第2章　マルチ集合とファジィマルチ集合

2.1　はじめに

通常の集合では、ある要素は一つしか存在しないが、要素の重複が許される集合が考察されている。このような集合はマルチ集合 (multiset) あるいはバッグ (bag) と呼ばれている。また、Yager [30] は、ファジィマルチ集合 (Yager はファジィバッグと呼んでいるが、ここでは、ファジィマルチ集合と呼ぶ) とその演算を提案している。しかしながら、 Yager の提案した演算には、不適切な部分が含まれているため、通常のファジィ集合演算とファジィマルチ集合演算との間に不整合性が生じる。

本章では普通の集合とマルチ集合に対する理論的違いとファジィマルチ集合の基本演算に対して言及する。そして Yager によって考察されたファジィマルチ集合を普遍集合の各要素に対するグレード列の考えを用いて新たに包含、想等の基本的関係と和・積集合の基本演算を定義し直し、それらがどのような意味で Yager の提案よりも妥当な演算であるかを提示する。さらに、ファジィマルチ集合の α ーカットを定義し、これを用いてファジィマルチ集合の交換法則、結合法則、分配法則などを示す。

2.2　通常の集合とマルチ集合

一般的に通常の集合では、ある要素は一つしか存在しないが、要素の重複が許される集合が Knuth [9] や Manna, Waldinger [14] によって考察されている。この

ような集合はマルチ集合 (multiset) あるいはバッグ (bag) と呼ばれている。勿論マルチ集合は集合に類似しているが、一番大きい特徴が要素の重複を許すことである。普遍集合からマルチ集合を形成するために普遍集合の要素を選ぶ場合、同一の要素を複数回とることができる。たとえば、普遍集合を $X = \{a, b, c, d\}$ とすれば $A = \{a, a, b, b\}$ はマルチ集合である。それで通常の集合をマルチ集合の一種とみなすことができる。バックとも呼ばれるマルチ集合は数学的構造として通常の集合より弱いため、理論的考察はあまりされてこなかった。しかしながら、情報工学ではマルチ集合が現れることは決して例外的ではない。そして関係データベース [28] の議論では、SQL による問い合わせの結果、マルチ集合が生じる [3]。

X を通常の有限集合とする。以下では、X は、普遍集合の役割を果たす。説明の都合上、$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$(自然数の集合), $I = [0, 1]$ (単位区間) とする。マルチ集合に関する基本的な事項として、全体集合 X の (クリスプ) マルチ集合 M は各 $x \in X$ に 0 を含む自然数を対応つける関数 $Count_M(\cdot)$, $Count_M$: $X \to \mathbf{N}$ で特徴付けられる。$X = \{x_1, ..., x_n\}$, $k_i = Count_M(x_i)$, $i = 1, ..., n$ と書くとき、ひとつのマルチ集合 M について

$$M = \{k_1/x_1, ..., k_n/x_n\}$$

あるいは

$$M = \{\overbrace{x_1, .., x_1}^{k_1}, ..., \overbrace{x_n, .., x_n}^{k_n}\}$$

と異なる表記を行うことがある。また、$Count_M(x_i)$ を M の x_i におけるカウントと呼ぶ。

全体集合のある元はマルチ集合の要素として複数回現れることがある。上の例では全体集合の元 x_1 は M の要素として k_1 回現れている。

例 2.1 例として、$X = \{a, b, c, d\}$ と仮定し、M として、

$$Count_M(a) = 2, Count_M(b) = 1, Count_M(c) = 3, Count_M(d) = 0$$

言い換えれば、$M = \{a, a, b, c, c, c\}$ を考える。この意味は、M に a, b, c, d がそれぞれ 2、1、3、0 個含まれていることを表している。同じ M の表記として、$M = \{2/a, 1/b, 3/c\}$ のように 0 個の要素を省略してもよい。また、$M = \{3/c, 2/a, 1/b\}$ あるいは $M = \{c, a, b, c, a, c\}$ のように 順序を変えてもよい。

2 つのマルチ集合 M,N について、包含、相等の関係と合併、共通部分の集合演算は次のように定義される [9, 14, 30]。

(a) [包含関係]:

すべての $x \in X$ について $Count_M(x) \leq Count_N(x)$ のとき $M \subseteq N$ と定義する。

(b) [相等関係]:

