第3章　ファジィマルチ集合の像

3.1　はじめに

バッグとも呼ばれるマルチ集合は数学的構造として通常の集合より弱いため、理論的考察はあまりされてこなかった。しかしながら、情報工学ではマルチ集合が現れることは決して例外的ではない。たとえばManna,Waldinger [14] らは基本的なデータ構造としてマルチ集合を挙げている。また関係データベースの議論ではSQL による問い合わせの結果マルチ集合が生じることがある。本章では通常の集合からマルチ集合が形成される集合の像とファジィマルチ集合への拡張について提案する。この像は情報工学では自然に現れる。通常の像と対照される像の理論的な性質について提案する。

ここで議論する集合はすべて有限集合であると仮定する。記号として全体集合を $X = \{x_1, ..., x_n\}, Y = \{y_1, ..., y_m\}$ などで表し，関数 $f: X \to Y$ を仮定する。

まずクリスプな集合に関する例を用いてここで考える集合の像とする。

例 3.1　$X = \{x_1, ..., x_5\}, Y = \{y_1, ..., y_3\}$ と仮定し，関数 f は

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y_1$$

$$f(x_4) = f(x_5) = y_2$$

で定義されるとする。

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ とすると，通常の定義からは

$$f(A) = \{y_1, y_2\}$$

である。これに対して次のような手続きを考えてみよう。

“Aの要素を一つずつとり，fを作用させて，結果の要素を示す記号を

逐次出力する。”

図式的に書けば，

$$Input\,A \to [\,f\,] \to Output\,B$$

このことは，$[\,f\,]$で表される作用を入力に逐次施すことを意味している．この手続きを上の例に適用すれば，入力の順序がx_1, x_2, x_3, x_4のとき出力はy_1, y_1, y_1, y_2となる．ところが，入力は本来集合であるため，順序がx_1, x_2, x_4, x_3のように入れ替わっても意味は変わらない。よって，後の入力に対する出力y_1, y_1, y_2, y_1は先の出力と同一とみなされなければならない．従って，上の手続きは出力としてマルチ集合を与える。そこで，通常の像$f(A)$と区別するため，上の手続きで得られるマルチ集合Bを与える記号を$f[A]$と表そう．上の例では，

$$B = f[A] = \{y_1, y_1, y_1, y_2\} = \{3/y_1, 1/y_2\}$$

である。後の表現は全体集合の要素の個数を表す記号$Count$によって

$$B = \{Count_B(y_i)/y_i\}_{i=1,..,m}$$

と表したものである。ここでは，$\{\cdot\}$を集合とマルチ集合の両方を表す記号として用い，かつ，マルチ集合についていくつかの異なった表現を行うが，それらを混同することがないよう配慮する。

この例から離れて一般に，表現$f[A]$は情報処理における計算法の表現として自然であり，むしろ通常の集合の像$f(A)$の計算のほうが面倒であることがわかる。なぜなら，ある集合の通常の像を求めるには，次の2つのステップによるのが最も簡単であるからである。

1. 入力である集合の要素$x \in A$に逐次fを施し，$f(x)$を出力する。
2. 出力のなかに同じ要素を示す記号が複数あれば一つにまとめる。

一般にあるマルチ集合が与えられたとき，上のステップ2で表される写像を$\mathcal{P}$と書くことにする。$\mathcal{P}$はY上のマルチ集合のクラスからY上の通常の集合のクラスへの写像であり，上の例では$\mathcal{P}(B)=\{y_1,y_2\}$となる。ただし，$Y$に限らず，他の全体集合についても同じ記号$\mathcal{P}$によってこの写像を表すものする。以下では写像$\mathcal{P}$を射影と呼ぶことがある。

一般に，ステップ1は$f[A]$の計算に他ならないから，

$$f(A)=\mathcal{P}(f[A])$$

と表される。また，マルチ集合の和$\oplus$を用いれば，

$$f[A]=\bigoplus_{x\in A}\{f(x)\} \tag{3.1}$$

と表されるのに対し，通常の像は通常の合併演算によって

$$f(A)=\bigcup_{x\in A}\{f(x)\} \tag{3.2}$$

と書けることにも注意しよう。

通常の意味での集合の像をこのような$\mathcal{P}(f[A])$による二段階の処理で求めることは決して例外的ではないことは容易に理解されよう。後の章で述べるが、具体的な応用例で$f[A]$と$\mathcal{P}$が明示的に現れるのは関係データベースにおける問い合わせ言語においてである。

