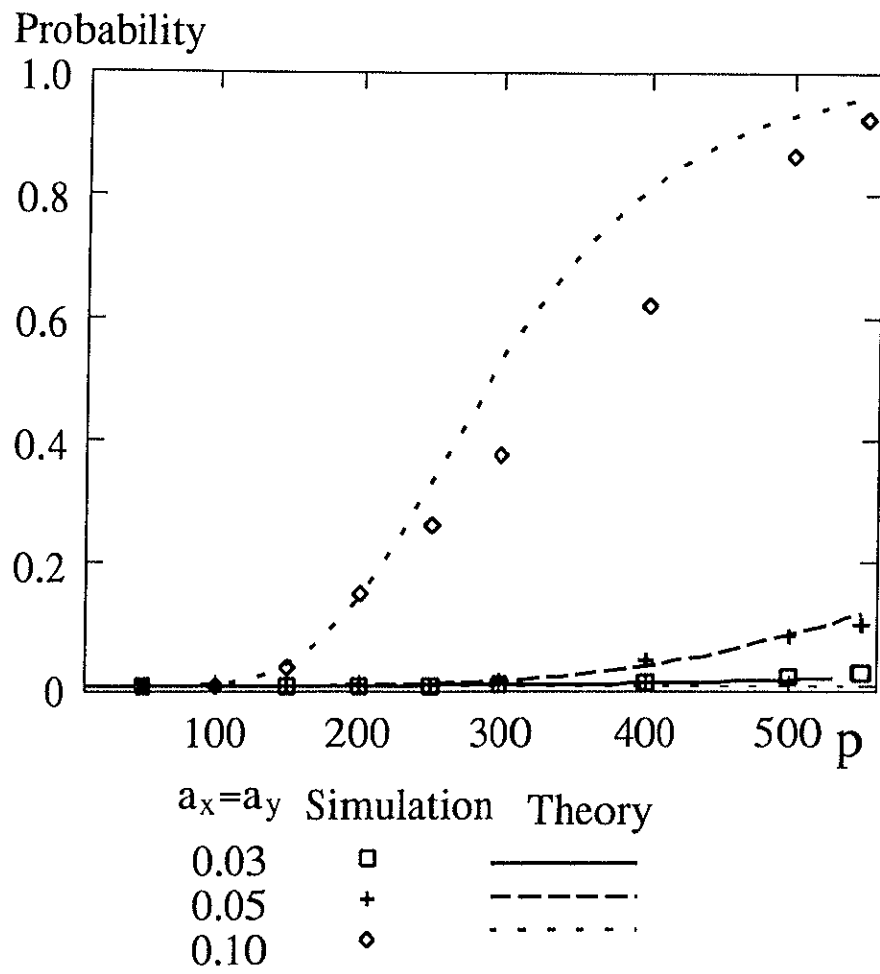


図 5.3: Probability of occurrence of crosstalk noise appeared at the output of HASP.

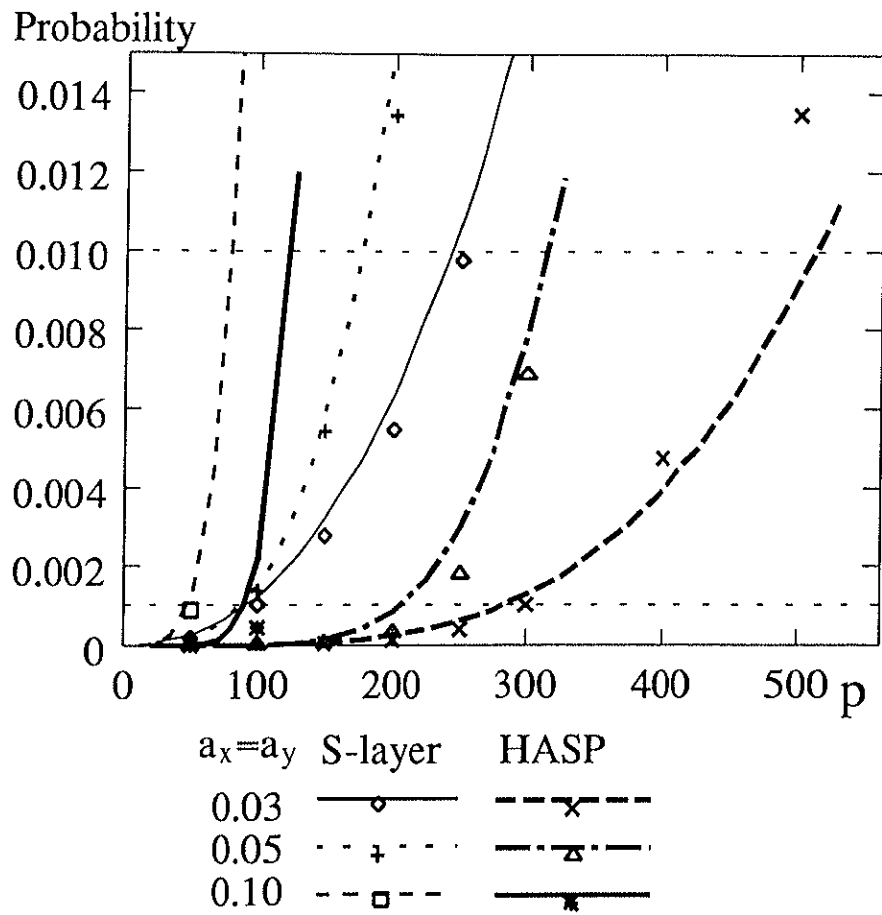


図 5.4: Probability of occurrence of crosstalk noise appeared at the output of heteroassociative network and that of HASP.

第6章 1対多の連合を行う連想記憶モデル

6.1 はじめに

1対多の連合はヒトの連想記憶システムにおいて重要な特徴である。例えば、「あつい」という同音異義語は、「熱い」「暑い」「厚い」の複数の意味を持っている。同じ発音に対して多くの語義が対応しているので、単に「あつい」と聞いただけではどの語を指しているのかを特定することはできない。このとき、文脈語として「本」が与えられれば、対応する語として「厚い」を選ぶことができる。このように、1対多の連合は普遍的に現れる。同音異義語の場合では、文脈情報を利用し、語義の特定が行なわれている。心理学的な実験結果 [53, 54, 31] より、語彙的な脱曖昧化の過程には2つの段階があることが知られている。はじめの段階は「語義の活性化の段階」であり、対応する全ての意味が活性化される段階である。次の段階は「語義の選択の段階」であり、文脈情報を用いて最も適した語義のみが選択される段階である。

連想記憶モデル HASP [18] は1対多の連合を扱ったモデルであり、複数のキー項目に連合した項目の積集合や和集合などを検索できる。HASPは相互想起型連想記憶回路と自己想起を行う相互抑制回路の二つの回路から構成されている。相互想起部では1対多の連合を記憶している。自己想起部には連合ベクトルが記憶され、1つの連合ベクトルを選択する機構が含まれている。また、相互想起部の出力にクロストークノイズが含まれている場合、自己想起部はそれを除去する能力をもつ。これまでに、HASPの特性を利用して、足し算過程やプライミング効果などの記憶に関する認知心理学的現象が説明されている [20, 21, 34]。川村と平井 [23] はHASPの二つの回路を別々に議論することによって、クロストークノイズを評価し、絶対容量の解析を行った。しかしながら、想起過程のダイナミックスの解析においては、連合ベクトルと回路の状態との間の統計的な相関を考慮する必要がある。二つの回路を別々に議論するとこの相関が取り扱えない。そのため、クロストークノイズを定量的に評価できず、想起過程のダイナミックスを議論できない。

HASPは2つのネットワークで構成されるが、Amit [8] は相互相関と自己相関の両方を1つのネットワークに記憶させたモデルを提案している。Amitのモデルは1

対1の連合を扱っているが、このモデルを1対多の連合の場合へ拡張することは興味深い。Guyonら [16]は分岐を持つ複雑な系列想起を行なうモデルを提案している。このモデルは1対多の連合を行なっているが、記憶した項目を動的に選択して、想起することはできない。

本章では HASP 型連想記憶モデルを用いて、1対多の連合を行う連想記憶の想起過程を議論する。本モデルの構成は HASP の構成と同様であるが、簡単化のため相互抑制回路の代わりに自己想起型連想記憶ネットワークを用いる。自己想起部は連合項目をネットワークの平衡状態に記憶し、初期状態に最も近い連合項目が想起される。Hopfield [22]が連想記憶モデルとスピン・システムの類似性を指摘して以来、統計力学的な方法により、連想記憶モデルが解析されてきた[6, 7, 17, 49]。これらの手法はネットワークの平衡状態を議論するため、記憶容量を解析することができる。しかしながら、想起過程を議論することができない。Amari と Maginu [4]は統計神経力学を提案し、想起過程を定性的に解析することに成功した。さらに、Okada [41]は Amari-Maginu 理論を高次近似の理論へ拡張し、ほぼ定量的に解析することに成功した。

ここでは、相互想起部で想起された複数の連合項目の1つを選択的に想起する過程を解析する。1対多の連合を行なう連想記憶モデルでは、想起する項目が動的に変化するため、想起過程を議論する必要がある。そこで、提案したモデルを統計神経力学を用いて解析する。

本モデルでは、文脈からの手がかりは外部入力として与えられるとする。与えられた手がかりは文脈由来の情報であり、想起すべき項目に類似しているとする。本研究では、手がかり情報の生成メカニズムについては議論しない。外部入力を導入する際に、次の点を議論する必要がある。まず、相互想起部または自己想起部のいずれのネットワークに外部入力を加えた方が連合ベクトルを想起しやすいかを検討する。次に、外部入力と連合ベクトルとの間の相関の大きさが、想起のしやすさにどのように影響するかを検討する。ここでは、外部入力としては想起する連合ベクトルに近いものから無相関な入力までの様々なものを考える。以上の点について、統計神経力学と計算機シミュレーションを用いて調べる。

6.2 モデル

本モデルは図 6.1 に示すように、相互想起型連想記憶ネットワークと自己想起型連想記憶ネットワークから構成される。外部入力は相互想起部または自己想起部のいずれかに与えられる。説明の都合上、入力 y が相互想起部へ入力される時刻を

$t = -1$ とし, 相互想起部の出力が自己想起部へ入力される時刻を $t = 0$ とする.

今, p 個の M 次元のキーベクトル $\boldsymbol{\eta}^\mu = (\eta_i^\mu)$ に対して, k^μ 個の N 次元の連合ベクトル $\boldsymbol{\xi}^{\mu,\kappa} = (\xi_i^{\mu,\kappa})$ を連合し, 1対多の連合を記憶する場合を考える. キーベクトルに対応する連合ベクトルの数は, キーベクトル毎に異なってもよい. 各ベクトルの成分 $\eta_i^\mu, \xi_i^{\mu,\kappa}$ は以下の確率で独立に生成する,

$$\text{Prob} \left[\eta_i^\mu = \pm 1 \right] = \frac{1}{2}, \quad (6.1)$$

$$\text{Prob} \left[\xi_i^{\mu,\kappa} = \pm 1 \right] = \frac{1}{2}. \quad (6.2)$$

6.2.1 相互想起部

図 6.1 の相互想起部は N 個のニューロンで構成される. 相互想起部への入力 \boldsymbol{y} はキーベクトル $\boldsymbol{\eta}^\mu$ と同じ M 次元のベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_M)^T$ である. ここでは $\sum_{\mu=1}^p k^\mu = \alpha N$, $M = \beta N$, $N \rightarrow \infty$, $\beta \sim O(1)$ の極限を考え, $p \sim O(N)$, $k^\mu \sim O(1)$ の場合を中心に議論する. α を記憶率と呼ぶ. 相互想起部の第 i 番目のニューロンの出力 x_i^0 は,

$$x_i^0 = \text{sgn} \left(\sum_{j=1}^M \tilde{J}_{ij} y_j + \tilde{h}_i \right), \quad (6.3)$$

で表される. ここで, \tilde{J}_{ij} は入力の第 j 成分から相互想起部の第 i 番目のニューロンへのシナプス結合であり, 相関学習を用いて,

$$\tilde{J}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{\kappa=1}^{k^\mu} \xi_i^{\mu,\kappa} \eta_j^\mu, \quad (6.4)$$

で与えられる. また, \tilde{h}_i は連合ベクトル間の対称性を破る外部入力であり, 6.3 で説明する.

いま, 第 1 番目のキーベクトル $\boldsymbol{\eta}^1$ に対応する k 個の連合ベクトルのうち, 第 1 番目の連合ベクトル $\boldsymbol{\xi}^{1,1}$ を想起する場合について考える. 相互想起部への入力 \boldsymbol{y} とキーベクトル $\boldsymbol{\eta}^1$ とのオーバラップ (方向余弦) を,

$$\tilde{m} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \eta_j^1 y_j, \quad (6.5)$$

と定義する. これより, 式 (6.3) は,

$$x_i^0 = \text{sgn} \left(\sum_{\kappa=1}^{k^1} \beta \tilde{m} \xi_i^{1,\kappa} + \tilde{z}_i + \tilde{h}_i \right), \quad (6.6)$$

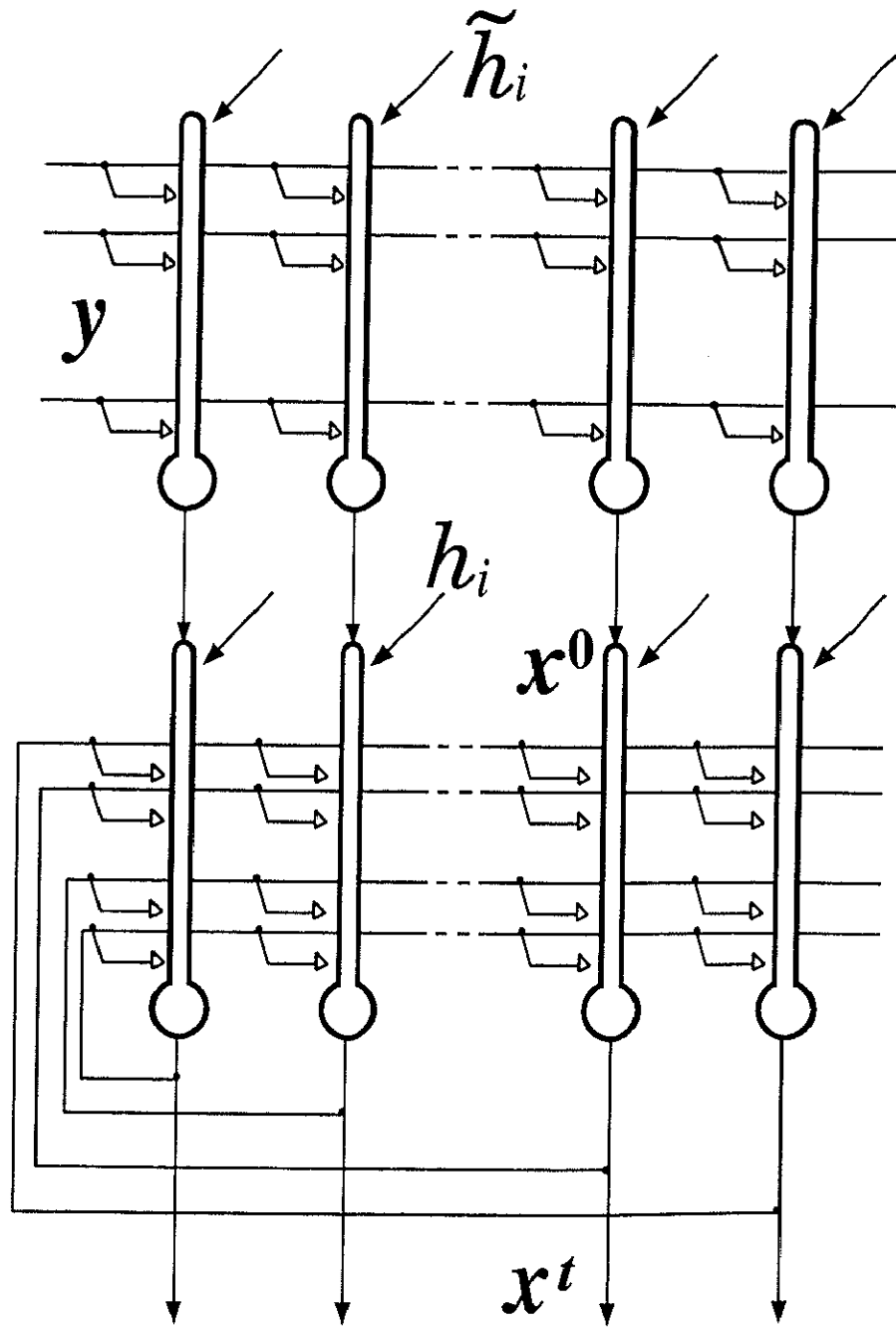


図 6.1: A schematic diagram of the model: An upper network operates as a hetero-associative memory, while a lower network as an auto-associative one.

