

第 2 章

時間-周波数解析

2.1 はじめに

時間と共に不規則に変動する関数や時系列から一定の規則性を見だし、そこに隠された性質やその発生のダイナミクスを明らかにしようという試みは古くから行われている。こうした時系列解析において最も有名な方法はフーリエ変換や相関関数を用いた解析であろう。パワースペクトル密度 (power spectral density; PSD) や自己相関関数を評価することによって時系列を構成している不規則変動を周期的な変動成分に分解でき、統計的な周期性やその強さを明確に知ることができる。しかし 1940 年代頃には、音声解析や音響認識問題などのいわゆる時系列の非定常な特性に注目されるようになり、従来の手法で得られる時系列の統計的な性質のみによる時系列解析の限界が認識され始めていた。そして、時系列の時間的なスペクトルの構造変化など時系列の非定常構造を明らかにしようという試みが行われるようになった。そこで開発されたのが、時系列の限られた区間に対して窓関数を掛けてフーリエ変換を施す、いわゆる短時間フーリエ変換 (short-time Fourier transform: STFT) である (Koenig *et al.*, 1946)。STFT は物理的原理に基づき厳密に定義されており、多くの時系列解析において直感とよく合ったスペクトルの時間-周波数構造を与えたことから、非定常時系列解析における常套手段の一つとしてすぐに確立した。さらに、STFT を普及させたのはコンピュータの発達と 1965 年の Cooley and Tuckey による高速フーリエ変換 (fast Fourier transform; FFT) アルゴリズムの開発によってである。こうして、STFT の容易さと高速計算法の開発により音声のみならず、様々な分野における非定常時系列解析法として適用されるようになった (Oppenheim, 1970; Allen and Rabiner, 1977)。しかし、STFT では切り出す窓関数の性質に依存して解析関数自身の性質も変化してしまう。そのため、時間-周波数分布の解釈には常に窓関数の性質による変化を考慮する必要があった。このような理由により STFT は常に最良の解析手法とはなり得ず、それに変わる他の解析手法も同時に開発されてきた。

STFT とは全く異なる原理による時間-周波数分布の原型となったのがウィグナーの位相空間分布関数である。そもそも、古典力学においては自由度 n の力学系の状態を表すの

に n 個の座標と n 個の運動量を用いて表す。古典統計力学では位相空間分布関数を導入すればよかった。一方、量子力学においては不確定性原理により座標と運動量を同時に指定することができないため、位相空間分布関数は定義できないと考えられていた。しかし、1932年 Wigner は座標及び運動量の量子力学的分布関数が、適当な関数を用いて古典統計力学の位相空間分布関数と同じ形式で表現されることを示した。ただしその分布関数は正だけでなく負でも定義され得るという意味で古典的分布関数とは本質的に異なっている。このことをきっかけに Kirkwood(1933)らによる古典理論の量子論への拡張が進められ、様々な位相空間分布関数が提案された。この量子力学における位相空間分布関数の考え方や数学と時系列解析における時間-周波数分布の間には強い形式的数学的類似性が存在する(表2.1参照)。Gabor(1946)や Ville(1948)はこれらの類似性から時間-周波数分布の合理性を論じている。こうして時系列解析の分野にウィグナー分布が導入されることとなった(Ville, 1948; Moyal, 1949)。Mark(1970)はウィグナー分布のクロス項の影響を明らかにし、同時にSTFTとの比較を行っている。このようなウィグナー分布の時間-周波数解析における有用性に関する研究が進められると共に、ウィグナー分布に類似したあるいはより簡素化した分布、例えばPage分布(Page, 1952)、Kirkwood-Rihaczek分布(Rihaczek, 1968)やMargenau-Hill分布(Margenau and Hill, 1961)などが古典統計力学との類似性の中で数多く提唱されていた。そのような中、1966年には新しい分布を無数に生成する単純な手法がCohenにより考案された。この手法では時間-周波数分布を核関数により特徴付け、分布の性質はこの核関数が満たすべき条件として表される。また核関数を調べることで分布の性質を容易に確かめることができることが示された。こうして、分布の設計は極めて見通しがよく、また容易になり系統的な分布の研究が行われていった。以来、この一般的なクラス表現から得られる分布はコーエンのクラスといわれ(Cohen, 1989)、様々な分野で時間-周波数解析法として広く用いられている。

コーエンのクラスに属する時間-周波数分布では、解析関数を窓関数で切り出さないことで不確定性関係式を満たし、その範囲内でスペクトル構造を得ることを可能にしている。一方、この手法とは本質的に異なる概念を用いて時変スペクトル構造を得ているのがウェーブレット解析である。地震波を研究していたMorletは、従来の時間-周波数解析では周波数変調時系列のスペクトル構造を満足に表現できないこと、すなわち時間-周波数分解能が一定であるため、高周波数帯域に行くにつれそのスペクトル解像度が不十分となることを認識していた。そこで、解析関数のバンドパスフィルタに相当するウェーブレット関数にアフィン変換を導入し分解能の多重化を実現させることを提唱し、その有効性を示した(Morlet *et al.*, 1982)。このウェーブレット解析は信号処理、画像処理など主に工学の分野で広く応用されている(Young, 1993; Kaiser, 1994)。

前章で示したように、脳波は低周波数域から高周波数域に至る広い範囲で定義されている。そのため、そのスペクトル構造を調べるには周波数解像度の多重性をもつウェーブレット解析が有効となるであろう。そこで本章では脳波時系列時変スペクトル構造をウェーブレット解析により明らかにしていこう。

表 2.1:量子力学と時系列解析の形式的数学的対応.

| 量子力学 | | 時系列解析 | |
|-----------|---|--------------|--|
| 位置 | q | 時間 | t |
| 運動量 | p | 周波数 | ω |
| 時間 | t | | - |
| 波動関数 | $\phi(q, t)$ | 時系列 | $\psi(t)$ |
| 運動量の波動関数 | $\hat{\phi}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dq \phi(q, t) e^{-iqp/\hbar}$ | スペクトル | $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt \psi(t) e^{-i\omega t}$ |
| 位置の確率 | $ \phi(q, t) ^2$ | エネルギー密度 | $ \psi(t) ^2$ |
| 運動量の確率 | $ \hat{\phi}(p, t) ^2$ | エネルギースペクトル密度 | $ \hat{\psi}(\omega) ^2$ |
| 平均(位置) | $\langle q \rangle = \int dq q \phi(q, t) ^2$ | 平均(時間) | $\langle t \rangle = \int dt t \psi(t) ^2$ |
| 平均(運動量) | $\langle p \rangle = \int dp p \hat{\phi}(p, t) ^2$ | 平均(周波数) | $\langle \omega \rangle = \int d\omega \omega \hat{\psi}(\omega) ^2$ |
| 標準偏差(位置) | $\sigma_q = \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2}$ | 標準偏差(時間) | $\Delta t = \sqrt{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$ |
| 標準偏差(運動量) | $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ | 標準偏差(周波数) | $\Delta \omega = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2}$ |
| 不確定性原理 | $\sigma_q \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$ | 時間-周波数分解能 | $\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$ |
| 確率の流れ | $\frac{d}{dq} \{ \phi(q, t) \text{ の位相} \}$ | 瞬時周波数 | $\frac{d}{dt} \{ \psi(t) \text{ の位相} \}$ |

2.2 離散ウェーブレット変換

解析関数 $f(t)$ に関するウェーブレット変換は以下のように定義される:

$$\Psi(a, b) = \int dt \psi_{a,b}^*(t) f(t). \quad (2.1)$$

ここで, $\psi_{a,b}(t)$ は 2 乗可積分関数であるアナライジングウェーブレット (analyzing wavelet: AW), $\psi(t)$ のスケール, シフト変換

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |\psi(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt |\psi_{a,b}(t)|^2 = 1 \quad (2.3)$$

によって与えられるウェーブレット関数である. また $*$ は複素共役を表し, a, b はそれぞれスケール, シフトパラメータである. (2.3) は AW の規格化条件である. 定義 (2.1) は離散時系列に対しても拡張可能である. すなわち, a と b を定数 $a_0 (> 1)$, $b_0 (> 0)$ を用いて以下のように離散化する; $a = (a_0)^m$, $b = nb_0(a_0)^m$ (ここで m, n は整数). このようにして, 解析時系列 $f(t)$ に対する離散ウェーブレット変換が以下のように定義される:

$$\Psi(m, n) = \int dt \psi_{m,n}^*(t) f(t). \quad (2.4)$$

AW は時間空間においてはその平均が 0 であり:

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt t |\psi(t)|^2 = 0, \quad (2.5)$$

また周波数空間においても適当な変数変換によりその平均を 0 とすることができる:

$$\langle \omega \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 = 0. \quad (2.6)$$

ただし $\hat{\psi}$ は ψ のフーリエ変換

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \psi(t) \exp(-i\omega t) \quad (2.7)$$

を表す. (2.5) と (2.6) を用いて, t と ω に関する分散は

$$(\Delta t)^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt t^2 |\psi(t)|^2, \quad (2.8)$$

$$(\Delta \omega)^2 = \langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 \quad (2.9)$$

で与えられる. ここで, Cauchy-Schwarz の不等式より t, ω の標準偏差値間に “不確定性関係式”

$$\Delta t \Delta \omega \geq 1/2 \quad (2.10)$$

が成り立つことが示される. 詳細は付録 A に記した.

