

第 3 章

局所揺らぎの確率過程

3.1 はじめに

脳を構成する神経細胞のダイナミクスに Hodgkin と Huxley (1952a, b) によって初めて非線形性がとり入れられて以降, 神経細胞の周期放電現象 (FitzHugh, 1975), 引き込み現象 (Perkel *et al.*, 1964) そしてカオス的放電パターン (Hayashi *et al.*, 1992) などその活動が非線形力学の観点から理解できることが示されている。また, 脳の形態学的研究では脳を構成する神経細胞は単一種ではなく多彩な機能を持った神経細胞で構成されていることが明らかにされている (Freeman, 1968)。また脳波によく観測される多くの同期パターンは, 神経細胞集団の活動に非線形性が関与していることを理解できる。こうして脳波を神経細胞間の高次元非線形相互作用の重ね合わせとしてして, また脳を神経細胞が集積した1つの非線形システムとして捉えれば, そのダイナミクス理解には脳に固有の非線形特性を明らかにしていくことが重要である。

前章で示したように脳波時系列は非定常なスペクトル構造を示す。そこで体系の非線形性の観点からこの非定常性を考察してみよう。すなわち, 非線形性の揺らぎの観点から体系を特徴付けることを試みる。一般に, 状態変数の長時間平均には中心極限定理により体系に作用する非線形効果の平均的な側面しか反映されていない。そこで, 中心極限定理に陽に依存しないような局所区間に注目すれば, 限られた状態変数からであっても体系に固有の非線形特性を有効に抽出することができると考えられる。それゆえ, 脳波時系列に非線形変換を適用しそこに含有する脳の非線形特性を抽出することを試みよう。よく知られているように有効な非線形変換により体系を低次元化することが可能であり, 高次元ダイナミクスで記述される脳理解にそのような非線形変換は有効となるはずである。

本章では脳の非線形特性を (i) 局所非線形変換を用いて再構成した確率過程の動的特性考察, (ii) 局所非線形特性を記述する普遍的統計法則, (iii) ウェーブレットスペクトルとの比較によって明確に示していく。

3.2 確率過程の再構成

脳波の不規則変動は時系列のグラフの長さと同関するフラクタル次元(Burlaga and Klein, 1986; Higuchi, 1988)によって簡潔に且つ定量的に表現できるであろう。そこで局所非線形特性を特徴付ける統計量としてフラクタル次元を導入する。一方、高次の脳ダイナミクスを特徴付けるのに高次の非線形効果が重要であると考えられる。そこで脳波の高次積率、すなわち平均、分散、歪度そして尖度を導入し、脳の局所高次非線形効果を考察しよう。これら5つの統計量を用いて脳波時系列の局所非線形特性を統計量値に粗視化し、その確率過程ダイナミクスを用いて脳非線形特性について考察していく。

確率過程の再構成手順は以下の通りである。まず、脳波時系列 $\{x\}$ に対して局所区間 t_L を設定し、統計量

$$(i) \text{ フラクタル次元: } D_L, \quad (3.1)$$

$$(ii) \text{ 平均: } \langle x \rangle_L, \quad (3.2)$$

$$(iii) \text{ 分散: } \sigma_L^2, \quad (3.3)$$

$$(iv) \text{ 歪度: } \gamma_1 = \frac{(x - \langle x \rangle_L)^3}{\sigma_L^3}, \quad (3.4)$$

$$(v) \text{ 尖度: } \hat{\gamma}_2 = \frac{(x - \langle x \rangle_L)^4}{\sigma_L^4} - 3 \quad (3.5)$$

を算出する。そして、解析区間を Δt_L だけずらし、同様に5つの統計量を算出する。この手順を解析時系列末まで順次繰り返し、統計量 q ($q = D_L, \langle x \rangle_L, \sigma_L^2, \gamma_1, \hat{\gamma}_2$)に関する確率過程 $\{q(t)\}$ を再構成する。一般に、長さ t_0 の時系列から再構成される確率過程は

$$N' = \frac{t_0 - t_L}{\Delta t_L} + 1 \quad (3.6)$$

個からなる。あるいは時系列のサンプリング周波数を f とすれば

$$N' = \frac{(t_0 - t_L)f}{\Delta N} + 1, \quad (3.7)$$

$$t_0 f \equiv N_0, \quad (3.8)$$

$$t_L f \equiv N_L \quad (3.9)$$

と表すことができる。図 3.1 には確率過程再構成手法を示す。

さて、パラメータ $t_L, \Delta t_L$ について考察しておく。Isaksson and Wennberg(1976)は、脳波のスペクトル推定における時系列長とその推定精度に関する研究で、非線形変換の特性を用いることによって、非定常性が顕著な場合であっても約3-10秒以上の時系列でその状態変数の推定が可能であることを示している。また、健康者の α 波は数秒以上連続して出現すること(大熊, 1991)から、この特性を反映させることによって健康高齢者と老年期痴呆者との分別が可能となると考えられる。以上のことから t_L は5秒($N_L=1000$)と設定する。このとき、 $t_0=150$ 秒の解析時系列に対して $\Delta t_L = t_L = 5$ 秒とすると(3.6)より $N'=30$

であり、確率過程における確率変数の収束性に関する問題が生じてしまう。それゆえ、本研究では局所解析区間の重複を許すこととする。ところで、健康高齢者と老年期痴呆者脳波の違いの1つに α 波周波数の減少が挙げられる (Klass and Brenner, 1995; Niedermeyer and Lopes da Silva, 1999; 大熊, 1991)。そこで、 δ から θ 波帯域の脳波変化を有効に抽出することができれば時系列の特徴付けが有効となるであろう。そこで $\Delta t_L = 0.2$ 秒 ($\Delta N = 40$) と設定する。このとき、 $N = 726$ であり確率変数の統計的収束性に問題はないとみなせる。以上の考察により、本研究では $t_L = 5$ 秒、 $\Delta t_L = 0.2$ 秒として確率過程を再構成する。

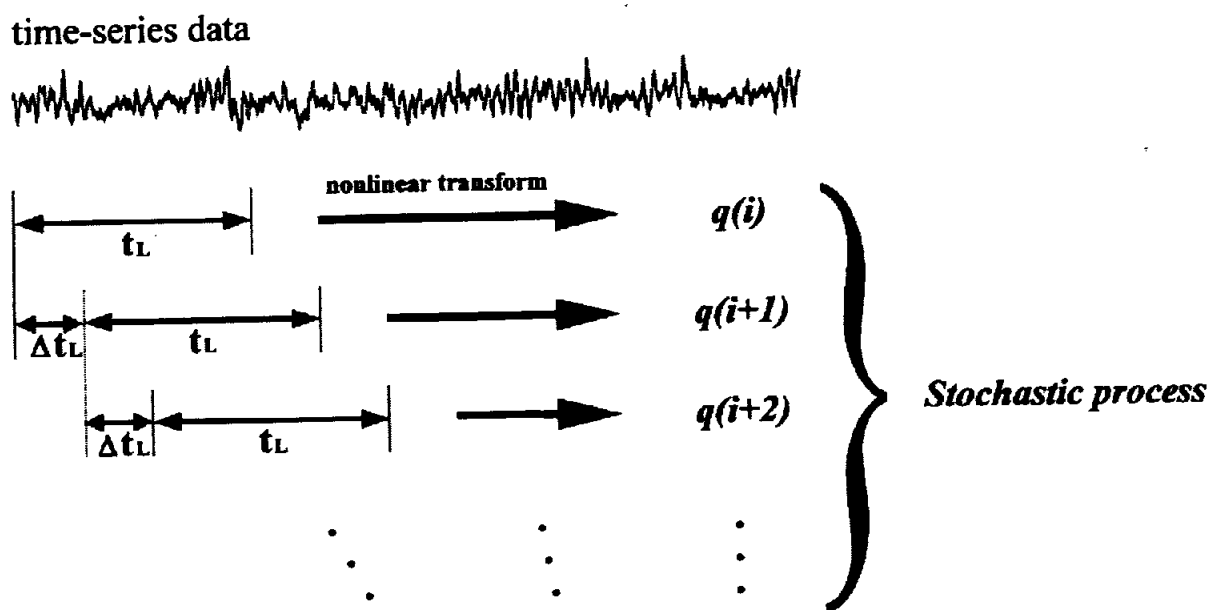


図 3.1: 局所統計量 (i) 局所フラクタル次元, (ii) 局所平均, (iii) 局所分散, (iv) 局所歪度, (v) 局所尖度の確率過程再構成方法.

3.2.1 局所フラクタル次元

“フラクタル”の概念が時系列解析に導入される以前には、時系列の示す複雑さを定量的に表現することは容易ではなかった。従来より、流体力学における乱流解析や地球物理学における時系列解析などにおいては多くの事象に複雑な不規則変動が観測されており、それらの複雑さを定量的に表現するために、スペクトルインデックス評価(Kolmogorov, 1941; Patrick and Pugh, 1969)や、R/S解析(Mandelbrot and Wallis, 1969)などが用いられていた。

フラクタルはMandelbrot(1977)により提唱された概念である。フラクタルの有用性はすぐに認識され時系列解析においても乱雑さの定量化に取り入れられた。フラクタルを定量的に特徴付けるのがフラクタル次元である。フラクタル次元は非整数値をとり、またフラクタルの概念は様々に拡張することができるので多くのフラクタル次元が定義されている。その中でもよく用いられているフラクタル次元として(i) 容量次元 D_0 , (ii) 情報次元 D_1 , (iii) 相関次元 D_2 などが挙げられる。またこれらの次元を包含する一般的な次元も提案されている: 任意の実数 $q(\geq 0)$ を指標としてもつ一般化フラクタル次元 D_q (Halsey *et al.*, 1986)。通常、時系列解析ではGrassberger and Procaccia(1983)による計算アルゴリズムを用いた相関次元 D_2 の評価が行われている。しかし D_2 、一般には D_q の計算では、時系列から高次元の位相空間を再構成し、そこでの軌道のつくる集合を粗視化して軌道点の収束性の程度を計算するため、少数サンプル時系列に対してフラクタル次元値を評価する際には、微小体積内を通過する軌道点の確率密度関数が十分に収束せず、精度良い D_2 評価ができない。すなわち D_2 評価の信頼性を高めるためにはサンプル数を増加させなければならない。そのため本研究における局所区間時系列に対するフラクタル次元評価に D_2 は適していない。一方で、Burlaga and Klein(1986)は時系列のグラフそのものの長さのスケール則で定義されるフラクタル次元 D を導入した(これは D_0 とは異なる)。しかし、彼らの定義では長さの計算に不適切な点があり、 D の正確な定義はHiguchi(1988)により行われた。そこで、樋口法による D が局所区間時系列、すなわち $N_L=1000$ 点時系列に対して十分な精度をもって評価可能かどうか考察する。

Higuchiの D 推定精度に関する研究(1988)では、ブラウン運動(Brownian motion: BM)時系列に対して D 推定サンプル数を N としたとき

$$N = 2^{17} = 131072 \text{ 点のとき } D = 1.500 \pm 0.0004,$$

$$N = 2^{16} = 65536 \text{ 点のとき } D = 1.508 \pm 0.0011,$$

$$N = 2^{15} = 32768 \text{ 点のとき } D = 1.513 \pm 0.0007$$

であることを示している(よく知られているようにBM時系列は解析的に $D=1.5$ である)。ただし、誤差は標準誤差 σ を用いている。 D は N 減少、すなわち1/2倍になるにつれ単調増加している。そこで、この D 増加率が線形であると仮定してHiguchiの評価値に補外法を適用すれば、 $N=2^{10}=1024$ 点のとき $D=1.538$ と推定される。一方、誤差は単調増加していない。そこで、 $N=2^{17}$ のときの値 $\sigma=0.004$ を基準に、(a) 1/2倍あたりの誤差増加率が0.007であるとする: $N=2^{16}$ のとき $\sigma=0.0011$, $N=2^{15}$ のとき $\sigma=0.0018$ 。一方、(b) 1/4倍あたり

表 3.1: BM 時系列に対する D 推定精度評価

N	$D \pm \sigma$
2^{17}	$1.500 \pm 0.0004^*$
2^{16}	$1.508 \pm 0.0011^*$
2^{15}	$1.513 \pm 0.0007^*$
2^{14}	1.518 ± 0.0013
2^{13}	1.523 ± 0.0050
2^{12}	1.528 ± 0.0113
2^{11}	1.533 ± 0.0200
2^{10}	1.538 ± 0.0311

* Higuchi(1988) より引用

の誤差増加率が0.0003であるとする: $N=2^{15}$ のとき $\sigma=0.0007$. こうして $N=2^{15}$ のとき2つの評価値より平均値を求めると $\sigma=0.00125$ となる. 誤差は N が $(1/2)^k$ 倍($k=1, 2, 3, \dots$)されるにつれ k^2 に比例して増加すると考えられるので, $N=2^{10}$ のときには $\sigma=0.0313$ と推定できる. こうして $N=2^{10}$ のとき D 推定精度は

$$D = 1.538 \pm 0.0313 \quad (3.10)$$

と与えられる. 表3.1には D 推定値と標準誤差 σ 推定値一覧を記した.

一方, 実際に白色正規雑音を用いて数値的にBM時系列とフラクショナルブラウン運動(fractional Brownian motion: FBM)時系列を100000点($f=200\text{Hz}$)生成し, サンプル数 N に依存して D 評価値がどのように変化するか調べてみよう. また本研究では, D 推定精度を確率誤差 $\epsilon=0.6745 \times \sigma$ を用いて評価する.

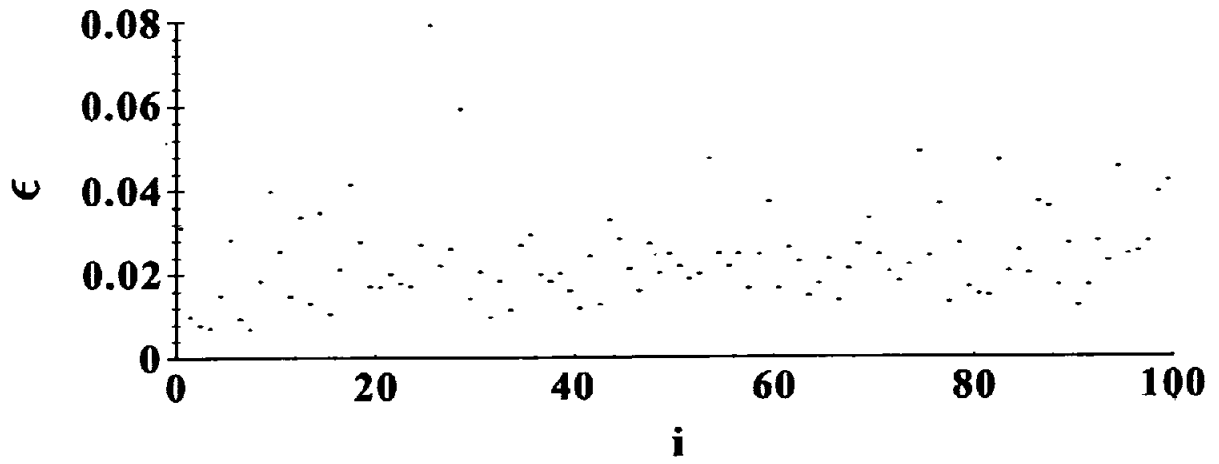
(1) 区間の重複がない場合;

BM, FBM時系列に対して $N=1000$ 点で D を100セット評価できる. このときの ϵ を図3.2に示す. いずれの場合も ϵ は0.02付近に局在しているのが理解できる. BM時系列の場合, その最大値はおよそ0.08である. FBM時系列の場合, およそ0.05である. 次に単位区間サンプル数を $N=1 \times 10^3$ から順次 $2 \times 10^3, 4 \times 10^3, 8 \times 10^3, 16 \times 10^3$ としたときの D の値と平均値(ϵ)を表3.2に示した. 区間長が長くなれば確率誤差が小さくなるのが容易に理解できる. 特に, 1×10^3 点のときはおよそ 2×10^{-2} 程度と評価されている. この値は, Higuchiの D 評価値より推定した標準誤差がおよそ 3×10^{-2} である(その確率誤差はおよそ 2×10^{-2} である)ことから理論的にも十分に推定される結果である(Saji and Konno, 2000).