と表すことができる。但し、 \tilde{z}_i は、

$$\tilde{z}_i \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M \sum_{\mu \neq 1}^P \sum_{\kappa=1}^{k^\mu} \xi_i^{\mu,\kappa} \eta_j^\mu y_j, \quad (6.7)$$

であり、時刻 $t = -1$ におけるクロストークノイズを表す。

6.2.2 自己想起部

図 6.1 の自己想起部は N 個のニューロンが相互に結合している。時刻 $t \geq 0$ における第 i 番目のニューロンの状態 x_i^t のダイナミックスは、

$$x_i^{t+1} = \text{sgn} \left(\sum_{j \neq i}^N J_{ij} x_j^t + h_i \delta_{t,0} \right), \quad (6.8)$$

で表される。ここで、 J_{ij} は第 j 番目のニューロンから第 i 番目のニューロンへのシナプス結合を表し、相関学習を用いて、

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^P \sum_{\kappa=1}^{k^\mu} \xi_i^{\mu,\kappa} \xi_j^{\mu,\kappa}, \quad (6.9)$$

で与えられる。また、 h_i は連合ベクトル間の対称性を破る外部入力であり、6.3 で説明する。また、 $\delta_{t,0}$ は $t=0$ のときに 1 を、 $t \neq 0$ のときに 0 をとるクロネッカーデルタである。本論文では外部入力は時刻 $t=0$ にのみ存在し、時刻 $t > 0$ においては存在しない場合を議論する。従って、外部入力 h_i は自己想起部の平衡状態での安定性に影響を与えない。

時刻 $t \geq 0$ における自己想起部のニューロンの状態 $\mathbf{x}^t = (x_1^t, \dots, x_N^t)^T$ と連合ベクトル $\xi^{1,\kappa}$ とのオーバラップを、

$$m_i^\kappa = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{1,\kappa} x_i^t, \quad (6.10)$$

と定義する。これより、式 (6.8) は、

$$x_i^{t+1} = \text{sgn} \left(\sum_{\kappa=1}^{k^1} m_i^\kappa \xi_i^{1,\kappa} + z_i^t + h_i \delta_{t,0} \right), \quad (6.11)$$

と表される。但し、 z_i^t は、

$$z_i^t \equiv \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N \sum_{\mu \neq 1}^P \sum_{\kappa=1}^{k^\mu} \xi_i^{\mu,\kappa} \xi_j^{\mu,\kappa} x_j^t, \quad (6.12)$$

であり、時刻 t におけるクロストークノイズを表す。

6.3 外部入力

本節では、式(6.3)と式(6.8)の \tilde{h}_i と h_i について定性的に説明する。簡単のためにキーベクトルの個数 p を $p \sim O(1)$ とする。 $k^\mu \sim O(1)$ なので、この場合は記憶率 $\alpha = 0$ に対応する。本研究では、一つのキーベクトルに対応する連合ベクトルの個数 k^μ をすべて $k^\mu = 3$ とする。本解析手法を任意の k^μ へ拡張することは容易である。また、キーベクトルと連合ベクトルの次元は $M = N(\beta = 1.0)$ とする。

相互想起部への入力 \mathbf{y} が1番目のキーベクトル $\boldsymbol{\eta}^1$ であったとする($\bar{m} = 1.0$)。この場合、自己想起部への入力、すなわち相互想起部の出力 x_i^0 は式(6.6)より、

$$x_i^0 = \text{sgn}(\xi_i^{1,1} + \xi_i^{1,2} + \xi_i^{1,3} + \tilde{h}_i), \quad (6.13)$$

となる。もし外部入力 \tilde{h}_i がなければ、相互想起部の出力 x_i^0 は、キーベクトル $\boldsymbol{\eta}^1$ に対応する $k^\mu = 3$ 個の連合ベクトルの和の符号をとった混合ベクトル $\boldsymbol{\zeta}^1 = (\zeta_i^1)$ 、

$$\zeta_i^1 = \text{sgn}(\xi_i^{1,1} + \xi_i^{1,2} + \xi_i^{1,3}), \quad (6.14)$$

となる。

次に、この混合ベクトル $\boldsymbol{\zeta}^1$ が自己想起部の初期状態になった場合($\mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\zeta}^1$)を考えてみよう。次の時刻($t = 1$)の自己想起部の状態は、

$$x_i^1 = \text{sgn}\left(\frac{1}{2}\xi_i^{1,1} + \frac{1}{2}\xi_i^{1,2} + \frac{1}{2}\xi_i^{1,3} + h_i\right), \quad (6.15)$$

となる。ここで、式(6.15)の $1/2$ は回路の状態 \mathbf{x}^0 と連合ベクトル $\xi^{1,\kappa}$ 、 $\kappa = 1, 2, 3$ とのオーバーラップ m_0^κ である($m_0^\kappa = 1/2$)。このとき $h_i = 0$ であれば、 $\mathbf{x}^t = \boldsymbol{\zeta}^1$ 、 $t > 1$ となる。

これらの議論からわかるように、 \tilde{h}_i や h_i の外部入力が必要ならば、連合の結果として混合ベクトル $\boldsymbol{\zeta}^1$ が得られ、想起は失敗に終る。出力が混合ベクトルではなく、記憶した連合ベクトルになるためには、 \tilde{h}_i や h_i の外部入力が必要である。本論文では外部入力を加える時刻の違いにより、次の二つのモデルを考えた。

モデル 1. 相互想起部に時刻 $t = -1$ のとき入力する場合、

$$\text{Prob}[\tilde{h}_i = \pm 1] = \frac{1 \pm a\xi_i^{1,1}}{2}, \quad h_i = 0. \quad (6.16)$$

モデル 2. 自己想起部に時刻 $t = 0$ のとき入力する場合、

$$\tilde{h}_i = 0, \quad \text{Prob}[h_i = \pm 1] = \frac{1 \pm a\xi_i^{1,1}}{2}. \quad (6.17)$$

もちろん, \tilde{h}_i と h_i の両方をともに用いることができる. この場合の定性的な性質は上述の両極端な例の結果から容易に推測できると考えられる.

式(6.16)と式(6.17)から連合ベクトル $\xi_i^{1,1}$ と外部入力 \tilde{h}_i, h_i の相関は,

$$E[\xi_i^{1,1}\tilde{h}_i] = E[\xi_i^{1,1}h_i] = a, \quad (6.18)$$

となる. ここで, a を連合ベクトルと外部入力の類似度と呼ぶ. a の値の範囲は $0 \leq a \leq 1$ を考える. $a=0$ のとき外部入力 \tilde{h}_i, h_i はランダムに ± 1 の値をとり, $\xi_i^{1,1}$ とは統計的に無相関な入力となる. $a=1$ のときは $\xi_i^{1,1}$ に等しくなる. これらのことから, $a=0$ では連合ベクトル $\xi^{1,1}$ を想起することは困難であるが, $a=1$ では容易であることが予想される. 従って, $\xi^{1,1}$ を想起できる類似度 a の臨界値 a_c が存在すると予想される. また, この外部入力を加える時刻の違いによって, $\xi^{1,1}$ が想起できる臨界値 a_c は異なると予想される. 従って, 本論文ではモデル1とモデル2の臨界値 a_c を理論的に議論し, どちらの方式が優れているかを議論する.

6.4 結果

6.4.1 クロストークノイズの分布

まず, 相互想起部と自己想起部の二つの回路を統一的に解析しなければならないことを示す. 簡単のために, 外部入力は $\tilde{h}_i = h_i = 0$ とし, 1対1の連合 ($k=1$) の場合について考える. ここでは, 自己想起部の初期状態に対応する時刻 $t=0$ におけるクロストークノイズの分布を評価する. 自己想起部に $\xi^{1,1}$ と相関をもち, 他の連合ベクトルと無相関な状態 $\hat{\omega}$ が入力されたとする. すなわち, 相互想起部がなく, 自己想起部のみで連合ベクトル $\xi^{1,1}$ を想起する場合を考える. この場合, 他の連合ベクトルからの寄与を表すクロストークノイズ \hat{z}_i ,

$$\hat{z}_i = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \xi_i^{\mu,1} \xi_j^{\mu,1} \hat{x}_j, \quad (6.19)$$

は平均が0であり, 分散が記憶率 α であるガウス分布に従う [4]. 図6.2に計算機シミュレーションと理論で得た記憶率が $\alpha=0.1$ である場合のクロストークノイズ \hat{z}_i の分布を示す. 但し, 計算機シミュレーションにおいては, $M=N=500$ である.

次に, 相互想起部に初期オーバーラップ \tilde{m} の入力を与えられ, 相互想起部の出力が自己想起部の初期状態として与えられた場合を考える. この場合, 自己想起部の初期状態 ω^0 はすべての連合ベクトル $\xi^{\mu,1}$ に依存しているので, その相関を考慮してクロストークノイズを評価する必要がある. そのため, 本モデルの巨視的状態方程

式を統計神経力学 [4, 41] を用いて導出した (付録第 C.1 節). 図 6.2 にこの巨視的状态方程式を用いて求めたクロストークノイズ z_i^0 の分布を示す. 式 (C.3) より, クロストークノイズ z_i^0 は平均が 0 であり, 分散が σ_0^2 である正規分布に従う. 式 (6.5) の初期オーバーラップは $\bar{m} = 0.4, 0.6$ とした. 各点は計算機シミュレーションによる結果であり, 実線は理論値である. 理論と計算機シミュレーションの結果はよく一致している. 図 6.2 からわかるように, 時刻 $t = 0$ でのクロストークノイズ z_i^0 は初期オーバーラップ \bar{m} に強く依存することがわかる. $\bar{m} = 0.4$ に比べ, $\bar{m} = 0.6$ のときのクロストークノイズの分布は, クロストークノイズ \hat{z}_i の分布に非常に類似している. 図 6.3 は $\alpha = 0.10$ における z_i^0 と \hat{z}_i の分散を示す. z_i^0 の分散は初期オーバーラップ \bar{m} に強く依存することがわかる. また, $\bar{m} \rightarrow 1$ のときに, \hat{z}_i の分散は z_i^0 の分散の良い近似になっている. 従って, これまでの絶対容量の解析 [23] において, 二つの回路を分離して, クロストークノイズの分布を $z_i^0 \approx \hat{z}_i$ とみなして議論することはよい近似であったことを示している. 一方, \bar{m} が小さい値の場合も考慮して想起過程のダイナミクスを解析する場合には, 2つの回路を分離して議論できないことを示している. ここで重要な点は, 相互想起部に入力を加えた場合のクロストークノイズ z_i^0 の分散が, 自己想起部に入力を加えた場合のクロストークノイズ \hat{z}_i の分散よりも大きくなるということだけではなく, 相互想起部への入力ベクトルのオーバーラップ \bar{m} にも依存するという点である. この効果は二つの回路を統一的に議論することにより, 初めて得られる.

6.4.2 1対多の連合の想起過程

さて次に 1対多の連合を記憶した場合を考えよう. ここでは, $k^\mu = 3$ の場合を考える. 任意の k^μ への拡張は容易であり, 第 C.1 節で述べる巨視的状态方程式は任意の k^μ で導出した. 外部入力を加える時刻の違いによる影響を調べるためにモデル 1 とモデル 2 の場合を議論する.

図 6.4 に記憶率 $\alpha = 0.09$ における連合ベクトル $\xi^{1,1}$ の想起過程を示す. 相互想起部へはキーベクトル η^1 そのものを入力した ($\mathbf{y} = \eta^1$). 横軸が時間を示し, 縦軸が式 (6.10) のオーバーラップ m_i^1 を示す. 時刻 $t = -1$ のオーバーラップはオーバーラップ $\bar{m} = 1.0$ を表す. グラフは下から順に類似度 a が 0.1 刻みに $a = 0.0, 0.1, \dots, 1.0$ となっている. 図 6.4(a),(b) は計算機シミュレーションから得られた想起過程の一例である. ニューロン数は $N = M = 1000$ ($\beta = 1.0$) とした. 記憶率は $\alpha = 0.09$ である. 図 6.4(c) ~ (f) は理論から得られた想起過程である. 近似の次数が $n = 1, 4$ の場合について示した.

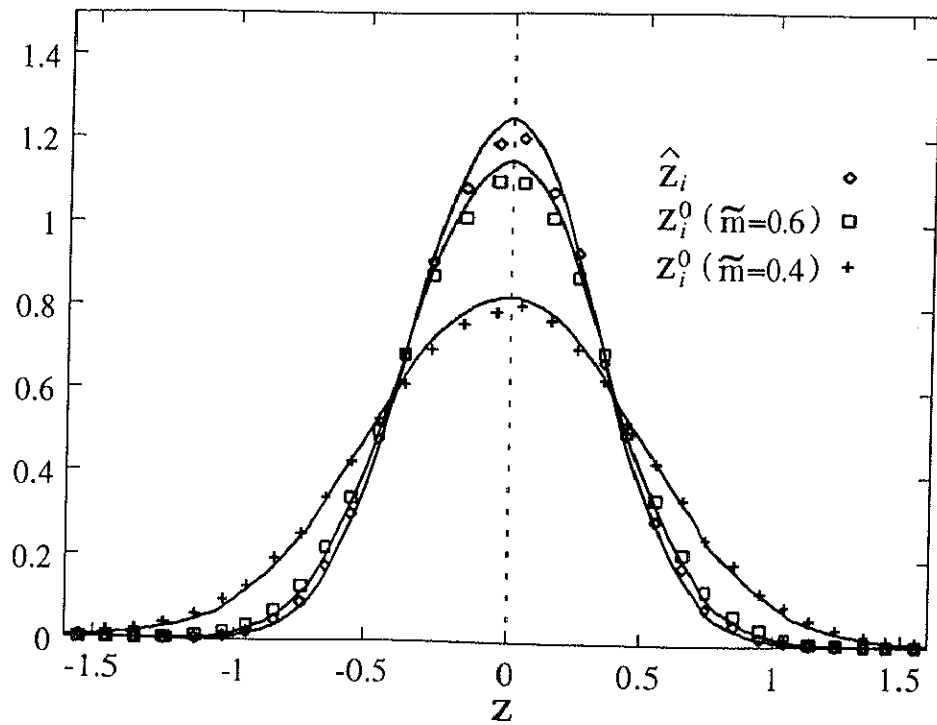


図 6.2: The distribution of crosstalk noise: $M = N = 500$, $\alpha = 0.1$.

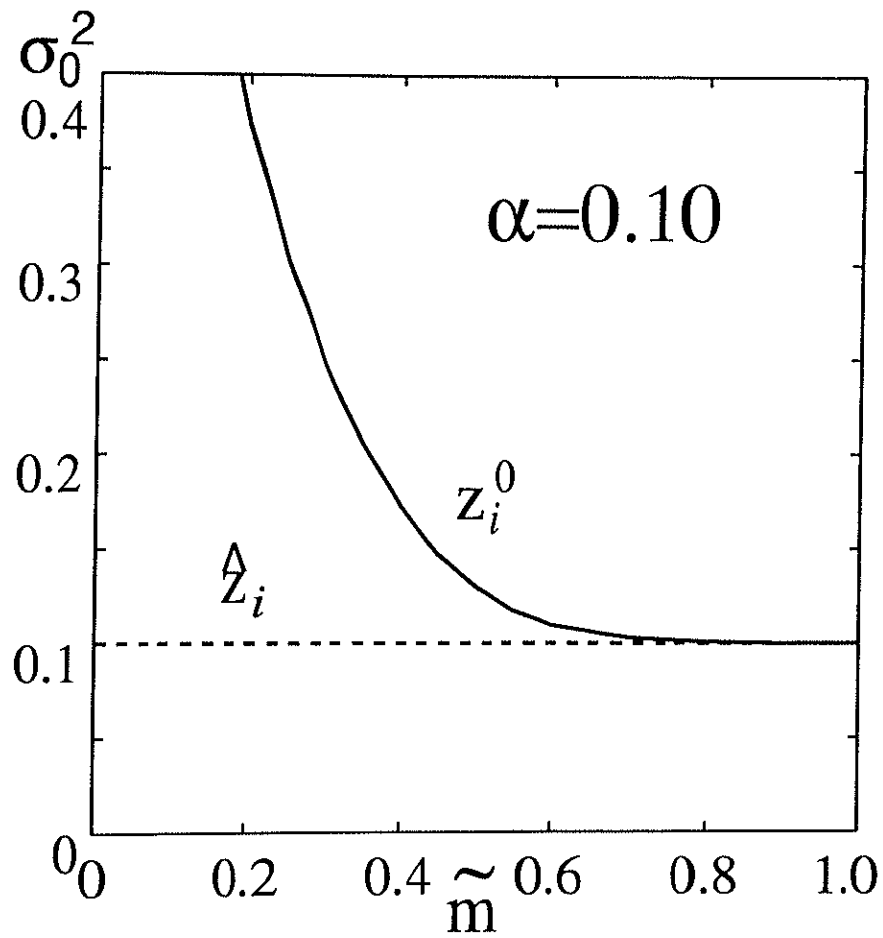


図 6.3: The initial overlap \tilde{m} and the variance of crosstalk noise \hat{z}_i and z_i^0 . Shown is a case where the loading rate is $\alpha = 0.1$. The variance σ_0^2 approximates to α as $\tilde{m} \rightarrow 1$.