3.2 マルチ集合とファジィマルチ集合の像

$A=\{x,...,x''\}$をXのマルチ集合とする．この場合，Aには同じ要素を示す記号が重複して含まれている可能性があるので，$\{x,...,x''\}$の記号の順序を変えても同じマルチ集合であるが，複数の同じ記号を一つにすることは許さないものとする．このようなマルチ集合について$f[A]$を一般化することは容易である．なぜなら，“Aの要素を一つずつとり，fを作用させて，結果の記号を逐次出力する” 手

続きは，A が通常の集合であるかマルチ集合であるかを問わないからである．すなわち，

$$f[A] = \{f(x), ..., f(x'')\} \tag{3.3}$$

と定義する。ここで，右辺の $\{f(x), ..., f(x'')\}$ は先に述べたマルチ集合の意味である。この定義は第 2 節の (3.1) の形で表すこともできるが，その際は

$$f[A] = \bigoplus_{x \in A} \{f(x)\} \tag{3.4}$$

における $x \in A$ は x のカウントの回数 $Count_A(x)$ だけ重複させてとらなければならない。

命題 3.1

$$f(\mathcal{P}(A)) = \mathcal{P}(f[A])$$

が成立する。

証明は容易であるので省略する。

これに対して，通常の $f(A)$ を直接マルチ集合に拡張した像を

$$Count_{f(A)}(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} Count_A(x) \tag{3.5}$$

(ただし，$f^{-1}(y) = \emptyset$ ならば $Count_{f(A)}(y) = 0$) で定義することができる。上の定義はファジィ集合における拡張原理に対応したマルチ集合の拡張原理と呼ぶことができる。$x \in A$ は x のカウントの回数 $Count_A(x)$ だけ重複させてとることにすれば，

$$f(A) = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \tag{3.6}$$

と書くことができる．(3.5) で定義した像は，A が複数の同一要素を持たない通常の集合のとき，通常の像に一致するのは明らかであるので，(3.5), (3.6) では $f(A)$ の記号を用いる．

$f[A]$ の計算は単純であるのに対し，$f(A)$ の計算は $Count_A(\cdot)$ を用いなければならないのでより複雑になる．

次に B を Y のマルチ集合とするとき，原像 f^{-1} について考えよう．ここでは，$Count_B(y)=k,\ y\in Y$ のとき，$f(x)=y$ であるすべての $x\in X$ について

$$Count_{f^{-1}[B]}(x)=k$$

と定義する．はじめの例で，$B=\{y_2,y_2,y_3\}$ と仮定すれば，

$$f^{-1}[B]=\{x_4,x_4,x_5,x_5\}$$

となる．

注意． 上の定義は

$$Count_{f^{-1}[B]}(x)=Count_B(f(x))$$

と書くことができ，ファジィ集合 F の原像の定義 $\mu_{f^{-1}[F]}(x)=\mu_F(f(x))$ に対応している．

命題 3.2

$$f^{-1}(\mathcal{P}(B))=\mathcal{P}(f^{-1}[B])$$

が成立する．

証明は容易であるので省略する．

注意． f^{-1} については，B が通常の集合ならば，$f^{-1}[B]$ は通常の原像 $f^{-1}(B)$ に一致する．従って，ここでは角括弧 $f^{-1}[\cdot]$ を用いているが，マルチ集合の原像についても $f^{-1}(\cdot)$ のように通常用いられる丸括弧を用いて差し支えない．