(2) 区間の重複がある場合;

各区間のすらし幅を $\Delta N=40$ として $N=1 \times 10^3, 2 \times 10^3, 4 \times 10^3, 8 \times 10^3, 16 \times 10^3$ として評価した D 及び(ϵ)を求めたときの変化の様子を表3.3に示す. 区間の重複があっても, D 値もその確率誤差もほとんど変わらないことが理解できる. こうして D 推定値に単位区間の重複効果は影響を与えないことが示された(Saji and Konno, 2000).

(a)



(b)

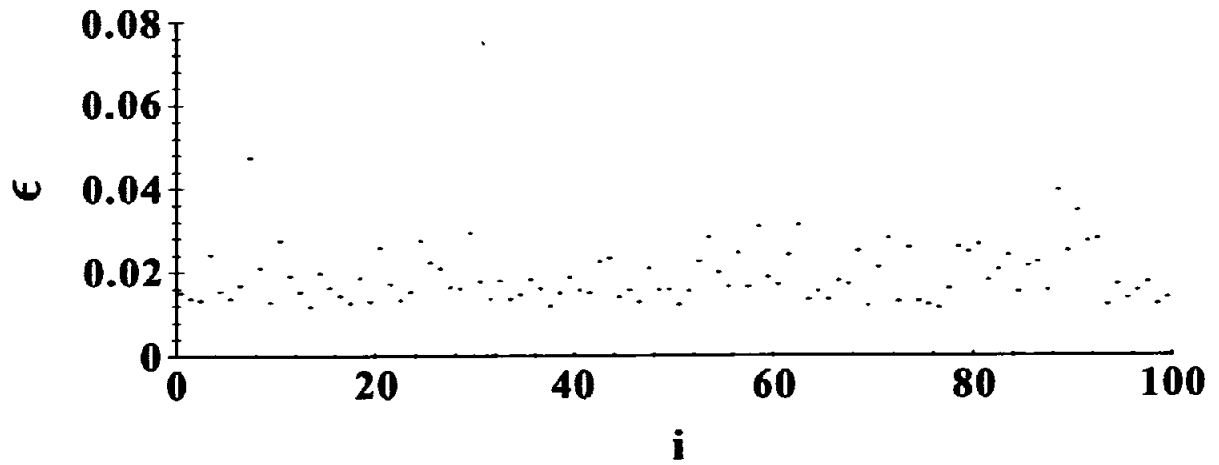


図 3.2: フラクタル次元推定確率誤差 (a) ブラウン運動時系列, (b) フラクショナルブラウン運動時系列.

表 3.2: 局所フラクタル次元の推定精度評価 (区間の重複がない場合).

	BM					FBM				
N_0	1×10^5					1×10^5				
N_L	1×10^3	2×10^3	4×10^3	8×10^3	16×10^3	1×10^3	2×10^3	4×10^3	8×10^3	16×10^3
N'	100	50	25	12	6	100	50	25	12	6
$\langle D \rangle$	1.504	1.502	1.501	1.500	1.501	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
$\langle \epsilon \rangle (\times 10^{-2})$	2.39	1.56	1.08	0.78	0.66	1.79	1.23	0.89	0.63	0.45

表 3.3: 局所フラクタル次元の推定精度評価 (区間の重複がある場合: $\Delta N_L=40$).

	BM					FBM				
N_0	1×10^5					1×10^5				
N_L	1×10^3	2×10^3	4×10^3	8×10^3	16×10^3	1×10^3	2×10^3	4×10^3	8×10^3	16×10^3
N'	2476	2451	2401	2301	2101	2476	2451	2401	2301	2101
$\langle D \rangle$	1.505	1.503	1.502	1.501	1.502	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
$\langle \epsilon \rangle (\times 10^{-2})$	2.32	1.56	1.11	0.78	0.58	1.79	1.24	0.88	0.62	0.44

図 3.3(a)-7(a) に HO モデル時系列, 健康高齢者 *hana*, *imam* 脳波時系列, 老年期痴呆者 *hira*, *hiro* に対して求めた局所フラクタル次元 (local fractal dimension: LFD) の確率過程を示す. HO モデルの場合, 局所フラクタル次元の値はほとんど揺らいておらず, ほぼ一定値である. 一方で, 健康高齢者 *hana* の場合, 局所フラクタル次元値 D_L は 75 秒と 135 秒前後に低下するが, それ以外ではほぼ 1.9 前後の値をとっている. 時系列全体を通してその平均値は $\langle D \rangle = 1.896$ と評価された. 健康高齢者 *imam* の場合, 5, 70, 100 秒前後に多少の D_L の低下が見られるが *hana* と同様, それ以外では 1.9 前後の高い値をとっている ($\langle D_L \rangle = 1.902$). 老年期痴呆者 *hira* の場合, 時系列を通して非定常な振る舞いを示し, 特にその揺らぎの大きさは最も大きい. $\langle D_L \rangle$ は 1.780 である. 老年期痴呆者 *hiro* の場合も, 局所フラクタル次元値の変動は健康高齢者と比べると大きく, またその値も低い ($\langle D_L \rangle = 1.827$). なお $\langle D_L \rangle$ の一覧を表 3.5 の第 1 コラムに記す.

3.2.2 局所積率

図 3.4(b)-7(b) には HO モデル時系列, 健康高齢者 *hana*, *imam*, 及び老年期痴呆者 *hira*, *hiro* 脳波時系列に対して求めた局所平均 (local mean: LM) の確率過程を, 図 3.4(c)-7(c) には局所分散 (local variance: LV), 図 3.4(d)-7(d) には局所歪度 (local skewness: LS), そして図 3.4(e)-7(e) には局所尖度 (local kurtosis: LK) の確率過程を示す. なお局所積率の計算では, 局所平均と局所分散のセットの平均値がそれぞれ 0 と 1 になるように規格化している.

脳波時系列に対する局所平均は HO モデルのそれと比べると 0 の周りでの揺らぎが細かい. しかし, 健康高齢者と老年期痴呆者との明確な違いを見いだすことはできない. 一方で, 局所分散では HO モデルに対する変動が脳波時系列のそれと比べて少なくなっている. 脳波時系列の中で比較すると老年期痴呆者 *hira* が最も揺らいでいる. 局所歪度では, HO モデルでは変動が少なく定常な振る舞いを示している. また, 老年期痴呆者ではスパイク状波形が見られる. 同様に局所尖度の場合, 老年期痴呆者で不連続遷移がしばしば見られるようになる. 以上のことをまとめると, 老年期痴呆者脳波は局所フラクタル次元や高次統計量等の局所統計量の非定常変動によって特徴付けることが可能である (Saji and Konno, 2001).

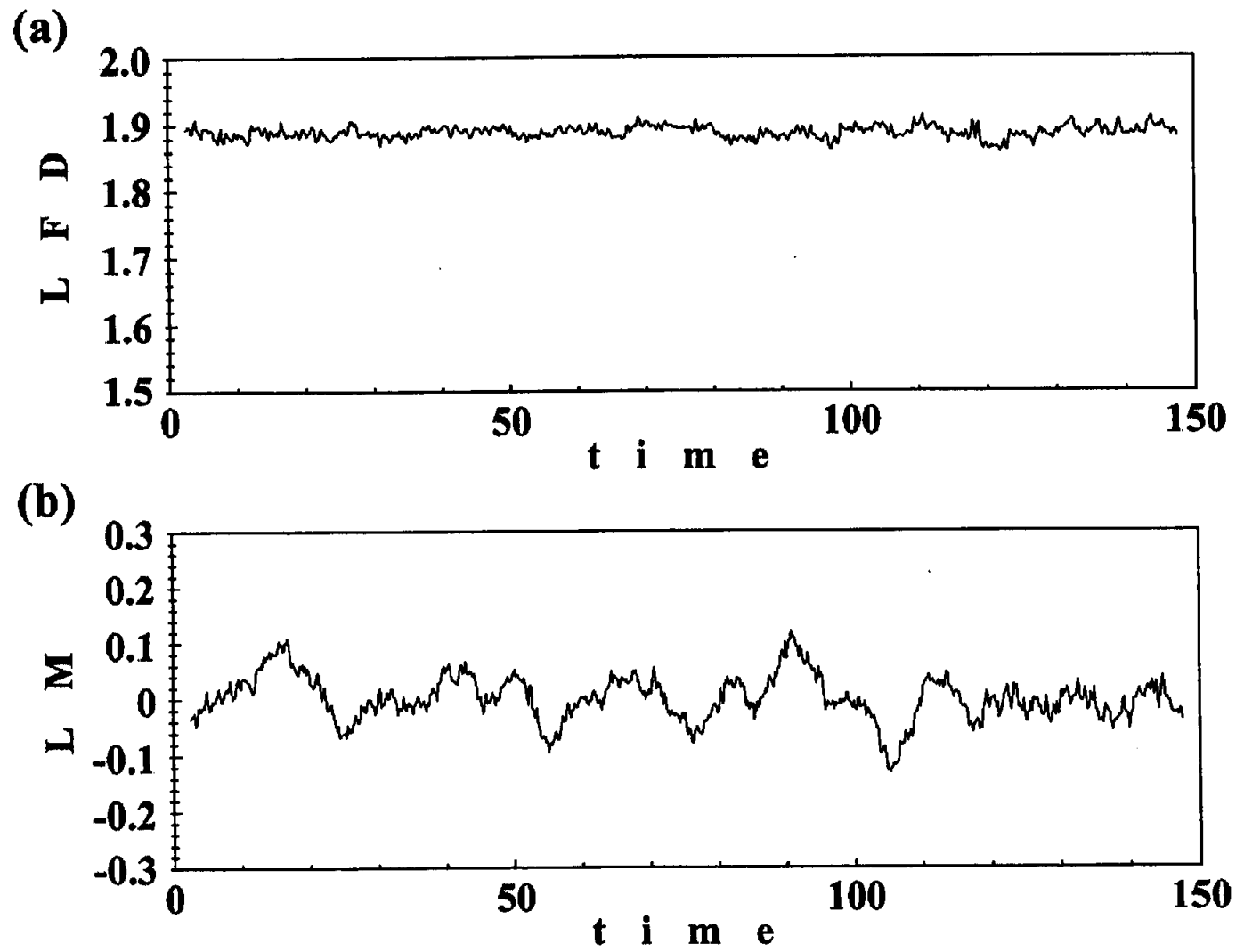


図 3.3: 調和振動子モデルの局所統計量の確率過程 (a) 局所フラクタル次元, (b) 局所平均.

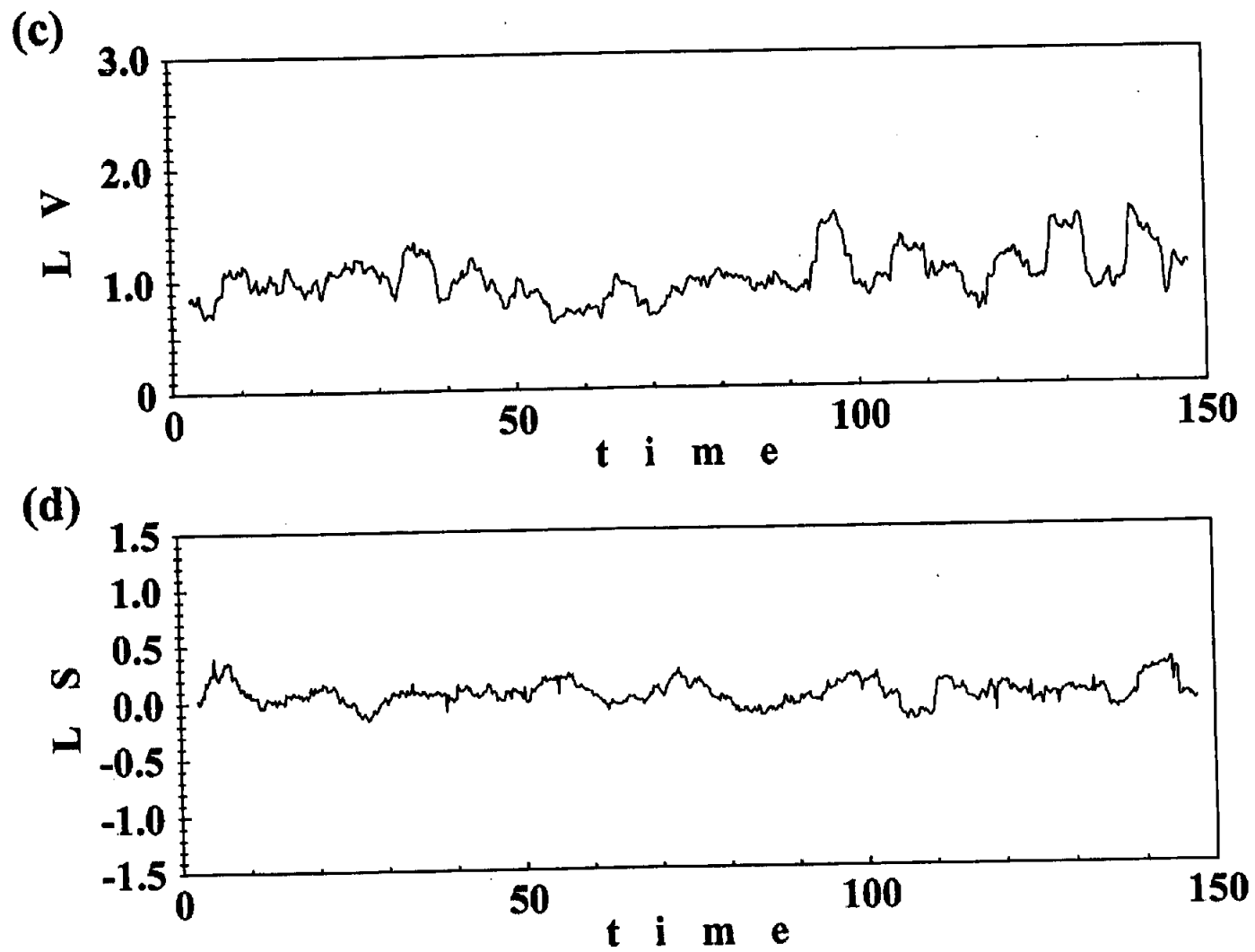


図 3.3: 調和振動子モデルの局所統計量の確率過程 (c) 局所分散 (d) 局所歪度.