すべての $x \in X$ について $Count_M(x) = Count_N(x)$ のとき $M = N$ と定義する。

(c) [合併]:

$$Count_{M \cup N}(x) = \max[Count_M(x), Count_N(x)]$$

(d) [共通部分]:

$$Count_{M \cap N}(x) = \min[Count_M(x), Count_N(x)]$$

(e) [直和]:

$$Count_{M \oplus N}(x) = Count_M(x) + Count_N(x)$$

合併と共通部分は、交換法則、結合法則、分配法則を満たすことが知られている [14, 30]。また、直和を単に和ということもある。

有限集合のみに話を限れば、明らかに、マルチ集合は通常の集合や部分集合の一般化である。すなわち、通常の集合を D とするとき、$x \in D$ ならば $Count_D(x) = 1$, $x \notin D$ ならば $Count_D(x) = 0$, と $Count_D(x)$ を定義すればよい。また、このように通常の有限集合をマルチ集合とみなしたとき、上の関係と演算は通常の集合についての包含・相等関係および合併・共通部分演算に一致する。

2.3 ファジィマルチ集合

ファジィマルチ集合はファジィバッグとも呼ばれ、Yager [30] によって考察された。最近 Ramer [23] 乾口 [6], Li [11, 12], Rebai [24, 25] らもファジィマルチ集合について論しているが、本論文で示すメンバーシップの列の概念には到達していない。本論文で論議する集合はすべて有限集合であると仮定する。記号として全体集合を $X=\{x_1,\cdots,x_n\},Y=\{y_1,\cdots,y_m\}$ などで表す。

ファジィマルチ集合は同じ要素が複数個、様々なメンバシップで存在する集合として導入される。

例 2.2 例えば、 $X=\{a,b,c,d\}$ の ファジィマルチ集合として、

$$A=\{(a,0.2),(a,0.3),(b,1),(b,0.5),(b,0.5)\}$$

を考えることができる。 その意味は、A はメンバシップ 0.2 である要素 a, メンバシップ 0.3 の要素 a, メンバシップ 1 の要素 b、メンバシップ 0.5 の要素 b が 2 個で構成されているということである。このファジィマルチ集合を

$$A=\{\{0.2,0.3\}/a,\{1,0.5,0.5\}/b\}$$

と書くこともある。記号 a,b についてメンバシップのマルチ集合 $\{0.2,0.3\},\{1,0.5,0.5\}$ がそれぞれ対応しているとみるのである。

任意の $x\in X$ に対して、マルチ集合 $Count_A(x)$ の要素を大きいものから順に並べた列を A の x におけるグレード列あるいはメンバーシップ列と呼び、

$$\mu_A^1(x),\mu_A^2(x),\cdots,\mu_A^p(x)$$

と書くことにする。ただし、

$$\mu_A^1(x)\geq\mu_A^2(x)\geq,\cdots,\mu_A^p(x)$$

である。

有限の普遍集合における有限個のファジィマルチ集合を取り扱う場合、列の最後に0を適当に付加することによって、すべてのxとファジィマルチ集合についてメンバシップ列の長さpを一定にできる。先の例では$p=3$,

$$\mu_A^1(a)=3, \mu_A^1(a)=0.2, \mu_A^1(a)=0,$$

$$\mu_A^1(b)=1, \mu_A^1(b)=\mu_A^1(b)=0.5,$$

$$\mu_A^1(c)=\mu_A^1(c)=\mu_A^1(c)=0,$$

$$\mu_A^1(d)=\mu_A^1(d)=\mu_A^1(d)=0$$

となる。この表現によれば、先のファジィマルチ集合は、

$$A=\{(0.3,0.2)/a,(1,0.5,0.5)/b\}$$

と書くことができる。

2.4 Yagerの提案した演算の通常のファジィ集合との関係

一般にファジィマルチ集合は任意の$x \in X$に単位区間I上のマルチ集合を対応させる写像で特徴つけられる。従って、$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$のとき、一般的にファジィマルチ集合Mは

$$M=\{\{a_{i1}/\mu_{i1},\cdots,a_{ik}/\mu_{ik_i}\}/x_i : i=1,2,\cdots,n\}$$

のように表される。ここで、$\{\{a_{i1}/\mu_{i1},\cdots,a_{ik_i}/\mu_{ik_i}\}/x_i$はグレード$\mu_{i1}$要素$x_i$が$a_{i1}$個、グレード$\mu_{ik_i}$の要素$x_i$が$a_{ik_i}$個存在していることを表している。

一般にa_{ij}/μ_{ij}において$a_{ij}=0$あるいは、$\mu_{ij}=0$ならば、上に述べたことからこれに対応する。グレードμ_{ij}、個数a_{ij}個の要素x_iは実質的には存在しない。したがって、あるファジィマルチ集合には$a_{ij}=0$あるいは$\mu_{ij}=0$となる。a_{ij}/μ_{ij}