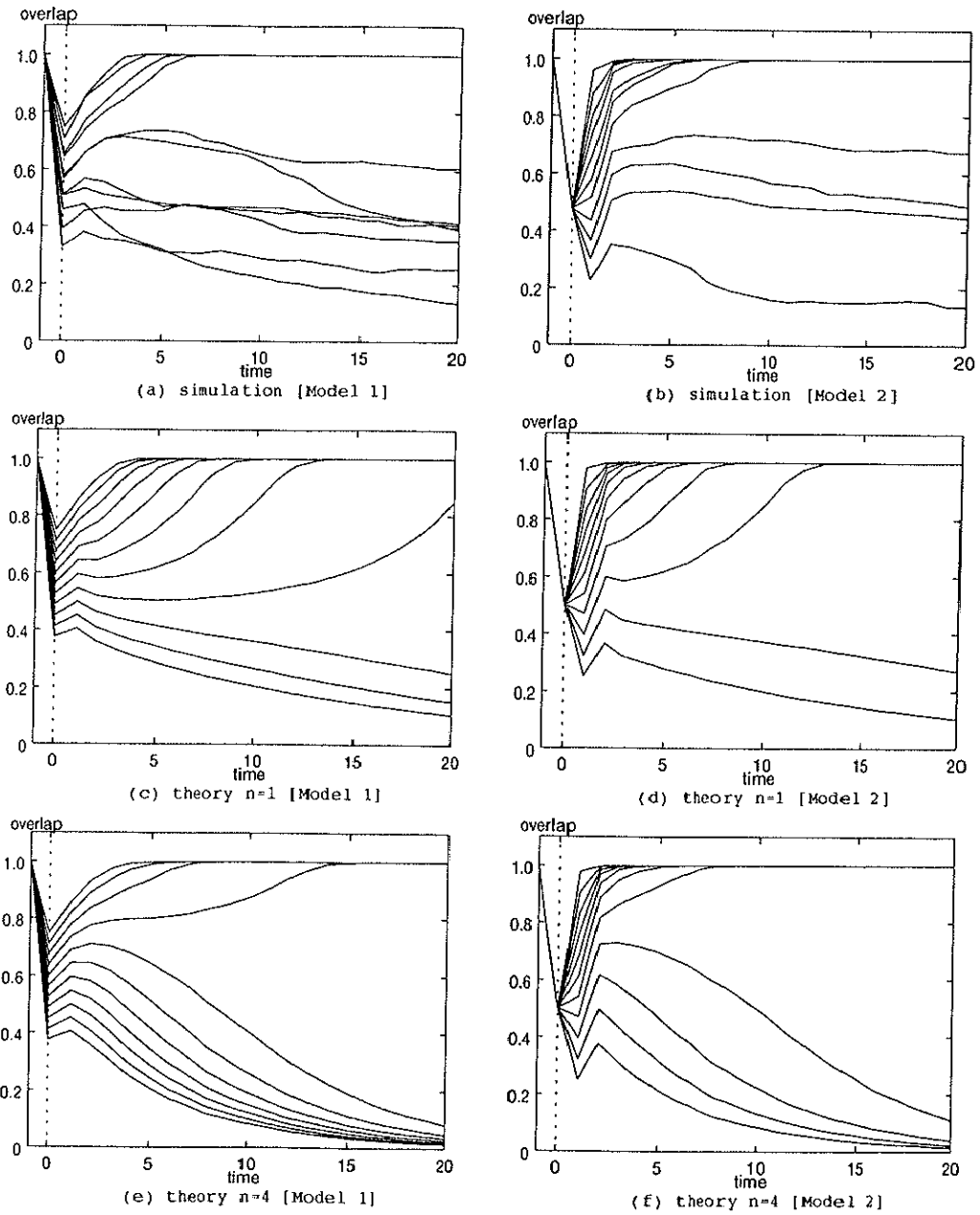


図 6.4: Overlaps \tilde{m} and m_i^1 : In the case of loading rate $\alpha = 0.09$ and one-to-three associations ($k = 3$). (a),(b) Results of the computer simulations, where $N = 1000$. (c)-(f) correspond to 1st- and 4th-order approximations, respectively.(a),(c),(e) show the result for model 1. (b),(d),(f) for model 2.The curves represent the overlaps in order of similarity $a = 0.0, 0.1, \dots, 1.0$ from the bottom.

図 6.4 からわかるように、類似度 a がある値 a_c 以上であれば、連合ベクトルが想起され、それ以下の場合には混合ベクトル ζ^1 に収束するか、その他の平衡状態 (偽記憶) に収束する。すなわち外部入力を用いることにより、混合ベクトル ζ^1 や偽記憶の想起を避けて、連合ベクトルを想起することができる。この a_c を臨界類似度と定義する。臨界類似度 a_c はモデル 1 の場合、図 6.4(a) より、計算機シミュレーションでは $a_c > 0.6$ である。図 6.4(c),(e) より、1 次近似の理論 ($n = 1$) では $a_c > 0.3$ 、4 次近似の理論 ($n = 4$) では $a_c > 0.6$ である。また、モデル 2 の場合、図 6.4(b) より、計算機シミュレーションでは $a_c > 0.3$ である。図 6.4(d),(f) より、1 次近似の理論 ($n = 1$) では $a_c > 0.1$ 、4 次近似の理論 ($n = 4$) では $a_c > 0.3$ である。これらの結果より、高次近似の理論はほぼ定量的に計算機シミュレーションの結果を表していると言える。

6.4.3 モデルの比較

ここで、外部入力によってモデル 1 とモデル 2 のどちらの場合がより連合ベクトルを想起しやすいかを検討しよう。ここでは、各ベクトルの次元が $M = N (\beta = 1.0)$ であるとする。式 (C.1) と式 (C.3) より、時刻 $t = -1$ と $t = 0$ でのクロストークノイズの分散を比較すると、 $\sigma_0^2 > \tilde{\sigma}^2$ である。クロストークノイズの点から考えると、クロストークノイズの分散が小さいほど、外部入力の影響を強く受ける。そのため、外部入力を時刻 $t = -1$ に加えたモデル 1 の方が連合ベクトル $\xi^{1,1}$ が想起されやすくなると思われる。しかしながら、図 6.4 より、臨界類似度 a_c はモデル 2 の方が小さく、想起能力が高くなることが示唆された。このことは、連合ベクトル $\xi^{1,k}$ のオーバーラップ \tilde{m}, m_0^k と外部入力の類似度 a を比較することで説明できる。式 (6.13) と式 (6.15) からわかるように、オーバーラップ $\tilde{m}, m_0^{1,k}$ と類似度 a との比は、 $\tilde{m} > m_0^{1,k}$ より外部入力を時刻 $t = 0$ に加えた場合の方が時刻 $t = -1$ に加えた場合よりも小さくなっている。すなわち、モデル 2 ではいったんオーバーラップが時刻 $t = 0$ で小さくなっているため、外部入力の影響を大きく受け、臨界類似度 a_c が小さくなると考えられる。

そこで、臨界類似度 a_c の記憶率 α への依存性を調べた。図 6.5 と図 6.6 のグラフは、1 対 3 の場合 ($k^\mu = 3$) の臨界類似度を示しており、それぞれモデル 1 とモデル 2 の場合を示している。横軸が記憶率 α を示し、縦軸が類似度 a であり、連合ベクトル $\xi^{1,1}$ を想起できる臨界類似度 a_c を示している。臨界類似度 a_c 以上では $\xi^{1,1}$ が想起され、それ以下では想起は失敗に終わる。相互想起部へはキーベクトルそのものを入力した ($\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}^1, \tilde{m} = 1.0$)。計算機シミュレーションは $M = N = 1000 (\beta = 1.0)$

を用いた。図のエラーバーは20回試行した際の a_c の標準偏差を表す。理論は次数 $n = 1, 2, 3, 4$ のそれぞれの場合について臨界類似度 a_c を求めたものである。近似の次数が高くなるにつれて、計算機シミュレーションによる結果に漸近することがわかる。図6.5と図6.6において $\alpha \approx 0.03$ 付近で、 a_c が一度小さくなり、その後増加する点に興味深い。これは混合ベクトル $\zeta_i^1 = \text{sgn}(\xi_i^{1,1} + \xi_i^{1,2} + \xi_i^{1,3})$ が $\alpha = 0.030$ で不安定になるからである[7]。図6.5と図6.6より、モデル2の方がモデル1よりも小さい臨界類似度 a_c を持つため、より連合ベクトル $\xi^{1,1}$ を想起しやすいと言える。

次に、 $\bar{m} < 1.0$ であり、 $\beta = 1.0$ の場合を考えてみよう。すなわち、キー入力 y は不完全なキーベクトルである。小さな初期オーバーラップ、特に $\bar{m} < 0.5$ に対しては、時刻 $t = 0$ における信号成分 $m_0^s \xi_i^{1,s}$ は必ずしも時刻 $t = -1$ における信号成分 $\beta \bar{m} \xi_i^{1,s}$ よりも小さいとは限らないので、2つのモデルの臨界類似度は異なる。図6.7は小さな初期オーバーラップ $\bar{m} = 0.4$ における臨界類似度を示す。様々な記憶率 α に対して、 $\bar{m} = 1.0$ のときとは対照的に、 $\bar{m} = 0.4$ ではモデル1の臨界類似度はモデル2の臨界類似度よりも小さい。 $\alpha = 0.09$ で $\beta = 1.0$ のときの様々な \bar{m} に対する臨界類似度 a_c を図6.8に示す。実線はモデル1の値を示し、破線はモデル2の値を示す。図より、モデル1の a_c とモデル2の a_c は初期オーバーラップ \bar{m} に依存して変化することがわかる。

前述の議論では、 $\beta = 1.0$ である場合を考えてきた。しかしながら、式(6.6)における状態 x^0 は β に依存する。そこで、 $\beta \neq 1.0$ であり、 $\bar{m} = 1.0$ の場合を考える。様々な β の値に対するモデル1とモデル2の臨界類似度を図6.9と図6.10に示す。モデル1の臨界類似度 a_c は β と共に増加するが、モデル2の臨界類似度 a_c はほとんど一定である。

$\beta = 1.0$ の場合と比べると、 $\beta = 0.5$ では、モデル1の臨界類似度がモデル2の臨界類似度よりも小さくなる。それゆえに、様々な β の値に対する臨界類似度を求める必要がある。図6.11は $\alpha = 0.09$ で $\bar{m} = 1.0$ の場合における臨界類似度を示す。モデル1の状態 x^0 とモデル2の状態 x^1 を比較することによって、 \bar{m} と β への依存性を議論しよう。モデル1の状態 x^0 は、

$$x_i^0 = \text{sgn}(\beta \bar{m} \xi_i^{1,1} + \beta \bar{m} \xi_i^{1,2} + \beta \bar{m} \xi_i^{1,3} + \tilde{z}_i + \tilde{h}_i), \quad (6.20)$$

で与えられ、 $\beta \bar{m}$ に明示的に依存している。明らかに、 $\beta \bar{m}$ がより小さくなれば、想起過程はクロストークノイズ \tilde{z}_i と外部入力 \tilde{h}_i により影響を受ける。それゆえに、モデル1の臨界類似度 a_c は $\beta \bar{m}$ と共に大きくなる。一方、モデル2の状態 x^0 は、

$$x_i^0 = \text{sgn}(\beta \bar{m} \xi_i^{1,1} + \beta \bar{m} \xi_i^{1,2} + \beta \bar{m} \xi_i^{1,3} + \tilde{z}_i). \quad (6.21)$$

で与えられる。小さな分散 σ^2 に対しては $x_i^0 \simeq \zeta_i^1$ を満たすので、オーバーラップ

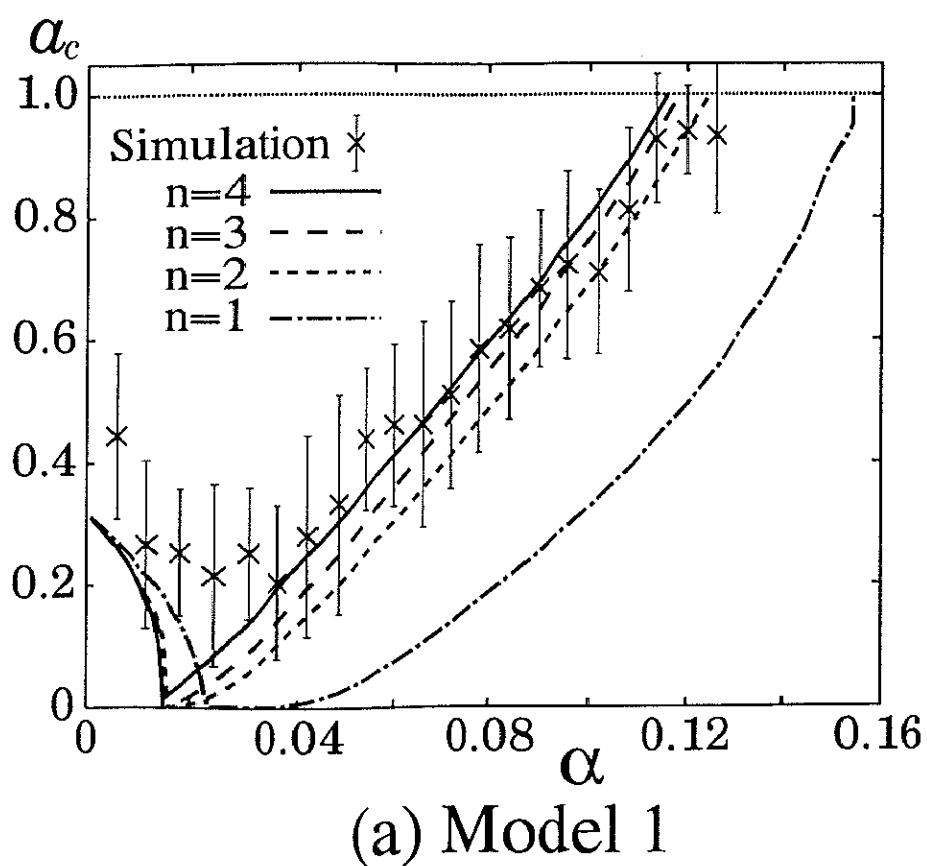
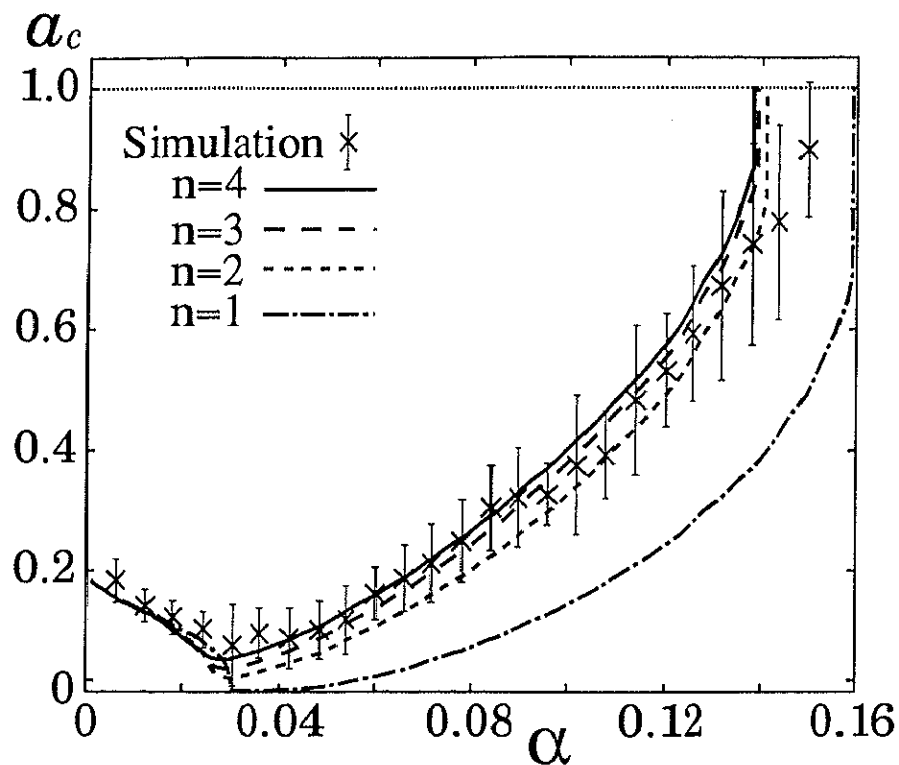


図 6.5: The critical similarity a_c of Model 1: The abscissa is time t , the ordinate is critical similarity a_c . The associative vector $\xi^{1,1}$ can be recalled if a is more than the critical value a_c . An external input is added at $t = -1$, the results of computer simulation show 20 times average of a_c , where $M = N = 1000$ ($\beta = 1.0$) and the results of the theory show the case of 1st, 2nd, 3rd, and 4th order approximations, respectively.