一般に, 離散ウェーブレット変換ではウェーブレット関数 $\{\psi_{m,n}(t)\}$ は非直交基底とな

るために基底同士間の干渉効果が発生する。しかし、スケーリング係数 a_0 が1に十分に近く、シフト間隔係数 b_0 がナイキストサンプリング密度 $1/f$ より小さくとればウェーブレット関数は疑似直交基底を構成する (Grossmann and Morlet, 1984)。また、AW にアドミッシブル条件

$$\hat{\psi}(0) = 0 \quad (2.11)$$

が成り立つとき、ウェーブレット逆変換が成立する。しかし、厳密に(2.11)を満たさせることは、AW の時間空間での局在性を悪くする。つまり、不確定性関係式(2.10)のため時間、周波数両空間で局在性を同時によくすることは不可能である。そこで、AW には不確定性関係式を満たし、且つアドミッシブル条件を近似的に満たすこと、すなわち $\hat{\psi}(0) \sim 0$ を課す。実際にこの条件下でウェーブレット基底同士間の干渉効果は無視できることが示されている (佐藤, 1991)。本研究ではこれらの条件を満たすように $a_0=1.025$, $b_0=0.001$ と設定する。

2.3 アナライジングウェーブレット

ウェーブレット解析の特性の一つに、AW の相似相関性を利用した動態変化抽出が挙げられる。すなわちアフィンクラスを構成するAW の解析関数との相似相関性はそこに含まれる特定のパターンなどの検出に適性である。そのため、解析対象に応じた様々なAW が適用されている。よく知られているように、実関数形式のドベシイ (Daubechies) やハール (Haar) ウェーブレットはそのウェーブレット関数が直交基底となるために再構成が容易であり、画像圧縮や画像再構成などに用いられている。また、ガウス関数の高階微分 (Derivative of Gaussian function)、特に $m=2$ の時をラプラシアンガウシアン関数又はメキシカンハットウェーブレットという、やガウス関数の差 (Difference of Gaussian function) などはガウシアン包絡線を持つような孤立波や関数解析に対して有効である。一方、複素関数解析においては Gabor 関数やポール (Paul, 1984) のウェーブレットなどの複素関数 AW が位相情報をも得られるという意味で有用である。特に Gabor 関数はその不確定性関係式が最小であり、また2次元化が容易であること、無限回微分可能などの性質から非常に広く適用されているAW の一つである。一方、近年堀畑ら (1996) は非線形偏微分方程式の解として知られている双曲線関数を音声再構成問題においてAW として用いることを提唱している。近年双曲線 AW の相似相関性に基いた様々な解析が行われ、その相似相関性に基いた有用性について示されている (Saji and Konno, 1997, 1998a, b, c)。

しかし、ウェーブレット解析を行う際のAW の選択基準は明らかになっていない。理論的には時間、周波数両空間で局在し、アドミッシブル条件(2.11)を満足していればAW として用いることが可能である。これ以外の一般的な基準としては、AW の滑らかさの度合いや時間及び周波数分解能 (不確定性関係式) などが挙げられる。本研究では α 波のように特徴的な周期変動成分を持った脳波時系列の時変スペクトル構造を不確定

性が最小の Gabor 関数と同じく複素 AW である双曲線関数を用いて, AW の不確定性関係式からウェーブレットスペクトル構造に見いだされる特性を明らかにする. また, ウェーブレットスペクトルに統計的検定を導入し老年期痴呆者脳波の特徴を抽出し, 臨床像との比較を行いその有用性について考察する.

2.3.1 Gabor 関数

調和振動子の基底関数である Gabor 関数は

$$\psi_G(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{p_0}{\gamma}} \exp \left\{ - \left(\frac{p_0}{\gamma} \right)^2 \frac{t^2}{2} \right\} \exp(ip_0 t) \quad (2.12)$$

と与えられる. ここで, γ, p_0 はパラメータである. 不確定性関係はよく知られているように最小である:

$$\Delta t \Delta \omega = \frac{1}{2} = 0.50. \quad (2.13)$$

時間と周波数に関する標準偏差はそれぞれ $\Delta x_G = \gamma / \sqrt{2} p_0$, $\Delta \omega_G = p_0 / 2\gamma$ で与えられる. 本研究ではパラメータ γ, p_0 をそれぞれ $\gamma = 2.05$, $p_0 = 200\pi$ と与える.

2.3.2 双曲線関数

堀畑ら(1996)によって提唱された AW, 双曲線関数は

$$\psi_h(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{p_0}{\gamma'} \right)^{\frac{1}{4}} \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{\frac{p_0}{\gamma'}} t \right\} \exp(ip_0 t) \quad (2.14)$$

と与えられる. ここで, γ', p_0 はパラメータである. 双曲線 AW の“不確定性関係式”は

$$\Delta t_h \Delta \omega_h = \frac{\pi}{6} = 0.52... \quad (2.15)$$

と与えられる(Saji and Konno, 1998b). (2.15) の詳細な導出法は付録 A に記した. また, t と ω に関する標準偏差は $\Delta t_h = \pi \sqrt{\gamma' / 12 p_0}$, $\Delta \omega_h = \sqrt{p_0 / 3 \gamma'}$ である(Saji and Konno, 1998b, c). 本研究では, アドミッシブル条件を Gabor AW と同じオーダーで成立するようにパラメータ γ' を設定する; $\gamma' = 10.48$, $p_0 = 200\pi$.

不確定性関係式(2.13)と(2.15)を相互比較すると Gabor AW の方が小さい. しかし, 本研究におけるパラメータ $\gamma = 2.05$, $\gamma' = 10.48$, $p_0 = 200\pi$ 下で2つの AW の t, ω に関するそれぞれの標準偏差値を評価し相互比較してみると t に関しては $\Delta t_h = 4.39 \Delta t_G$, ω に関しては $\Delta \omega_h = 0.24 \Delta \omega_G$ となっている. すなわち, 不確定性関係式からは $\Delta t_h \Delta \omega_h = 1.05 \Delta t_G \Delta \omega_G$ であり, 一見双曲線 AW では t, ω 両空間で標準偏差値が大きいように理解されるが, 実際には ω 平面では Gabor AW に比べ標準偏差値は小さく, 一方その分 t 平面で標準偏差値が大きくなっている.