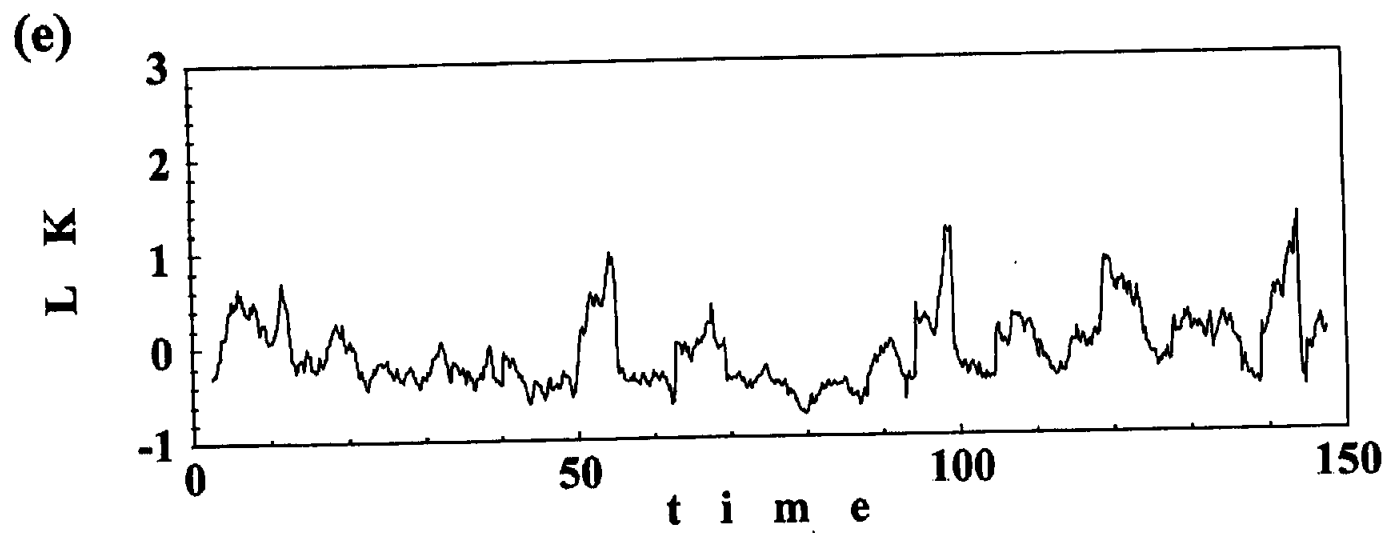


図 3.3: 調和振動子モデルの局所統計量の確率過程 (e) 局所尖度.

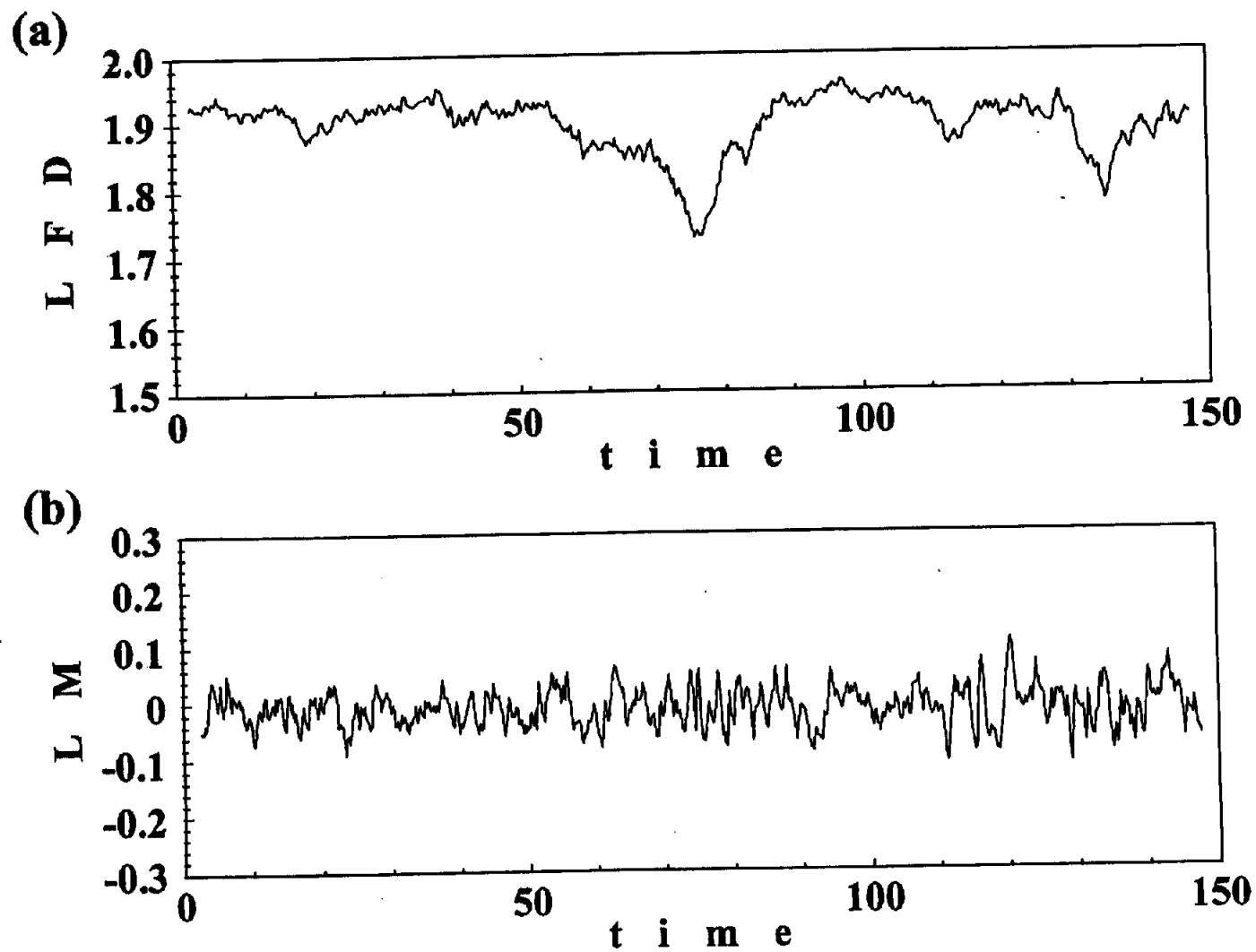


図 3.4: 健康高齢者 *hana* に対する局所統計量の確率過程 (a) 局所フラクタル次元, (b) 局所平均.

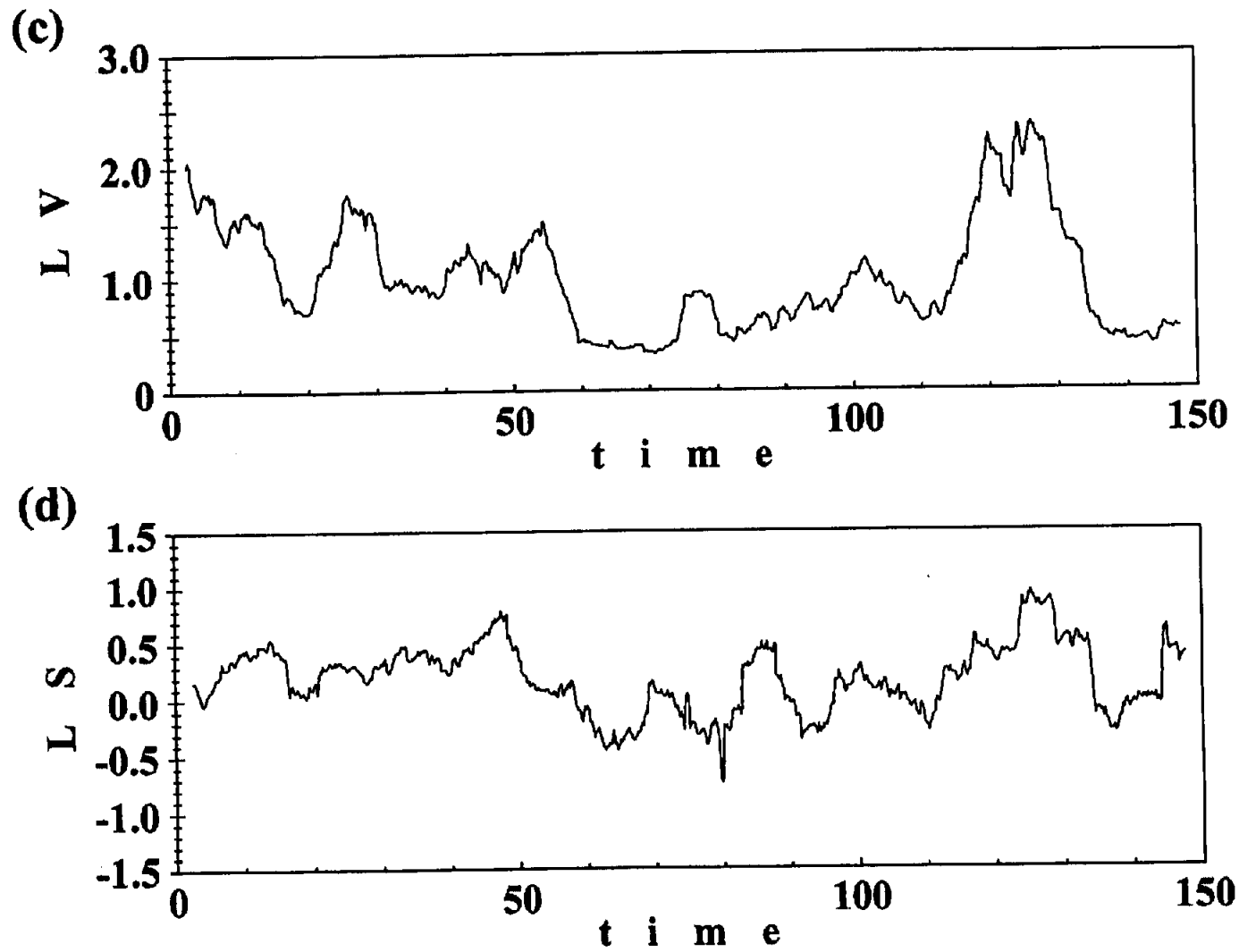


図 3.4: 健康高齢者 *hana* に対する局所統計量の確率過程 (c) 局所分散 (d) 局所歪度.

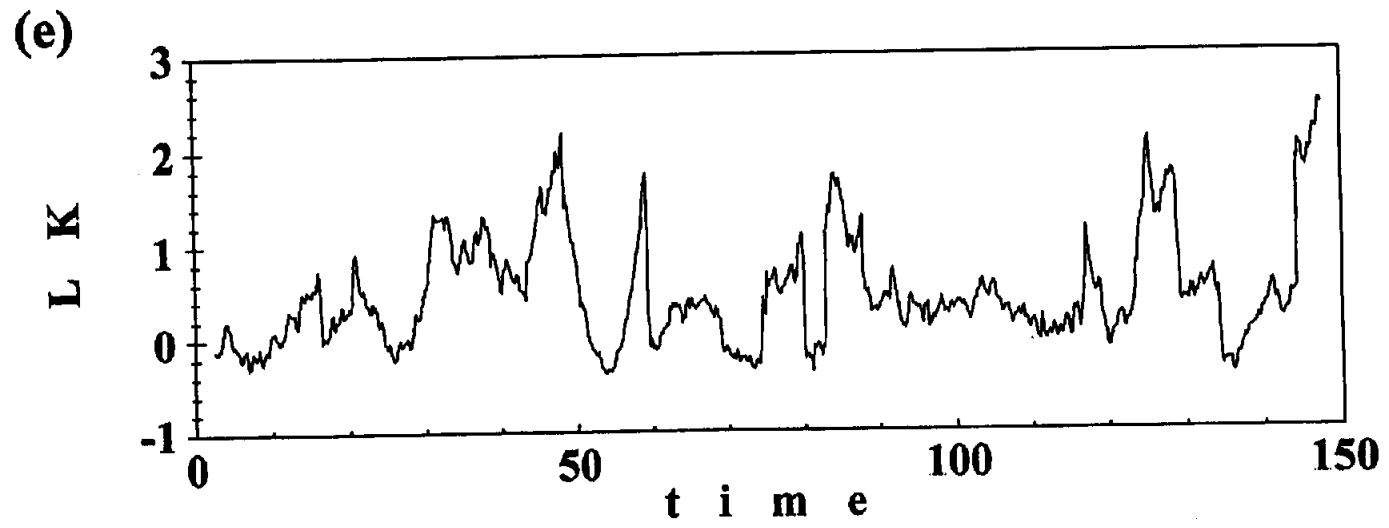


図 3.4: 健康高齢者 *hana* に対する局所統計量の確率過程 (e) 局所尖度.

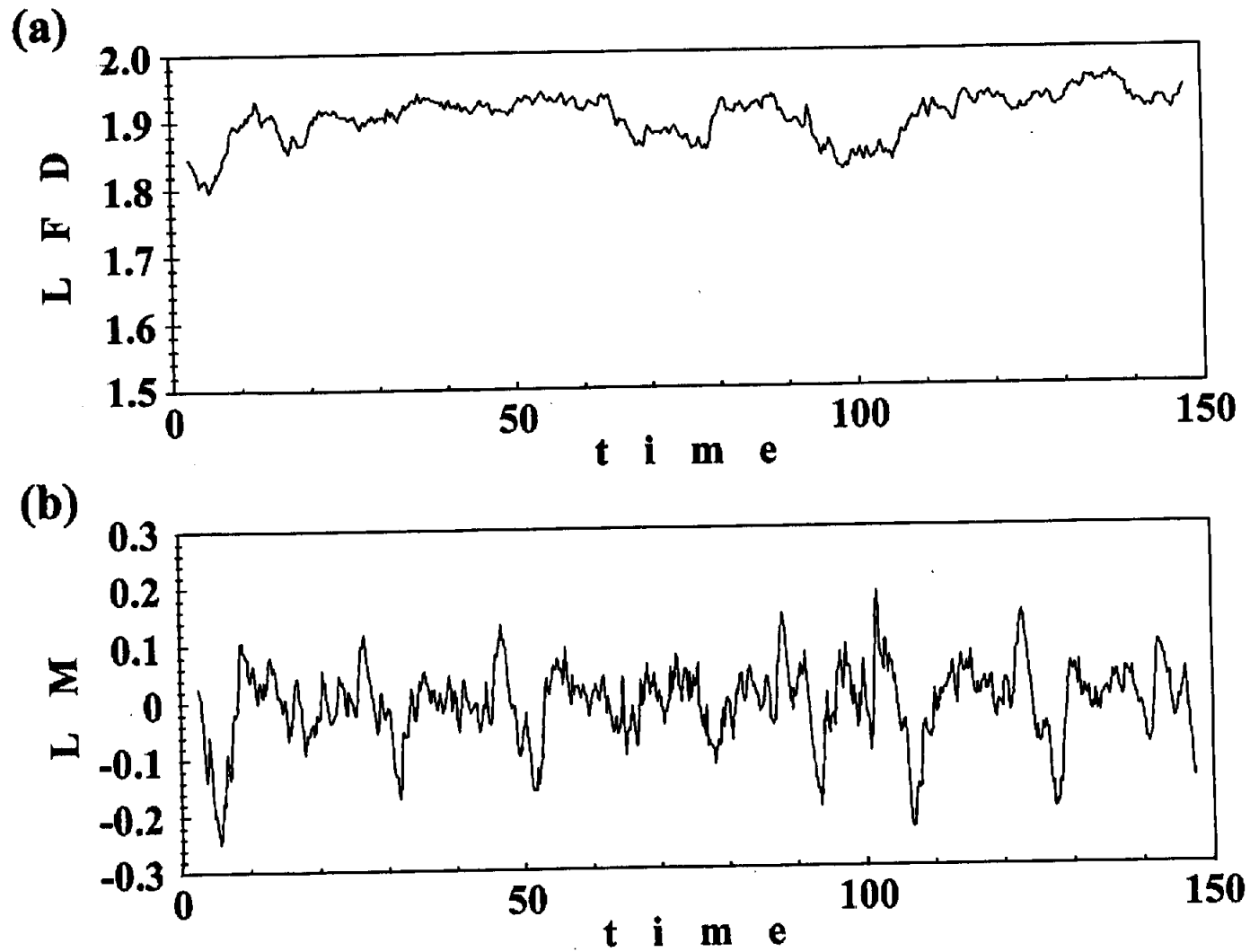


図 3.5: 健康高齢者 *imam* に対する局所統計量の確率過程 (a) 局所フラクタル次元, (b) 局所平均.