(b) Model 2

図 6.6: The critical similarity a_c of Model 2: The abscissa is time t , the ordinate is critical similarity a_c . The associative vector $\xi^{1,1}$ can be recalled if a is more than the critical value a_c . An external input is added at $t = 0$, the results of computer simulation show 20 times average of a_c , where $M = N = 1000(\beta = 1.0)$ and the results of the theory show the case of 1st, 2nd, 3rd, and 4th order approximations, respectively.

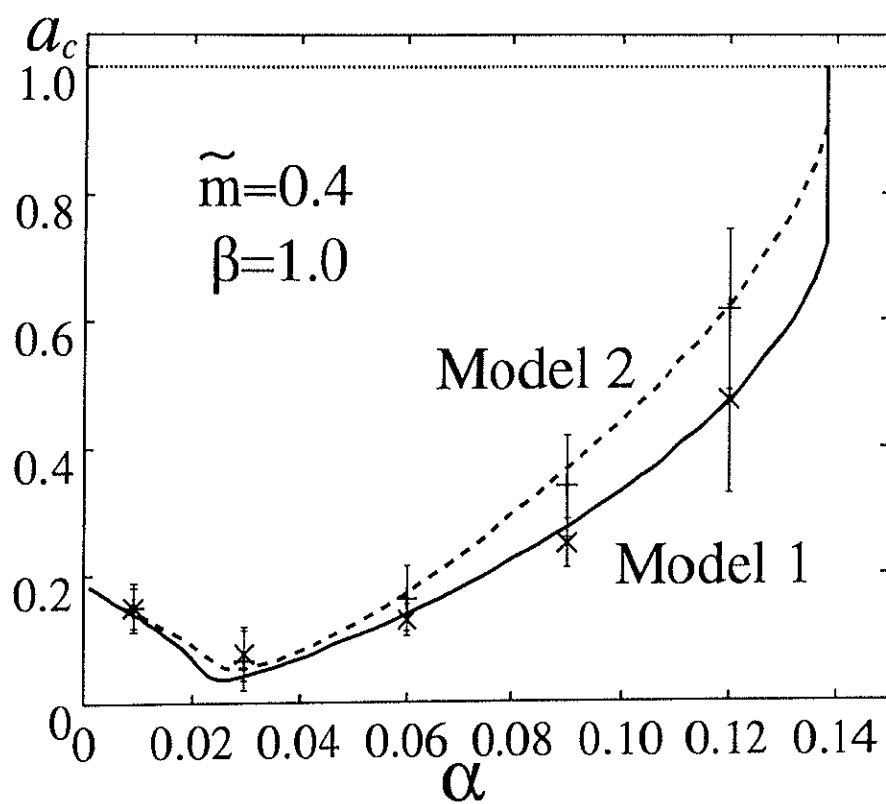


図 6.7: The critical similarity a_c and the loading rate α for the small initial overlap $\tilde{m} = 0.4$ ($\beta = 1.0$). The theoretical results were obtained using the 4th-order theory.

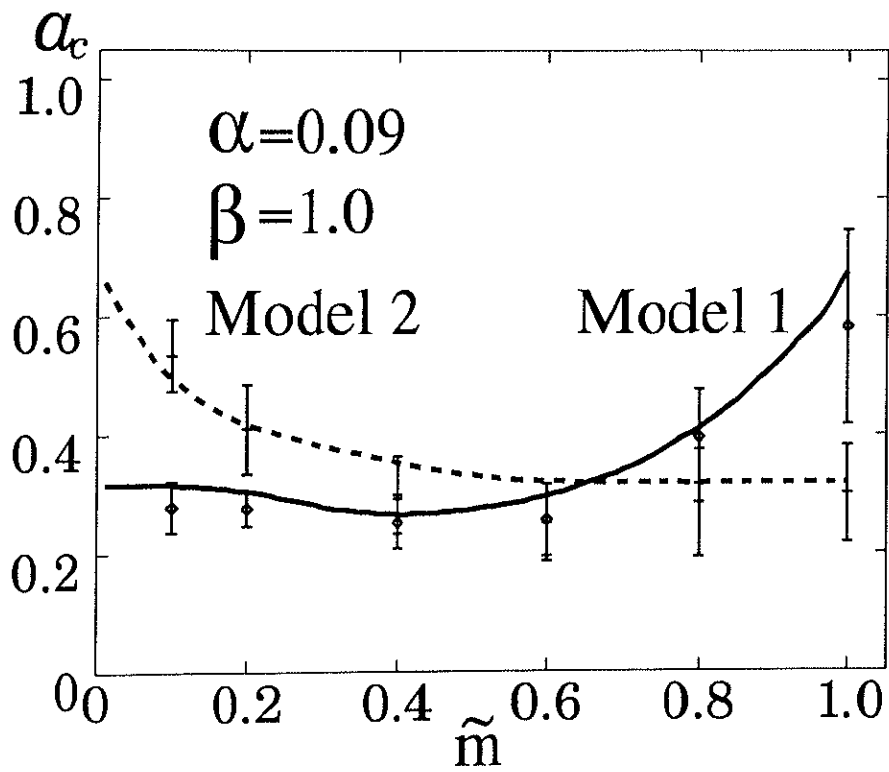


図 6.8: The critical similarity α_c and the initial overlap \tilde{m} , where $\alpha = 0.09$ and $\beta = 1.0$. The theoretical results were obtained using the 4th-order theory.

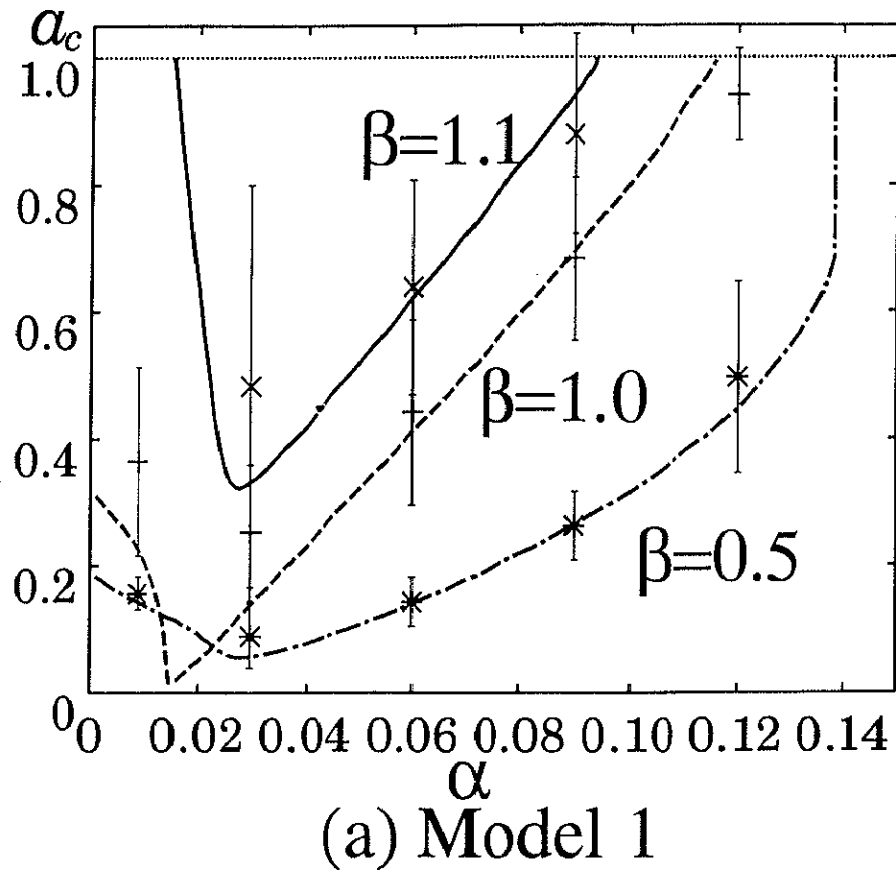


図 6.9: The critical similarity a_c and the loading rate α for various values of β ($\tilde{m} = 1.0$). The results indicates for Model 1. The theoretical results were obtained using the 4th-order theory.

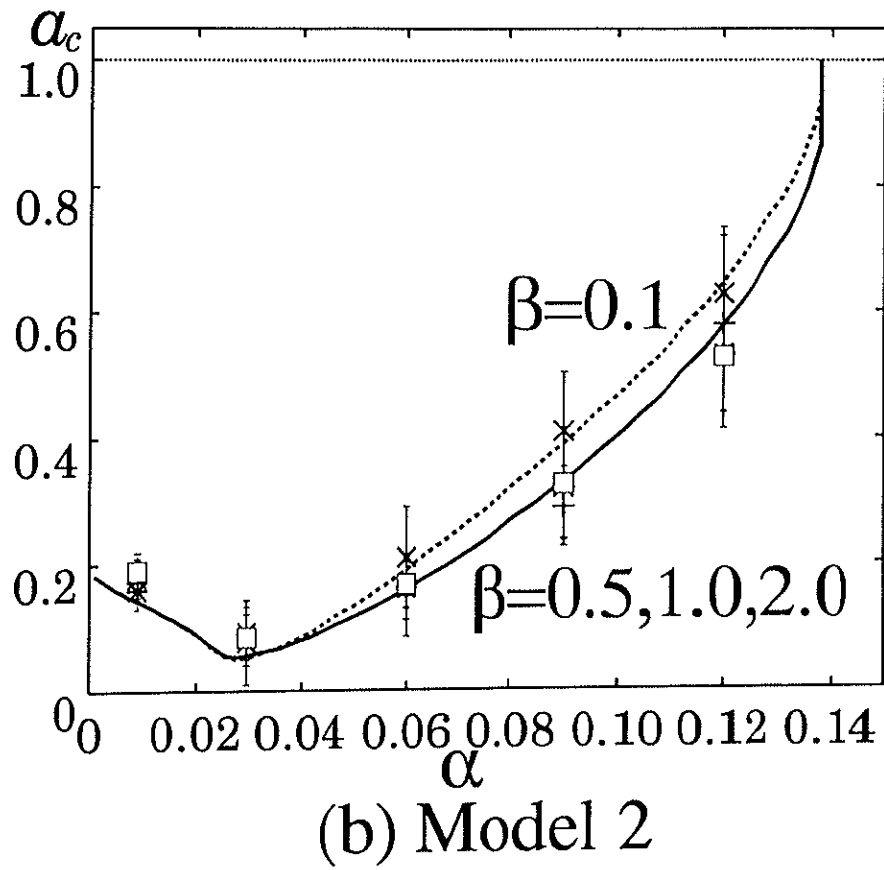


図 6.10: The critical similarity α_c and the loading rate α for various values of β ($\tilde{m} = 1.0$). The results indicates for Model 2. The theoretical results were obtained using the 4th-order theory.

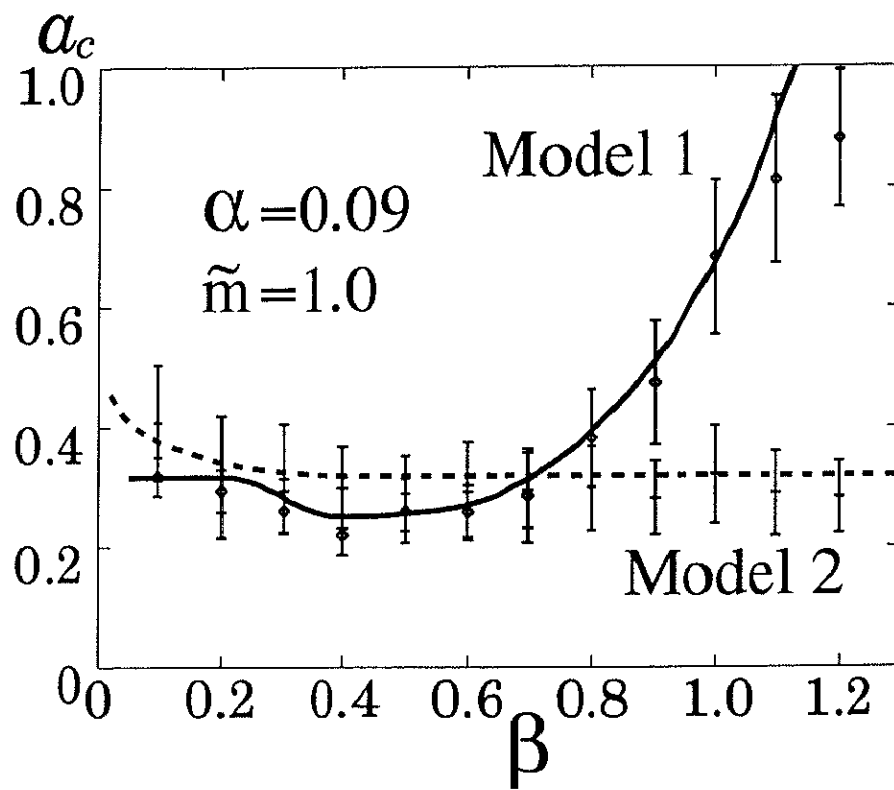


図 6.11: The critical similarity α_c and the dimension ratio β , where $\alpha = 0.09$ and $\tilde{m} = 1.0$. The theoretical results were obtained using the 4th-order theory.

$m_0^\kappa, \kappa = 1, 2, 3$ はほとんど $1/2$ に等しい. モデル 2 の次の状態 x^1 は,

$$x_i^1 \simeq \text{sgn} \left(\frac{1}{2} \xi_i^{1,1} + \frac{1}{2} \xi_i^{1,2} + \frac{1}{2} \xi_i^{1,3} + z_i^0 + h_i \right). \quad (6.22)$$

で与えられる. $m_0^\kappa \simeq 1/2$ を満たすので, オーバラップ m_0^κ は \bar{m} と β に明示的には依存しない. それゆえに, モデル 1 に比べて, モデル 2 の想起過程は \bar{m} と β にほとんど依存しない.

図 6.11 に示したように, モデル 2 の臨界類似度はほとんど一定である. しかし, β が小さい範囲 ($\beta \leq 0.4$) ではわずかに臨界類似度が大きくなっている. 同様に, 図 6.8 において, \bar{m} が減少すると臨界類似度が大きくなっている. この理由は時刻 $t = 0$ における分散 σ_0^2 が \bar{m} と β に依存するからである. 式 (C.3) と式 (C.4) より, 分散 σ_0^2 は

$$\sigma_0^2 = \alpha + \frac{2}{\pi} \left\langle \exp \left(- \frac{(\beta \bar{m} \xi_i^{1,1} + \beta \bar{m} \xi_i^{1,2} + \beta \bar{m} \xi_i^{1,3})^2}{2\alpha\beta} \right) \right\rangle_{(\xi)}, \quad (6.23)$$

となる. ここで, $\langle \cdot \rangle_{(\xi)}$ は連合ベクトル $\xi^{1,1}, \xi^{1,2}, \xi^{1,3}$ に関する平均を表す. $\beta \bar{m}$ が小さくなると, 分散 σ_0^2 が大きくなるので, 臨界類似度 a_c は \bar{m} または β が小さくなるに従って大きくなる.

6.4.4 臨界記憶率 α_r

図 6.5 ~ 図 6.7, 図 6.9, 図 6.10 に見られる垂線や臨界類似度 a_c と $a = 1$ の交点について考えよう. これらは外部入力によって到達できる平衡状態が消失する記憶率 α の臨界値を示している. この臨界値を臨界記憶率 α_r と定義する. この値は $a = 1.0$ の外部入力入力を加えても平衡状態に到達できない記憶率を表している. α_r は本モデルの自己想起部の記憶容量 $\alpha_c = 0.138$ よりも明らかに小さい. ここで, 1次, 2次, 3次, 4次の近似理論より得られる記憶容量の値は, それぞれ $\alpha_c = 0.160, 0.142, 0.140, 0.139$ であることに注意する. より高次の近似理論を用いれば, この値は平衡状態の理論 [6] から得られる記憶容量 $\alpha_c = 0.138$ に漸近する. いくつかの文献では, この α_c を臨界記憶率と呼ぶことがある. しかしながら, 本研究では, 臨界記憶率と記憶容量を区別する. ここで言う記憶容量 α_c は全ての平衡状態が不安定になる転移点として定義される. 臨界記憶率 α_r を求めるためには, ネットワークの動的な振舞いを考慮する必要があるため, 平衡状態の理論では扱うことができず, 動的な理論を用いる必要がある.

