

4 区分多項式に基づく未知離散データのための最適クラス決定法

4.1 はじめに

対象信号の属する信号空間を特定することには様々な利点がある (1.2節参照)。第一に mS に属する信号 $x(t)$ に対しては、クラス m のフルーエンシ関数を利用することで信号を効率的に記述できることが保証されている点である。第二に、フルーエンシ関数系 (Cタイプ) は低次クラスほどサポートが小さいため、信号 $x(t)$ に対してクラス m のフルーエンシ関数を用いることで、変換に要する演算量が最小となる。故に信号の属すクラスを特定することで計算機実装における演算量の削減が可能となる。第三に、微分不可能な点を特定することでオーバーシュートやアンダーシュート等のギブス現象を緩和できるという利点もある。

もし、多項式信号空間 mS のいずれか1つに属していると仮定した信号 $x(t)$ を時刻 $t_j = jh'$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) で離散化した $x(t_j)$ から、 $x(t)$ の属す空間を特定することが可能であれば、前述したようなフルーエンシ関数系がもたらす効果を離散データに対しても期待することができる。よって本章では、離散データの属する信号空間を特定する方法を提案し、その適用限界と特異点との関連について考察する。

4.2 クラス決定尺度

本節では準備として、連続系において信号の属する空間を特定する尺度となるクラス決定尺度を定義する。

(6) 式,

$$v(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m\psi_0(t - kh)} dt$$

および, (7) 式,

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t_k) {}^m\psi_k(t), s(t) \in {}^mS$$

から、連続系におけるクラス m の A/D 関数は、アナログ信号 $x(t)$ を幅 h で離散化した係数値 $v(t_k)$ を生成する。このとき $h \rightarrow 0$ とすると、上式は信号 $s(t)$ に収束し、D/A 関数を用いることなく $x(t)$ のクラス mS への射影が得られる。よって、

$$d_k(m, h) = \left\| x(t_k) - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m\psi_0(t - kh)} dt \right\| \quad (108)$$

としたとき、

$$\operatorname{argmin}_m \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} d_k(m, h) = 0 \right\}$$

を求めることで、 $x(t)$ の属する空間クラスを決定できる。特に、(108) 式をクラス決定尺度と呼ぶことにする。

4.3 離散系におけるクラス決定尺度とその検証

本節では前節で定義したクラス決定尺度を基に、多項式信号空間 mS のいずれか一つに属していると仮定した信号 $x(t)$ を時刻 $t_j = jh' : (j = 0, 1, 2, \dots)$ で離散化した $\mathbf{x} = x(t_j)$ から、 $x(t)$ の属する空間を特定する手法について考える。ここで、原信号 $x(t)$ における 1 階微係数が存在しない点を特異点とし、原信号の特異点に最も近い点を離散信号の特異点とする。

連続系におけるクラス決定尺度がもし離散系に対しても有効であれば、離散信号の属するクラスを特定することが可能となる。そこで d 次の離散信号に対する離散クラス決定尺度を、

$$\hat{d}_k(h) = \|\mathbf{x}(t_{r,k}) - (\mathbf{x}, {}^m\hat{\psi}_k)\|_{k=0,1,2,\dots,n-1} \quad (109)$$

と最定義し、その有効性を検証する。ここで、 ${}^m\hat{\psi}_k$ は幅 h' で離散化されている d 次の離散信号を h でサンプリングするダウンサンプリング基底ベクトルである (3.3節参照)。このとき、近似レートは $r = h/h'$ であり、 $n = d/r$ となる。

	パターン 1	パターン 2
0 次関数	$f(t) = 1$	$\begin{cases} f(t) = 1 & t < 0.5 \\ f(t) = -1, & t \geq 0.5 \end{cases}$
1 次関数	$f(t) = -t + 1$	$\begin{cases} f(t) = t, & t < 0.5 \\ f(t) = -t + 1, & t \geq 0.5 \end{cases}$
2 次関数	$f(t) = -t^2 + 1$	$f(t) = -(t - 0.5)^2 + 1$
正弦波	$\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})$	$\sin(\pi t)$

表 6: 対象信号

クラス決定尺度の有効性を主張するためには, mS に属する対象信号に対して, $\min\{\hat{d}_k(h)\}$ を与える最も低次クラスのダウンサンプリング基底ベクトルクラスとして m が得られればよい. そうでない場合でもクラス m 以下のダウンサンプリング基底ベクトルが選択されなければ実用性に耐えうる. これはクラス m 以上のフルーエンシ関数が mS に属する信号を記述できるという性質を持つためである.