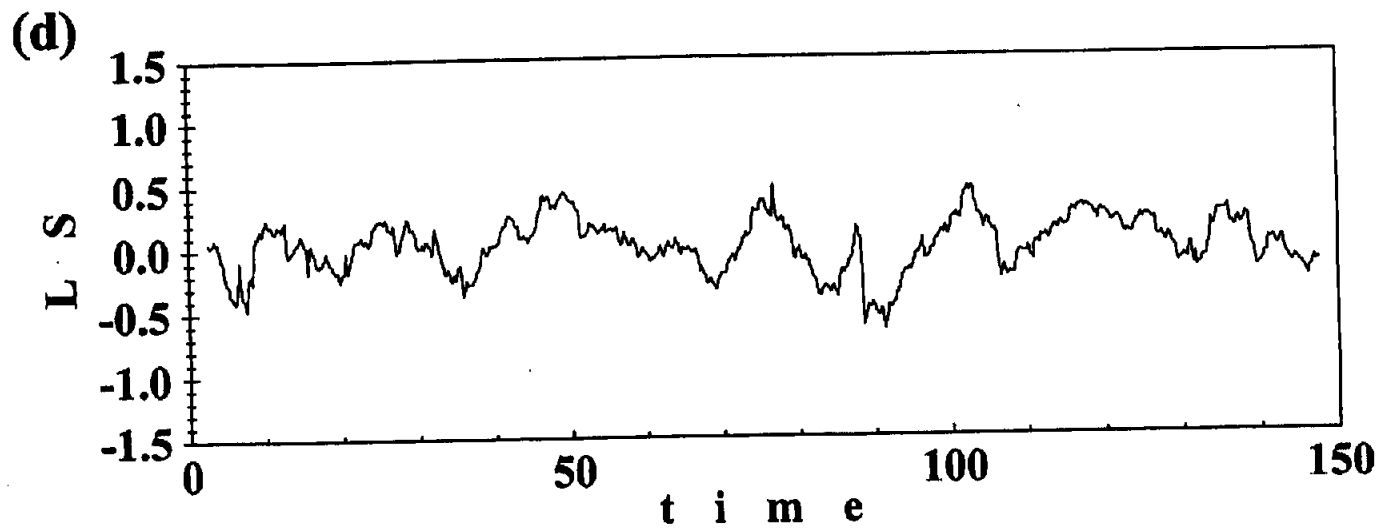
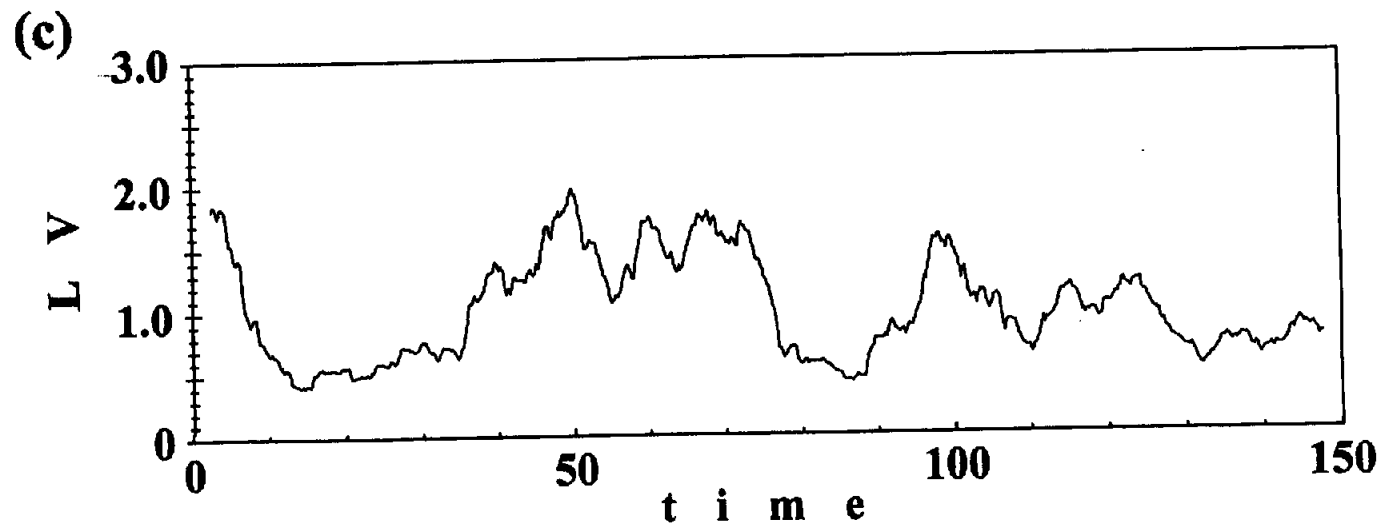


図 3.5: 健康高齢者 *imam* に対する局所統計量の確率過程 (c) 局所分散 (d) 局所歪度.

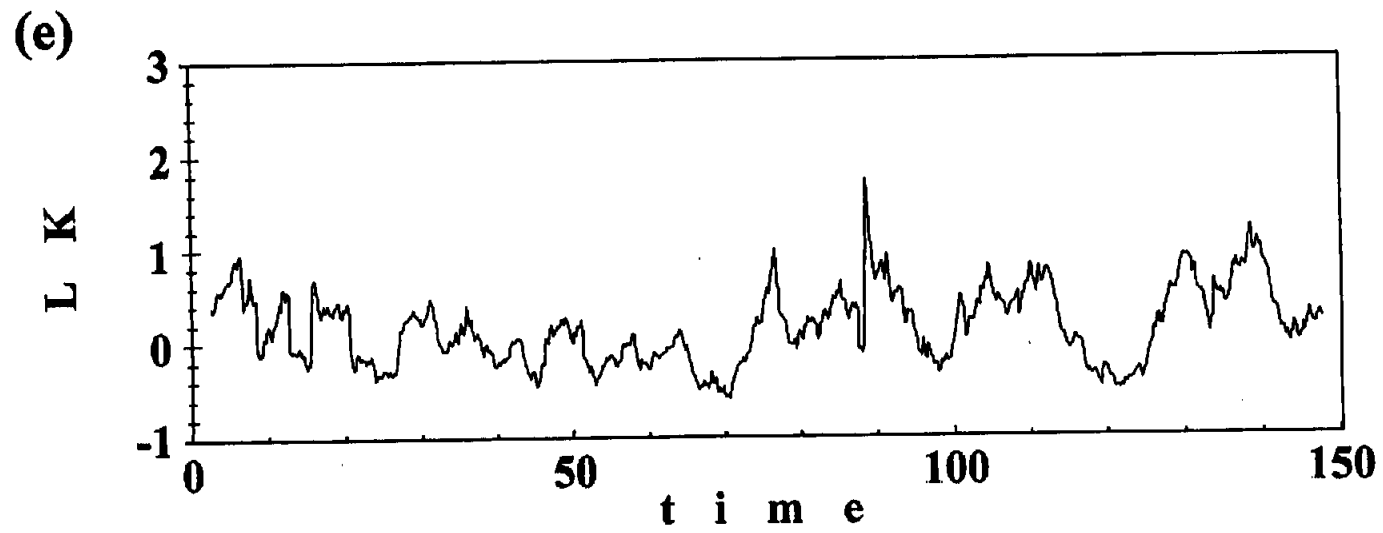


図 3.5: 健康高齢者 *imam* に対する局所統計量の確率過程 (e) 局所尖度.

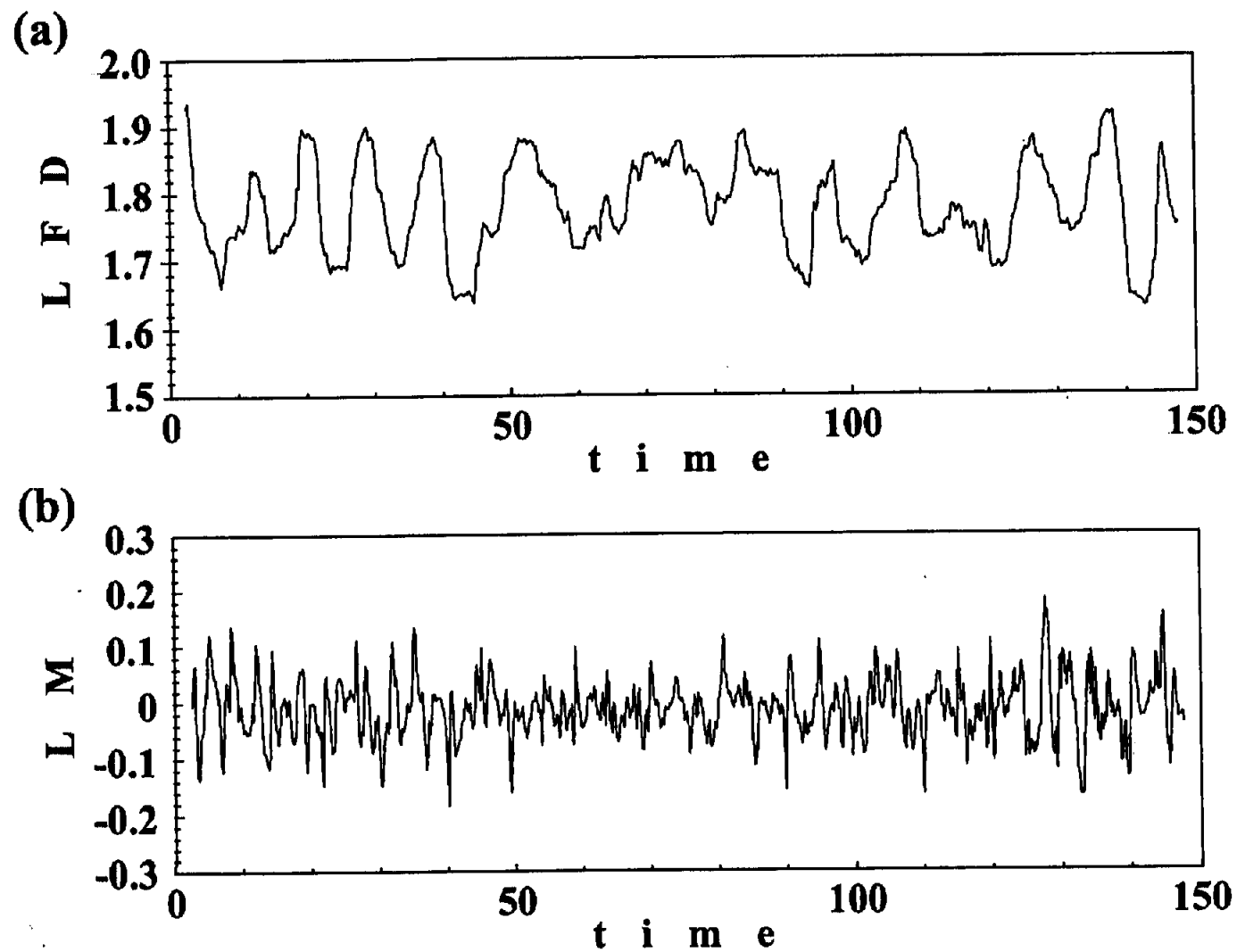


図 3.6: 老年期痴呆者 *hira* に対する局所統計量の確率過程 (a) 局所フラクタル次元, (b) 局所平均.

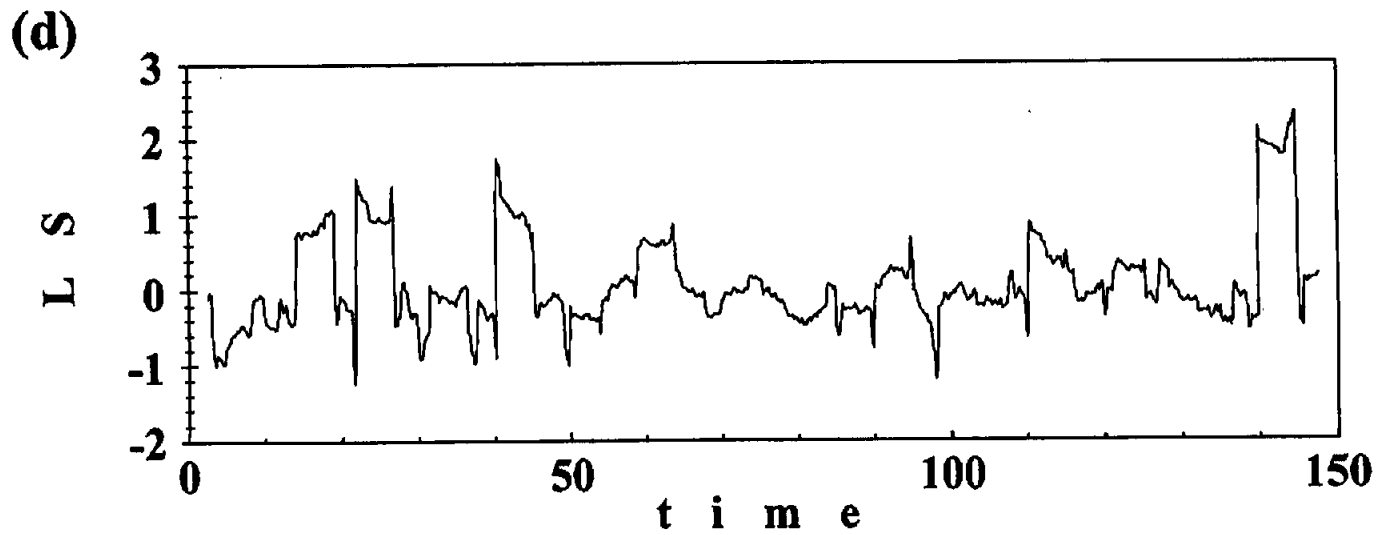
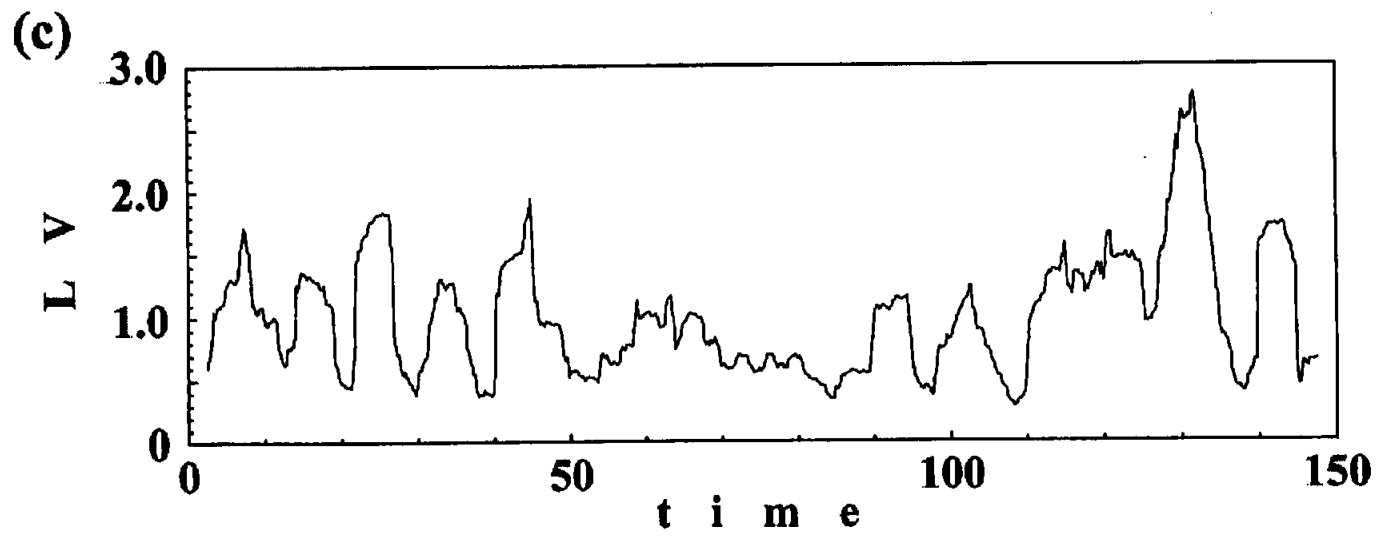


