

## A. 合致法

合致法というのは、長さ（高さ）があらかじめ  $\mu\text{m}$  の程度で分かっているとき、何本かの異なる波長の光源を用い、干渉計測をすることにより、長さの絶対長を測定する方法である。

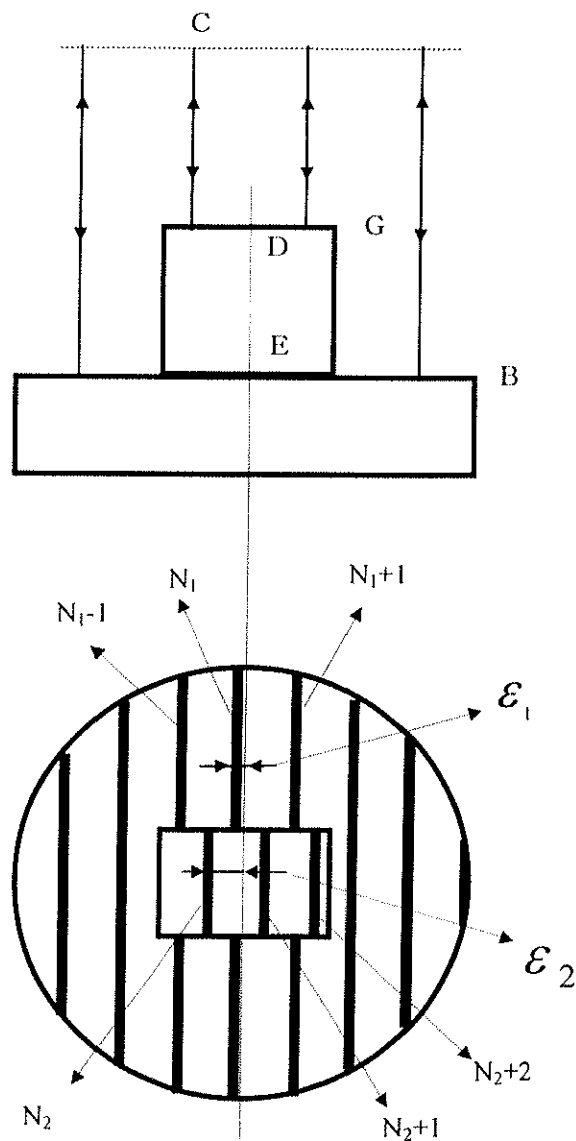


図 A. 1 のように、干渉計の被検面に測定対象 G とベースプレート B に置き、平行光線を上から送ると、G の上面 D、B の上面 E でそれぞれに図 A. 1 のような干渉縞を生ずる。図 A. 1 の中央の点線の位置で、ベースプレートの干渉縞

の次数を表す整数部分を  $N_1$ 、小数部分を  $\varepsilon_1$  とすれば、定義により、

$$CE = (N_1 + \varepsilon_1) \times \frac{\lambda}{2} \quad (\text{A-1})$$

となる。したがって、測定対象の干渉縞の次数を  $N_2 + \varepsilon_2$  で表せば、

$$CD = (N_2 + \varepsilon_2) \times \frac{\lambda}{2} \quad (\text{A-2})$$

となる。したがって、測定対象の高さ  $L_0$  は、

$$\begin{aligned} L_0 &= DE = CE - CD \\ &= (N_1 - N_2) \times \frac{\lambda}{2} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \times \frac{\lambda}{2} \\ &= (N + \varepsilon) \times \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

ただし、

$$\begin{aligned} N &= N_1 - N_2 \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{aligned}$$

である。ここに  $\varepsilon$  は、測定対象の干渉縞とベースプレートの干渉縞のずれの小数部分を表すから、観測によって求め得られる。しかし、整数部分  $n$  は未知で、これが分かれば測定対象の絶対長が分かる。

以下に3波長の合致法の解析方法について述べる。測定対象の  $\mu m$  程度の寸法を  $L_a$ 、絶対長を  $L_0$ 、3つの波長を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 、その時の位置差をそれぞれ  $\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}$  とする。長さを表す定義式は、

$$L_0 = (N + \varepsilon) \times \frac{\lambda}{2} \quad (\text{A-4})$$

であった。ここで、 $n$  は大きな整数である。式 (A-4) を変形して、

$$\frac{L_0}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)} = N + \varepsilon \quad (\text{A-5})$$

となる。まず、 $\lambda_1$ について、測定対象の  $\mu m$  程度の寸法  $L_a$  を式 (A-5) に代入して、

$$\frac{L_a}{\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)} = N_{31} + \varepsilon'_{31} \quad (\text{A-6})$$

とにかく、 $L_a$  の近似値として  $\varepsilon'_{31}$  の代わりに  $\varepsilon_{31}$  を代入して、

$$L_1 = (N_{31} + \varepsilon_{31}) \times \frac{\lambda_1}{2} \quad (\text{A-7})$$