2.4 統計解析

実脳波時系列には(i) 眼球運動(3 Hz 以下) や体動, 発汗に伴う低周波数雑音(1 Hz 以下), (ii) 筋電による高周波数雑音(35–50 Hz), (iii) 計測機械の熱雑音などの頭部外部からの雑音の影響を受けやすく(Gevins, 1987), ウェーブレットスペクトル描像の安易な理解には注意が必要である. このような問題に対し, Torrence and Compo(1998) はエルニーニョに関連した海水温変動時系列のウェーブレット解析においてウェーブレットスペクトルに統計的検定を導入し, エルニーニョ現象に起因した詳細な周期変動構造を明らかにすることに成功している. そこで, 本研究においても脳波時系列のウェーブレットスペクトルに対して統計的検定を導入し, 時系列を特徴付けるスペクトル構造を抽出することを試みよう. Torrence and Compo はレッドノイズ [AR(1) モデル] をバックグラウンドモデルに仮定し, 統計的検定を行っている. しかし, 本研究において彼らの手法をそのまま適用すること, すなわちバックグラウンドモデルとしてレッドノイズを仮定することは適切ではない. なぜなら, 脳波に混入するノイズ成分は低周波数域と高周波数域共に考えられ, レッドノイズとは本質的に異なるからである. そこで, 統計的検定に用いることのできる脳波のノイズモデルを仮定する必要がある. しかし物理的に脳のノイズダイナミクスを考察し, そのモデルを構築するのは容易ではない. そこで, バックグラウンドモデルとして脳波のランダム変動そのものを記述するモデルを用いることを試みる. 本研究では α 波が最も優勢に出現する後頭部位の脳波時系列を解析対象としている. それゆえ, α 波の動的特性を記述するようなモデルをバックグラウンドモデルに適用すればよいであろう.

これまで多くの研究で, 脳波のランダム変動が高次元ダイナミクスで記述されることが示されてきた(Dvorak and Siska, 1986; Pritchard and Duke, 1992); 特に, α 波に関しては Babloyantz and Destexhe(1987) や Layne *et al.*(1986) がその埋め込み次元を評価しておりおおよそ5–6であることを示している. また, マクロな脳波挙動を記述した Freeman(1975) の前頭部嗅葉領域脳波モデルや α リズムに関連した Zetterberg の視床領域脳波モデル(1973, 1978) などこれらはいずれも高次元状態空間モデルである. このように, 脳波ダイナミクスを記述するには高次元状態空間モデルが有効であると考えられる. しかし, これらのモデルを用いたシステム同定をノイズ混入時系列に対して行うことは, 脳波本来のダイナミクス理解にはつながらないと考えられる. 一方, 近年 Valdes *et al.*(1999) は修正 Zetterberg モデル(1978) を用いて α リズムのシステム同定を行い, α リズムが点アトラクタとリミットサイクルアトラクタの2つに分類されることを示している. つまり, 安定平衡解や安定周期解を持つような低次元微分方程式系を用いて α 波のダイナミクスを定性的に記述することが可能であると考えられる. そこで本研究では, 特に α 波の点アトラクタ周辺でのダイナミクスに限定して注目すれば, 調和振動子(harmonic oscillator: HO) モデルが α 波の第0近似モデルとして利用可能であると考えられる. そこで, 本節ではHOモデルをウェーブレットスペクトルの統計的検定におけるバックグラウンドモデルとして, また同時に α 波の第0近似モデルとして位置付け, そのスペクトル構造の定性的な相違点を脳波時系列との比較により明らかにしていくこととしよう.

2.4.1 調和振動子モデル

質量 m の粒子 x の摩擦力 $\zeta\dot{x}$ (ここで ζ は摩擦定数), ばね定数 κ による調和力 κx , 確率的な揺動力 $P(t)$ 下におけるブラウン運動は運動方程式

$$m\ddot{x} + \zeta\dot{x} + \kappa x = P(t), \quad (2.16)$$

$$\langle P(t)P(t') \rangle = D\delta(t-t') \quad (2.17)$$

によって記述される. ここで, 両辺を m で割り, $k = \zeta/m$, $\omega_0^2 = \kappa/m$ として $F(t) = P(t)/m$ とすれば調和振動子に対するランジュバン方程式, すなわち HO モデル

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t), \quad (2.18)$$

$$\langle F(t)F(t') \rangle = D_0\delta(t-t') \quad (2.19)$$

が得られる. $F(t)$ は強さ $D_0 = 2k\omega_0^2 \langle x \rangle^2 = D/m$ の白色雑音である.

さて, 二次元の行列とベクトル

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -k \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

を導入すると (2.18) は

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{F}(t) \quad (2.23)$$

の形に書ける. すなわち, HO モデルは 2次元のオルンシュタイン-ウーレンベック過程, 従って 1つのマルコフ過程として記述される (Soong, 1973). オルンシュタイン-ウーレンベック過程に対する揺動散逸定理より HO モデルのフーリエスペクトルは

$$P(\omega) = \frac{D_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (k\omega)^2} \quad (2.24)$$

で与えられる (Soong, 1973). HO モデル (2.18) を α 波の第 0 近似モデルと理解するためには, 実 α 波と定性的に同等な振る舞いを示すようにパラメータ k , ω_0 を設定しよう. まず, 高齢者脳波の臨床学的知見 (Niedermeyer and Lopes da Silva, 1999) から推測されるように α 波が優勢に観測されるのは健康高齢者 *hana*, *imam* 脳波時系列と考えられる. そこで, *hana*, *imam* 脳波時系列の最も基礎的な特徴は, それらの自己相関関数

$$R(\tau) = C(\tau)/C(0) \quad (2.25)$$

によって明らかにできるであろう. ここで $C(\tau) = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle$ は相関関数である. 図 2.1(a)-(b) にはそれぞれ *hana*, *imam* に対して求めた $R(\tau)$ を示した. 両者の自己相関関数

はおよそ9Hzの尾 (tail) を引いていることが理解できる。この規則的な周期振動成分は α 波に対応したものである。そこで、HOモデルの固有振動数 ω_0 を α 波周波数に対応させるように $\omega_0=2\pi \times 9$ と設定する。同様に、HOモデルの減衰定数 k を脳波時系列の自己相関関数 $R(\tau)$ の尾の減衰率より推定する。まず、(i) HOモデルの $R(\tau)$ の減衰比、すなわち $R(\tau)$ の第1ピーク(=1)と第2ピークの相対比を γ_D とすれば、 γ_D はパラメータ k 、 ω_0 を用いて

$$\gamma_D = \exp\left(-\frac{k\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{k}{2})^2}}\right) \quad (2.26)$$

と与えられる (Konno et al., 1999)。そこで、(2.26)を k に関して解けば

$$k = \sqrt{\frac{(\omega_0 \ln \gamma_D)^2}{\pi^2 + (\ln \gamma_D / 2)^2}} \quad (2.27)$$

と与えられる。ここで $R(\tau)$ から γ_D を数値的に評価し、また $\omega_0=2\pi \times 9$ を(2.27)に代入すれば k の推定値を得ることができる。一方、(ii) HOモデルの振動周波数 ω_p は

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{k}{2})^2} \quad (2.28)$$

と与えられるが、 $\omega_p \sim 0$ とみなすことができるとき $R(\tau)$ の尾は近似的に

$$R(\tau) \sim \exp(-k\tau/2) \quad (2.29)$$

で減衰する。そこで、 $R(\tau)$ の包絡線に関して最小2乗法を用いてその近似曲線 $\exp(-\kappa\tau)$ を求めれば、(2.29)より

$$k = 2\kappa \quad (2.30)$$

と与えられる。こうして k 推定値を得ることができる。表2.2には *hana*、*imam*に対して(i)の手法で推定した k の推定値、(ii)の手法を用いて推定した k の推定値を記した。これらの推定値のうち、前者を k 推定上限値とし、後者を k 推定下限値とする。

*hana*に対しては k 推定上限値が13.36、 k 推定下限値が5.53となり k 推定平均値は9.45となった。*imam*に対しては k 推定上限値が15.45、 k 推定下限値が4.62となり k 推定平均値が10.04となった。そこでこれらの平均値 $k=(9.45+10.04)/2=9.75$ をHOモデルの k 評価値とする。こうして、HOモデル($k=9.75$ 、 $\omega_0=2\pi \times 9$)は点アトラクタ周辺での定性的な実 α 波ダイナミクスを十分に記述していると考えられ、また α リズムを非線形振動として理解したとき、そのダイナミクスを記述する非線形微分方程式の平衡点周辺のダイナミク

表 2.2: パラメータ k の推定値

| | | 上限値 | 下限値 | 平均値 |
|-----|-------------|-------|------|-------|
| (a) | <i>hana</i> | 13.36 | 5.53 | 9.45 |
| (b) | <i>imam</i> | 15.45 | 4.62 | 10.04 |

