付 録 A

基本方程式の離散化から導かれる係数行列

本文の各章に対する補足として，各章で扱った係数行列を生成する方法について説明する．まず，**第** 5 **章**の周期境界条件を課した問題で考える離散格子について説明する．周期境界条件である点以外は，**第** 2.1 **節**の説明に基づく．次に，**第** 3**，**4 **章**の AF 法による離散化について説明する．本章で用いる記号は，本文の各章の説明で使用した記号に従っている．

A.1 周期境界条件のときの離散格子

本文の**第** 5 **章**で取り上げた x 方向が周期境界条件，y 方向がディリクレ条件の 2 次元偏微分方程式に対して，空間 Ω を x, y 方向にそれぞれ $(n+1)$ 等分したときの離散格子は，図 A.1 のとおりである．

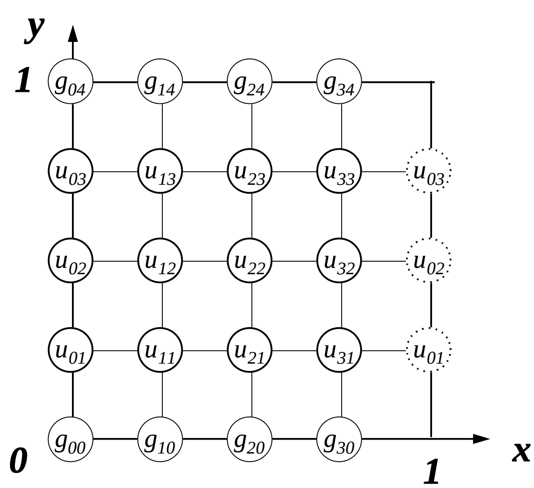

図 A.1: $n = 3$ の離散格子 (x 方向が周期境界条件).

x 方向の周期境界条件のために，関数 $u(x, y)$ に対して $x = 0$ の要素が加わる．したがって，格子点数は x 方向の要素数が $m(= n+1)$，y 方向の要素数が n となる．このとき，係数行列は次式 (A.1) と表される．

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & a_1 & & p_1 & b_1 & & & & & & & \\ a_1 & d_2 & a_2 & & & b_2 & & & & & & \\ & a_2 & d_3 & a_3 & & & b_3 & & & \mathbf{0} & & \\ p_1 & & a_3 & d_4 & & & & b_4 & & & & \\ b_1 & & & & d_5 & a_5 & & p_5 & b_5 & & & \\ & b_2 & & & a_5 & d_6 & a_6 & & & b_6 & & \\ & & b_3 & & & a_6 & d_7 & a_7 & & & b_7 & \\ & & & b_4 & p_5 & & a_7 & d_8 & & & & b_8 \\ & & & & b_5 & & & & d_9 & a_9 & & p_9 \\ & & & & & b_6 & & & a_9 & d_{10} & a_{10} & \\ & \mathbf{0} & & & & & b_7 & & & a_{10} & d_{11} & a_{11} \\ & & & & & & & b_8 & p_9 & & a_{11} & d_{12} \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

ここで， p_1, p_5, p_9 は，周期境界要素 (PBEs) である．

A.2　基本方程式と AF 法を用いた離散化

3 次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式は，一般座標系を用いて，次式 (A.2) のように表わすことができる [49].

$$\begin{aligned} &\partial_i Q + \partial_\xi L + \partial_\eta M + \partial_\varsigma N = R_e^{-1} \partial_\varsigma S, \\ &Q = J^{-1}(\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T \end{aligned} \tag{A.2}$$

L, M, N　：対応するξ, η, ς方向のフラックス (流束ベクトル)

$\partial_\varsigma S$　：$\varsigma -$ 微分だけの粘性項

ρ　：密度

e　：単位体積当たりの全エネルギー

R_e　：レイノルズ数

J　：座標変換のヤコビアン行列

これらの方程式を陰解法で解く場合，よく用いられている計算手法として AF (approximate factorization) 法がある [49][55].