図 3.6: 老年期痴呆者 *hira* に対する局所統計量の確率過程 (c) 局所分散 (d) 局所歪度.

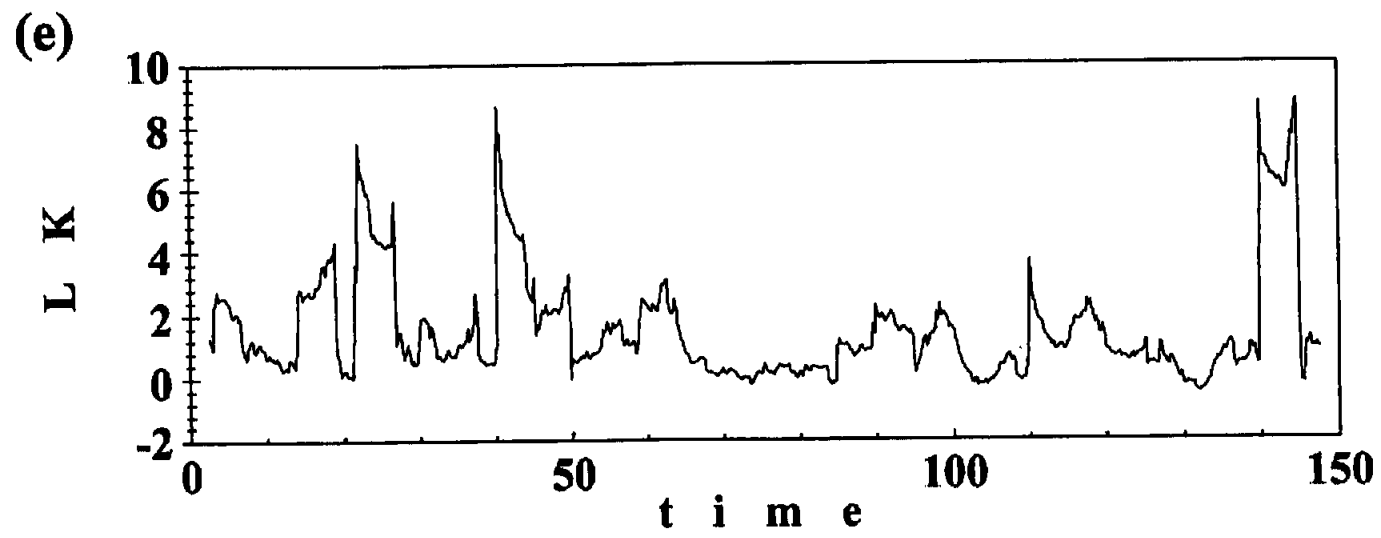


図 3.6: 老年期痴呆者 *hira* に対する局所統計量の確率過程 (e) 局所尖度.

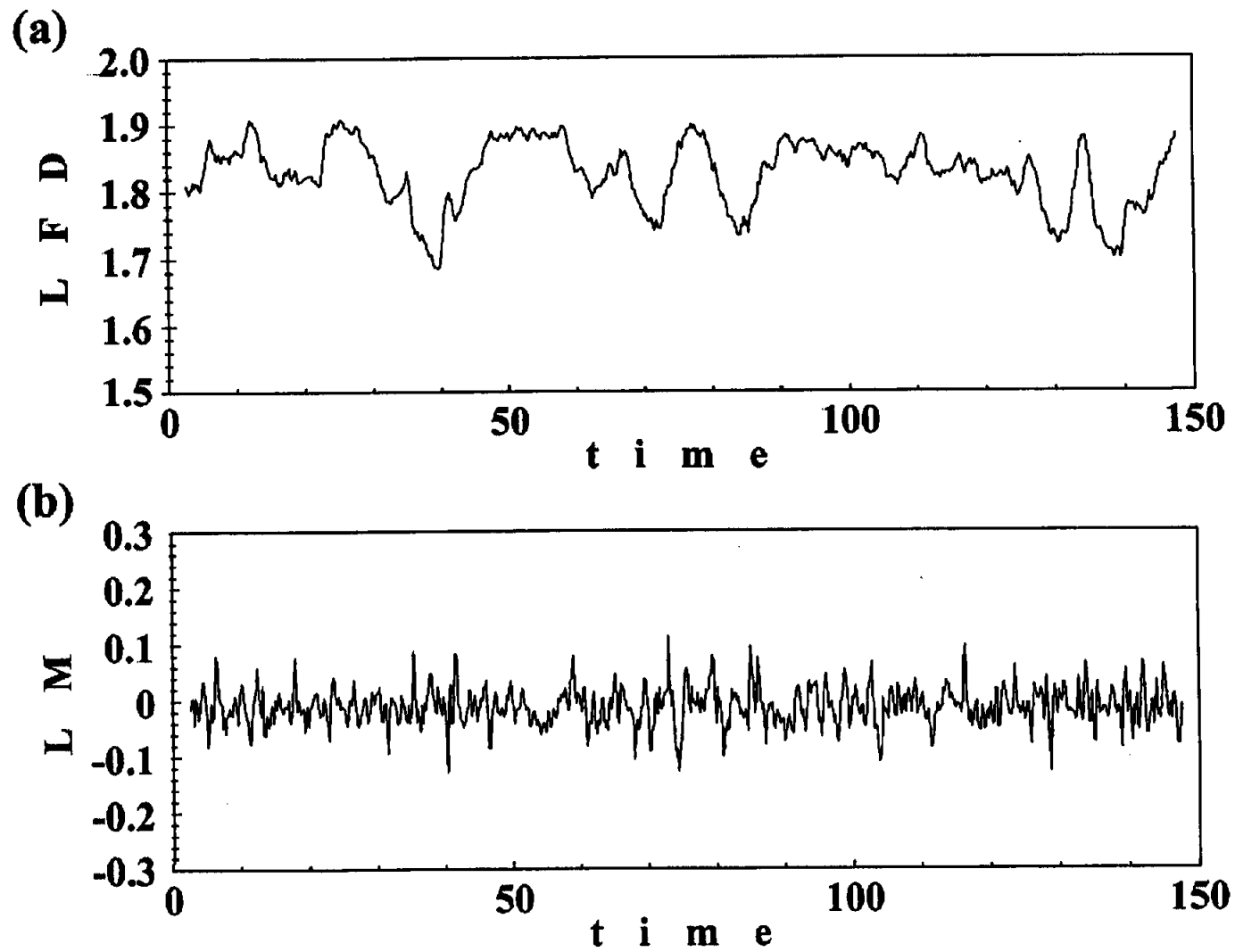


図 3.7: 老年期痴呆者 *hiro* に対する局所統計量の確率過程 (a) 局所フラクタル次元, (b) 局所平均.

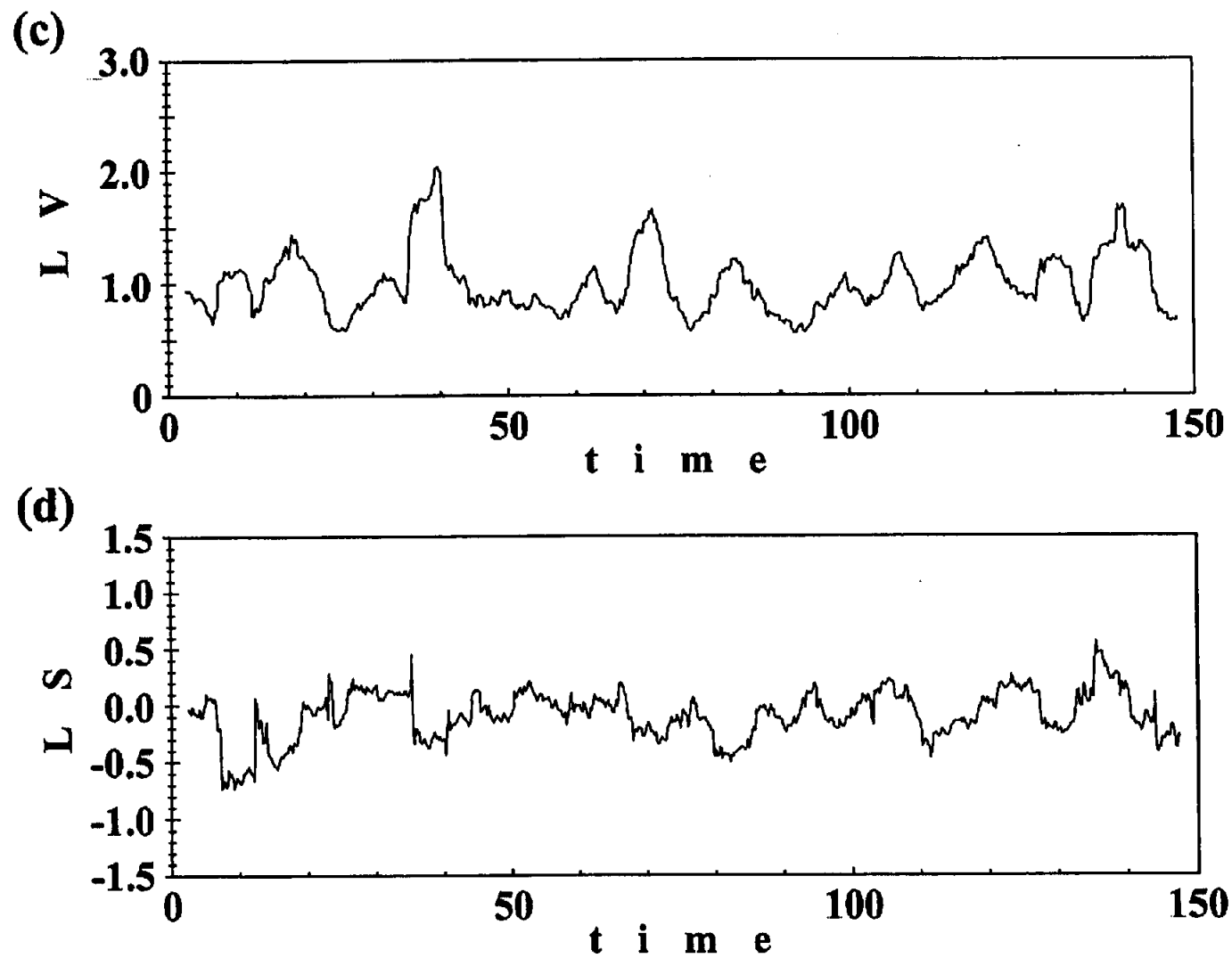


図 3.7: 老年期痴呆者 *hiro* に対する局所統計量の確率過程 (c) 局所分散 (d) 局所歪度.

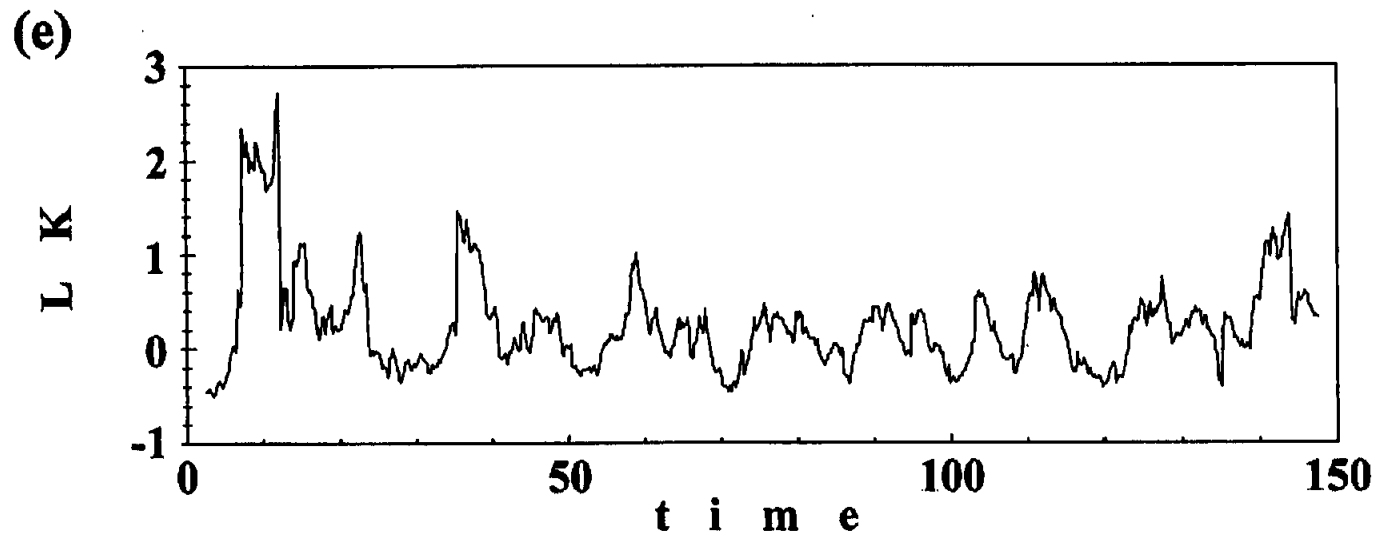


図 3.7: 老年期痴呆者 *hiro* に対する局所統計量の確率過程 (e) 局所尖度.