実験対象信号としては $^1S, ^2S, ^3S$, および $^\infty S$ に属する信号の例として微分可能性が既知である 0 次関数 (直流波), 1 次関数, 2 次関数, そして正弦波を選択した. 1S , および 2S に関しては, 特異点を持つことを許されているので, 0 次関数, および 1 次関数に対しては特異点を持つ信号と持たない信号を用意した. また一貫性を持たせるため 2 次関数, 正弦波に対してもこれに形状を合わせた. これらを表 6 にまとめる. 表 6 におけるパターン 1 の信号を図 15 に, そしてパターン 2 の信号を図 16 にそれぞれ示す.

表 7 に示す関数それぞれに対し, 1024 点の離散データを生成し, クラス $m = 1$ から $m = 4$ までを適用し, 近似レート r を変えることで h を変化させる. このとき, 結果にばらつきが生じないように全ての点に対しダウンサンプリング基底ベクトルを作用させる. 即ち,

$$\hat{d}_j(h) = \|\mathbf{x}(t_j) - (\boldsymbol{\alpha}, \Omega^{1-k} \cdot {}^m \hat{\boldsymbol{\psi}}_0)\|_{j=0,1,2,\dots,d-1} \quad (110)$$

とし,

$$D(h) = \sum_{k=0}^{d-1} \hat{d}_k(h)^2 / \mathbf{x}^2$$

を求め, クラス決定尺度の有効性を検証する. ここで, Ω は (101) 式に示すとおりである. 尚, 境界における不連続点が影響を及ぼさないよう評価には中心の 512 点のみ用いた. h に対して以上の条件の下で得られたクラス決定尺度 $D(h)$ の遷移を図 17 から 20 に示す.

