

大規模線形方程式に対する  
スーパーコンピュータ向きの前処理法

工学研究科  
筑波大学

2001年3月

伊藤 祥司

# 目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	スーパーコンピュータによる数値解析	5
2.1	準備	5
2.2	代表的な解法	7
2.2.1	直接解法	7
2.2.2	反復解法	9
2.2.3	前処理付き反復解法	12
2.3	スーパーコンピューティング	13
2.3.1	ベクトルプロセッシング	14
2.3.2	パラレルプロセッシング	16
2.3.3	スーパーコンピュータによる数値解析の問題点	17
2.4	前処理の役割	20
2.4.1	数学的な観点からの前処理	20
2.4.2	アーキテクチャの観点からの前処理	21
第 3 章	ブロック 5 重対角行列群に対するベクトル計算機向けに前処理した解法	25
3.1	はじめに	25
3.2	従来 of 解法	26
3.3	ツイスト分解法の応用	27
3.4	Rotated Alternative LU 分解	30
3.5	数値実験	32
3.5.1	実験内容	32
3.5.2	実験結果	33
3.6	まとめ	34
第 4 章	周期境界問題に対する Rotated ALU 分解法を適用するための前処理法	35
4.1	はじめに	35
4.2	従来 of 解法	36
4.3	Sherman-Morrison-Woodbury 公式の適用	37
4.4	Split/SMW+Rotated ALU 分解法	38
4.5	数値実験	39

4.5.1	実験内容	39
4.5.2	実験結果	39
4.6	まとめ	41
<b>第 5 章</b>	<b>周期境界問題に対する並列計算機向きの前処理法</b>	<b>42</b>
5.1	はじめに	42
5.2	対象とする問題	43
5.3	ブロック前処理	45
5.4	Splitting Correction 前処理	46
5.4.1	周期境界要素の分離	46
5.4.2	Sherman-Morrison 公式の適用	46
5.5	数値実験	48
5.5.1	対称問題に対する前処理の効果	49
5.5.2	非対称問題に対する前処理の効果	51
5.5.3	並列計算効率	54
5.6	まとめ	55
<b>第 6 章</b>	<b>結論</b>	<b>56</b>
	謝辞	57
	参考文献	58
<b>付 録 A</b>	<b>基本方程式の離散化から導かれる係数行列</b>	<b>63</b>
A.1	周期境界条件のときの離散格子	63
A.2	基本方程式と AF 法を用いた離散化	64
A.2.1	周期境界条件を課さないとき	65
A.2.2	周期境界条件を課したとき	68
<b>付 録 B</b>	<b>前処理の効果に対するスペクトル特性からの評価</b>	<b>70</b>
B.1	係数行列の条件数による評価	70
B.2	係数行列の固有値分布による評価	71
B.3	係数行列の重複固有値による評価	74
B.4	まとめ	76
<b>付 録 C</b>	<b>前処理と収束の振舞い</b>	<b>77</b>
C.1	前処理とクリロフ部分空間	77
C.2	対象とする問題	79
C.3	同値な前処理と収束の振舞い	81
C.4	反復途中で前処理を切替えたときの振舞い	82

付 録 D 非対称問題に対する SC 前処理の効果	84
論文目録	111

# 表 目 次

3.1	実験モデル. . . . .	32
4.1	実験モデル. . . . .	40
5.1	ブロック前処理のまとめ. . . . .	48
5.2	対称問題に対する収束までの反復回数 (CPU time[sec]). . . . .	51
5.3	非対称問題に対する収束までの反復回数 (CPU time[sec]). . . . .	53
B.1	前処理後の条件数. . . . .	71
B.2	重複固有値の数. . . . .	74

# 目次

2.1	$n = 3$ の離散格子 (ディリクレ条件).	6
2.2	$u$ と $x$ に対するナチュラルオーダリング.	7
2.3	ベクトルプロセッサのアーキテクチャ.	14
2.4	ベクトル処理のパイプライン.	15
2.5	ベクトル長に対する計算性能.	16
2.6	データ参照.	19
2.7	ハイパープレーンオーダリング ( $n = 3$ と $n = 6$ ).	22
2.8	レッドブラックオーダリング ( $n = 2$ と $n = 6$ ).	23
3.1	ツイスト分解による行列 $\tilde{L}$ .	28
3.2	前進消去における Alternative decomposition (左) と Rotated ALU 分解 (右) のイメージ.	31
3.3	従来の LU 分解法と Rotated ALU 分解法との計算時間の比較.	33
3.4	従来の LU 分解法と Rotated ALU 分解法との計算時間比.	34
4.1	従来の LU 分解法と Split/SMW+Rotated ALU 分解法との計算時間の比較.	40
4.2	従来の LU 分解法と Split/SMW+Rotated ALU 分解法との計算時間比.	41
5.1	残差ノルムの振舞い ( $65 \times 64$ ).	49
5.2	残差ノルムの振舞い ( $97 \times 96$ ).	50
5.3	残差ノルムの振舞い ( $129 \times 128$ ).	50
5.4	残差ノルムの振舞い ( $v_1 = 0.0, v_2 = 1.0$ ).	52
5.5	残差ノルムの振舞い ( $v_1 = 1.0, v_2 = 0.0$ ).	52
5.6	残差ノルムの振舞い ( $v_1 = 1.0, v_2 = 1.0$ ).	53
5.7	対称問題に対するスピードアップ.	54
5.8	非対称問題に対するスピードアップ.	55
A.1	$n = 3$ の離散格子 ( $x$ 方向が周期境界条件).	63
A.2	1次元モデルの座標点.	65
A.3	2次元モデル (周期境界条件無し) の座標点.	67
A.4	2次元モデル (周期境界条件) の座標点.	68
B.1	固有値の分布 ( $17 \times 16$ ).	73

B.2	固有値の分布 ( $33 \times 32$ ).	73
B.3	固有値の重複度 ( $17 \times 16$ block IC).	75
B.4	固有値の重複度 ( $17 \times 16$ SC).	75
B.5	固有値の重複度 ( $33 \times 32$ block IC).	75
B.6	固有値の重複度 ( $33 \times 32$ SC).	75
C.1	各前処理に対する収束の振舞い.	81
C.2	Base.	83
C.3	Change at ITER=10.	83
C.4	Change at ITER=30.	83
C.5	Change at ITER=45.	83
C.6	Change at ITER=60.	83
C.7	Change at ITER=70.	83
D	非対称問題に対する SC 前処理の効果	84