を任意個付加してもよい。また $Count_M(x_i) = \{a_{ij}/\mu_{i1}, \cdots, a_{ik_i}/\mu_{ik_i}\}$ と書き、M の x_i におけるカウントと呼ぶ。

例 2.3 上の例をこの書き方で表せば、

$$\begin{aligned} A &= \{\{1/0.2, 1/0.3\}/a, \{2/0.5, 1/1\}/b\} \\ B &= \{\{1/0.4\}/a, \{1/1, 1/0.1\}/b\} \end{aligned}$$

となる。

明らかに通常の(有限)ファジィ集合はファジィマルチ集合とも見なすことができる。ファジィ集合 $\sum \mu_i/x_i$ をファジィマルチ集合 $\{\{1/\mu_i\}/x_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$ と同一視すればよいからである。

Yager は、2 つのファジィマルチ集合の包含関係と和・積演算を定義している。いま、2 つのファジィマルチ集合を A, B とし、任意の要素 $x \in X$ について

$$\begin{aligned} Count_A(x_i) &= \{a_{i1}/\mu_{i1}, ..., a_{ik_i}/\mu_{ik_i}\}, \\ Count_B(x_i) &= \{b_{i1}/\mu_{i1}, ..., b_{ik_i}/\mu_{ik_i}\} \end{aligned}$$

とする。前に述べたように $a_{ij} = 0$ あるいは $\mu_{ij} = 0$ となる a_{ij}/μ_{ij} を任意個付加してもよいので、グレード μ_{ij} を A と B で共通にとることができる。Yager によれば、$a_{ij} \leq b_{ij}, j = 1, \cdots, k_i, i = 1, 2, \cdots, n$ のとき $A \subseteq B$ と定義され、$a_{ij} = b_{ij}$, $j = 1, \cdots, k, i = 1, 2, \cdots, n$ のとき $A = B$ と定義される。また、

$$\begin{aligned} Count_{A \cup B}(x_i) &= \{\{\max[a_{ij}, b_{ij}]/\mu_{ij} : j = 1, ..., k_i\}\}, \\ Count_{A \cap B}(x_i) &= \{\{\min[a_{ij}, b_{ij}]/\mu_{ij} : j = 1, ..., k_i\}\} \end{aligned}$$

によって和・積演算が定義されている。この定義によってこの定義によって、

$$\begin{aligned} C &= \{\{1/0.2\}/a, \{1/0.5\}/b\}, \\ D &= \{\{1/0.3\}/a, \{1/1\}/b\} \end{aligned}$$

の演算を考えてみよう。

$$C = \{\{1/0.2, 0/0.3\}/a, \{1/0.5, 0/1\}/b\},$$

$$D = \{\{0/0.2, 1/0.3\}/a, \{0/0.5, 1/1\}/b\}$$

であるから、上の定義をあてはめると、まず、$C \subseteq A,\ D \subseteq A$ であるが、C と D の間に包含関係はない。また、

$$C \cup D = \{\{1/0.2, 1/0.3\}/a, \{1/0.5, 1/1\}/b\},$$

$$C \cap D = \{\{0/0.2, 0/0.3\}/a, \{0/0.5, 0/1\}/b\} = \emptyset$$

となる。

この例は、上の定義が適切ではないことを示している。なぜなら、C, D は通常のファジィ集合

$$C = 0.2/a + 0.5/b, \quad D = 0.3/a + 1/b$$

と同じものであるから、ファジィマルチ集合の関係や演算は通常の関係・演算と同じ結果をもたらさなければならない。ところが、C, D を通常のファジィ集合の関係と演算によって考察すると、$C \subseteq D$ であり、$C \cup D = D, C \cap D = C$ となって、上の定義と異なる結果となる。

先に述べたように、通常のファジィ集合はファジィマルチ集合の一種とみなせるので、このような矛盾が生じることは全く望ましくない。また一方で、クリスプマルチ集合の場合、第2節に述べたように、通常のクリスプ集合をクリスプマルチ集合とみなしてもこのような矛盾は生じない。そこで、以下に、定義を改めよう。

2.5 グレード列による基本演算と関係の提案

ファジィマルチ集合の基本的関係と演算に対して本節で簡単に説明する。

(i) [包含関係]:

すべての $x \in X$ に対して、$\mu_A^j(x) \leq \mu_B^j(x),\ \ j = 1, 2, ..., m$ のとき $A \subseteq B$ と定義する。