AF 法は圧縮性流体解析に広く用いられている陰解法の一つである．その基本的なアイデアは，陰的に差分化した式を線形化し得られる大規模行列に対して，効率よく計算するために，その行列を近似的により単純な形に因数分解することにある．定常解を求めるた

めに,

$$\Delta Q^{(k)} \;=\; Q^{(k+1)} - Q^{(k)}, \qquad (k : \text{時間ステップ}) \tag{A.3}$$

を用いると，AF 法による差分式は以下のように近似できる．

$$\begin{aligned} & [I + h\partial_\xi X^{(k)} + h\partial_\eta Y^{(k)} + h\partial_\varsigma Z^{(k)} - hR_e^{-1}\partial_\varsigma J^{-1}P^{(k)}]\Delta Q^{(k)} \\ \approx\; & [I + h\partial_\xi X^{(k)}][I + h\partial_\eta Y^{(k)}][I + h\partial_\varsigma Z^{(k)} - hR_e^{-1}\partial_\varsigma J^{-1}P^{(k)}]\Delta Q^{(k)} \\ =\; & -h[\partial_\xi L^{(k)} + \partial_\eta M^{(k)} + \partial_\varsigma N^{(k)} - R_e^{-1}\partial_\varsigma S^{(k)}] \end{aligned} \tag{A.4}$$

ここで，$h = \Delta t$ であり，$X = \frac{\partial L}{\partial Q}, Y = \frac{\partial M}{\partial Q}, Z = \frac{\partial N}{\partial Q}, P = \frac{\partial S}{\partial Q}$ である．

いま，4 次精度の AF 法により離散化を行うと，一方向に対して 5 点を参照する中心差分を行うことになる．$h\delta_\xi X, h\delta_\eta Y, h\delta_\varsigma Z$ をそれぞれ ξ,η,ς 方向のみの作用素とすると，もとの大規模なブロック対角行列群の一回の線形方程式の求解を，ブロック 5 重対角行列群 $[I + h\partial_\xi X^{(k)}]$，$[I + h\partial_\eta Y^{(k)}]$ および $[I + h\partial_\varsigma Z^{(k)} - hR_e^{-1}\partial_\varsigma J^{-1}P^{(k)}]$ の 3 回の求解に置き換えることができる．これらは，同じ帯構造の係数行列となり，直接法によって効率良く計算することができる．

次節では，AF 法による離散化から導かれる係数行列について説明する．

A.2.1　周期境界条件を課さないとき

この節では，周期境界条件を課さないときの，4 次精度の AF 法による離散化について説明する．この離散化では，一つの次元に対して 5 点を参照する中心差分を行う．

図 A.2 は，i 方向の次元 $(i = 1, \cdots, l)$ に対して，$l = 8$ とした場合の座標点である．

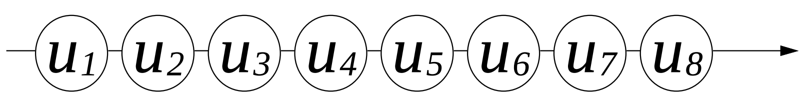

図 A.2: 1 次元モデルの座標点.

ここでは，各座標点に対応する変数を〇印で囲んだ u_i で表しており，添え字は，i 方向の座標を表している．数直線上の座標点 i における方程式は,

$$A^i u_{i-2} + B^i u_{i-1} + C^i u_i + D^i u_{i+1} + E^i u_{i+2} = f_i, \qquad i = 1, \cdots, l$$

と表される．ここで，f_i は右辺項を表わす．A^i, B^i, C^i, D^i, E^i は，第 i 点を求解するときに参照されるデータを表し，物理方程式から得られるブロック行列である．

境界点で離散化するときは，存在する点のみ参照する．例えば，$i=1$ ならば，C^1， D^1 , E^1 のみであり，必要な変数は u_1, u_2, u_3 である．$i=2$ ならば，B^2, C^2, D^2, E^2 であり，必要な変数は u_1, u_2, u_3, u_4 である．

このような離散化を，$i=1,\cdots,8$ まで行なったとき，変数 $u_{i-2}, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}$ に対する参照データから，式 (A.5) に表す行列 $\hat{F}$ が得られる．

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} C^1 & D^1 & E^1 & & & & \mathbf{0} & \\ B^2 & C^2 & D^2 & E^2 & & & & \\ A^3 & B^3 & C^3 & D^3 & E^3 & & & \\ & A^4 & B^4 & C^4 & D^4 & E^4 & & \\ & & A^5 & B^5 & C^5 & D^5 & E^5 & \\ & & & A^6 & B^6 & C^6 & D^6 & E^6 \\ & & & & A^7 & B^7 & C^7 & D^7 \\ & \mathbf{0} & & & & A^8 & B^8 & C^8 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