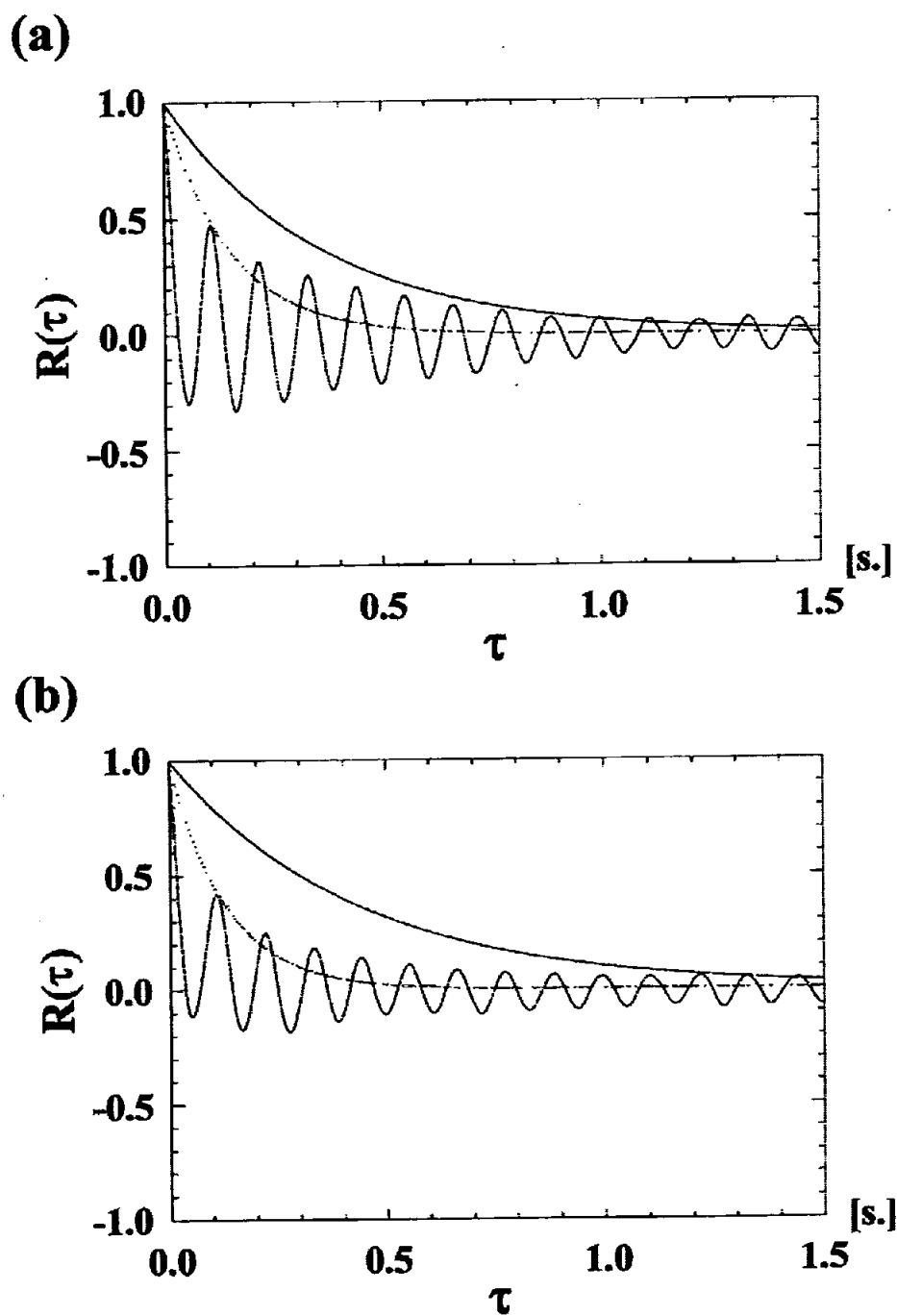


図 2.1: 脳波時系列の自己相関関数を用いた調和振動子モデルの減衰定数評価 (実線:最小2乗法, 点線:減衰比評価) (a) 健康高齢者 *hana*, (b) 健康高齢者 *imam*.

スをもHOモデルにより理解することができるであろう。そこで本研究では、HOモデルのウェーブレットスペクトル構造を通して脳波時系列、特に健康高齢者脳波時系列のそれとの定性的な相違点を明らかにし、 α 波の点アトラクタ周辺での力学構造について考察することを試みよう。そのために、HOモデル時系列を脳波時系列と同条件(サンプリング周波数 $f=200$ Hz で $N_0=30000$ 点)で数値的に生成する。ここでHOモデルに局所線形化近似(Ozaki, 1993)を適用し、また外力 $F(t)$ として白色正規雑音を用いて時系列を生成した。

2.4.2 統計的検定

正規分布に従い分散が σ^2 の時系列に対し、複素 AW を用いたウェーブレットスペクトル $|\Psi(m, n)|^2/\sigma^2$ は自由度2の χ^2 分布に従う(Jenkins and Watts, 1968)。そこでバックグラウンドフーリエスペクトル $P(\omega)$ に、設定した有意水準 p のもとでの χ_p^2 を掛け2で割った $P(\omega)\chi_p^2/2$ と分散で規格化したウェーブレットスペクトル $|\Psi(m, n)|^2/\sigma^2$ とを相互比較する。このときバックグラウンドスペクトルに対して上位のスペクトル

$$\frac{|\Psi(m, n)|^2}{\sigma^2} > \frac{P(\omega)\chi_p^2}{2} \quad (2.31)$$

を統計的に有意とみなす。バックグラウンドスペクトルの形状は有意水準 p の値によって変化するので、 p の設定は物理的考察に基づき設定しなければならない。図 2.2(a)にはHOモデルの場合に $p=0.05, 0.10, 0.20, 0.30, 0.35$ と変化させたときのバックグラウンドスペクトルの形状を示す。Torrence and Compo(1998)は $p=0.05$ として統計的検定を行っている。通常、統計的検定では有意水準として $p=0.05$ を用いるが、本研究においても安易に $p=0.05$ と設定してよいだろうか。そこで p 値を設定するために、健康高齢者 *hana*, *imam* の大局的ウェーブレットスペクトル

$$\overline{\Psi^2}(m) \equiv \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} \frac{|\Psi(m, n)|^2}{\sigma^2} \quad (2.32)$$

を調べてみよう。*hana*の場合を図 2.2(b)に *imam*の場合を図 2.2(c)に示す。 $\overline{\Psi^2}(m)$ は時間空間成分に関して平均されたウェーブレットスペクトルである。*hana*の場合 $\overline{\Psi^2}(m)$ の最大値は9Hz付近でおよそ45、また *imam*ではおよそ35であることが理解できる。本研究において、バックグラウンドモデルのHOモデル(2.18)は脳波(α 波)の第0近似モデルとして導入している。それゆえ、バックグラウンドスペクトルには実 α 波の大局的な特徴を反映するようにさせればよいであろう。そこで、バックグラウンドスペクトルのピーク値を実 α 波の平均的なピーク値に対応させるように p 値を選べばよい。実際に、 $p=0.35$ の時そのスペクトルピークはおよそ45であり、*hana*, *imam*の場合のそれとほぼ同じレベルである考えられる。こうして、 $p=0.35$ と設定し、 $\chi_{0.35}^2=2.0996$ を(2.31)に代入してウェーブレットスペクトルに対して、統計的検定を行う。

図 2.3(a), (b)にはHOモデルに対してGabor AW と双曲線 AW を用いたときのウェーブレットスペクトルを示す。図中において、等高線は最大値に対して85%, 95%, 99%値の