命題 3.3 上に定義されたマルチ集合の像および原像の和 $\oplus$, 合併 $\cup$, 共通部分 $\cap$ について次式が成立する．ここで，A_1,A_2 は X のマルチ集合，B_1,B_2 は Y のマルチ集合とする．

$$f[A_1\oplus A_2] \;=\; f[A_1]\oplus f[A_2] \tag{3.7}$$

$$f[A_1\cup A_2] \;\supseteq\; f[A_1]\cup f[A_2] \tag{3.8}$$

$$
\begin{aligned}
f[A_1 \cap A_2] &\subseteq f[A_1] \cap f[A_2] && (3.9)\\
f(A_1 \oplus A_2) &\subseteq f[A_1] \oplus f[A_2] && (3.10)\\
f(A_1 \cup A_2) &= f(A_1) \cup f(A_2) && (3.11)\\
f(A_1 \cap A_2) &\subseteq f(A_1) \cap f(A_2) && (3.12)\\
f^{-1}[B_1 \oplus B_2] &= f^{-1}[B_1] \oplus f^{-1}[B_2] && (3.13)\\
f^{-1}[B_1 \cup B_2] &= f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2] && (3.14)\\
f^{-1}[B_1 \cap B_2] &= f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2] && (3.15)\\
\mathcal{P}(A_1 \oplus A_2) &= \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2) && (3.16)\\
\mathcal{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2) && (3.17)\\
\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathcal{P}(A_1) \cap \mathcal{P}(A_2) && (3.18)
\end{aligned}
$$

証明はこの章の付録を参照されたい．なお，以下で述べる命題の証明はすべて3.3節に示すものとする．

次に，ファジィマルチ集合の像と原像を定義しよう．Yagerが議論しているように，ファジィマルチ集合を $X \times [0,1]$ のマルチ集合すなわち，

$$A = \{(x_i, \mu_i)\}_{i=1,..,q}$$

で表す．右辺はこれまで述べたマルチ集合であり，$x_i = x_j$ あるいは $\mu_i = \mu_j$ であってよい．また，$(x_i, \mu_i) = (x_j, \mu_j)$ でもよい．また，ここでは，$\mu_i \neq 0$ とし，メンバーシップがゼロの要素は原則として記述しないが，仮にメンバーシップがゼロの要素を有限個付け加えたとしても，ファジィマルチ集合としての変化はないと考える．

ファジィマルチ集合においてメンバーシップが0あるいは1のとき，このファジィマルチ集合はクリスプマルチ集合を表している．いいかえれば，$A = \{(x_i, 1)\}_{i=1,..,q}$ をクリスプマルチ集合 $K = \{x_i\}_{i=1,..,q}$ と同一視できる．

X のファジィマルチ集合 A に対して，像 $f[A]$ を

$$f[A] = \{(f(x_i), \mu_i)\}_{i=1,\dots,q} \tag{3.19}$$

で定義する．

これに対して，(3.5) に対応する像を定義するには，宮本ら [7, 17] によって導入されたグレード列によるファジィマルチ集合 A の標準的表現

$$A = \{(\mu_A^1(x), \dots, \mu_A^p(x))/x\}_{x \in X} \tag{3.20}$$

$(\mu_A^1(x) \geq \dots \geq \mu_A^p(x))$ を用いる必要がある．これによれば，

$$\mu_{f(A)}^i(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A^i(x) \tag{3.21}$$

(ただし，$f^{-1}(y) = \emptyset$ ならば $\mu_{f(A)}^1(y) = 0$) と定義される．A が通常のファジィ集合のとき，上の式は通常の拡張原理を表すので，(3.21) はファジィマルチ集合の拡張原理というべきものであるが，(3.19) よりはるかに計算が複雑である．

また，Y のファジィマルチ集合を

$$B = \{(y_i, \nu_i)\}_{i=1,\dots,r}$$

とする．B にふくまれる記号 y について，そのメンバーシップをすべて集めると，$\nu, \dots, \nu''$ となるものと仮定する．このとき，原像 $f^{-1}[B]$ は $f(x) = y$ となるすべての $x \in X$ について

$$Count_{f^{-1}[B]}(x) = \{\nu, \dots, \nu''\} \tag{3.22}$$

で定義される．

例3.2

$$A = \{(x_1, 0.1), (x_1, 0.3), (x_4, 0.5), (x_4, 0.5), (x_5, 0.4)\}$$

はファジィマルチ集合である．例1の f によって

$$f[A] = \{(y_1, 0.1), (y_1, 0.3), (y_2, 0.5), (y_2, 0.5), (y_2, 0.4)\}$$

となる．これに対して，

$$f(A) = \{(0.3, 0.1)/y_1, (0.5, 0.5)/y_2\}$$

である．$f(A)$ では，$(y_2, 0.4)$ が失われている．また，

$$B = \{(y_2, 0.1), (y_2, 0.3), (y_3, 0.6)\}$$

について，

$$\begin{aligned} f^{-1}[B] &= \{(x_4, 0.1), (x_4, 0.3), (x_5, 0.1), (x_5, 0.3)\} \\ &= \{\{0.1, 0.3\}/x_4, \{0.1, 0.3\}/x_5\} \end{aligned}$$