モデル 1 の臨界記憶率は 1次, 2次, 3次, 4次の近似理論で, $\alpha_r = 0.155, 0.125, 0.119, 0.117$ である (図 6.5). モデル 2 の臨界記憶率は $\alpha_r = 0.160, 0.142, 0.140, 0.139$ であ

る(図6.6). モデル2の α_r は自己想起部の記憶容量 $\alpha_c = 0.138$ とほとんど等しいが, モデル1の α_r は α_c よりも小さい. 図6.5, 図6.6と図6.7, 図6.9, 図6.10を比較すると, モデル1の α_r は \bar{m} と β に強く依存するが, モデル2の α_r はほとんど依存しないようにみえる. この推測を確かめるために, 様々な \bar{m} と β に対して α_r を求めた. 図6.12は \bar{m} に対する臨界記憶率 α_r を示す. 値は4次の近似理論から得られた結果である. モデル1の臨界記憶率は, $\bar{m} < 0.77$ の範囲では $\alpha_r = 0.139$ であるが, $\bar{m} \geq 0.77$ の範囲では \bar{m} が大きくなるに従って α_r は小さくなる. それゆえに, 到達できる連合ベクトルの数は, 完全なキー入力を与えた場合よりも不完全なキー入力を与えた方が大きくなる. モデル2の臨界記憶率は, $\bar{m} \geq 0.23$ の範囲では $\alpha_r = 0.139$ であるが, $\bar{m} < 0.23$ の範囲では小さくなる. 従って, モデル2の α_r も \bar{m} に依存する.

図6.13は β に対する臨界記憶率 α_r を示す. 値は4次の近似理論から得られた結果である. モデル1の臨界記憶率は, $\beta < 0.80$ の範囲では $\alpha_r = 0.139$ であるが, β が大きくなるに従って急激に小さくなる. $\beta \geq 1.21$ に対する臨界記憶率は $\alpha_r = 0$ である. 従って, モデル1には β に関して臨界値 β_c が存在する. モデル2の臨界記憶率は, $\beta \geq 0.05$ の範囲では $\alpha_r = 0.139$ であるが, β が小さくなるに従って α_r は小さくなる. 従って, モデル2の α_r も小さな領域で β に依存する. 臨界記憶率 α_r が \bar{m} と β に依存するので, 様々な \bar{m} と β に対して臨界記憶率 α_r を求めた. 図6.14と図6.15に示したように, 臨界記憶率 α_r はモデルを比較するための1つの規準を与える.

図6.5と図6.6は1対3の場合($k^\mu = 3$)の臨界類似度と臨界記憶率を示している. ここで, キーベクトルに対応する連合ベクトルの数 k^μ を大きくした場合について考えてみよう. まず, 1対5の場合($k^\mu = 5$)の臨界類似度と臨界記憶率を求めた(図6.16と図6.17). 図6.5と図6.16, および図6.6と図6.17を比較すると, 1対5の連合の場合ではモデル1では, 臨界記憶率 α_r がさらに小さくなることがわかる. また, モデル2では臨界類似度 α_c は大きくなるが, 臨界記憶率 α_r はほとんど変化しないことがわかる. しかしながら, k^μ が変化した場合においても, 定性的な性質は大きく変化していない. そこで, 様々な連合ベクトル数 k^μ に対する臨界記憶率 α_r を求めた(図6.18). モデル1の α_r は k^μ が大きくなるに従って小さくなる. 一方, モデル2の α_r は k^μ が大きくなるに従ってわずかに小さくなることがわかる. これは臨界類似度 α_c の値が次第に大きくなるため, 臨界記憶率 α_r が小さくなるからである.

統計神経力学より得られた記憶容量が平衡状態の理論から得られた値と等しいので, これまでは引き込み領域内の初期状態からであれば, 記憶された連合ベクトルは全て想起することができると考えられてきた[6, 7, 41]. しかしながら, 本モデル

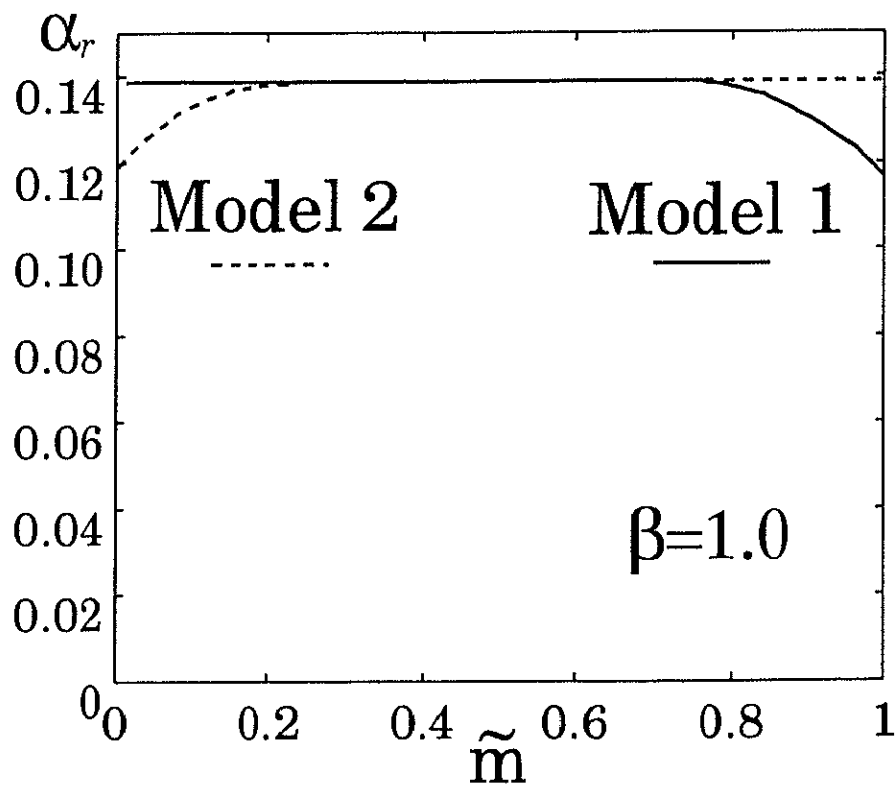


図 6.12: The critical loading rate α_r and \tilde{m} ($\beta = 1.0$). The theoretical results were obtained using the 4th-order theory.

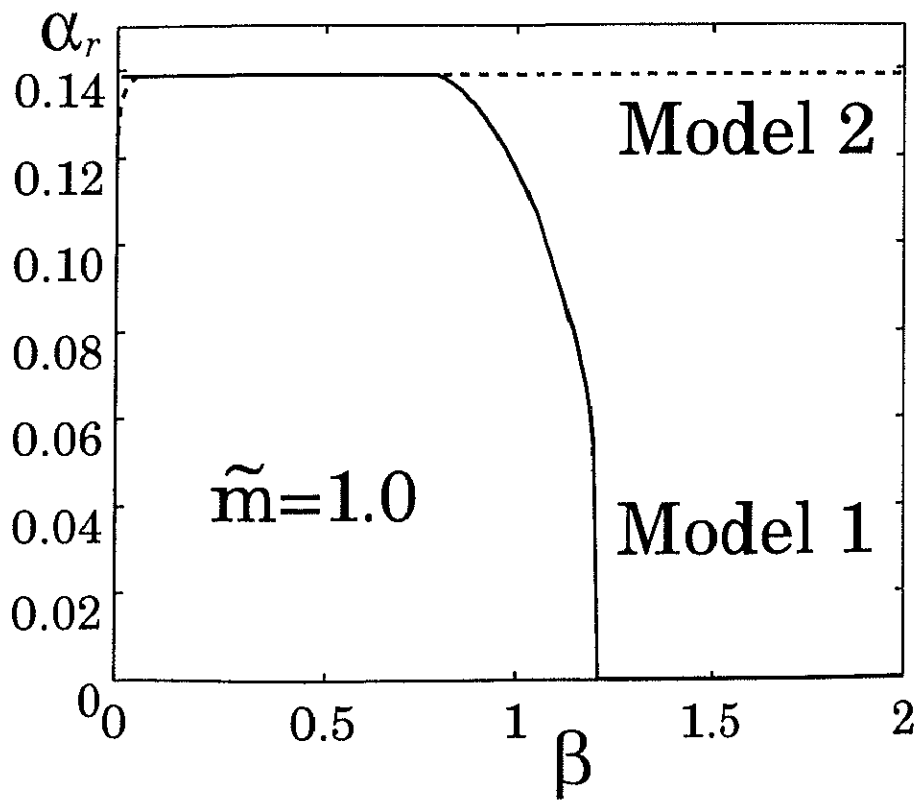


図 6.13: The critical loading rate α_r and β ($\tilde{m} = 1.0$). The theoretical results were obtained using the 4th-order theory.

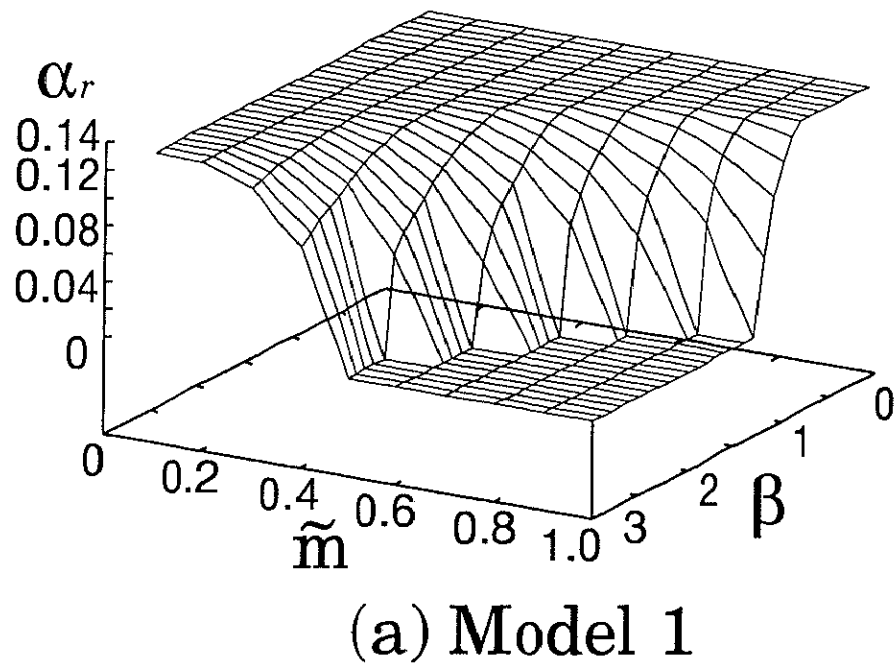


図 6.14: The critical loading rate α_r . The results indicates for Model 1. The theoretical results were obtained using the 4th-order theory.

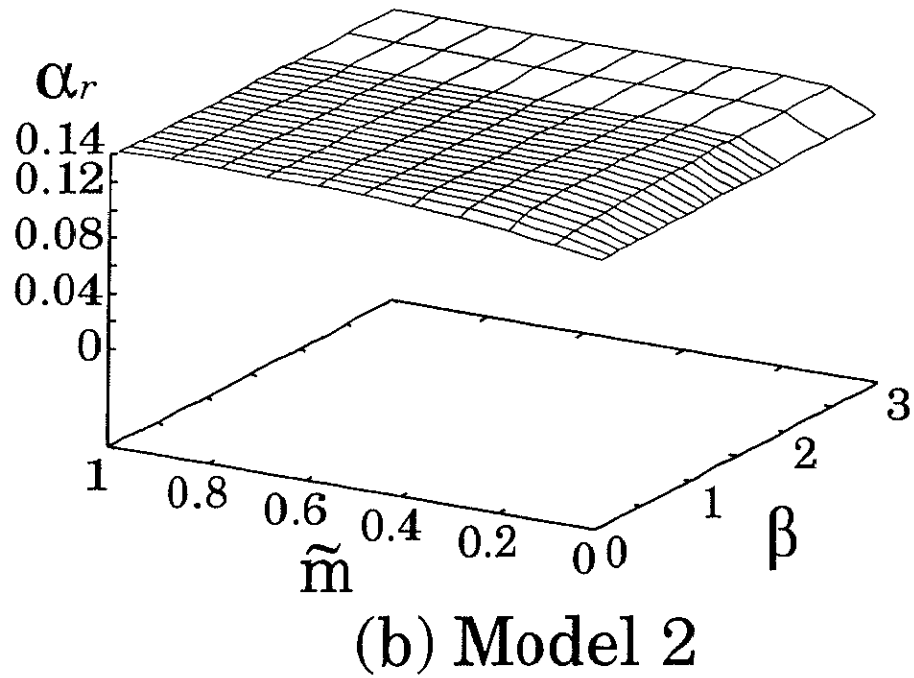


図 6.15: The critical loading rate α_r . The results indicates for Model 2. The theoretical results were obtained using the 4th-order theory.

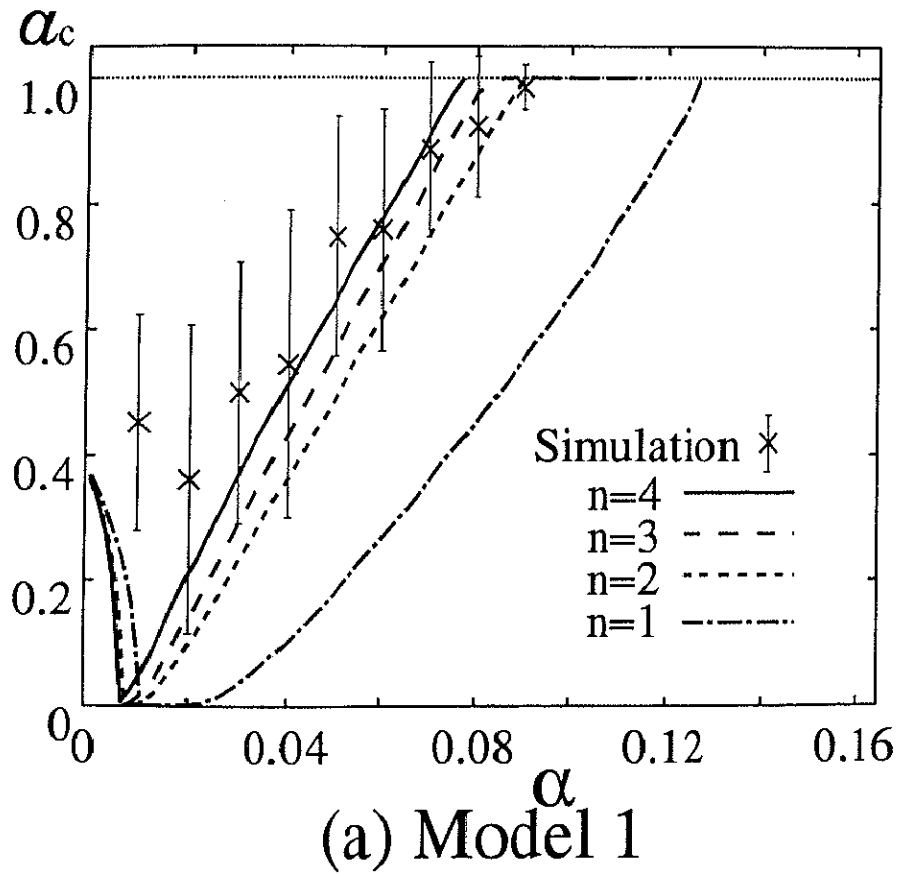


図 6.16: The critical similarity α_c and the critical loading rate α_r of Model 1 with one-to-five associations ($k^\mu = 5$)

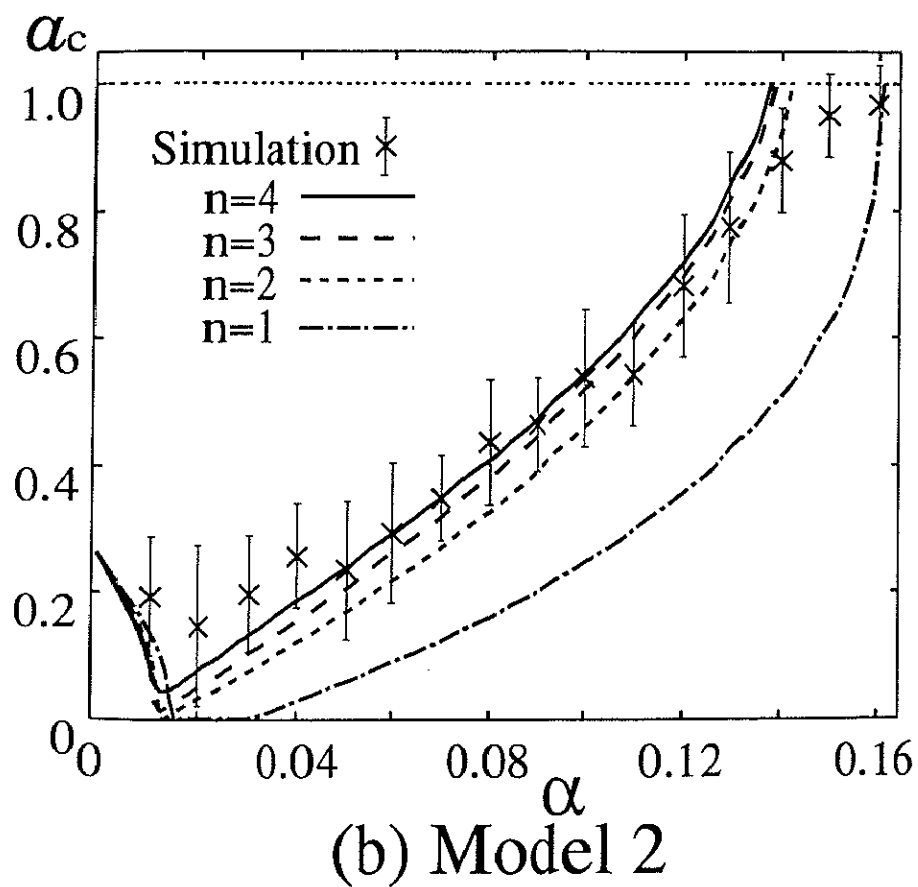


図 6.17: The critical similarity α_c and the critical loading rate α_c of Model 2 with one-to-five associations ($k^\mu = 5$)