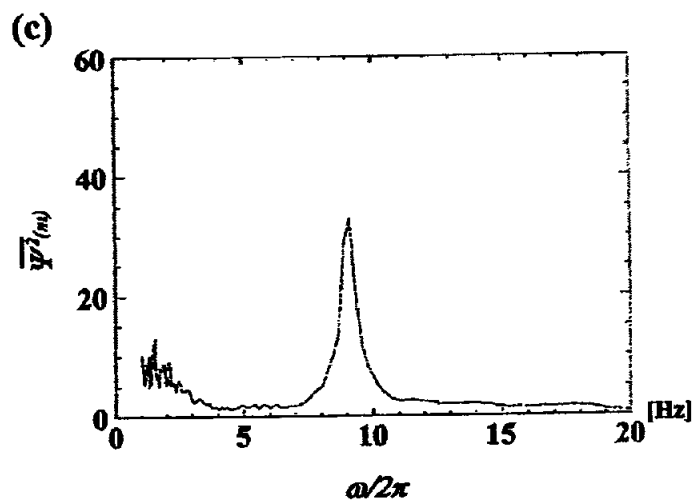
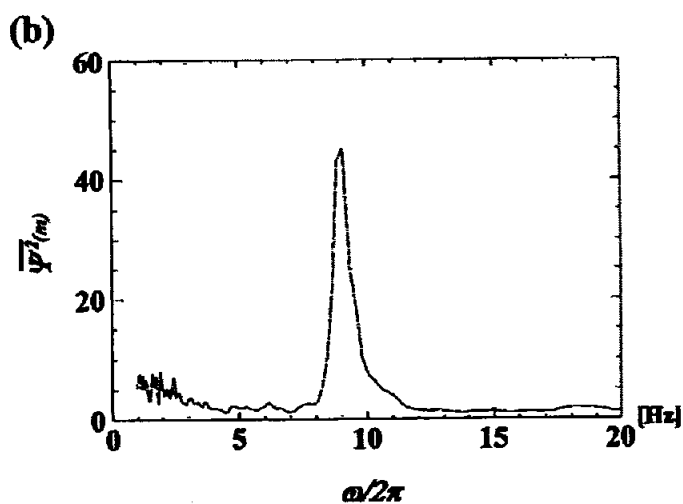
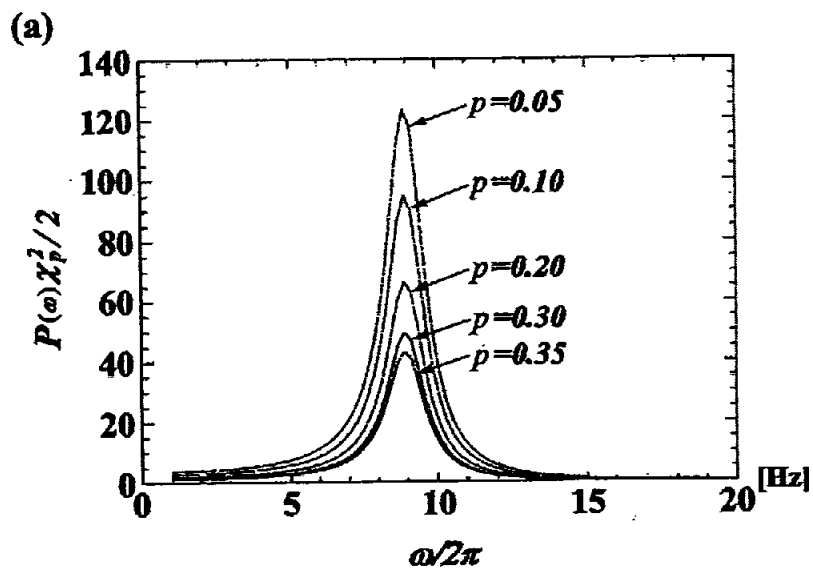


図 2.2: バックグラウンドスペクトルと大局的ウェーブレットスペクトル (a) 有意水準 p による調和振動子モデルのフーリエスペクトル, (b) 健康高齢者 *hana* の大局的ウェーブレットスペクトル, (c) 健康高齢者 *imam* の大局的ウェーブレットスペクトル.

ところで描画しそれぞれ白, 灰色, 黒で色分けしている. HOモデルでは, 9Hz付近に絶えずスペクトルが出現しておりそれらは途切れることはないのが理解できる. 一方で, ウェーブレットスペクトルのピーク軌跡のみを描画したものが図 2.3(c), (d)である. Gabor AW の場合が(c)に, 双曲線 AW の場合が(d)に対応する. 明らかに双曲線 AW に対して周波数変動が少なく, 周波数解像度がよいことが理解できる. 実際にピーク値の分散を評価してみると, (c) Gabor AW の場合には $(\sigma_{\omega_0}^2)_G=1.56$, (d) 双曲線 AW の場合には $(\sigma_{\omega_0}^2)_h=0.32$ となっている. これらから, 双曲線 AW の場合の周波数解像度がGabor AW の場合に比べ0.21倍であることが理解できる: $(\sigma_{\omega_0}^2)_h \sim 0.21(\sigma_{\omega_0}^2)_G$. 一方, 本研究のパラメータ設定値($p_0=200\pi$, $\gamma=2.05$, $\gamma'=10.48$)では, Gabor AW と双曲線 AW の周波数に関する標準偏差値には $\Delta\omega_h=0.24\Delta\omega_G$ なる関係式が成り立つ. これらの結果は十分に整合しているものと考えられ, ウェーブレット解析における時間-周波数解像度特性はAWの不確定性関係式により容易に理解できることが示された.

図 2.4には健康高齢者 *hana* に対するウェーブレットスペクトル [(a) Gabor AW を用いた場合, (b) 双曲線 AW を用いた場合] を示す. 図中において等高線は最大値に対して85%, 95%, 99%値のところ描画し, グレーで色分けされたスペクトルは統計的に有意とみなされたスペクトルである. 同様に, 図 2.5には健康高齢者 *imam* に対するウェーブレットスペクトルを, 図 2.6には老年期痴呆者 *hira* に対するウェーブレットスペクトルを, 図 2.7には老年期痴呆者 *hiro* に対するウェーブレットスペクトルを示す.

健康高齢者 *hana*, *imam* では, α 波に相当するスペクトルが9Hz付近に出現しているが, HOモデルの時と異なりそれらの出現パターンは間欠的である. また, β 帯域に相当する高周波数側にも細かいピークが見られ, これらが統計的に有意とみなされた. 一方, 老年期痴呆者 *hira* に対しては α 波に相当するスペクトルは全く見られず, ほとんどが3Hz以下である. この低周波数スペクトルが統計的に有意とみなされた. 老年期痴呆者 *hiro* に対しては α 波よりも θ 波に相当するスペクトルが有意とみなされた. これは臨床学的によく知られた α 波周波数の減少に対応するものと考えられる. これら2名の老年期痴呆者では健康高齢者の時に見られたような β 帯域のスペクトルは見られなかった.