を算出する。次に他の異なる波長  $\lambda_2, \lambda_3$  について、

$$\frac{L_1}{\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)} = N_{32} + \varepsilon' \quad (\text{A-8})$$

$$\frac{L_1}{\left(\frac{\lambda_3}{2}\right)} = N_{33} + \varepsilon''$$

より算出される  $\varepsilon', \varepsilon''$  がもしそれぞれ観測値  $\varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}$  と等しいならば、 $L_1$  は真の  $L_0$  に等しいから、これを測定結果とする。等しくなければ、 $N$  の代わりに  $N \pm 1, N \pm 2, N \pm 3, \dots$  などに置き換えて、式 (A-7) から式 (A-8) まで同様な計算操作を繰り返して、小数部分の計算値  $\varepsilon', \varepsilon''$  と観測値  $\varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}$  が合致するまで続けていく。

実際に計算値  $\varepsilon', \varepsilon''$  を観測値  $\varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}$  に完全に合致するには誤差範囲がない限り、ほぼ不可能に近いので、次のように誤差範囲をとらざるを得ない。

$$\varepsilon - \Delta \varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon + \Delta \varepsilon \quad (\text{A-9})$$

## B. ウェーブレット変換

### B.1 定義

フーリエ変換では sin、cos 関数、窓フーリエ変換では sin、cos 関数と窓関数の積を基底関数とよぶ。それぞれの変換は解析する信号と基底関数との内積で定義される。ウェーブレット変換の基底は Mother Wavelet とよばれ、次の式で定義される。

$$h_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (\text{B-1})$$

$a$  (Dilation Factor) : 基底の横方向の伸縮度合を決める変数

$b$  (Translation Factor) : 基底の平行移動量を決める変数

また  $a$ 、 $b$  を変化させて作られるそれぞれの基底を Daughter Wavelet とよぶ。ウェーブレット変換はこれらの基底関数と入力信号の内積で定義される。

$$W_s(a,b) = \langle h_{a,b}(x), s(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{x-b}{a}\right) s(x) dx \quad (\text{B-2})$$

またこれは入力信号と基底との相関に相当する。 $1/\sqrt{a}$  は規格化因子であり、これにより  $a$  が変化しても全エネルギーは保存される。 $b$  を一定にして  $a$  を変化させることにより基底の形は図 B.1 のように変化する。このように  $a$  が大きくなるにつれた基底のサポートする幅は広くなり低周波数に対応し、小さくなるにつれて幅が狭くなり高周波数に対応することになる。

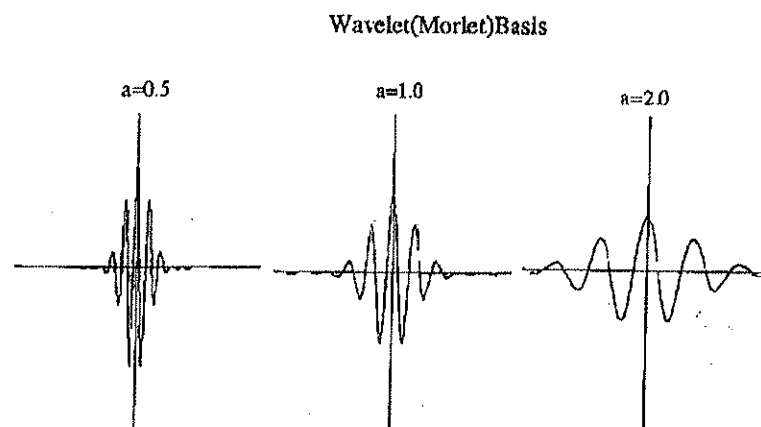


図 B.1  $b$  を一定にして  $a$  が変化したときの基底の形

## B.2 許容条件 (Admissible Condition)

定義では基底関数を漠然と  $h(x)$  で表したが、ウェーブレット変換基底関数となるにはある一定の条件を満たさなければならない。それが次にあげる許容条件である。

“ウェーブレット変換の逆変換は入力信号と基底関数の内積の連続的な総合で表される。”

これを式で表すと次のようになる。

$$s(x) = \frac{1}{C_h} \int \int \langle h_{a,b}, s \rangle h_{a,b}(x) \frac{da}{a^2} db \quad (\text{B-3})$$

$$C_h \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(f)|^2}{|f|} df < \infty \quad (\text{B-4})$$

逆変換が成り立つには(B-4)式が満たされなければならない。 $C_h$  (規格化定数)が収束するには被積分関数の分母が0のときに分子が0であればよい。つまり  $f=0$  のとき  $|H(0)|^2 = 0$  であればよい。このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 0 \quad (\text{B-5})$$

これはフーリエスペクトルの直流成分 (アンサンブル平均) が0であることを示している。そのためには横軸上で振動する波形であることが必要となり、これがウェーブレット (波連) たる由縁である。

## B.3 基底に対するさらなる条件

前のBで論じた許容条件を満たせばウェーブレット変換の基底になることができる。しかし、ここではウェーブレット変換の利点を引き出すためにさらに厳しい条件を加える。

“基底関数  $h(x)$  およびそのフーリエ変換  $H(f)$  は時間、周波数の領域において局所化されていなければならない”