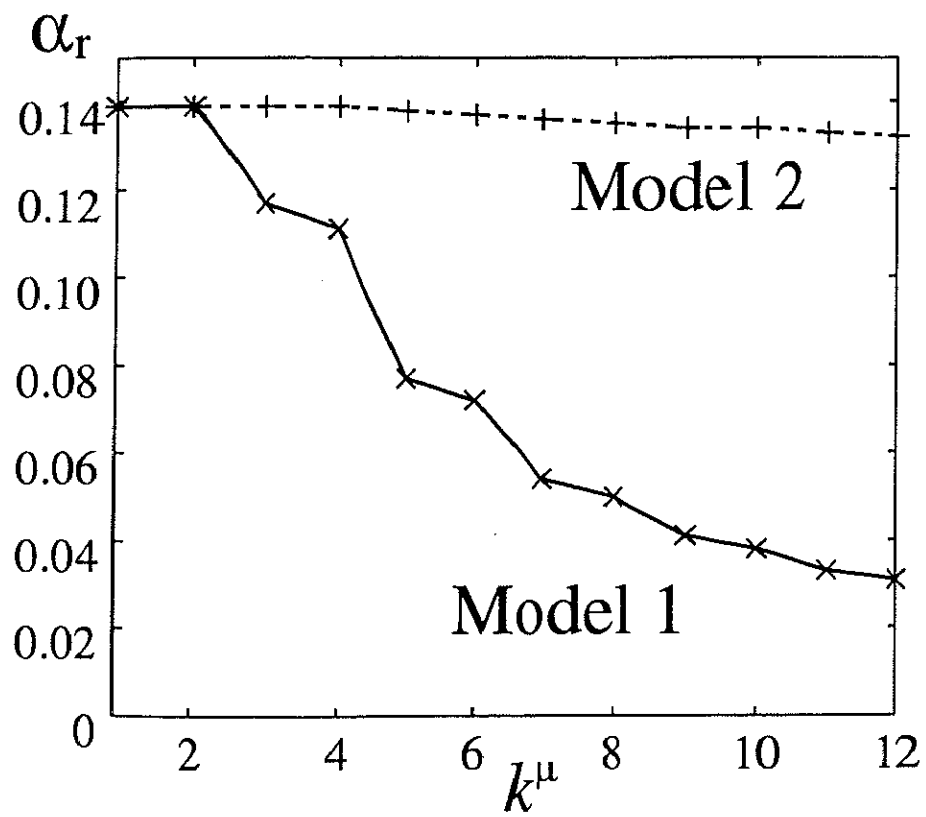


図 6.18: The critical loading rate α_r for various k^μ : One-to- k^μ associations are stored.

では外部入力を与えたとしても到達不可能な平衡状態が存在する。言い換えると、記憶容量 α_c よりも小さく、臨界記憶率 α_r よりも大きい記憶率のときには、全ての平衡状態は安定であるが、複数の連合ベクトルの候補から1つの連合ベクトルを選択して想起できず、平衡状態へ到達することができない。興味深い点は、モデル1において、不完全なキー入力に対する α_r の方が完全なキー入力に対する α_r よりも大きいことである。

6.5 まとめ

連想記憶モデル HASP は認知心理学的現象を説明することができるモデルであり、1対多の連合を行なうことができる連想記憶モデルである。1対多の連合を行なう連想記憶モデルにおいて、選択的想起の過程を議論するために、本研究では外部入力を持つ相互想起部と自己想起部からなる HASP 型の連想記憶モデルを提案した。本モデルは文脈からの手がかりを用いることによって、選択的想起を行なう。外部入力は文脈からの手がかりに相当する。1対多の連合が相互想起部に記憶されるので、1つのキー項目に対して複数の連合項目が想起される。従って、出力は外部入力なしでは混合状態となる。導入した外部入力を用いることによって、最も適した連合項目を選択的に想起することができる。

想起過程のダイナミックスを解析する場合においては、回路の状態と連合ベクトルとの間の統計的な相関を考慮しなければならない。特に HASP 型の連想記憶モデルの場合、相互想起部の出力が自己想起部へ入力されるため、自己想起部での初期状態が問題となる。そこで、時刻 $t=0$ におけるクロストークノイズの分布を解析した。計算機シミュレーションより時刻 $t=0$ におけるクロストークノイズの分布は、自己想起部のみで連合ベクトルを想起する場合と相互想起部を含む場合とでは明らかに相違があった。これは相互想起部を含む場合では、時刻 $t=0$ におけるクロストークノイズの分布が初期オーバーラップ m に依存するからである。この効果を理論的に解析するために統計神経力学を用いて、巨視的状态方程式を導出した。その結果、理論で予測した結果と計算機シミュレーションによる結果はよく一致し、理論が相互想起部を含め統一的に扱えることが確かめられた。

次に1対多の連合を行う場合について解析した。外部入力が無い場合では、出力は混合ベクトルになってしまう。そこで、本論文では各回路に外部入力を加え、その有効性を検討した。外部入力は連合ベクトルに類似したものから無相関なものまでを考慮し、連合ベクトルとの相関を類似度と定義した。その結果、連合ベクトルが想起できる類似度には臨界類似度 a_c が存在し、臨界類似度以上では外部入力に

よって連合ベクトルが想起できる。また、外部入力を与える回路の違いによりモデル1とモデル2の二つの場合を考えた。計算機シミュレーションと理論による結果より、モデル2ではオーバーラップが一旦時刻 $t=0$ で小さくなるため外部入力の影響を強く受けることがわかった。

オーバーラップが臨界類似度に影響を与えるため、初期オーバーラップ \bar{m} とキーベクトルと連合ベクトルの次元の比 β を様々な値に変えて臨界類似度 a_c を評価した。その結果、キー入力完全であるか十分に近い場合には、モデル2の方がモデル1よりも臨界類似度 a_c が小さく、キー入力不完全である場合には、モデル1の方が a_c が小さくなること示された。従って、臨界類似度は初期オーバーラップ \bar{m} に依存する。また、モデル1の臨界類似度は β と共に大きくなるが、モデル2の臨界類似度はほぼ一定である(図6.11)。そこで、初期オーバーラップ \bar{m} と次元の比 β によって、臨界類似度 a_c がどのように変化するかを議論した。外部入力を加えたときの状態を考えると、状態 \mathbf{x}^0 は明示的に $\beta\bar{m}$ に依存している。それゆえに、モデル1の臨界類似度は $\beta\bar{m}$ に伴い大きく変動する。モデル2では、時刻 $t=0$ のオーバーラップが $m_0^k \simeq 1/2, k=1, 2, \dots, k^1$ であるので、 \bar{m} と β に明示的には依存しない。 \bar{m} または β が小さくなると、ある範囲で a_c が大きくなる理由は、時刻 $t=0$ におけるクロストークノイズの分散が \bar{m} と β に依存するからである。

本モデルでは、外部入力によって平衡状態の安定性は影響を受けないので、本モデルの記憶容量は $a_c = 0.138$ である。この記憶容量は本モデルの自己想起部の平衡特性によって決まる。これまで、引き込み領域内の任意の初期状態から連合ベクトルを想起することができると考えられてきたが、1対多の連合を行なう連想記憶モデルにおいて、外部入力を与えたとしても到達不可能な平衡状態が存在することが示された。すなわち、記憶パターンと等しい外部入力を与えた場合でさえ、臨界記憶率 α_r 以上では、平衡状態に到達できない。この α_r を求めるためには、想起過程を考慮する必要がある。

モデル1の臨界記憶率 α_r は \bar{m} と β に依存する。 \bar{m} または β が大きくなると α_r は小さくなる。興味深い点は記憶パターンに近いキー入力を与えると α_r が小さくなることと、 $\alpha_r = 0$ となる臨界値 β_c が存在することである。 β_c の値は \bar{m} に依存する。 $\bar{m} = 1.0$ のときには $\beta_c = 1.21$ となる。モデル2の臨界記憶率 α_r も \bar{m} と β に依存し、 \bar{m} または β が小さくなると α_r は小さくなる。このように、臨界記憶率 α_r はモデルの性能を示す指標となる。

さらに、臨界記憶率 α_r は、キーベクトルに対応する連合ベクトルの数 k^k にも依存することがわかった。モデル1では k^k が大きくなると、 α_r は大幅に減少する。一方、モデル2では k^k が大きくなると、 α_r は小さくなるものの、大きく減少するこ

とはない。臨界記憶率 α_r が小さくなるのは、臨界類似度 a_c が大きくなり、外部入力によって想起できる領域が狭くなるからである。以上のように、臨界類似度 a_c と臨界記憶率 α_r により、両モデルの特性が明かになった。

第7章 まとめと結論

7.1 連想記憶モデルの想起過程

本研究では、相関型連想記憶モデルのダイナミクスについて統計神経力学を用いて議論した。統計神経力学は離散時間同期ダイナミクスで表される連想記憶モデルの想起過程を解析することができる。統計神経力学が提案されて以降、連想記憶モデルの様々なモデルに対して統計神経力学が適用されている。本研究では、統計神経力学を非単調出力関数の場合やスパース符号化した場合に適用し、その有効性を議論した。

想起過程を解析した結果、鞍点方程式より得られる不安定解は不安定平衡点になっており想起過程において、想起の成否が分かれる重要な点であることが分かった。系列想起の場合では、平衡状態の理論から得られる不安定定常状態と統計神経力学から得られる値は一致する。一方、自己想起の場合では、わずかにずれが見られた。また、計算機シミュレーション結果と比較すると、想起が成功する場合は良く一致するのに対して、失敗する境界付近からずれが大きくなる傾向がある。そこで、出力関数が非単調な場合について想起過程を調べ、同様の現象が現れるかを検討した。非単調出力関数を用いた場合では、full-orderの理論のみが有効であり、近似理論は破綻してしまう。full-orderの理論で引き込み領域を求めた結果、記憶率 α が大きな範囲で理論と計算機シミュレーションに差がみられた。

記憶パターンをスパース符号化すると、記憶容量が増大することが知られており、この場合を議論することは非常に重要である。スパース・パターンを用いる場合には、発火率を一定に保つ必要がある。そこで、出力関数はsgn関数をシフトした関数を用いた。また、しきい値の制御やシナプス結合に側抑制の項を導入した。これらを考慮するために、(1).ランダム・パターンとシフトした関数を用いる場合、(2).スパース・パターンとsgn関数を用いる場合、(3).スパース・パターンとシフトした関数を用いる場合を検討した。いずれの結果も理論が計算機シミュレーションをほぼ定量的に表していることが示された。しかしながら、記憶率 α が大きな範囲で結果にずれが見られた。これはクロストークノイズの平均値の項の影響であることが示唆された。

以上より、全体的には統計神経力学は計算機シミュレーションによる結果を良く表し、ほぼ定量的に議論できることがわかる。さらに精度の高い議論をするためには、クロストークノイズの平均値の項を理論に取り込む必要があると思われる。

7.2 1対多の連合を行なう連想記憶モデル

統計神経力学はダイナミクスを解析できる有効な理論であり、平衡状態の理論では解析が困難である連想記憶モデルを解析することができる。本研究では、中でも1対多の連合を扱う連想記憶モデルを取り上げた。従来の相関型連想記憶モデルは1対1の連想のみを扱っており、人間の脳と比べると非常に限定的な連想を扱ってきた。従って、より人間らしい連想記憶モデルを扱うために、1対多の連合を取り上げ、その想起過程について議論した。1対多の連合を行なう連想記憶モデルでは、想起する項目が文脈からの情報により動的に変化するため、想起過程を議論する必要がある。

1対多の連合を行うモデルとして連想記憶モデル HASP[21]が提案されているが、これまでに HASP の記憶容量やダイナミクスは解析されていなかった。そこで、HASP の絶対容量の解析を行った [23]。また、ダイナミクスについては HASP 型の連想記憶モデルを提案し、統計神経力学を用いてその巨視的状态方程式を導出した [25]。さらに、新たに1対多の連合を行う連想記憶モデルを提案し、本モデルについて1対多の連合を行う場合の想起過程を統計神経力学を用いて解析した [26, 27, 28, 30]。

1対多の連合を行う場合には、相互想起部の出力は混合状態となるため、この中から記憶した連合ベクトルを想起するためには、バイアスとして外部入力が必要である。そこで、本論文では、外部入力を与える時刻の違いにより2つのモデルを提案し、それぞれ連合ベクトルが想起できる臨界類似度を求めた。臨界類似度により、自己想起部に外部入力を加えた方が効率良く、連合ベクトルが想起できることが分かった。

1対多の連合を行う連想記憶モデルは、多義語の持つ多義性の解消過程とうまく対応を取ることができる。心理学の知見において、言語の多義性の解消過程には2つの段階があると言われている [53, 54, 31]。初期段階では文脈との適合性とは無関係に対応する語義が想起される意味活性段階があり、その後文脈に適合する語義のみが残る一義化が行われる意味選択段階がある。これらの知見より、初期段階には相互想起型連想記憶があり、その後の語彙選択段階には文脈に適合する連合項目を想起する自己想起型の機構があると考えられる。このような心理学的な仮説に対しても、提案した1対多の連合を行なう連想記憶モデルより得られた知見や手法が今

後役立つことを期待する。

さらに、1対多の連合を行なう連想記憶モデルにおいて、外部入力を加えたとしても到達不可能な平衡状態が存在することがわかった。従来の相関型連想記憶モデルでは、統計神経力学より得られる引き込み領域において、引き込み領域内の任意の状態から全ての平衡状態へ到達できると考えられてきた。しかしながら、本モデルの場合においては、外部入力によって到達できない平衡状態が存在する。これらの平衡状態には記憶容量以内であれば、初期状態を変えることにより到達できることから、この平衡状態は安定であることがわかる。到達可能な平衡状態が消失する記憶率を臨界記憶率 α_r と定義し、 α_r が初期オーバーラップ \bar{m} とキー項目と連合項目の次元の比 β に依存するかを解析した。また、1つのキー項目に対応する連合項目の数 $k^{\#}$ を変えたときの α_r も求めた。その結果、外部入力を相互想起部に与えるモデル 1 は各パラメータに強く依存し、変動が大きいことがわかった。一方、外部入力を自己想起部に与えるモデル 2 は変動の小さい安定なモデルであることがわかった。以上のように、臨界類似度と臨界記憶率によって、本モデルの特性が明らかになった。

謝 辞

本研究を進めるに当たり、御指導して頂いた筑波大学電子・情報工学系平井有三教授、徳永隆治助教授に感謝致します。平井有三教授には筑波大学情報学類における卒業研究以来、連想記憶モデル HASP について御助言を賜りました。徳永隆治助教授には卒業研究において、数多くの有益な議論と助言を賜りました。また、板橋秀一教授、坂本直人教授、寅市和男教授、金野秀敏助教授には副査をお引き受け頂き、誠に感謝致します。

本研究で用いた統計神経力学は、統計神経力学の高次近似理論を提案した科学技術振興事業団 ERATO 川人動態脳プロジェクトの岡田真人氏より基本から教授を受けました。また、筑波大学大学院博士課程における統計神経力学を用いた連想記憶モデルの想起過程の解析は同氏との共同研究です。本研究を進めるに当たり、数多くの有益な議論や御助言を賜わり、深く感謝致します。

筑波大学大学院博士課程に在学中に、理化学研究所のジュニア・リサーチ・アソシエイトとして、理化学研究所情報創成システム研究チームに参加させて頂きました。本研究を進めるに当たり、常に激励して頂いた脳型情報システム研究グループのグループ・ディレクターである甘利俊一教授に感謝致します。また、セミナー等において有益な議論や御助言を賜った同チームの村田昇氏、福水健二氏、尾関智子氏、中原裕之氏、池田思朗氏をはじめとする諸氏に感謝致します。

参考文献

- [1] Amari, S., "Learning patterns and pattern sequences by self-organization nets of threshold elements," *IEEE Transactions on Computers*, vol. c-21, no. 11, pp. 1197-1206, 1972.
- [2] Amari, S., "Neural theory of association and concept-formation," *Biological Cybernetics*, vol. 26, pp. 175-185, 1977.
- [3] 甘利 俊一, "神経回路網の数理," 産業図書, 1978.
- [4] Amari, S., & Maginu, K., "Statistical neurodynamics of associative memory," *Neural Networks*, vol. 1, pp. 63-73, 1988.
- [5] Amari, S., "Characteristics of sparsely encoded associative memory," *Neural Networks*, vol. 2, pp. 451-457, 1989.
- [6] Amit, D.J., Gutfreund, H., & Sompolinsky, H., "Storing infinite numbers of patterns in a spin-glass model of neural networks," *Physical Review Letters*, vol.55, no.14, pp.1530-1533, 1985.
- [7] Amit, D.J., Gutfreund, H., & Sompolinsky, H., "Information storage in neural networks with low levels of activity," *Physical Review A*, vol.35, no.6, pp.2293-2303, 1987.
- [8] Amit, D.J., "Neural networks counting chimes," *Proceeding National Academy of Sciences USA*, vol. 85, pp. 2141-2145, 1988.
- [9] Anderson, J.A., "A simple neural network generating interactive memory," *Mathematical Biosciences*, vol.14, pp.197-220, 1972.
- [10] Buhmann, J., Divko, R., & Schulten, K., "Associative memory with high information content," *Physical Review A*, vol. 39, no. 5, pp. 2689-2692, 1989.