である．

次に，ファジィマルチ集合から通常のファジィ集合への射影 $\mathcal{P}$ を定義する．単位区間 $(0, 1]$ のマルチ集合，すなわちメンバーシップのマルチ集合 $\{\mu, .., \mu''\}$ に対して，それらの最大値を $\max\{\mu, .., \mu''\}$ で表すことにする．用いているマルチ集合はすべて有限であると仮定しているので，最大値が存在することに注意しよう．そこで，マルチ集合を

$$A = \{\{\mu_i, .., \mu_i''\}/x_i\}_{i=1,..,n}$$

と仮定する，この表現では，右辺で異なる添字 $i \neq j$ をもつ x_i と x_j は異なる $(x_i \neq x_j)$ と仮定される．A に対して，射影 $\mathcal{P}(A)$ を

$$\mathcal{P}(A) = \{\max\{\mu_i, .., \mu_i''\}/x_i\}_{i=1,..,n} \tag{3.23}$$

と定義する．いいかえれば，各 x についてメンバーシップを集め，その最大値をとってファジィ集合 $\mathcal{P}(A)$ を定めるのである．また，先に述べた表現 (3.20) によれば，

$$\mathcal{P}(A) = \{\mu_A^1(x)/x\}_{x \in X}$$

と表される．

例 3.3 例 3.2 の A について

$$\mathcal{P}(A) = \{0.3/x_1, 0.5/x_4, 0.4/x_5\}.$$

命題 3.4. X のファジィマルチ集合 A において，メンバーシップが 0 または 1 に限られるとき，先に述べたように，A はあるクリスプマルチ集合 K と同一視できる．このとき，$f[A], f(A), \mathcal{P}(A)$ はそれぞれ $f[K], f(K), \mathcal{P}(K)$ に一致する．また，Y のファジィマルチ集合 B のメンバーシップが 0 または 1 に限られるとき，B を同様にクリスプマルチ集合 L と同一視すれば，$f^{-1}[B]$ は $f^{-1}[L]$ に一致する．

ファジィマルチ集合に対する P, f, f^{-1} についても命題 3.1, 命題 3.2 と同様の関係が成立する．

命題 3.5 X のファジィマルチ集合 A と Y のファジィマルチ集合 B について

$$\begin{aligned} f(\mathcal{P}(A)) &= \mathcal{P}(f[A]) \\ f^{-1}(\mathcal{P}(B)) &= \mathcal{P}(f^{-1}[B]) \end{aligned}$$

が成立する．

ファジィマルチ集合の α-カットに関する性質について次の基本的な命題 3.6 が成立する．

命題 3.6(関数と α-カットの交換可能性) A を X のファジィマルチ集合，B を Y のファジィマルチ集合とする．任意の $\alpha \in (0,1]$ について

$$\begin{aligned} f[A_\alpha] &= (f[A])_\alpha \\ f(A_\alpha) &= (f(A))_\alpha \\ f^{-1}[B_\alpha] &= (f^{-1}[B])_\alpha \end{aligned}$$

が成立する． さらに，

$$\mathcal{P}(A_\alpha) = (\mathcal{P}(A))_\alpha$$

である．

また，命題 3.3 に対応する次の命題 3.7 が導かれる．証明はこの 3.3 節に示すが，そこでは，[17] で示した演算と α-カットの交換可能性，命題 3.6，および命題 3.3 が用いられている．