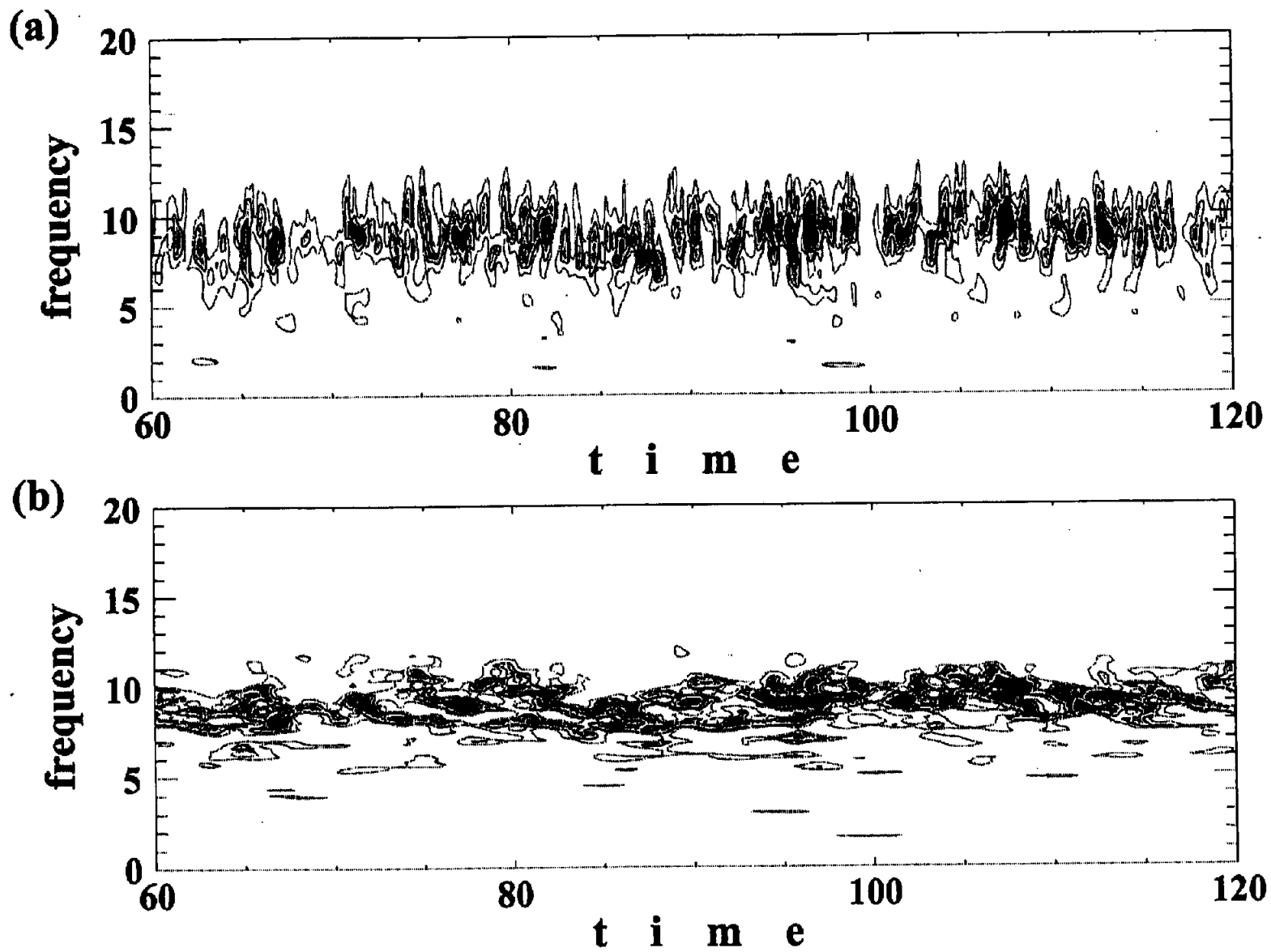


図 2.3: 調和振動子モデルのウェーブレットスペクトル (a) Gabor AW, (b) 双曲線 AW.

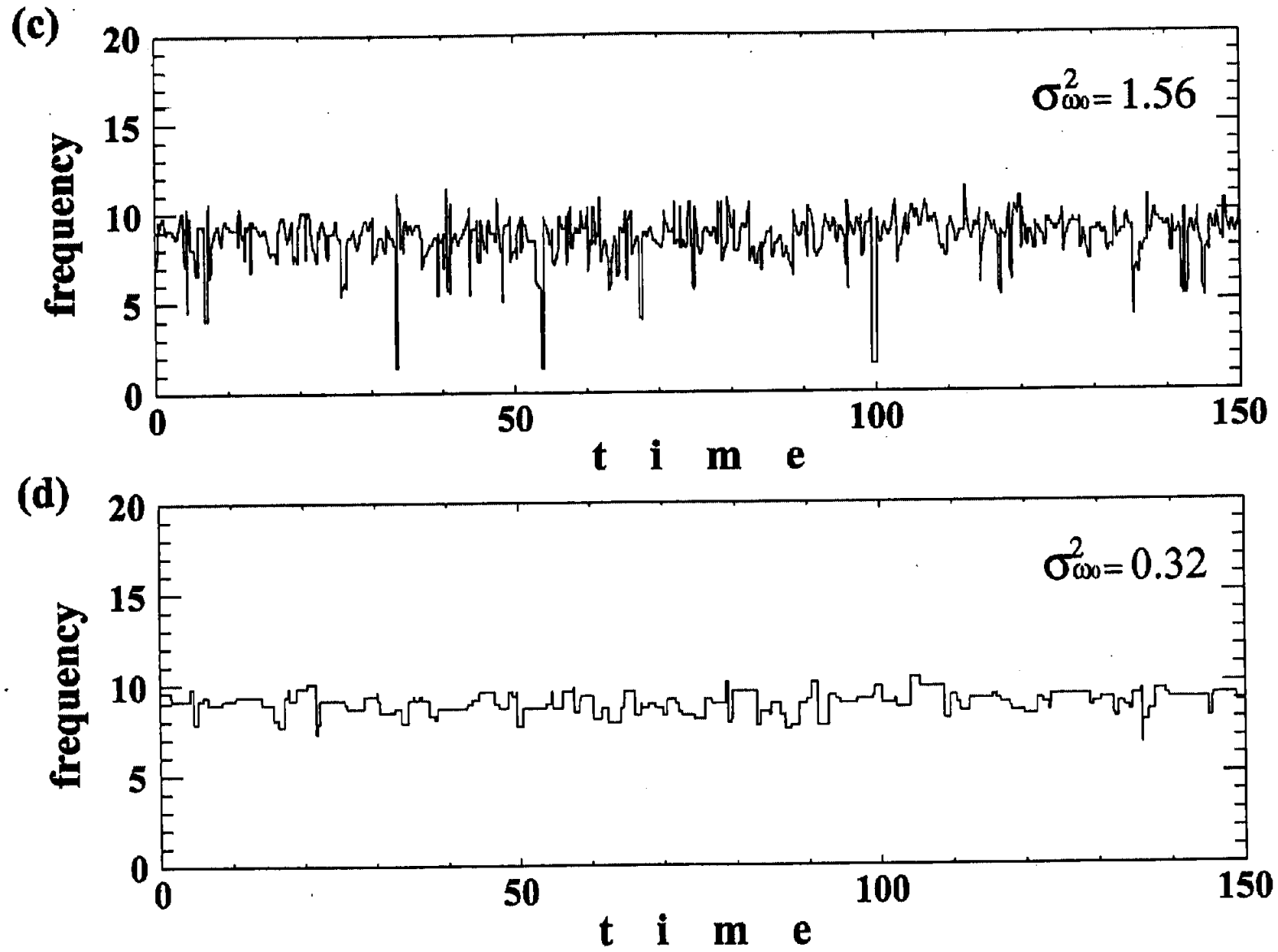


図 2.3: 調和振動子モデルのウェーブレットスペクトルピークの軌跡とその分散 (c) Gabor AW, (d) 双曲線 AW.