3.3 確率分布関数の同定

前節でHOモデル、健康高齢者脳波、老年期痴呆者脳波時系列に対して局所統計量の確率過程 $\{q(t)\}$ を再構成し、老年期痴呆者脳波が揺らぎの局所非定常性によって特徴付けられることを示した。これらの局所揺らぎダイナミクスを数学的に定式化できれば、そのダイナミクスを解析的に考察し、健康高齢者と老年期痴呆者との間で局所非線形性の定性的な相違点を示すことやそのメカニズムを理解することができる。しかし一般に、乱雑な振る舞いを示す確率変数 q を正面から取り扱うことは、数学的にも解析性が成り立たないなど非常に困難である。そこで個々の変数のランダムな動きを見るのではなく、それらの1つの標本集団としての振る舞い、すなわち確率分布関数 $f(q)$ を用いた確率変数の振る舞いを考察することが有用となることが多い。このような集団鳥瞰的な立場からの解析は古くから試みられており、ボルツマンの気体運動論の定式化などがその1つの成功例である。

時系列に対して確率分布関数 (probability density function: PDF) を同定するには (i) 積率推定法, (ii) 最尤推定法, (iii) 最小2乗法などが用いられる。20世紀初頭には Pearson, Gram, Charlier, Edgeworth などの統計学者達は非正規分布のPDF構造を生成するダイナミクスについて研究していた。Gram, Charlier, Edgeworthらは正規分布やポアソン分布が無限回微分可能であることに注目し、その無限級数展開により正規性からのずれが近似できることを示し、この手法をPDF同定法としても定式化した(これはGram-Charlier曲線やEdgeworth曲線として知られている)。一方で、Pearsonは微分方程式

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1x + b_2x^2} \quad (3.11)$$

の解 $y = f(x)$ がベータ分布やガンマ分布などの12の非正規確率分布関数として理解できることから、これらの関数系を用いたPDF同定法の有効性を提唱した。その後、これらのPearson系確率分布関数やをGram-Charlier曲線やEdgeworth曲線を用いた時系列のPDF推定が行われると共に、これらの関数系の相互比較も行われた。Barton and Dennis(1965)はGram-CharlierやEdgeworth曲線に比べPearson系確率分布関数がより広いクラスの現象をサポートできること、また、Elderton and Johnson(1969)の実時系列を用いたPDF適合性比較においてPearson系確率分布曲線のPDF推定のよさが示された。このようなことから、ランダムな振る舞いを示し、非正規性を示すような時系列のPDF評価においても、Pearson系確率分布関数は有用であると考えられる。

本節では、局所統計量の確率過程 $\{q(t)\}$ のPDFをPearson系確率分布曲線に対して同定し、鳥瞰的な立場から局所揺らぎのダイナミクスについて考察する。

元来、Pearson系確率分布関数は微分方程式(3.11)の12の解 $y = f(x)$ に対応し12の型(I-XII型)に細分化されている(Kendall and Buckland, 1982; 東京工業大学統計工学研究会, 1953)。しかしVIII, IX型はI型, XI型はVI型, そしてX型はIXとXI型の極限形式であることから、実用上PDF推定ではI-VII型, 及び正規分布(N型)の8つの関数に対して型同定を行う。それらの一覧を表3.4に示す。ただし表中において f_0 はPDFとして

解 $y = f(x)$ に課せられる規格化条件

$$1 = \int_{\Omega} dx f(x) \quad (3.12)$$

により決められる。ここで Ω は確率変数 x が含まれる全領域、すなわち定義域全体とする。また、表 3.3 において $q_1, q_2, a_1, a_2, \dots$ など はすべて定数である。型同定には一般に以下の評価基準量

$$K = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)} \quad (3.13)$$

を用いる。ここで β_1, β_2 は PDF の n 次の積率 m_n を用いて以下のように定義される;

$$\beta_1 = m_3^2/m_2^3, \quad (3.14)$$

$$\beta_2 = m_4/m_2^2. \quad (3.15)$$

すなわち、 β_1 は PDF の歪度の 2 乗 γ_1^2 であり、 β_2 は尖度である。Pearson 系確率分布関数を生成する微分方程式 (3.11) は一般に

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots} \quad (3.16)$$

$$= \frac{x+a}{\sum_j b_j x^j} \quad (j=0, 1, \dots) \quad (3.17)$$

と書ける。このとき (3.17) に含まれる定数 a, b_j ($j=0, 1, \dots$) は一般に x の n 次の積率

$$m_n = \int dx x^n y \quad (3.18)$$

の関数で与えられる。詳細は付録 B に記したが、(3.13) の K は (3.11) の右辺分母の 2 次方程式 $b_0 + b_1x + b_2x^2$ の判別式 $b_1^2 - 4b_0b_2$ を高次積率を用いて表現したものに他ならない。この中で I, IV, VI 型の 3 つは 2 次方程式 $b_0 + b_1x + b_2x^2$ が 2 つの異符号実数解、虚数解、同符号実数解を持つ場合の解 $f(x)$ であり、Pearson 系確率分布関数を構成する 3 つの主要な関数型といえよう。一方、正規分布 (N 型) は Pearson 系確率分布関数には含まれていない。しかし正規分布では $\beta_1 = 0, \beta_2 = 3$ であるので

$$K = 0 \quad (3.19)$$

である。よって評価基準量として (3.19) を用いる。

特に I 型分布は変数変換によりベータ分布に帰着する:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (3.20)$$

ここで μ, ν は定数 (> 0) であり、 $\Gamma(z)$ はガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^{z-1} \quad (3.21)$$

である。

表 3.4: Pearson 系確率分布関数.

型	一般形式	定義域	評価基準
I	$f(x) = f_0 \left(1 + \frac{x}{a_1}\right)^{q_1} \left(1 - \frac{x}{a_2}\right)^{q_2}$	$-a_1 \leq x \leq a_2$	$K < 0$
II	$f(x) = f_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m$	$-a \leq x \leq a$	$K = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 < 3$
III	$f(x) = f_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\gamma a} \exp(-\gamma x)$	$-a \leq x \leq \infty$	$2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$
IV	$f(x) = f_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\mu} \exp\{-\nu \arctan(\frac{x}{a})\}$	Unlimited.	$0 < K < 1$
V	$f(x) = f_0 x^{-p} \exp(-\frac{\gamma}{x})$	$0 \leq x \leq \infty$	$K = 1$
VI	$f(x) = f_0 x^{-q_1} (x - a)^{q_2}$	$a \leq x \leq \infty$	$K > 1$
VII	$f(x) = f_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-q}$	Unlimited.	$K = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 > 3$
N	$f(x) = f_0 \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$	Unlimited.	$K = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 3$

局所統計量の確率過程 $\{q(t)\}$ に対して K, β_1, β_2 を評価した結果を表3.5に示す。

局所フラクタル次元の場合,

- HOモデルでは $K=0.332$ であり, PDFはPearson IV型に同定される。
- *hana* では $K=-1.403$ であり, PDFはPearson I型に同定される。
- *imam* では $K=-0.444$ であり, PDFはPearson I型に同定される。
- *hira* では $K=-0.008$ でありPDFはPearson I型に同定される。しかし, 極限 $K \sim 0, \beta_1 \sim 0$ で解釈すればPDFはPearson II型になる。
- *hiro* では $K=-0.235$ であり, PDFはPearson I型と同定される。

局所平均の場合,

- HOモデルでは $K=0.001$ であり, PDFはPearson IV型に同定される。しかし, $K=\beta_1 \sim 0$ とみなせば $\beta_2 > 3$ よりPDFはPearson VII型になる。
- *hana* では $K=0.002$ であり, PDFはPearson IV型に同定される。しかし, HOモデルの場合と同様に $K=\beta_1=0$ とみなせば $\beta_2 > 3$ よりPDFはPearson VII型になる。
- *imam* では $K=0.831$ でありPDFはPearson IV型に同定される。
- *hira* では $K=0.006$ よりPDFはPearson IV型に同定される。しかし, $K=\beta_1 \sim 0$ の極限では $\beta_2 > 3$ よりPDFはPearson VII型になる。
- *hiro* では $K=0.000$ である。そこで $\beta_1 \sim 0$ とみなせば $\beta_2 > 3$ よりPDFはPearson VII型に同定される。

局所分散の場合,

- HOモデルでは $K=-0.443$ であり, PDFはPearson I型に同定される。
- *hana* では $K=-0.280$ であり, PDFはPearson I型に同定される。
- *imam* では $K=-0.080$ よりPDFはPearson I型である。
- *hira* では $K=-1.073$ であり, PDFはPearson I型である。
- *hiro* では $K=-1.331$ であり, PDFはPearson I型に同定される。

局所歪度の場合,

- HOモデルでは $K=0.095$ であり, PDFはPearson IV型に同定される。
- *hana* では $K=-0.000$ よりよりPDFはPearson I型に同定される。しかし, $K \sim 0$ では $\beta_1=0, \beta_2 < 3$ よりPDFはPearson II型と同定される。
- *imam* では $K=-0.287$ であり, PDFはPearson I型と同定される。
- *hira* では $K=-1.790$ であり, PDFはPearson I型と同定される。
- *hiro* では $K=1.276$ であり, PDFはPearson VI型と同定される。

局所尖度の場合,

- HOモデルでは $K=-0.770$ であり, PDFはPearson I型と同定される.
- *hana*では $K=-0.587$ であり, PDFはPearson I型と同定される.
- *imam*では $K=-0.131$ であり, PDFはPearson I型と同定される.
- *hira*では $K=-1.555$ であり, PDFはPearson I型である.
- *hiro*では $K=-4.191$ であり, PDFはPearson I型である.

よって, 以上の結果をまとめると, HOモデル, 健康高齢者脳波, 老年期痴呆者脳波の確率過程のPDFは

- (i) 局所フラクタル次元の場合; 健康高齢者, 老年期痴呆者に関わらずI型である,
- (ii) 局所平均の場合; 健康高齢者, 老年期痴呆者に関わらずIV型である,
- (iii) 局所分散の場合; 健康高齢者, 老年期痴呆者に関わらずI型である,
- (iv) 局所尖度の場合; 健康高齢者, 老年期痴呆者に関わらずI型である

ことが明らかになった. 局所歪度の場合のみ脳波時系列として普遍的なPDFとして評価されなかったが, 局所統計量の局所ゆらぎダイナミクスは前節で示したように健康高齢者と老年期痴呆者とでは全く異なっていたが, そのPDFが同じであることは重要な発見である(Saji and Konno, 2001). すなわち, それらが同じ確率過程ダイナミクスによって記述されていることを表しており, 脳の局所非線形変換を用いた粗視化が脳ダイナミクス解析においてその普遍的な特徴を容易に抽出できる有用な指標の1つであるといえよう.

表 3.5: 局所フラクタル次元, 局所平均, 局所分散の確率過程に対する κ, β_1, β_2 評価値と
同定された確率密度関数の型.

		LFD					LM					LV			
	$\langle D_L \rangle$	K	β_1	β_2	PDF	K	β_1	β_2	PDF	K	β_1	β_2	PDF		
HO	1.888	0.332	0.098	3.259	IV	0.001	0.001	3.608	IV (VII)	-0.443	0.402	3.228	I		
<i>hana</i>	1.896	-1.403	2.588	5.722	I	0.002	0.000	3.099	IV (VII)	-0.280	0.626	2.939	I		
<i>imam</i>	1.902	-0.444	0.907	3.400	I	0.831	0.641	4.297	IV	-0.080	0.240	2.084	I		
<i>hira</i>	1.780	-0.008	0.002	2.134	I (II)	0.006	0.011	3.689	IV (VII)	-1.073	0.932	3.994	I		
<i>hiro</i>	1.827	-0.235	0.461	2.854	I	0.000	0.001	4.075	IV (VII)	-1.331	1.070	4.221	I		

表 3.5: (続き) 局所歪度, 局所尖度の確率過程に対する κ , β_1 , β_2 評価値と
同定された確率分布関数の型.

	LS					LK				
	$\langle \gamma_1 \rangle$	K	β_1	β_2	PDF	$\langle \hat{\gamma}_2 \rangle$	K	β_1	β_2	PDF
HO	0.042	0.095	0.024	3.134	IV	-0.077	-0.770	0.898	3.808	I
<i>hana</i>	0.177	-0.000	0.000	2.608	I (II)	0.465	-0.587	1.155	3.761	I
<i>imam</i>	0.013	-0.287	0.178	3.024	I	0.156	-0.131	0.160	2.761	I
<i>hira</i>	0.065	-1.790	1.822	5.175	I	1.489	-1.555	3.775	6.829	I
<i>hiro</i>	-0.092	1.276	0.171	3.310	VI	0.249	-4.191	3.087	7.140	I

最後に、脳波時系列の局所フラクタル次元に対するPDFを評価する。まず、局所フラクタル次元の定義域は $0 \leq D \leq 2$ であるので、ベータ分布(3.20)の定義区間を $[0, 2]$ に拡張する:

$$f(D) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\mu + \nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \left(\frac{D}{2}\right)^{\mu-1} \left(1 - \frac{D}{2}\right)^{\nu-1} \quad (0 \leq D \leq 2). \quad (3.22)$$

そこで、パラメータ μ, ν を評価しよう。通常、パラメータ推定には積率推定法や最尤推定法などが用いられるが、本研究では積率推定法を用いて μ, ν を推定しよう。すなわち、ベータ分布(3.20)の平均 m_1 と分散 m_2 はパラメータ μ, ν を用いて解析的に

$$m_1 = \frac{\mu}{\mu + \nu}, \quad (3.23)$$

$$m_2 = \frac{\mu\nu}{(\mu + \nu)^2(\mu + \nu + 1)} \quad (3.24)$$

と与えられる(金野, 1999)。それゆえ、拡張されたベータ分布(3.22)の m_1 と m_2 はそれぞれ

$$m_1 = \frac{2\mu}{\mu + \nu}, \quad (3.25)$$

$$m_2 = \frac{4\mu\nu}{(\mu + \nu)^2(\mu + \nu + 1)} \quad (3.26)$$

である。(3.25), (3.26)を μ, ν に関して逆に解けば、 m_1 と m_2 を用いてそれらは以下のように与えられる;

$$\mu = \frac{m_1^2(1 - m_1/2) - m_1 m_2}{m_2}, \quad (3.27)$$

$$\nu = 2 \frac{(1 - m_1/2)(m_1(1 - m_1/2) - m_2/2)}{m_2}. \quad (3.28)$$

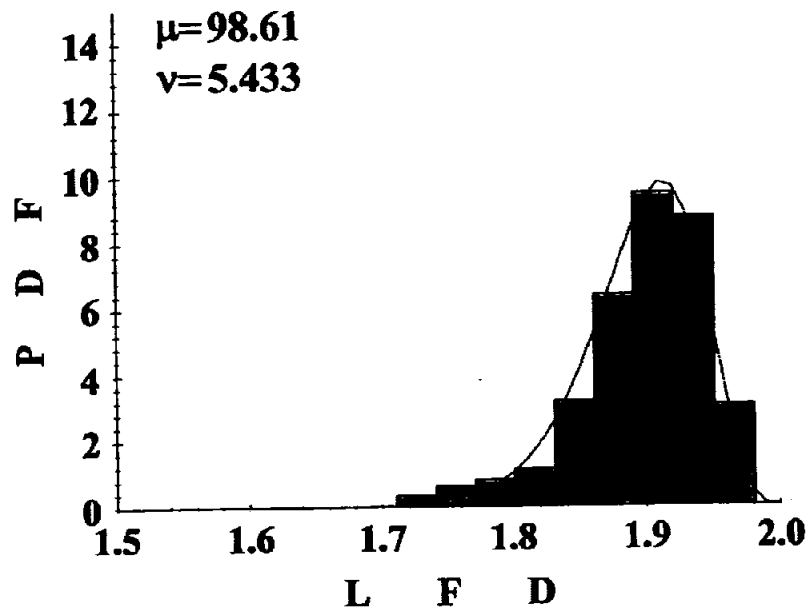
こうして、確率過程 $\{q(t)\}$ の平均 m_1 と分散 m_2 を求めれば、(3.27), (3.28)よりパラメータ μ, ν を推定することができる。このようにして得た局所フラクタル次元のPDFを図3.8(a)-(d)に実線で示す。各図中左上には推定されたパラメータ μ, ν 値を示した。得られたPDF曲線はヒストグラムと程良く適合している。しかし、*hira*の場合にはヒストグラムには2つのピークが存在するがPDF曲線はその構造をうまく捉えられてはいない。これはElderton and Johnson(1969)の研究でも示されているように、Pearson系確率分布関数では左右両極限が収束し、且つ複数ピークを持つようなPDF構造に対して適合性があまりよくないことが反映したと考えられる。もしもGram-Charlier曲線やEdgeworth曲線を用いた場合でも、このようなPDF構造に対する当てはめは同様の傾向となる(Elderton and Johnson, 1969)。