つまり，i 方向に対する離散化の結果，行方向には参照されたデータが格納されている．

次に，2 次元 $(i=1,\cdots,8;\ j=1,\cdots,m)$ に対する離散化を考える．このとき，物理格子は図 A.3 のとおりであり (領域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$)，変数 $u_{i,j}$ の添え字は，格子点の座標 (i,j) における変数を表している．格子上の座標点 (i,j) における方程式は，

$$A^i_j u_{i-2,j} + B^i_j u_{i-1,j} + C^i_j u_{i,j} + D^i_j u_{i+1,j} + E^i_j u_{i+2,j} = f_{i,j},$$
$$i=1,\cdots,l;\ j=1,\cdots,m$$

と表される．ここで，$f_{i,j}$ は右辺項を表わし，$A^i_j, B^i_j, C^i_j, D^i_j, E^i_j$ は，参照されるデータである．

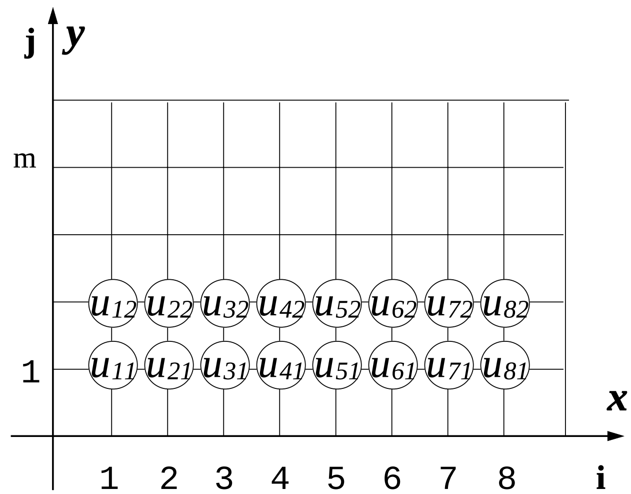

図 A.3: 2 次元モデル (周期境界条件無し) の座標点.

これを離散化すると，式 (A.5) で表した行列 $\hat{F}$ が j 方向の要素数だけ現れ，$j = 1, \cdots, m$ を形成し，係数行列となる行列群 $\hat{F}_j$ は次式 (A.6) で表される.

$$\hat{F}_j = \begin{bmatrix} C_j^1 & D_j^1 & E_j^1 & & & & & \\ B_j^2 & C_j^2 & D_j^2 & E_j^2 & & & \mathbf{0} & \\ A_j^3 & B_j^3 & C_j^3 & D_j^3 & E_j^3 & & & \\ & A_j^4 & B_j^4 & C_j^4 & D_j^4 & E_j^4 & & \\ & & A_j^5 & B_j^5 & C_j^5 & D_j^5 & E_j^5 & \\ & & & A_j^6 & B_j^6 & C_j^6 & D_j^6 & E_j^6 \\ & \mathbf{0} & & & A_j^7 & B_j^7 & C_j^7 & D_j^7 \\ & & & & & A_j^8 & B_j^8 & C_j^8 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

最後に，3 次元 $(i = 1, \cdots, 8;\ j = 1, \cdots, m;\ k = 1, \cdots, n)$ に対する離散化の場合，行列群 $\hat{F}_j$ が k 方向の要素数だけ現れ，行列群 $\hat{F}_{j,k}$ は，次式 (A.7) で表される.

$$\hat{F}_{j,k} = \begin{bmatrix} C_{j,k}^1 & D_{j,k}^1 & E_{j,k}^1 & & & & & \\ B_{j,k}^2 & C_{j,k}^2 & D_{j,k}^2 & E_{j,k}^2 & & & \mathbf{0} & \\ A_{j,k}^3 & B_{j,k}^3 & C_{j,k}^3 & D_{j,k}^3 & E_{j,k}^3 & & & \\ & A_{j,k}^4 & B_{j,k}^4 & C_{j,k}^4 & D_{j,k}^4 & E_{j,k}^4 & & \\ & & A_{j,k}^5 & B_{j,k}^5 & C_{j,k}^5 & D_{j,k}^5 & E_{j,k}^5 & \\ & & & A_{j,k}^6 & B_{j,k}^6 & C_{j,k}^6 & D_{j,k}^6 & E_{j,k}^6 \\ & \mathbf{0} & & & A_{j,k}^7 & B_{j,k}^7 & C_{j,k}^7 & D_{j,k}^7 \\ & & & & & A_{j,k}^8 & B_{j,k}^8 & C_{j,k}^8 \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