(ii) [相等関係]:

すべての $x \in X$ に対して、$\mu_A^j(x) = \mu_B^j(x),\ \ j = 1, 2, ..., m$ のとき $A = B$ と定義する。

(iii) [合併]:

すべての $x \in X$ に対して、ファジィマルチ集合 $A \cup B$ のグレード列を

$$\mu_{A \cup B}^j(x) = \max[\mu_A^j(x), \mu_B^j(x)],\ \ j = 1, 2, ..., m$$

で定義する。

(iv) [共通部分]:

すべての $x \in X$ に対して、ファジィマルチ集合 $A \cap B$ のグレード列を

$$\mu_{A \cap B}^j(x) = \min[\mu_A^j(x), \mu_B^j(x)],\ \ j = 1, 2, ..., m$$

で定義する。

(v) [α-カット]:

$$\mu_A^1(x) < \alpha \Rightarrow Count_{A_\alpha}(x) = 0,$$
$$\mu_A^j(x) \geq \alpha, \mu_A^{j+1}(x) < \alpha \Rightarrow Count_{A_\alpha}(x) = j,$$
$$j = 1, \cdots, p$$

(vi) [直和]: Yager が提案しているように、$X \times I$ におけるクリスプマルチ集合の直和でファジィマルチ集合の直和を定義する。

そして次の命題が証明できる。証明は、次の節にまとめて示す。

命題 2.1 A, B を X のファジィマルチ集合とするとき、$A \subseteq B$ であるための必要十分条件はすべての $\alpha \in (0,1]$ に対して $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ が成立することである。

命題 2.2 A, B を X のファジィマルチ集合とし、任意の $\alpha \in (0,1]$ をとる。このとき、

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)_\alpha &= A_\alpha \cup B_\alpha, \\
(A \cap B)_\alpha &= A_\alpha \cap B_\alpha.
\end{aligned}
$$

命題 2.3 A, B, C を X のファジィマルチ集合とする。このとき、次の性質が成り立つ。

$$
A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A,
$$

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, \\
(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C), \\
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C).
\end{aligned}
$$

最後の命題はファジィマルチ集合のクラスが、分配束であることを示している。

2.6 命題の証明

先に述べたように、A と B におけるグレードの列の長さ m がすべての x について共通にとれることに注意する。そこで、通常のファジィ集合の列 $A^1, ..., A^m$, $B^1, ..., B^m$ を

$$
\begin{aligned}
&\mu_{A^j}(x) = \mu_A^j(x), \quad \mu_{B^j}(x) = \mu_B^j(x), \\
&\forall x \in X, \quad j = 1, ..., m
\end{aligned}
$$

によって定義する(いいかえれば、A^j のグレードは A のグレード列の j 番目の要素で与えられる)。さらに、A^j, B^j の(通常の意味での) α-カットを $(A^j)_\alpha$, $(B^j)_\alpha$

と置く。このとき、

$$Count_{A_\alpha}(x) = \max\{j : x \in (A^j)_\alpha\}$$

が成立する。(ただし、x がどの A^j にも属さないならば、$Count_{A_\alpha}(x) = 0$.) なぜなら、$k = Count_{A_\alpha}(x)$ とおくと、先に述べた $Count_{A_\alpha}$ の定義から、

$$\begin{aligned} \mu_{A^k}(x) &= \mu_A^k(x) \geq \alpha, \\ \mu_{A^{k+1}}(x) &= \mu_A^{k+1}(x) < \alpha \end{aligned}$$

であるから、

$$x \in (A^j)_\alpha,\ j = 1, .., k,$$

$$x \notin (A^j)_\alpha,\ j = k+1, .., m$$

となるからである。

このことから、次の補題が成立することがわかる。

補題 2.1

任意の $\alpha \in (0,1]$ について、

$$A_\alpha \subseteq B_\alpha \iff (A^j)_\alpha \subseteq (B^j)_\alpha, \quad j = 1, ..., m.$$

(証明) 上の議論から、

$$\begin{aligned} A_\alpha \subseteq B_\alpha &\Leftrightarrow Count_{A_\alpha}(x) \leq Count_{B_\alpha}(x),\ \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow \max\{j : x \in (A^j)_\alpha\} \leq \max\{j : x \in (B^j)_\alpha\}, \\ &\qquad \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow if\ x \in (A^j)_\alpha\ then\ x \in (B^j)_\alpha, \\ &\qquad \forall x \in X,\ j = 1, ..., m \\ &\Leftrightarrow (A^j)_\alpha \subseteq (B^j)_\alpha,\ j = 1, ..., m \end{aligned}$$