一方、最尤推定法を用いてベータ分布のパラメータ μ, ν を評価する場合、di-Gamma関数 $\psi(z) = (d/dz) \ln \Gamma(z)$ によって記述される連立超越方程式

$$\langle \ln x \rangle = \psi(\mu + \nu) - \psi(\mu), \quad (3.29)$$

$$\langle \ln(1 - x) \rangle = \psi(\mu + \nu) - \psi(\nu) \quad (3.30)$$

(a)



(b)

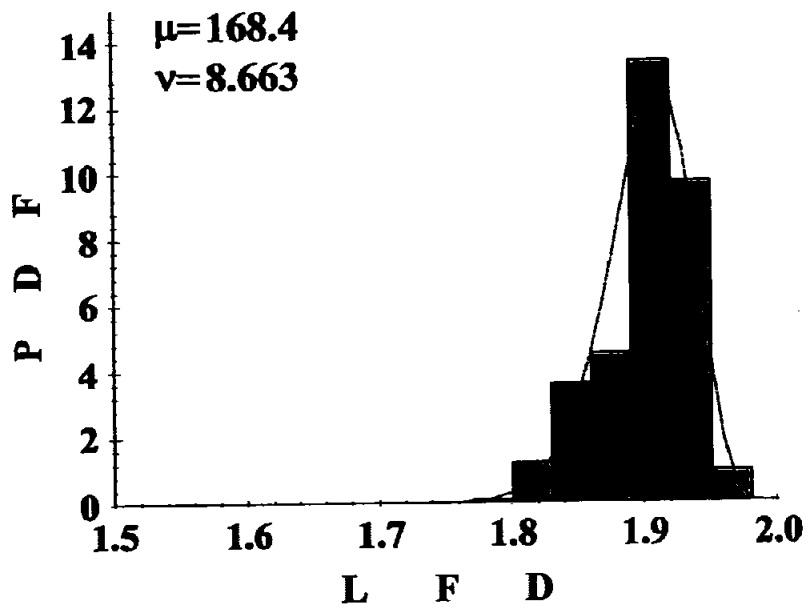
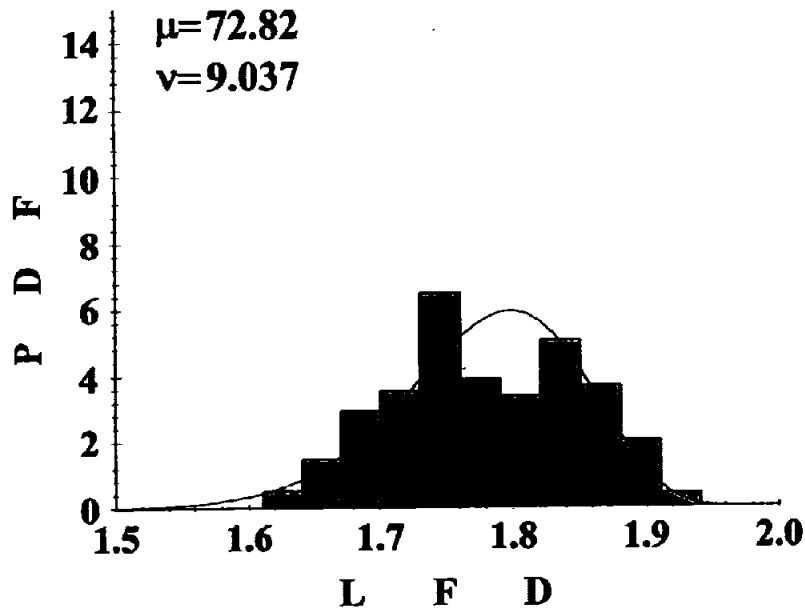


図 3.8: 局所フラクタル次元のヒストグラムと確率分布関数(実線) (a) 健康高齢者 hana, (b) 健康高齢者 imam.

(c)



(d)

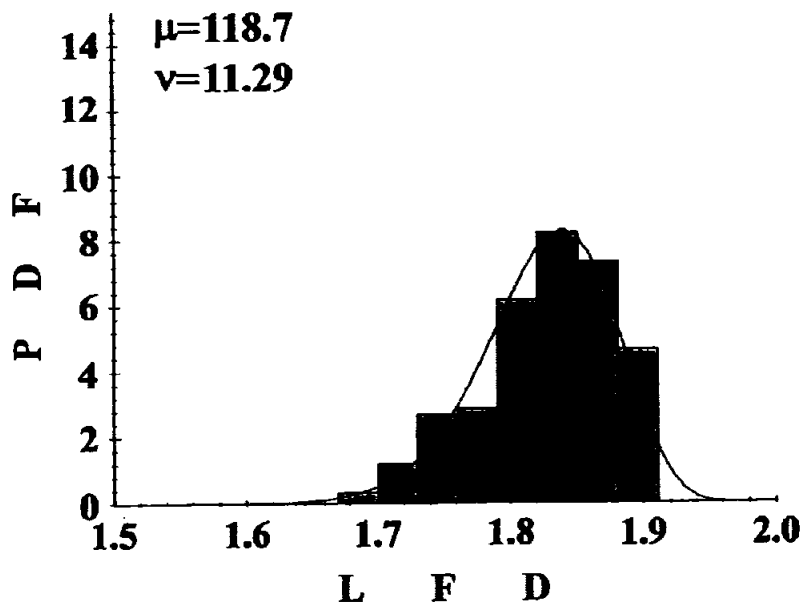


図 3.8: 局所フラクタル次元のヒストグラムと確率分布関数(実線) (c) 老年期痴呆者 *hira*, (d) 老年期痴呆者 *hiro*.

を解かなければならない(Saji and Konno, 2000). (3.29), (3.30) を解析的に解くのは非常に難しく、一般には積率推定法を用いた方が容易である.

3.4 ウェーブレット解析との比較

局所統計量の確率過程をウェーブレットスペクトルと比較し、局所揺らぎのダイナミクスに対する定性的解釈を与えよう.

まず、局所フラクタル次元の動的特性について考察する. 図 3.9(a), (b) を見て理解できるように局所フラクタル次元の低下区間 I は α 波の消失区間であり、 θ 波や δ 波の優勢区間に対応している. 本研究で用いたフラクタル次元は脳波時系列のグラフとしての長さに相関しており、周波数の減少に伴いグラフのフラクタル次元が低下することが理解できる. 次に、局所歪度の動的特性について考察する. 図 3.9(a), (c) から局所歪度のスパイク状波形 (S_1, S_2) が低周波数スペクトル成分の出現消失時に対応しているのが理解できる. また、 S_1, S_2 がそれぞれ逆の極性を持っていることがわかる. これは、脳波時系列の短時間における状態変化 (75–80 秒付近の θ 波成分の出現) に伴う局所的なトレンド成分の変化に対応したものであると理解できる. また局所尖度の場合も、不連続遷移 (T_1, T_2, T_3) は α 波や θ 波などの脳波の状態変化時に対応していることが理解できる (図 3.9(a), (d) 参照). 以上のことから、局所統計量の揺らぎは脳波描像の変化を反映しており、その脳の状態変化や状態診断を局所揺らぎのダイナミクスに基づき考察することが可能であると考えられる. この点について次章で更に詳しく考察する.

一方、局所揺らぎダイナミクス解析にウェーブレット解析を利用することも可能である. 先の考察で示したようにフラクタル次元の低下しているところは α 波が出現していないところである. そこで図 3.10(a), (b) に示したように、ウェーブレットスペクトルで α 波消失域を抽出し、それに対応する局所フラクタル次元の確率過程も抽出する (グレースケール域). このとき、残された局所フラクタル次元の確率過程は純粋に α 波に対応するものであり、 α 波の局所揺らぎダイナミクスについて考察することができるであろう. 実際には、 α 波に対応する局所フラクタル次元には大きな揺らぎが観測されないのが理解できる. しかし、調和振動子モデルの場合の局所フラクタル次元 [図 3.3(a)] と比べてみるとその局所定常特性に明確な違いが存在する. こうして、再び実 α 波のダイナミクスが調和振動子モデルと完全に同等ではないことが理解できる. また、図 3.10(b) で抽出した α 波対応区間の局所フラクタル次元の PDF は図 3.10(c) に示したようによりベータ分布に近づく. このことから、 α 波の局所フラクタル次元の PDF は普遍的にベータ分布で記述されることが示唆される.

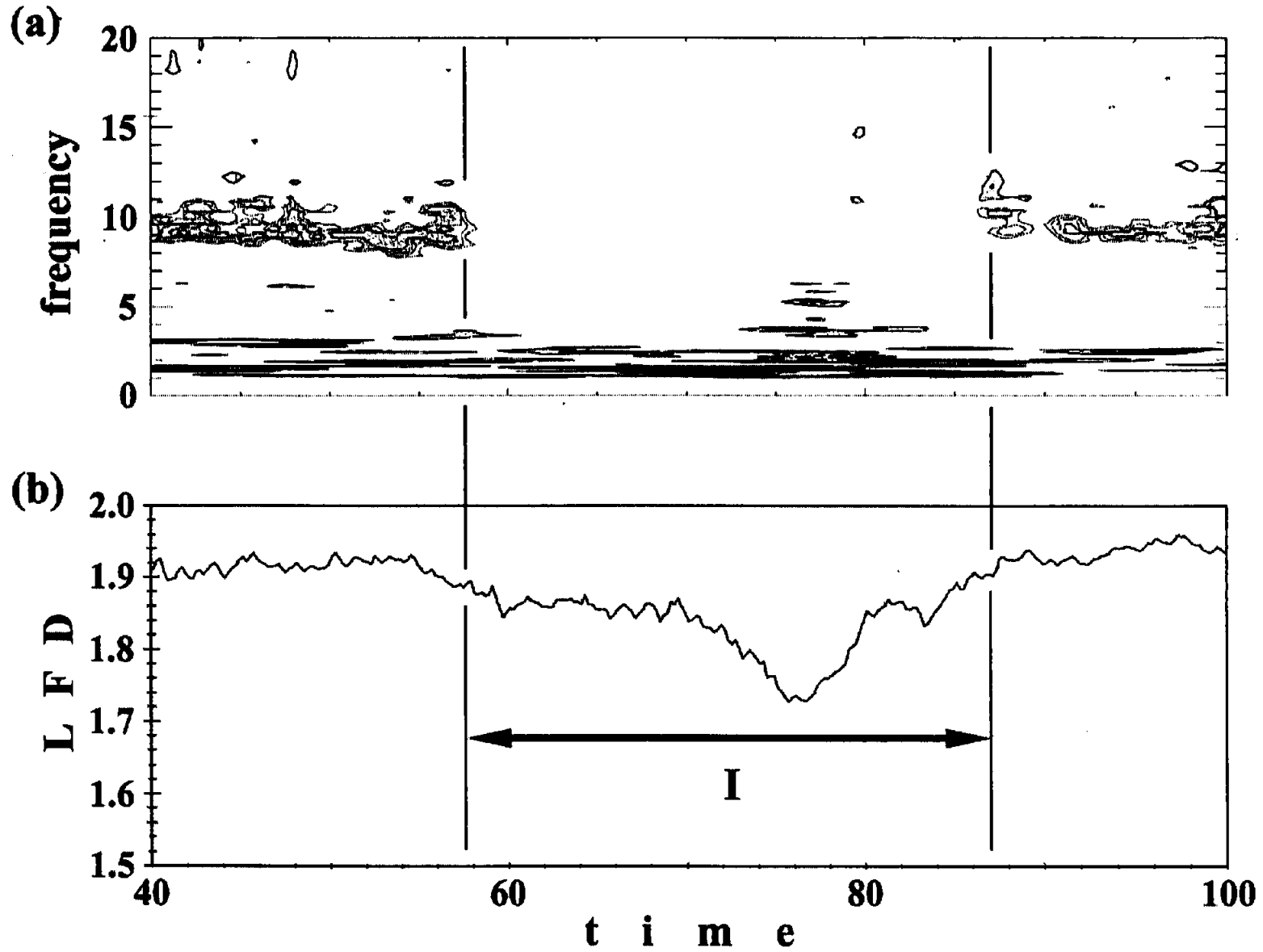


図 3.9: ウェーブレット解析との比較 - 健康高齢者 *hana* - (a) 双曲線 AW を用いたウェーブレットスペクトル, (b) 局所フラクタル次元.