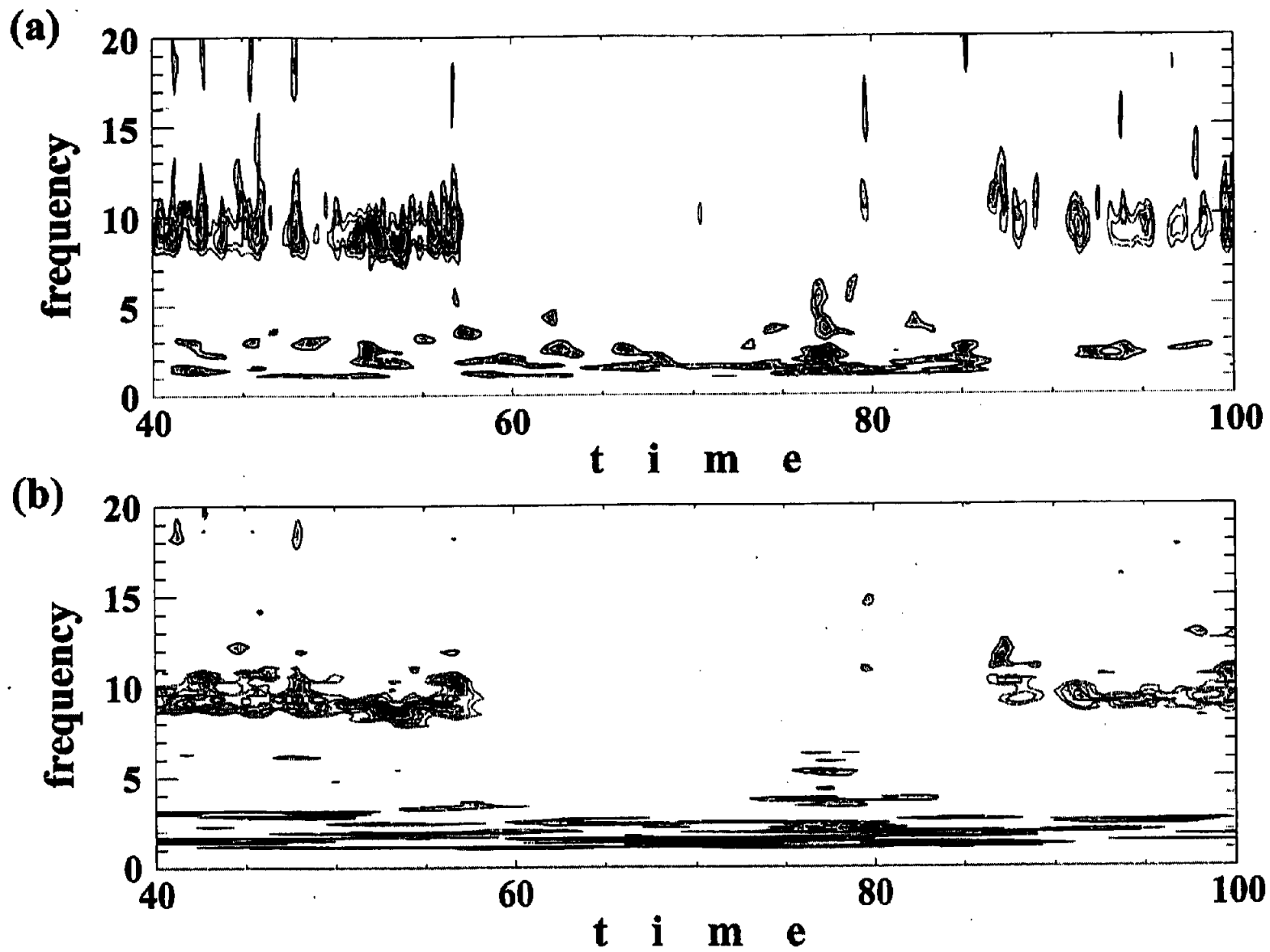


図 2.4: 健康高齢者 *hana* のウェーブレットスペクトル (a) Gabor AW, (b) 双曲線 AW.

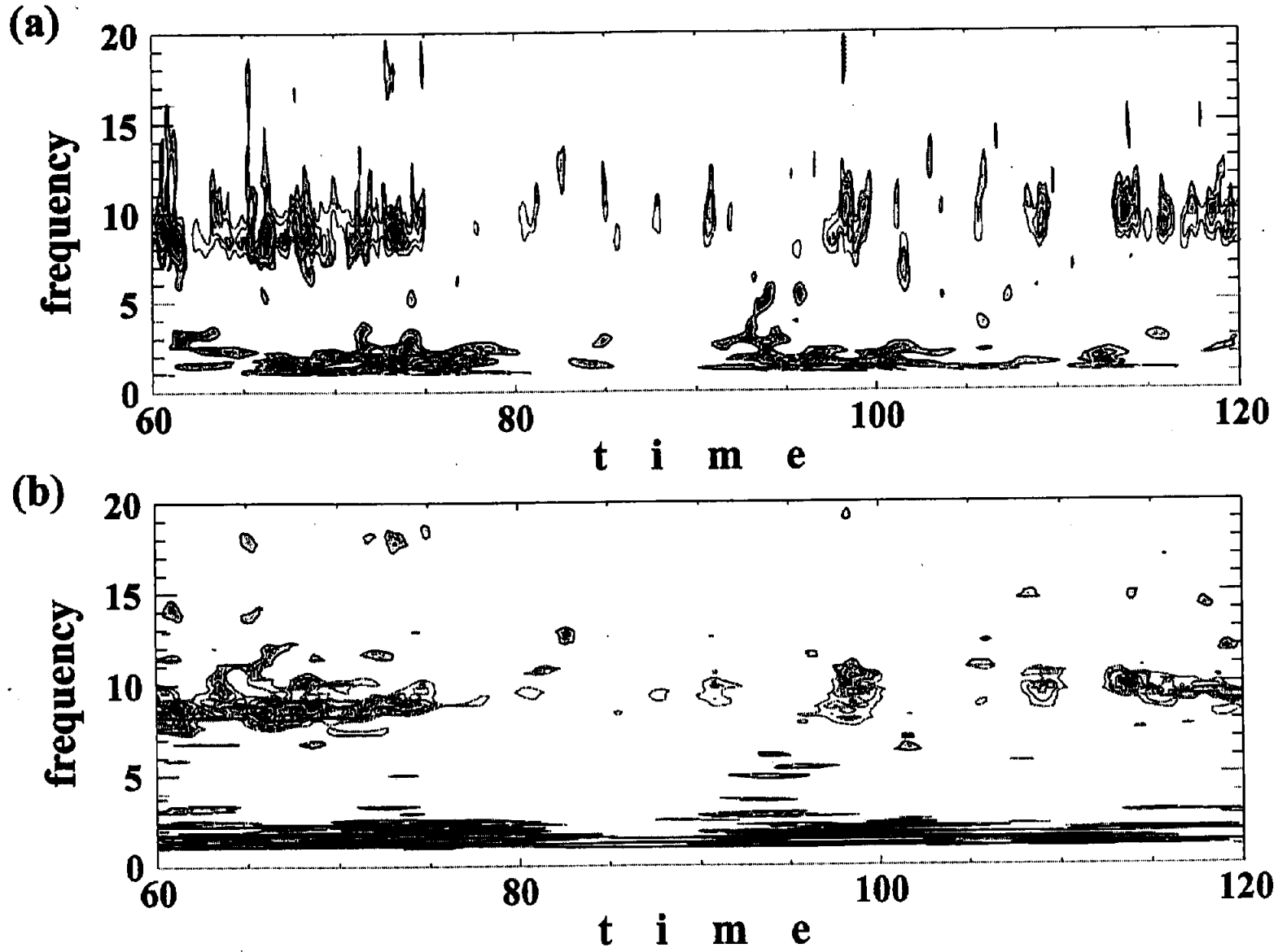


図 2.5: 健康高齢者 *imam* のウェーブレットスペクトル (a) Gabor AW, (b) 双曲線 AW.