- [11] Coolen, A.C.C., & Sherrington, D., "Dynamics of fully connected attractor neural networks near saturation," *Physical Review Letters*, vol.71, no.23, pp.3886-3889, 1993.
- [12] Coolen, A.C.C., & Sherrington, D., "Order-parameter flow in the fully connected Hopfield model near saturation," *Physical Review E*, vol.49, no.3, pp.1921-1934, 1994.
- [13] Fontanari, J.F., & Köberle, R., "Information storage and retrieval in synchronous neural networks," *Physical Review A*, vol. 36, no. 5, pp. 2475-2477, 1987.
- [14] Fukai, T., Kim, J., & Shiino, M., "Retrieval properties of analog neural networks and the nonmonotonicity of transfer functions," *Neural Networks*, vol.8, pp.341-404, 1995.
- [15] Gardner, E., Derrida, B., & Mottishaw, P. "Zero temperature parallel dynamics for infinite range sping glasses and neural networks," *Journal of Physique*, vol.48, pp.741-755, 1987.
- [16] Guyon, I., Personnaz, L., Nadal, J.P., & Dreyfus, G., "Storage and retrieval of complex sequences in neural networks," *Physical Review A*, vol. 38, no. 12, pp. 6365-6372, 1988.
- [17] Hertz, J., Krogh, A., & Palmer, R.G., "Introduction to the theory of neural computaion," Addison-Wesley, 1991.
- [18] Hirai, Y., "A model of human associative processor(HASP)," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol.SMC-13, no.5, pp.851-857, 1983.
- [19] Hirai, Y., "Mutually linked HASPs: A solution for constraint-satisfaction problems by associative processing," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol.SMC-15, no.3, pp.432-442, 1985.
- [20] 平井 有三, & 上條 憲一 "連想記憶モデル HASP の心理学的妥当性について," *電子情報通信学会 論文誌, D-II*, vol. J70-D-II, no. 1, pp. 175-184, 1987.
- [21] Hirai, Y., & Ma, Q., "Modeling the process of problem-solving by associative networks capable of improving the performance," *Biological Cybernetics*, vol. 59, pp. 353-365, 1988.

- [22] Hopfield, J.J., "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities," *Proceeding National Academy of Sciences USA*, vol.79, pp.2554-2558, 1982.
- [23] 川村 正樹, & 平井 有三, "連想記憶回路 HASP の記憶容量の解析", *電子情報通信学会 論文誌, D-II*, vol.J78-D-II, no.11, pp. 1692-1700, 1995.
- [24] Kawamura, M., & Hirai, Y., "Storage Capacity Analysis on a Model of Human Associative Processing, HASP," *Systems and Computers in Japan*, vol. 28, no. 1, pp. 24-33, 1997.
- [25] 川村正樹, 岡田真人, & 平井有三, "連想記憶モデル HASP の統計神経力学," *日本神経回路学会 第7回全国大会*, 名古屋, pp.257-258, 1996.
- [26] 川村正樹, 岡田真人, & 平井有三, "連想記憶モデルにおける文脈依存的想起," *日本神経回路学会 第8回全国大会*, 金沢, pp.226-227, 1997.
- [27] Kawamura, M., Okada, M., & Hirai, Y., "Analysis of a correlation-type associative memory with one-to-many associations," *ICONIP '97, New Zealand*, pp.885-889, 1997.
- [28] 川村 正樹, 岡田 真人, & 平井 有三, "一対多の連合を記憶する相関型連想記憶モデルの解析," *電子情報通信学会 論文誌, D-II*, vol.J81-D-II, no.6, pp. 1336-1344, 1998.
- [29] 川村 正樹, & 岡田 真人, "相関型連想記憶モデルのダイナミクスの性質," *日本物理学会 秋の分科会*, 沖縄, vol.53, Issue 2, part 3, pp.752, 1998.
- [30] Kawamura, M., Okada, M., & Hirai, Y., "Dynamics of Selective Recall in an Associative Memory Model with One-to-many Associations," *IEEE Transactions on Neural Network*, (conditionally accepted)
- [31] Kintsch, W., & Mross, E.F., "Context effects in word identification," *J. Memory and language*, vol.24, pp.336-349, 1985.
- [32] Kitano, K., & Aoyagi, T., *Journal of Physics A* in press.
- [33] Kohonen, T., "Correlation matrix memories," *IEEE Transactions on Computers*, vol.c-21, no.4, pp.353-359, 1972.

- [34] Ma, Q., & Hirai, Y., "Modeling the acquisition of counting with an associative network," *Biological Cybernetics*, vol.61, pp.271-278, 1989.
- [35] 森田 昌彦, 吉澤 修治, & 中野 馨, "自己相関連想記憶の想起過程とその改良," *電子情報通信学会 論文誌, D-II*, vol.J73, no2, pp.232-242, 1990.
- [36] Morita, M., "Associative memory with nonmonotone dynamics," *Neural Networks*, vol.6, pp.115-126, 1993.
- [37] Nakano, K., "Associatron — A model of associative memory," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol.SMC-2, no.3, pp.380-388, 1972.
- [38] Nishimori, H., & Opris, I., "Retrieval process of an associative memory with a general input-output function," *Neural Networks*, vol.6, pp.1060-1067, 1993.
- [39] Nishimori, H., & Ozeki, T., "Retrieval dynamics of associative memory of the Hopfield type," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26, pp.859-871, 1993.
- [40] 岡田 真人, 三村 和史, & 倉田 耕治, "相関型連想記憶モデルのスパースコーディングと素子のしきい値," *電子情報通信学会 論文誌, D-II*, vol.J77-D-II, no.9, pp. 1934-1936, 1994.
- [41] Okada, M., "A hierarchy of macrodynamical equations for associative memory," *Neural Networks*, vol.8, no.6, pp.833-838, 1995.
- [42] Okada, M., "Notions of Associative Memory and Sparse Coding," *Neural Networks*, vol.9, no.8, pp.1429-1458, 1996.
- [43] Okada, M., Fukai, T., & Shiino, M., "Random and systematic dilutions of synaptic connections in a neural network with a nonmonotonic response function," *Physical Review E*, vol. 57, no. 2, pp. 2095-2103, 1998.
- [44] 岡田 真人, 私信.
- [45] Ozeki, T., & Nishimori, H. "Noise distributions in retrieval dynamics of the Hopfield model," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 27, pp.7061-7068, 1994.
- [46] Palm, G., "On associative memory," *Biological Cybernetics*, vol.36, pp.19-31, 1980.

- [47] 重光 卓, & 岡田 真人, “スパースコーディングされた自己相関型連想記憶モデルの引き込み領域,” 日本神経回路学会誌, vol. 3, pp. 58–64, 1996.
- [48] Shiino, M., & Fukai, T., “Replica-symmetric theory of the nonlinear analogue neural networks,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23, pp.L1009–L1017, 1990.
- [49] Shiino, M., & Fukai, T., “Self-consistent signal-to-noise analysis and its application to analogue neural networks with asymmetric connections,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25, pp.L375–L381, 1992.
- [50] Shiino, M., & Fukai, T., “Self-consistent signal-to-noise analysis of the statistical behavior of analog neural networks and enhancement of the storage capacity,” *Physical Review E*, vol.48, no.2, pp.867–897, 1993.
- [51] Shiino, M., & Fukai, T., “Onset of ‘super retrieval phase’ and enhancement of the storage capacity in neural networks of non-monotonic neurons,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26, pp.L831–L841, 1993.
- [52] Sompolinsky, H., “Neural networks with nonlinear synapses and a static noise,” *Physical Review A*, vol. 34, pp. 2571–2574, 1986.
- [53] Swinney, D.A., “Lexical access during sentence comprehension: (re)consideration of context effects,” *J. Verbal Learning and Verbal Behavior*, vol. 18, pp. 645–658, 1979.
- [54] Tanenhaus, M.K., Leiman, J.M., & Seidenberg, M.S., “Evidence for multiple stages in the processing of ambiguous words in syntactic contexts,” *J. Verbal Learning and Verbal Behavior*, vol.18, pp.427–440, 1979.
- [55] Willshaw, D.J., Buneman, O.P., & Longuet-Higgins, H.C., “Non-holographic associative memory,” *NATURE*, vol.222, pp.960–962, 1969.
- [56] Willshaw, D.J., & Longuet-Higgins, H.C., “Associative memory models,” *Machine Intelligence*, vol.5, B. Meltzer & D. Michie, Eds., Edinburgh, Great Britain: Edinburgh Univ. Press, pp.351–359, 1970.
- [57] Willshaw, D., & Dayan, P., “Optimal plasticity from matrix memory; What goes up must come down,” *Neural Computation*, no.2, pp.85–93, 1990.

- [58] Buckingham, J., & Willshaw, D., "Performance characteristics of the associative net," *Network*, no.3, pp.407-414, 1992.

関連発表論文

学術論文

1. 川村正樹, 平井有三. (1995). 連想記憶回路 HASP の記憶容量の解析, 電子情報通信学会論文誌, D-II, Vol.J78-D-II, No.11, pp.1692-1700.
2. Masaki KAWAMURA, Yuzo HIRAI. (1997). Storage Capacity Analysis on a Model of Human Associative Processing: HASP, *Systems and Computers in Japan*, Vol.28, No.1, pp.24-33. (文献1の翻訳)
3. 川村正樹, 岡田真人, 平井有三. (1998). 一対多の連合を記憶する相関型連想記憶モデルの解析, 電子情報通信学会論文誌, D-II, Vol.J81-D-II, No.6, pp.1336-1344.
4. Masaki KAWAMURA, Masato OKADA, Yuzo HIRAI. Dynamics of Selective Recall in an Associative Memory Model with One-to-many Associations, *IEEE Transactions on Neural Network*, (accepted).

国際会議論文

1. Masaki KAWAMURA, Masato OKADA, Yuzo HIRAI. (1997). Analysis of a correlation-type associative memory with one-to-many associations, *Proceedings of International Conference on Neural Information Processing (ICONIP'97 New Zealand)*, pp.885-889.

学会発表

1. 川村正樹, 岡田真人, 平井有三. (1996). 連想記憶モデル HASP の統計神経力学, 日本神経回路学会 第7回全国大会論文集, 名古屋, pp.257-258.
2. 川村正樹, 岡田真人, 平井有三. (1997). 連想記憶モデルにおける文脈依存的想起, 日本神経回路学会 第8回全国大会論文集, 金沢, pp.226-227.
3. 川村正樹, 岡田 真人. (1998). 相関型連想記憶モデルのダイナミクスの性質, 日本物理学会 秋の分科会 講演概要集, 沖縄, Vol.53, Issue 2, Part 3, pp.752.
4. 川村正樹, 岡田 真人. (1999). スパースコーディングされた連想記憶モデルのダイナミクス, 日本物理学会 第54回年会, (in preparation).

研究会発表

1. 川村正樹, 平井有三. (1994). 連想記憶回路 HASP の記憶容量の解析, 電子情報通信学会技術研究報告, NC-94, No.129, pp.41-48.
2. 川村正樹, 平井有三. (1995). 連想記憶回路 HASP のスパースコーディングの評価, 電子情報通信学会技術研究報告, NC-94, No.563, pp.33-40.
3. 川村正樹, 平井有三. (1996). 連想記憶回路 HASP の相互抑制回路の巨視的状态方程式の導出, 電子情報通信学会技術研究報告, NC-95, No.129, pp.105-112.
4. 川村正樹, 岡田真人, 平井有三. (1997). 一対多の連合を記憶する相関型連想記憶モデルの解析, 電子情報通信学会技術研究報告, NC-97, No.201, pp.69-76.
5. 川村正樹, 岡田真人. (1999). 1対多の連合を行う連想記憶モデル: 到達不可能な平衡状態の存在について, 電子情報通信学会技術研究報告, (in preparation).

付録A 統計神経力学

A.1 自己想起モデルの巨視的状态方程式

A.1.1 巨視的状态方程式

第2.4.1節において、自己想起モデルの巨視的状态方程式を導出した。ここでは、巨視的状态方程式の導出の詳細を述べる。

動作方程式(2.8)とシナプス結合(2.9)より、

$$\begin{aligned}
 x_i^{t+1} &= F \left(\frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu=1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^t + h_i^t \right) \\
 &= F \left((\xi_i^1 - b) m_i^1 + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^t + h_i^t \right) \\
 &= F \left((\xi_i^1 - b) m_i^1 + z_i^t + h_i^t \right), \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 z_i^t はクロストークノイズ、

$$z_i^t = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^t, \tag{A.2}$$

を表し、平均0、分散 σ_t^2 の正規分布に従うと仮定する。

ネットワークの状態 x_j^{t+1} は過去の状態に依存しているので、 $F(\cdot)$ に関して x_j^{t+1} を展開すると、

$$\begin{aligned}
 x_j^{t+1} &= F \left((\xi_j^1 - b) m_i^1 + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\nu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\nu - b) (\xi_k^\nu - b) x_k^t + h_j^t \right) \\
 &= F \left((\xi_j^1 - b) m_i^1 + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\nu \neq 1, \mu}^{\alpha N} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\nu - b) (\xi_k^\nu - b) x_k^t + h_j^t \right) \\
 &\quad + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\mu - b) (\xi_k^\mu - b) x_k^t F'
 \end{aligned}$$

$$= x_j^{t+1,(\mu)} + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\mu - b) (\xi_k^\mu - b) x_k^t F'(\mu), \quad (\text{A.3})$$

となる。ここで、

$$x_j^{t+1,(\mu)} = F \left((\xi_j^1 - b) m_i^1 + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\nu \neq 1, \mu}^{\alpha N} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\nu - b) (\xi_k^\nu - b) x_k^t + h_j^t \right) \quad (\text{A.4})$$

$$F'(\mu) = F' \left((\xi_j^1 - b) m_i^1 + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\nu \neq 1, \mu}^{\alpha N} \sum_{k \neq j}^N (\xi_j^\nu - b) (\xi_k^\nu - b) x_k^t + h_j^t \right) \quad (\text{A.5})$$

と定義する。 $x_j^{t+1,(\mu)}$ は ξ_j^μ と独立になることに注意する。これより、クロストークノイズ z_i^t の時間相関を考慮するために、式(A.2)を展開すると、

$$\begin{aligned} z_i^{t+1} &= \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^{t+1,(\mu)} \\ &\quad + \frac{1}{N^2(1-b^2)^2} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b)^2 (\xi_k^\mu - b) x_k^t F'(\mu) \\ &= z_i^{t+1,(\mu)} + \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{k \neq j}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_k^\mu - b) x_k^t \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N F'(\mu) \\ &= z_i^{t+1,(\mu)} + U_{t+1} z_i^t, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となる。ここで、

$$z_i^{t+1,(\mu)} = \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^{t+1,(\mu)}, \quad (\text{A.7})$$

$$U_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^N F'(\mu), \quad (\text{A.8})$$

と定義する。

クロストークノイズの分散 σ_t^2 は、

$$\begin{aligned} \sigma_{t+1}^2 &= E \left[(z_i^{t+1})^2 \right] \\ &= E \left[(z_i^{t+1,(\mu)} + U_{t+1} z_i^t)^2 \right] \\ &= E \left[(z_i^{t+1,(\mu)})^2 \right] + U_{t+1}^2 \sigma_t^2 + E \left[z_i^{t+1,(\mu)} z_i^t \right] U_{t+1} \\ &= \alpha q_{t+1} + U_{t+1}^2 \sigma_t^2 + 2\alpha \sum_{r=t+1-n}^t q_{t+1,r} \prod_{k=\tau+1}^{t+1} U_k, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

となる。ここで、

$$q_{t+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^{t+1})^2, \quad (\text{A.10})$$

$$q_{t+1,\tau} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{t+1} x_i^\tau, \quad (\text{A.11})$$

と定義する。また、以下の関係を用いた。

$$E \left[(z_i^{t+1,(\mu)})^2 \right] = \alpha q_{t+1}, \quad (\text{A.12})$$

$$E \left[z_i^{t+1,(\mu)} z_i^\tau \right] U_{t+1} = 2\alpha \sum_{\tau=t+1-n}^t q_{t+1,\tau} \prod_{k=\tau+1}^{t+1} U_k. \quad (\text{A.13})$$