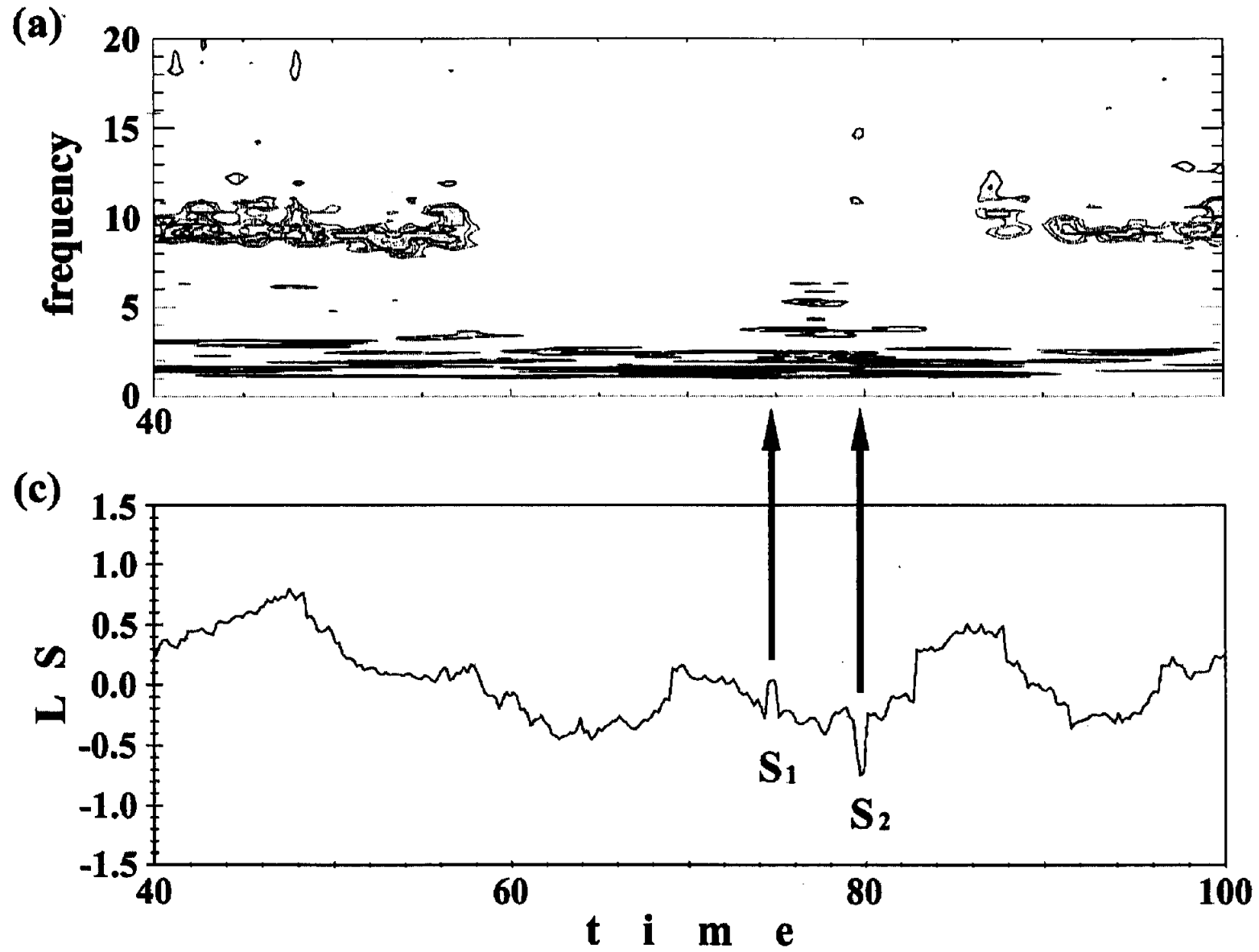


図 3.9: ウェーブレット解析との比較 - 健康高齢者 *hana* - (a) 双曲線 AW を用いたウェーブレットスペクトル, (c) 局所歪度.

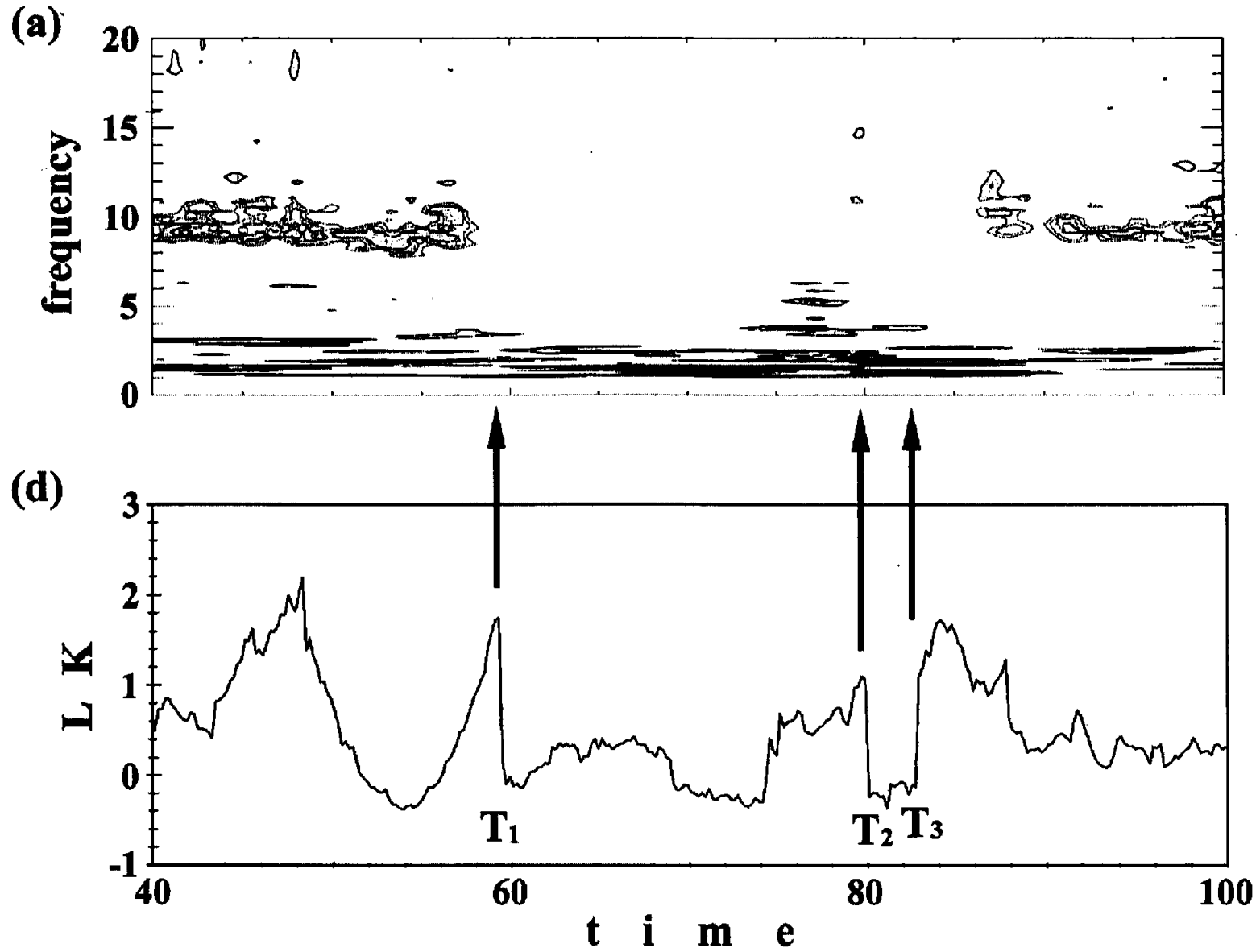


図 3.9: ウェーブレット解析との比較 - 健康高齢者 *hana* - (a) 双曲線 AW を用いたウェーブレットスペクトル, (d) 局所尖度.

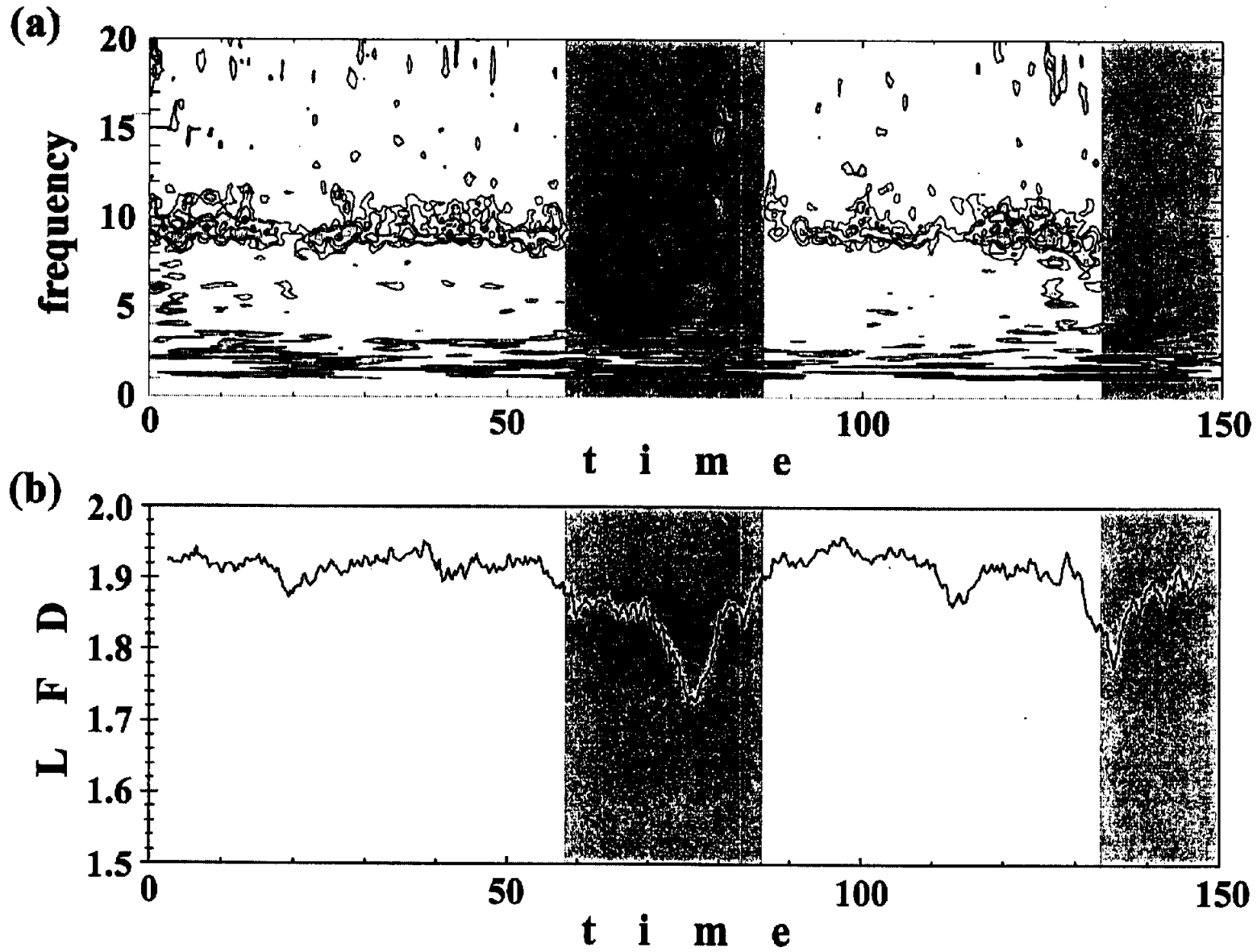


図 3.10: 局所揺らぎダイナミクス解析へのウェーブレット解析の応用 - 健康高齢者 *hana* - (a) 双曲線 AW を用いたウェーブレットスペクトル, (b) 局所フラクタル次元. α 波消失区間(グレー領域)を同定する.

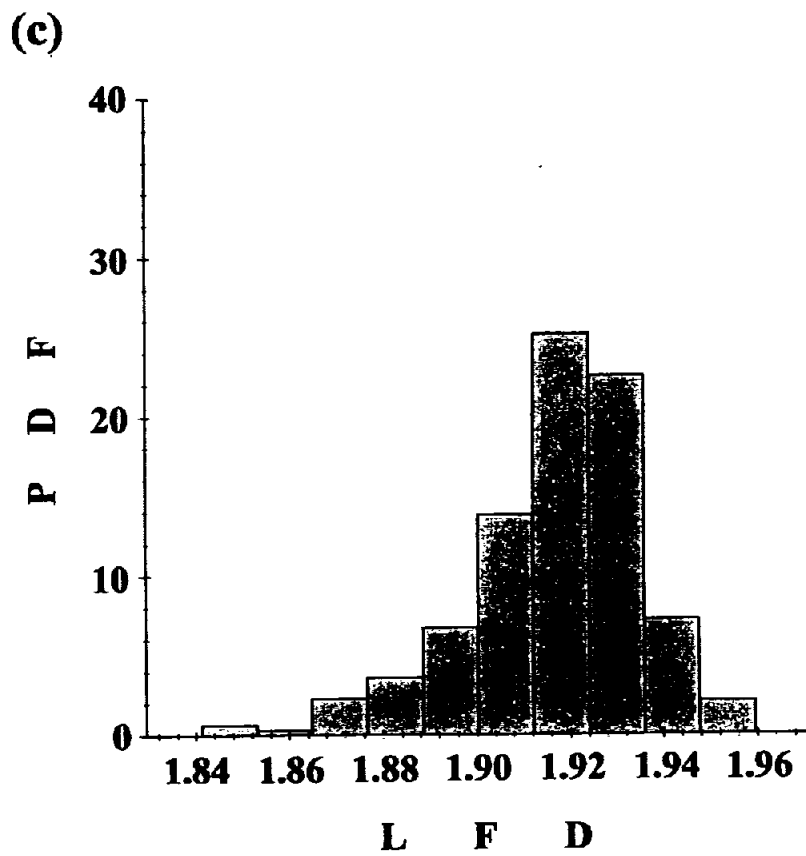


図 3.10: 局所揺らぎダイナミクス解析へのウェーブレット解析の応用 - 健康高齢者 *hana* - (c) α 波出現時の局所フラクタル次元の確率分布関数.

3.5 まとめ

本章ではHOモデル, 健康高齢者脳波, 老年期痴呆者脳波時系列に対して5つの局所統計量; (i) フラクタル次元, (ii) 平均, (iii) 分散, (iv) 歪度, (v) 尖度の確率過程を再構成し, その動的特性の違いを明らかにした. その結果, 老年期痴呆者脳波ではフラクタル次元や歪度や尖度の高次統計量に対して局所的な揺らぎが非常に大きいことが示され, 時系列の特徴を直感的に理解するのに局所統計量の確率過程再構成法が有用であることが示唆された. 一方で, 集団鳥瞰的な観点からこれらのダイナミクスを解析した結果, 脳波時系列に対してフラクタル次元, 平均, 分散, 尖度の確率過程を記述する確率密度関数は同じであることが示された.

しかし, *hira*のフラクタル次元に対するPDF推定で明らかにされたように, 複数ピーク構造に対するPearson系分布関数のPDF適合精度に関する改善点が明らかにされた. Pearson系分布関数ではその構造的限界によりこのようなPDF構造に対して正確なPDF適合ができないと考えられる. それゆえ, このようなPDF構造に対しては他の推定法を取り入れることが必要であろう. また, PDF構造変化に見いだされる揺らぎのダイナミクスの変化を脳の局所非線形特性の観点からより一層解明していくことが求められる. また一般にPDFのパラメータ推定において, 積率推定法を用いた場合に比べ最尤推定法を用いる場合, すなわち非線形の連立超越方程式(3.29), (3.30)を解いた場合の方がPDF適合度はよくなると考えられる. そのため, ウェーブレット解析を用いて区間抽出した確率過程のダイナミクスを用いてより詳細な脳の非線形ダイナミクスを考察する際などには, 最尤推定法を適用して正確にPDFパラメータを推定することで普遍的な確率分布関数形式を明らかにすることが可能であろう.

また, ウェーブレット解析との比較により局所統計量の揺らぎダイナミクスと系の状態変化が対応していることを明らかにした. そこで, 局所揺らぎのダイナミクスに基づいた系の状態診断などが可能であると考えられる. 次章ではこの局所揺らぎを用いた脳の状態診断法について考察し, またその有効性について検討する.