A.2.2　周期境界条件を課したとき

周期境界条件を課したとき，図 A.4 (領域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$) の $i = 1, 2$, $i = 7, 8$ の境界点における離散化のデータ参照では，反対側の境界点を周期的に参照する．例えば，$u(1,1)$ を求めるために参照するデータは，A_1^1, B_1^1, C_1^1, D_1^1, E_1^1 であり，必要な変数は $u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}$ と $u_{7,1}, u_{8,1}$ である．$u(8,1)$ を求めるために参照するデータは，A_1^8, B_1^8, C_1^8 , D_1^8, E_1^8 であり，必要な変数は $u_{1,1}, u_{2,1}$ と $u_{6,1}, u_{7,1}, u_{8,1}$ である．

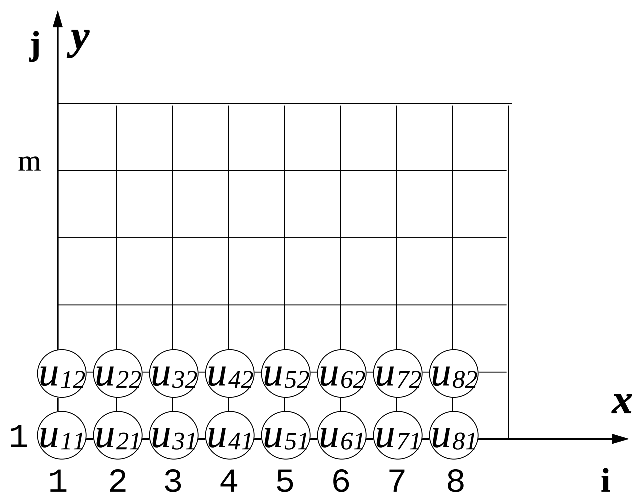

図 A.4: 2 次元モデル (周期境界条件) の座標点.

この離散化を i，j に対して行うと，式 (A.8) で表す行列群 $\hat{G}_j$ が得られる．

$$\hat{G}_j = \begin{bmatrix} C_j^1 & D_j^1 & E_j^1 & & & & A_j^1 & B_j^1 \\ B_j^2 & C_j^2 & D_j^2 & E_j^2 & & & 0 & A_j^2 \\ A_j^3 & B_j^3 & C_j^3 & D_j^3 & E_j^3 & & & \\ & A_j^4 & B_j^4 & C_j^4 & D_j^4 & E_j^4 & & \\ & & A_j^5 & B_j^5 & C_j^5 & D_j^5 & E_j^5 & \\ & & & A_j^6 & B_j^6 & C_j^6 & D_j^6 & E_j^6 \\ E_j^7 & 0 & & & A_j^7 & B_j^7 & C_j^7 & D_j^7 \\ D_j^8 & E_j^8 & & & & A_j^8 & B_j^8 & C_j^8 \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

3 次元 ($i = 1, \cdots, 8;\ j = 1, \cdots, m;\ k = 1, \cdots, n$) に対する離散化の場合，行列群 $\hat{G}_j$ が

k の要素数だけ現れ，行列群 $\hat{G}_{j,k}$ が得られる．

$$\hat{G}_{j,k} = \begin{bmatrix} C^1_{j,k} & D^1_{j,k} & E^1_{j,k} & & & & A^1_{j,k} & B^1_{j,k} \\ B^2_{j,k} & C^2_{j,k} & D^2_{j,k} & E^2_{j,k} & & \mathbf{0} & & A^2_{j,k} \\ A^3_{j,k} & B^3_{j,k} & C^3_{j,k} & D^3_{j,k} & E^3_{j,k} & & & \\ & A^4_{j,k} & B^4_{j,k} & C^4_{j,k} & D^4_{j,k} & E^4_{j,k} & & \\ & & A^5_{j,k} & B^5_{j,k} & C^5_{j,k} & D^5_{j,k} & E^5_{j,k} & \\ & & & A^6_{j,k} & B^6_{j,k} & C^6_{j,k} & D^6_{j,k} & E^6_{j,k} \\ E^7_{j,k} & & \mathbf{0} & & A^7_{j,k} & B^7_{j,k} & C^7_{j,k} & D^7_{j,k} \\ D^8_{j,k} & E^8_{j,k} & & & & A^8_{j,k} & B^8_{j,k} & C^8_{j,k} \end{bmatrix} \tag{A.9}$$