命題 3.7 ファジィマルチ集合の像および原像の和 $\oplus$，合併 $\cup$，共通部分 $\cap$ について次式が成立する．ここで，A_1, A_2 は X のファジィマルチ集合，B_1, B_2 は Y のファジィマルチ集合とする．

$$f[A_1 \oplus A_2] = f[A_1] \oplus f[A_2] \tag{3.24}$$

$$f[A_1 \cup A_2] \supseteq f[A_1] \cup f[A_2] \tag{3.25}$$

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2] \tag{3.26}$$

$$f(A_1 \oplus A_2) \subseteq f[A_1] \oplus f[A_2] \tag{3.27}$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \tag{3.28}$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2) \tag{3.29}$$

$$f^{-1}[B_1 \oplus B_2] = f^{-1}[B_1] \oplus f^{-1}[B_2] \tag{3.30}$$

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2] \tag{3.31}$$

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2] \tag{3.32}$$

$$\mathcal{P}(A_1 \oplus A_2) = \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2) \tag{3.33}$$

$$\mathcal{P}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2) \tag{3.34}$$

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) = \mathcal{P}(A_1) \cap \mathcal{P}(A_2) \tag{3.35}$$

3.3 命題の証明

ここでは，命題の証明をまとめて述べる．記号の簡略化のため，$Count_A(\cdot)$ を $C_A(\cdot)$ で表す．

命題 3.3 の証明

和演算については $A_1 \oplus A_2$ は A_1 の要素と A_2 の要素をそのまま並べることであり，これに f を作用させて出力を並べることは $f[A_1]$ と $f[A_2]$ をそのまま並べることに等しい．よって，$f[A_1 \oplus A_2] = f[A_1] \oplus f[A_2]$ は明らかである．次に，

$$C_{f[A_1]}(x) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} C_{A_1}(x)$$

であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
C_{f[A_1] \cup f[A_2]}(y) &= C_{f[A_1]}(y) \vee C_{f[A_2]}(y) \\
&= (\sum_{x \in f^{-1}(y)} C_{A_1}(x)) \vee (\sum_{x \in f^{-1}(y)} C_{A_2}(x)) \\
&\leq \sum_{x \in f^{-1}(y)} (C_{A_1}(x) \vee C_{A_2}(x)) \\
&= C_{f[A_1 \cup A_2]}(y); \\
C_{f[A_1] \cap f[A_2]}(y) &= C_{f[A_1]}(y) \wedge C_{f[A_2]}(y) \\
&= (\sum_{x \in f^{-1}(y)} C_{A_1}(x)) \wedge (\sum_{x \in f^{-1}(y)} C_{A_2}(x)) \\
&\geq \sum_{x \in f^{-1}(y)} (C_{A_1}(x) \wedge C_{A_2}(x)) \\
&= C_{f[A_1 \cap A_2]}(y).
\end{aligned}$$

(3.10) については

$$\begin{aligned}
C_{f(A_1 \oplus A_2)}(y) &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} C_{A_1 \oplus A_2}(x) \\
&= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} (C_{A_1}(x) + C_{A_2}(x)) \\
&\leq \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} C_{A_1}(x) + \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} C_{A_2}(x) \\
&= C_{f(A_1)}(y) + C_{f(A_2)}(y) \\
&= C_{f(A_1) \oplus f(A_2)}(y).
\end{aligned}$$

(3.11), (3.12) も同様に証明できるので省略する．

原像について証明するため，$\mathcal{Z}$ が $\oplus, \cup, \cap$ のいずれかを表すものとし，$\mathbf{Z}$ を $\mathcal{Z}$ が $\oplus$ のとき $+$, $\cup$ のとき $\vee$, $\cap$ のとき $\wedge$ と定義する．このとき，

$$\begin{aligned} C_{f^{-1}[B_1 \mathcal{Z} B_2]}(x) &= C_{B_1 \mathcal{Z} B_2}(f(x)) \\ &= C_{B_1}(f(x))\mathbf{Z}C_{B_2}(f(x)) \\ &= C_{f^{-1}[B_1]}(x)\mathbf{Z}C_{f^{-1}[B_2]}(x) \\ &= C_{f^{-1}[B_1]\mathcal{Z}f^{-1}[B_2]}(x). \end{aligned}$$

(3.16) については，

$$x \in \mathcal{P}(A_1 \oplus A_2) \Leftrightarrow C_{A_1}(x) + C_{A_2}(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow C_{A_1}(x) \vee C_{A_2}(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2).$$