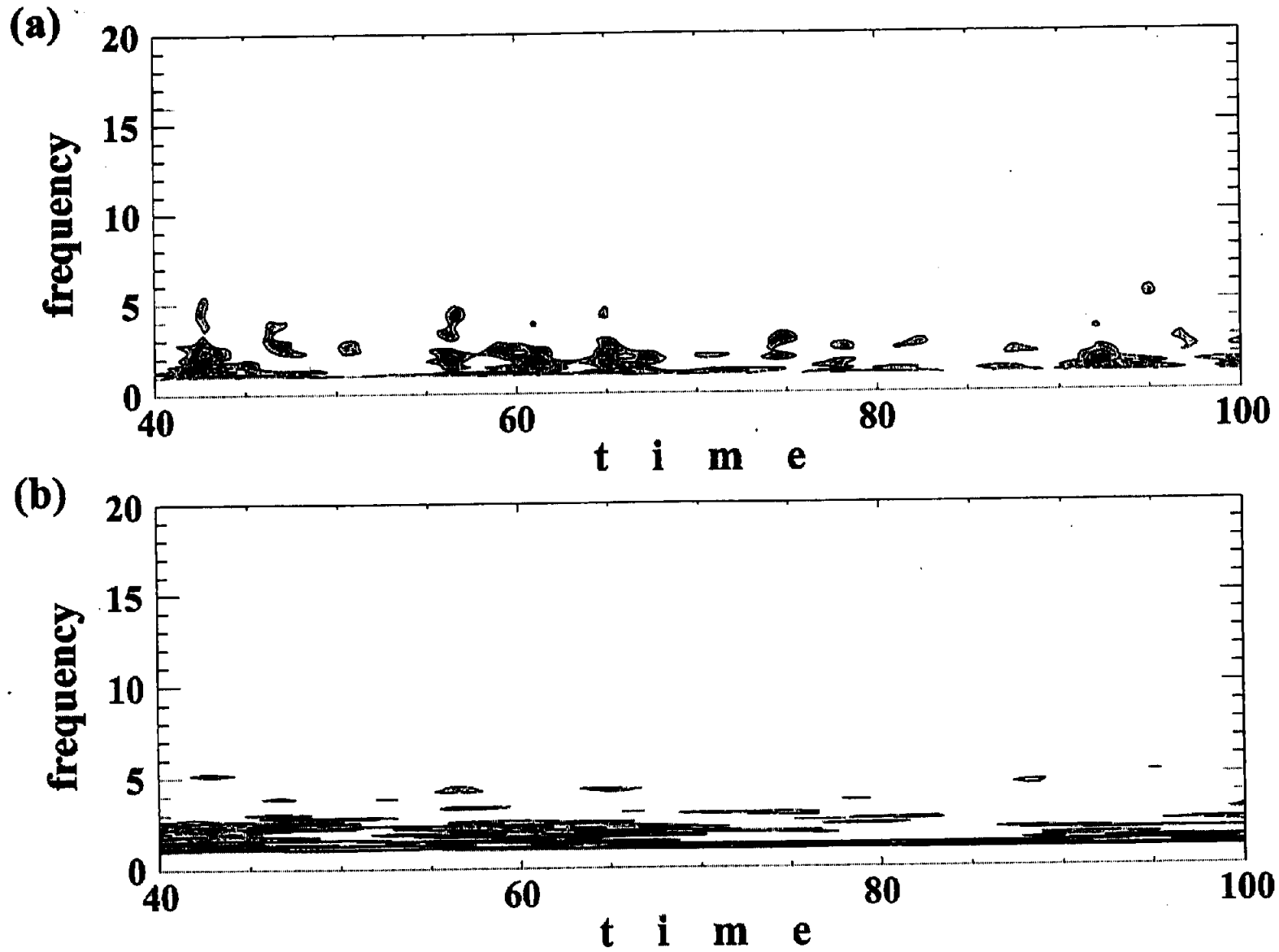


図 2.6: 老年期痴呆者 *hira* のウェーブレットスペクトル (a) Gabor AW, (b) 双曲線 AW.

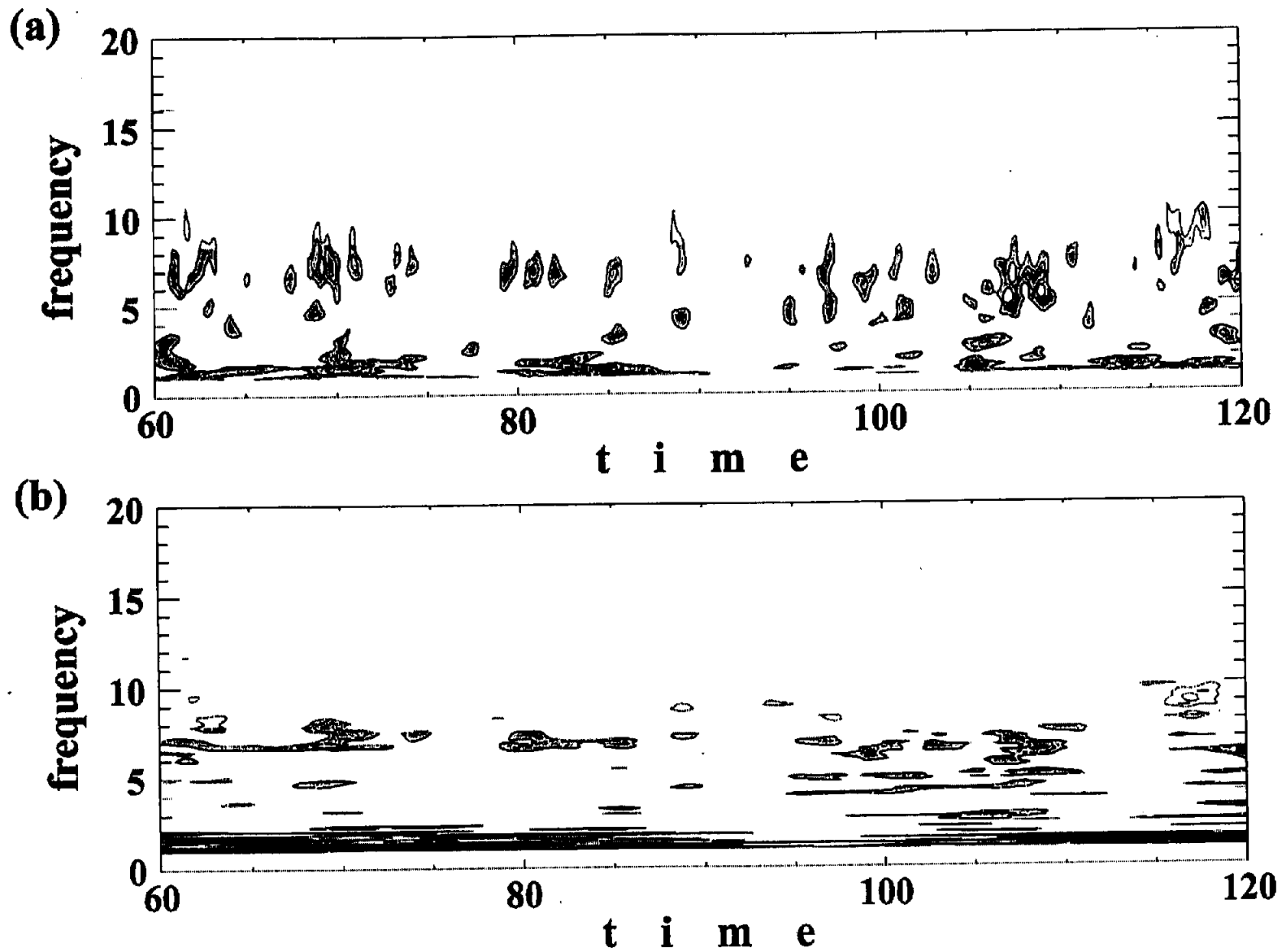


図 2.7: 老年期痴呆者 *hiro* のウェーブレットスペクトル (a) Gabor AW, (b) 双曲線 AW.

2.5 まとめ

本章ではHOモデル、健康高齢者脳波、老年期痴呆者脳波時系列に対してGabor AW と双曲線 AW を用いてウェーブレット解析を行った。ウェーブレットスペクトルに対してHOモデルをバックグラウンドモデルに用い統計的検定 ($p=0.35$) を実施し、統計的に有意とみなされるスペクトル構造を抽出した。その結果、HOモデルと健康高齢者脳波との間には (i) α 波の出現パターンの違い、(ii) β 波帯域のスペクトルの2点に明確なスペクトル特性の差異点を見いだすことができた。また、老年期痴呆者脳波に対しては、(iii) α 波に対応するスペクトルの減少、(iv) β 波帯域にはスペクトルが見られない、また(v) *hira*では δ 波帯域、*hiro*では θ 波帯域のスペクトル増加が容易に理解できた。

ウェーブレットスペクトルの統計的検定で抽出された特徴は、臨床学的によく知られている健康高齢者と老年期痴呆者脳波の定性的な差異点 (iii-a), (iii-b), (iii-c) [1.2 脳波時系列, p.4] と合致するものである。こうして、脳波のウェーブレットスペクトルの統計検定による特徴抽出は臨床診断を行う際にも有用となることが理解できる。一方、HOモデルと健康高齢者脳波とのスペクトル構造の定性的な相違点は、実 α リズムを理解するためには点アトラクタのみではなくリミットサイクルアトラクタ周辺のダイナミクス、例えば van del Pol 方程式

$$\ddot{x} + (-\alpha + \beta x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \quad (2.33)$$

(ここで α と β は定数で、 $F(t)$ は白色雑音に従う外力である)なども同時に考察する必要があることを示しているものと考えられる。また、ウェーブレット解析における時間-周波数解像度は AW の不確定性関係式によって解析的に評価可能であるので、AW 選択においては AW の相似相関性と共に不確定性関係式に基づいた時間-周波数解像度考察が有効となるであろう。特に、周波数解像度が必要とされるような状況においては双曲線 AW が有効となるであろう。また、統計的検定の導入はスペクトル構造の定性的理解に有効であるので、今後様々な解析において導入すべきであろう。

このように、ウェーブレット解析は時変スペクトル構造を明確に示すことができるので時系列の非定常特性を調べたり、あるいはスペクトルパターン解析などにも有用となるであろう。しかし、スペクトル構造に示される時系列の非定常性のダイナミクスについて明らかにすることが時系列の本質的な理解には必要である。そこで次章では脳波時系列の非定常特性を局所非線形性の観点から考察し、老年期痴呆者脳波局所非線形ダイナミクスについて考察する。