この証明は第 A.1.2 節と第 A.1.3 節を参照されたい。

クロストークノイズがガウス分布に従うので、式 (A.1) より以下のように巨視的状態方程式を求めることができる。

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= \frac{1}{N(1-b^2)} \sum_{i=1}^N (\xi_i^\mu - b) x_i^t \\ &= \frac{1}{1-b^2} \left\langle \int Dz (\xi - b) F((\xi - b) m_t + \sigma_t z + h^t) \right\rangle_\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} U_{t+1} &= \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} F'(\mu) \\ &= \left\langle \int Dz F'((\xi - b) m_t + \sigma_t z + h^t) \right\rangle_\xi \\ &= \frac{1}{\sigma_t} \left\langle \int Dzz F'((\xi - b) m_t + \sigma_t z + h^t) \right\rangle_\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} q_{t+1} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^{t+1})^2 \\ &= \left\langle \int Dz F'((\xi - b) m_t + \sigma_t z + h^t)^2 \right\rangle_\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} q_{t+1,\tau} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{t+1} x_i^\tau \\ &= \left\langle \int Dc \int Da \int Db F'((\xi - b) m_t + \sigma_t (d_0 a + d_1 c) + h^t) \right. \\ &\quad \left. \times F'((\xi - b) m_{\tau-1} + \sigma_{\tau-1} (d_0 b + d_1 c) + h^{\tau-1}) \right\rangle_\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle_\xi$ は ξ に関する平均を表し、

$$Dz = \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad (\text{A.18})$$

と定義する。また、 $d_0 = \sqrt{1-d_1^2}$ 、 $d_1 = \sqrt{C_{t,\tau-1}/\sigma_t\sigma_{\tau-1}}$ であり、相関 $C_{t,\tau-1}$ は時刻 t と時刻 $\tau-1$ の間のクロストークノイズの時間相関である。 $C_{t,\tau-1}$ は以下のように与えられる。

$$C_{t,\tau-1} = 0, \quad (\tau = t-n+1, n \geq 1) \quad (\text{A.19})$$

$$C_{t,\tau-1} = \alpha q_{t,\tau-1} + U_t C_{t-1,\tau-1}, \quad (\tau = t-n+2, n \geq 2), \quad (\text{A.20})$$

$$C_{t,\tau-1} = \alpha q_{t,\tau-1} + U_t U_{\tau-1} C_{t-1,\tau-2} + \alpha \sum_{\eta=\tau-n+1}^{\tau-2} q_{t,\eta} \prod_{r=\eta+1}^{\tau-1} U_r \\ + \alpha \sum_{\eta=t-n+1}^{t-1} q_{\eta,\tau-1} \prod_{r=\eta+1}^t U_r, \quad (t-n+3 \leq \tau \leq t, n \geq 3). \quad (\text{A.21})$$

式 (A.20) と式 (A.21) の導出は後の節を参照されたい。

A.1.2 式 (A.12) の証明

式 (A.12) の証明

$$E \left[\left(z_i^{t+1,(\mu)} \right)^2 \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2 (1-b^2)^2} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N (\xi_i^\mu - b)^2 (\xi_j^\mu - b)^2 \left(x_j^{t+1,(\mu)} \right)^2 \\ = \frac{1}{N^2} \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} \sum_{j \neq i}^N \left(x_j^{t+1,(\mu)} \right)^2 \\ = \alpha q_{t+1}. \quad (\text{A.22})$$

A.1.3 時間相関 $q_{t+1,\tau}$

次の関係式が成り立つ。

$$E \left[z^{t,(\mu)} z^{\tau,(\mu)} \right] = \alpha q_{t,\tau}, \quad (\text{A.23})$$

$$E \left[z^{t,(\mu)} z^\tau \right] = \alpha q_{t,\tau} + \alpha \sum_{r=\tau+2-n}^{\tau-1} q_{t,r} \prod_{k=r+1}^{\tau} U_k + \alpha q_{t,\tau+1-n} \prod_{k=\tau+2-n}^{\tau} U_k. \quad (\text{A.24})$$

まず、式(A.6)より、 z_i^t を $n-1$ 時刻前まで展開すると、

$$\begin{aligned}
z_i^t &= z_i^{t,(\mu)} + U_t z_i^{t-1} \\
&= z_i^{t,(\mu)} + U_t z_i^{t-1,(\mu)} + U_t U_{t-1} z_i^{t-2} \\
&= z_i^{t,(\mu)} + U_t z_i^{t-1,(\mu)} + U_t U_{t-1} z_i^{t-2,(\mu)} + U_t U_{t-1} U_{t-2} z_i^{t-3} \\
&\quad \dots \\
&= z_i^{t,(\mu)} + \sum_{\tau=t+2-n}^{t-1} z_i^{\tau,(\mu)} \prod_{r=\tau+1}^t U_r + z_i^{t+1-n} \prod_{r=t+2-n}^t U_r, \tag{A.25}
\end{aligned}$$

となる。

式(A.23)はどちらも ξ_i^μ を含まないので、

$$\begin{aligned}
&E \left[z^{t,(\mu)} z^{\tau,(\mu)} \right] \\
&= E \left[\frac{1}{N^2} \sum_{j \neq i}^N \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} (\xi_i^\mu - b) (\xi_j^\mu - b) x_j^{t,(\mu)} \sum_{k \neq i}^N \sum_{\nu \neq 1}^{\alpha N} (\xi_i^\nu - b) (\xi_k^\nu - b) x_k^{\tau,(\nu)} \right] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{j \neq i}^N \sum_{\mu \neq 1}^{\alpha N} (\xi_i^\mu)^2 (\xi_j^\mu)^2 x_j^{t,(\mu)} x_j^{\tau,(\mu)} \\
&= \frac{\alpha}{N} \sum_{j \neq i}^N x_j^{t,(\mu)} x_j^{\tau,(\mu)} \\
&= \alpha q_{t,\tau}, \tag{A.26}
\end{aligned}$$

と導出できる。

式(A.24)は z^τ に ξ_i^μ を含むので、式(A.25)で展開して、

$$\begin{aligned}
&E \left[z^{t,(\mu)} z^\tau \right] \\
&= E \left[z_i^{t,(\mu)} \left(z_i^{\tau,(\mu)} + \sum_{r=\tau+2-n}^{\tau-1} z_i^{r,(\mu)} \prod_{k=r+1}^{\tau} U_k + z_i^{\tau-n+1} \prod_{k=\tau+2-n}^{\tau} U_k \right) \right] \\
&= E \left[z_i^{t,(\mu)} z_i^{\tau,(\mu)} \right] + \sum_{r=\tau+2-n}^{\tau-1} E \left[z_i^{t,(\mu)} z_i^{r,(\mu)} \right] \prod_{k=r+1}^{\tau} U_k \\
&\quad + E \left[z_i^{t,(\mu)} z_i^{\tau+1-n} \right] \prod_{k=\tau+2-n}^{\tau} U_k \\
&= \alpha q_{t,\tau} + \alpha \sum_{r=\tau+2-n}^{\tau-1} q_{t,r} \prod_{k=r+1}^{\tau} U_k + \alpha q_{t,\tau+1-n} \prod_{k=\tau+2-n}^{\tau} U_k, \tag{A.27}
\end{aligned}$$

と導出できる.

式(A.24)より,

$$\begin{aligned}
& E \left[z^{t,(\mu)} z^\tau \right] U_{\tau+1} \\
&= \left(\alpha q_{t,\tau} + \alpha \sum_{r=\tau+2-n}^{\tau-1} q_{t,r} \prod_{k=r+1}^{\tau} U_k + \alpha q_{t,\tau+1-n} \prod_{k=r+1}^{\tau} U_k \right) U_{\tau+1} \\
&= \alpha q_{t,\tau} U_{\tau+1} + \alpha \sum_{r=\tau+2-n}^{\tau-1} q_{t,r} \prod_{k=r+1}^{\tau+1} U_k + \alpha q_{t,\tau+1-n} \prod_{k=\tau+2-n}^{\tau+1} U_k \\
&= \alpha \sum_{r=\tau+1-n}^{\tau} q_{t,r} \prod_{k=r+1}^{\tau+1} U_k,
\end{aligned} \tag{A.28}$$

となる.

A.1.4 時間相関 $C_{t,\tau-1}$

$C_{t,\tau-1}$ はクロストークノイズ z_i^t と $z_i^{\tau-1}$ の時間相関,

$$C_{t,\tau-1} = E \left[z_i^t z_i^{\tau-1} \right], \tag{A.29}$$

である.

$\tau = t - n + 2, n \geq 2$ のとき, $z_i^{\tau-1} = z_i^{\tau-1,(\mu)}$ とみなすので,

$$\begin{aligned}
C_{t,\tau-1} &= E \left[\left(z_i^{t,(\mu)} + U_t z_i^{t-1} \right) z_i^{\tau-1} \right] \\
&= E \left[z_i^{t,(\mu)} z_i^{\tau-1} \right] + U_t E \left[z_i^{t-1} z_i^{\tau-1} \right] \\
&= \alpha q_{t,\tau-1} + U_t C_{t-1,\tau-1},
\end{aligned} \tag{A.30}$$

となる.

$t - n + 3 \leq \tau \leq t, n \geq 3$ のとき, 式(A.6)と式(A.28)より,

$$\begin{aligned}
C_{t,\tau-1} &= E \left[\left(z_i^{t,(\mu)} + U_t z_i^{t-1} \right) \left(z_i^{\tau-1,(\mu)} + U_{\tau-1} z_i^{\tau-2} \right) \right] \\
&= E \left[z_i^{t,(\mu)} z_i^{\tau-1,(\mu)} \right] + U_t U_{\tau-1} E \left[z_i^{t-1} z_i^{\tau-2} \right] \\
&\quad + U_{\tau-1} E \left[z_i^{t,(\mu)} z_i^{\tau-2} \right] + U_t E \left[z_i^{t-1} z_i^{\tau-1,(\mu)} \right] \\
&= \alpha q_{t,\tau-1} + U_t U_{\tau-1} C_{t-1,\tau-2} + \alpha \sum_{\eta=\tau-n+1}^{\tau-2} q_{t,\eta} \prod_{r=\eta+1}^{\tau-1} U_r
\end{aligned}$$

$$+\alpha \sum_{\eta=t-n+1}^{t-1} q_{\eta, \tau-1} \prod_{r=\eta+1}^t U_r, \quad (\text{A.31})$$

となる。

付録B HASPの絶対容量

B.1 条件の説明

クロストークノイズの大きさが $a_z N = 1$ の場合において、条件 $\Delta_i > 0 (i \in X)$ が常に成立することを示す。

ニューロン群 Z のニューロンの数は $a_z N = 1$ より、1つだけであり、このニューロンの出力を A^Z とすると、ニューロン群 X について、式(5.17)は、

$$\Delta_i = S_i - J_{ij}^A A^Z, \quad i \in X, \quad (\text{B.1})$$

となる。

ニューロン A^Z がニューロン $A_i, i \in X$ と結合している個数に応じて場合分けして考える。

1. ニューロン $A_i, i \in X$ がニューロン A^Z と結合していない場合。

$J_{ij}^A = 0$ であるので条件が成立する。

2. ニューロン A^Z がニューロン群 X の $n (\geq 2)$ 個のニューロン A_1^X, \dots, A_n^X と相互に結合している場合。

ニューロン $A_i^X, i = 1, \dots, n$ はニューロン A^Z からのみ抑制を受けるのに対して、ニューロン A^Z は n 個のニューロン $A_i^X, i = 1, \dots, n$ から抑制を受けるので、ニューロン A^Z が発火することはない。従って $A^Z = 0$ より、条件が成立する。

3. ニューロン A^Z がニューロン群 X の1個のニューロン A_X と相互に結合している場合。

出力 A^Z と A^X は初期値が等しいので、平衡状態において、

$$A^Z = A^X, \quad (\text{B.2})$$

となる。また、 A^Z, A^Y は動作方程式 (5.5) より、次の連立方程式を満たす。

$$-A^X + S_i - J_{ij}^A A^Z = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$-A^Z + S_i - J_{ij}^A A^X = 0, \quad (\text{B.4})$$

よって、式 (B.2) ~ 式 (B.4) より、

$$A^Z = \frac{S_i}{1 + J_{ij}^A} < \frac{S_i}{J_{ij}^A}, \quad (\text{B.5})$$

となるから、条件が成り立つ。

以上より、いずれの場合においても条件 $\Delta_i > 0$ ($i \in X$) が成立する。

付録C 1対多の連合を行う連想記憶モデル

C.1 巨視的状态方程式

想起過程のダイナミックスを解析するために、本モデルの巨視的状态方程式を統計神経力学 [4, 41] を用いて導出する。この理論では、回路全体の状態をいくつかの巨視的状态変数を用いて記述する。また、想起過程は巨視的状态方程式で表される。Okada[41]は Amari-Maginu 理論 [4] を発展させ、想起過程のダイナミックスをほぼ定量的に説明することに成功した。この理論は階層的な構造をもち、 $n-1$ 時刻離れた時刻までのクロストークノイズの時間相関を考慮している。 $n=1$ の場合 Amari-Maginu 理論に一致する。本論文では $n \geq 2$ の巨視的状态方程式を高次近似の理論と呼ぶ。

C.1.1 相互想起部

相互想起部の出力に関して、巨視的状态方程式を導出する。式 (6.7) より、時刻 $t = -1$ でのクロストークノイズの平均は 0 であり、その分散は、

$$\tilde{\sigma}^2 = E \left[\tilde{z}_i^2 \right] = \alpha\beta, \quad (\text{C.1})$$

である。ここで、 α は $\alpha = pk/N$ である。時刻 $t \geq 0$ でのクロストークノイズは、統計神経力学的手法 [4, 41] に基づき平均が 0 で、分散が σ_t^2 である正規分布に従うものと仮定する。

時刻 $t = 0$ での巨視的状态方程式は、

$$m_0^\kappa = \int Dz \left\langle \xi^{1,\kappa} \operatorname{sgn} \left(\sum_{\kappa=1}^k \beta \tilde{m} \xi^{1,\kappa} + \tilde{\sigma} z + \tilde{h} \right) \right\rangle_{(\xi)}, \quad (\text{C.2})$$

$$\sigma_0^2 = \alpha + \tilde{\sigma}^2 U_0^2, \quad (\text{C.3})$$

$$U_0 = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \int Dz z \left\langle \text{sgn} \left(\sum_{\kappa=1}^k \beta \tilde{m} \xi^{1,\kappa} + \tilde{\sigma} z + \tilde{h} \right) \right\rangle_{(\xi)}, \quad (\text{C.4})$$

と表される．ここで、 $\langle \cdot \rangle_{(\xi)}$ は $\xi^{1,1}, \xi^{1,2}, \dots, \xi^{1,k}$ に関する平均を表す．

C.1.2 自己想起部

次に、自己想起部に関して巨視的状态方程式を導出する．時刻 $t \geq 0$ での n 次近似の巨視的状态方程式 [41] は、

$$m_{t+1}^{\kappa} = \int Dz \left\langle \xi^{1,\kappa} \text{sgn} \left(\sum_{\kappa=1}^k m_t^{\kappa} \xi^{1,\kappa} + \sigma_t z + h \delta_{t,0} \right) \right\rangle_{(\xi)}, \quad (\text{C.5})$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha + U_{t+1}^2 \sigma_t^2 + 2\alpha \sum_{\tau=t-n+1}^t q_{t+1,\tau} \prod_{r=\tau+1}^{t+1} U_r, \quad (\text{C.6})$$

$$U_{t+1} = \frac{1}{\sigma_t} \int Dz z \left\langle \text{sgn} \left(\sum_{\kappa=1}^k m_t^{\kappa} \xi^{1,\kappa} + \sigma_t z + h \delta_{t,0} \right) \right\rangle_{(\xi)}, \quad (\text{C.7})$$

と表される．但し、 $\sigma_{-1} \equiv \tilde{\sigma}$ である．

ここで、 $q_{t+1,\tau}$ は時刻 $t+1$ と τ の間の状態の相関であり、

$$q_{t,\tau} \equiv E \left[x_i^t x_i^\tau \right], \quad (\text{C.8})$$

と定義する． $q_{t+1,\tau}$ は、

$$q_{t+1,\tau} = \int Dc \int Da \int Db \left\langle \text{sgn} \left(\sum_{\kappa=1}^k \xi^{1,\kappa} m_t^{\kappa} + \sigma_t (d_0 a + d_1 c) + h \delta_{t,0} \right) \right. \\ \left. \text{sgn} \left(\sum_{\kappa=1}^k \xi^{1,\kappa} m_{\tau-1}^{\kappa} + \sigma_{\tau-1} (d_0 b + d_1 c) + h \delta_{\tau-1,0} \right) \right\rangle, \quad (\text{C.9})$$

で求めることができる．但し、時刻 $t = -1$ との相関は $q_{t+1,-1} = 0$ である．ここで、 d_0, d_1 は第 A.1.1 節で与えられた式である．

筑波大学附属図書館



1 00990 12369 4

本学関係