他は省略する．

命題 3.4 の証明

$f(A)$ が $f(K)$ に一致することのみ示す．他は明らかであるので省略する．$f(A)$ をクリスプマルチ集合 K' とみなしたとき，グレード列による表現 $\mu_A^i(x)$ を用いると，

$$C_{K'}(y) = \max\{i : \mu_{f(A)}^i(y) \neq 0\}$$

であることに注意する．

$$\begin{aligned} C_{K'}(y) &= \max\{i : \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A^i(x) \neq 0\} \\ &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \max\{i : \mu_A^i(x) \neq 0\} \\ &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} C_K(x) = C_{f(K)}(y). \end{aligned}$$

命題 3.5 の証明

$y \notin f(X)$ ならば，明らかに

$$\mu_{f(\mathcal{P}(A))}(y) = \mu_{\mathcal{P}(f[A])}(y) = 0.$$

$y \in f(X)$ ならば，

$$\begin{aligned}\mu_{f(\mathcal{P}(A))}(y) &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\mathcal{P}(A)}(x) \\ &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A^1(x) = \mu_{\mathcal{P}(f[A])}(y).\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\mu_{f^{-1}(\mathcal{P}(B))}(x) &= \mu_{\mathcal{P}(B)}(f(x)) = \mu_B^1(f(x)) \\ &= \mu_{\mathcal{P}(f^{-1}[B])}(x).\end{aligned}$$

命題 3.6 の証明

$\alpha \in (0,1]$ を任意にとる．また，$A = \{(x', \mu'), ..., (x'', \mu'')\}$ とする．A の中で，$\mu \geq \alpha$ を満たすものをとりだして $\{(z, \nu), ..., (z'', \nu'')\}$ と書くと，$A_\alpha = \{(z, 1), ..., (z'', 1)\}$ より

$$f[A_\alpha] = \{(f(z), 1), ..., (f(z''), 1)\} = f[A]_\alpha.$$

また，

$$\begin{aligned}C_{f(A_\alpha)}(y) &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} C_{A_\alpha}(x) \\ &= \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \max\{i : \mu_A^i(x) \geq \alpha\} \\ &= \max\{i : \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A^i(x) \geq \alpha\} \\ &= \max\{i : \mu_{f(A)}^i(y) \geq \alpha\} \\ &= C_{f(A)_\alpha}(y); \\ C_{f^{-1}[B_\alpha]}(x) &= C_{B_\alpha}(f(x))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max\{i : \mu_B^i(f(x)) \geq \alpha\} \\
&= \max\{i : \mu_{f^{-1}[B]}^i(x) \geq \alpha\} \\
&= C_{f^{-1}[B]_\alpha}(x).
\end{aligned}
$$

$\mathcal{P}$ については

$$x \in \mathcal{P}(A_\alpha) \Leftrightarrow \mu_A^1(x) \geq \alpha \Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A)_\alpha.$$

命題 3.7 の証明

(3.25) だけを示す．他の式も全く同様に示される．$\alpha \in (0,1]$ を任意にとる．命題2.2，命題3.3 および命題3.6 を用いれば

$$
\begin{aligned}
(f[A_1 \cup A_2])_\alpha &= f[(A_1 \cup A_2)_\alpha] \\
&= f[(A_1)_\alpha \cup (A_2)_\alpha] \\
&\supseteq f[(A_1)_\alpha] \cup f[(A_2)_\alpha] \\
&= f[A_1]_\alpha \cup f[A_2]_\alpha \\
&= (f[A_1] \cup f[A_2])_\alpha.
\end{aligned}
$$

α は任意であるから，命題2.1 から (3.25) が成立することがわかる．

3.4 おわりに

ここでは，マルチ集合が $f[A]$ と $f(A)$ で表される 2 種類の像をもつことを示した．マルチ集合の最も顕著な特徴は和演算 $A_1 \oplus A_2$ をもつことである．命題3.3 および3.7 に示したように，$f[A]$ は和演算と可換であるが，合併演算と可換でない．これに対して，$f(A)$ は和演算と可換でないが，合併演算とは可換である．このように，像 $f[A]$ の意義は，和演算から生じてくると考えられる．また，特にファジィマルチ集合に関して 2 種類の像のうち，(3.19) による $f[A]$ の意義は応用上も明ら

かであるが，(3.21) による $f(A)$ については自明ではない．後の像がどのような時に必要かについては今後の研究にまつ必要がある．