$H(f)$ は $H(0)=0$ かつ一定周波数以上では $H(f)=0$ であることが望ましい。つまり $H(f)$ はバンドパスフィルタである。

次にウェーブレット係数が周波数領域で局所化するための条件について考える。入力信号を $t=0$ のまわりでテイラー展開するとウェーブレット係数は次のように表される。

$$\begin{aligned} W_s(a,0) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{p=0}^n s^{(p)}(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^p}{p!} h\left(\frac{x}{a}\right) dx + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ s(0)M_0a + \frac{s'(0)}{1!}M_1a^2 + \frac{s''(0)}{2!}M_2a^3 + \dots + \frac{s^{(n)}(0)}{n!}M_na^{n+1} \right\} + O(a^{n+2/3}) \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

$M$ は基底のモーメントであり、

$$M_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p h(x) dx \quad (\text{B-7})$$

で表す。許容条件より $M_0=0$ となり(B-6)式の第1項は0となる。ウェーブレット係数が0に収束する速度は(B-6)式の何項目に0でないモーメントが現れるかによって決まる。

$$0 \leq p \leq n \quad \text{で} \quad M_p = 0 \quad (\text{B-8})$$

ならばウェーブレット係数は $a^{n+1/2}$ と同じ速度で減衰する。よって基底のモーメントによってウェーブレット係数の局所化の程度が決まる。(B-8)式を満たす基底を $n$ 次の規定と呼ぶ。(B-7)式が周波数領域では

$$H^{(p)}(0) = 0 \quad p = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{B-9})$$

で表す。

#### B.4 正規直交性

まず、ここでは計算の便宜上2の整数乗を周波数にとった波を考える。

$$\phi(2^j x - k), \quad j, k \in Z \quad (\text{B-10})$$

これは一つのウェーブレットに2進ダイレーションと2進移動を施すことに

よって得られる。以後内積とノルムを次のように定義する

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \\ \|f\|_2 &= \langle f, f \rangle^{1/2}\end{aligned}\tag{B-11}$$

すると、

$$\|f(2^j x - k)\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(2^j x - k)|^2 dx \right\}^{1/2} = 2^{-j/2} \|f\|_2\tag{B-12}$$

これより  $\phi$  のノルムが 1 ならば

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)\tag{B-13}$$

で定義される関数  $\phi_{j,k}$  もノルムは 1 であることがいえる。このようにとれば基底を伸縮させてもノルムは 1 に保存される。(B-13) で定義される関数族  $\{\phi_{j,k}\}$  が正規直交基底となると、直交ウェーブレットであるという。ただし、正規直交基底であることは次のことが成立することである。

$$(i) \quad \langle \phi_{j,k} \phi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m} \quad \text{が成立する。}\tag{B-14}$$

$$(ii) \quad f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \quad \text{のように展開される。}\tag{B-15}$$

このとき  $c_{j,k}$  をウェーブレット係数とよび、 $c_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$  で定義される。

基底を (B-13) のようにしたとき

$$c_{j,k} = W_f(a, b) = W_f \left\langle \frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right\rangle\tag{B-16}$$

で与えられる。基底が正規直交ウェーブレットであれば  $f$  は一意的に表すことができる。

## B.5 Morlet 基底

この基底の実部は Cos-Gaussian 関数である。Morlet 基底のフーリエスペクトルは  $f_0$  と  $-f_0$  にシフトした Gauss 関数である。

$$h(x) = \exp[i2\pi f_0 x] \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \quad (\text{B-17})$$

$$H[f] = 2\pi \left\{ \exp\left[-2\pi^2(f - f_0)^2\right] + \exp\left[-2\pi^2(f + f_0)^2\right] \right\} \quad (\text{B-18})$$

基底の形とスペクトルを図 B.2 に示す。厳密にはフーリエスペクトルの 0 成分は 0 ではないが、 $f_0$  が大きければ数値計算においては近似的に 0 とみなすことができる。

この基底はワイドバンドスペクトル干渉のインターフェログラムの形に近いので干渉縞の解析に適していることがいえる。

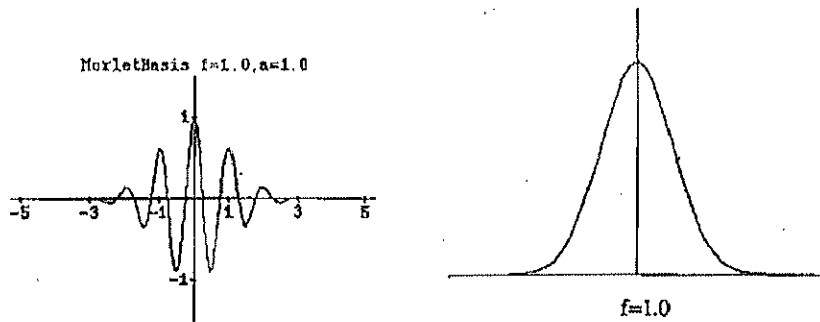


図 B.2 Morlet 基底の形とスペクトル