であることに注意すればよい。(証明終)

この補題から命題2.1が証明できる。

(命題2.1の証明)

$$A \subseteq B \iff A^j \subseteq B^j, \quad j = 1, ..., m$$

は定義より明らかである。さらに、

$$A^j \subseteq B^j \iff (A^j)_\alpha \subseteq (B^j)_\alpha, \ \forall \alpha \in (0,1], \quad j = 1, .., m$$

は通常のファジィ集合についてよく知られた性質である [5, 10]。これらと補題2.1を合わせれば、命題2.1の結論を得る。(証明終)

(命題2.2の証明) 先に導入したA^j, B^jを用いて証明しよう。A, Bが通常のファジィ集合の場合、これらの性質が成立することはよく知られていることにまず注意しよう [5, 15]。A^j, B^jは通常のファジィ集合であるから、$(A^j \cup B^j)_\alpha = (A^j)_\alpha \cup (B^j)_\alpha$が成立する。また、

$$\begin{aligned} \mu^j_{A \cup B}(x) &= \max[\mu^j_{\mathbf{A}}(x), \mu^j_B(x)] \\ &= \max[\mu_{\mathbf{A}^j}(x), \mu_{B^j}(x)] = \mu_{A^j \cup B^j}(x) \end{aligned}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} Count_{(A \cup B)_\alpha}(x) &= \max\{j : \mu^j_{A \cup B}(x) \geq \alpha\} \\ &= \max\{j : \mu_{A^j \cup B^j}(x) \geq \alpha\} \\ &= \max\{j : x \in (A^j)_\alpha \ or \ x \in (B^j)_\alpha\} \\ &= \max[\max\{j : x \in (A^j)_\alpha\}, \max\{k : x \in (B^k)_\alpha\}] \\ &= \max[Count_{A_\alpha}(x), Count_{B_\alpha}(x)] \\ &= Count_{A_\alpha \cup B_\alpha}(x). \end{aligned}$$

この式がすべての$x \in X$について成り立つので、$(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$である。$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$も同様に証明される。(証明終)

(命題2.3の証明) 分配法則の一つについて証明しよう。まず、系1から、一番後の分配法則は、すべての $\alpha \in (0,1]$ について

$$[(A \cup B) \cap C]_\alpha = [(A \cap C) \cup (B \cap C)]_\alpha$$

が成立することと等価であることがわかる。定理4およびクリスプマルチ集合について分配法則が成り立つこと([14, 30] 参照) を用いた以下の変形によって、上の式が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned}
[(A \cup B) \cap C]_\alpha &= (A \cup B)_\alpha \cap C_\alpha \\
&= (A_\alpha \cup B_\alpha) \cap C_\alpha \\
&= (A_\alpha \cap C_\alpha) \cup (B_\alpha \cap C_\alpha) \\
&= (A \cap C)_\alpha \cup (B \cap C)_\alpha \\
&= [(A \cap C) \cup (B \cap C)]_\alpha.
\end{aligned}$$

クリスプマルチ集合について交換法則、結合法則が成り立つこと([14, 30] 参照) を用いれば、他の性質についても全く同様の方法で証明できる。(証明終)

2.7 おわりに

ここでは、Yager の提案したファジィマルチ集合の基本演算を見直し、通常のファジィ集合演算の一般化としての包含・相等関係や和・積演算を定義した。この演算や包含関係の定義の要点は、各要素に対するグレードの集合を順序づけ、一列に並べておくことである。また、ファジィマルチ集合からクリスプマルチ集合への α-カットを定義し、これを用いて、ファジィマルチ集合演算が、交換、結合、分配法則を満たすことを示した。特に命題2.2で示した α-カットと積・和演算との交換可能性が最も本質的である。マルチ集合に特有の演算として、直和演算が考察されている。これについては、Yager [30] によるファジィマルチ集合の直和の定義が適切であると思われるので、ここでは特に言及していない。

今後の理論的課題として、ファジィマルチ集合に関する他の演算が適切に定義できるかどうかの問題がある。たとえば、ファジィマルチ集合の補集合の定義可能性であるが、Knuth [9], Manna ら [14] や Yager [30] はクリスプマルチ集合の補集合すら論じていない。クリスプマルチ集合自体、全体集合の概念がないので、考察にはある程度の制約があるであろうが、補集合概念は興味ある問題である。