クラス m 以上の A/D 関数はクラス m の信号を記述できることを考慮すると, クラス

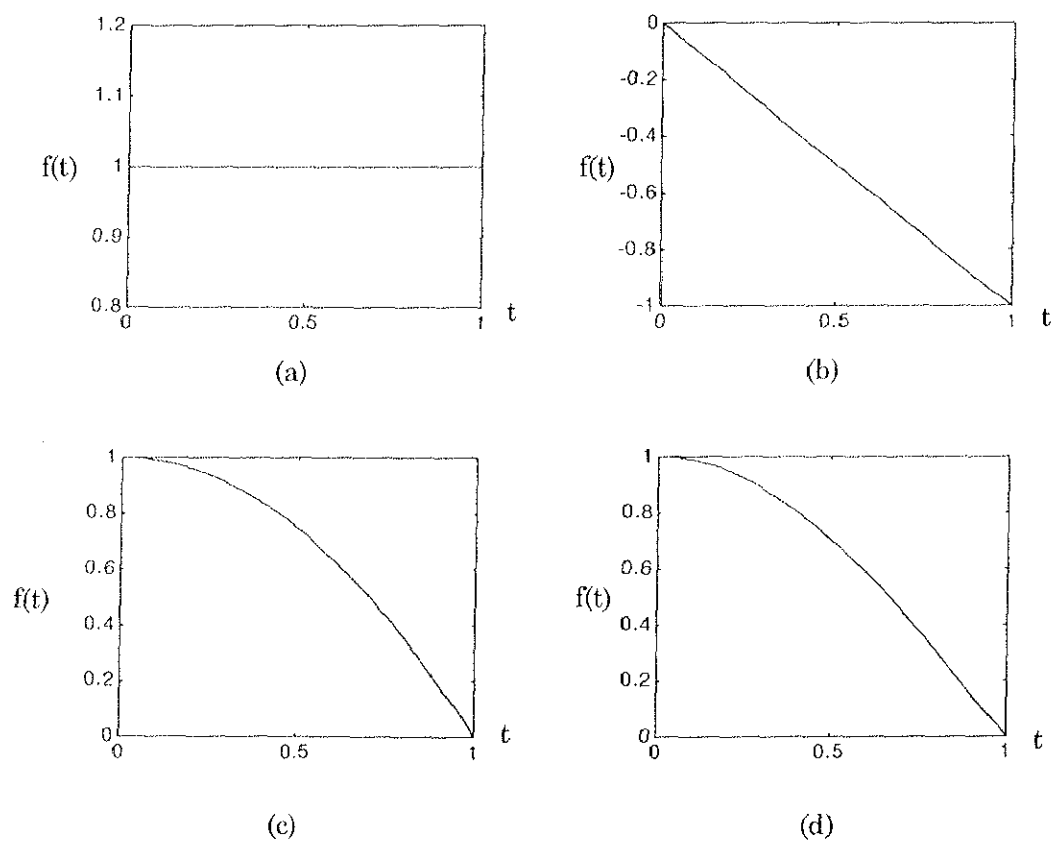


図 15: 対象信号 (パターン 1) (a)0 次関数 (b)1 次関数 (c)2 次関数 (d) 正弦波

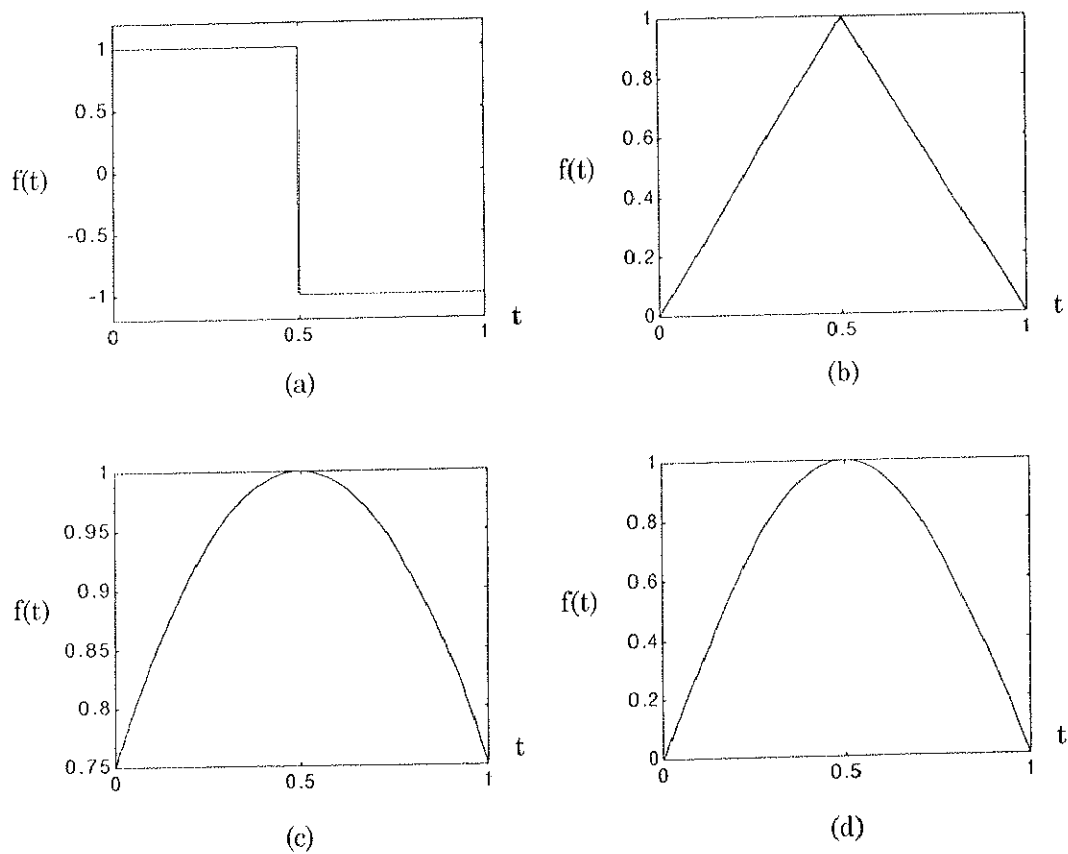


図 16: 対象信号 (パターン 2) (a) 特異点を含む 0 次関数 (b) 特異点を含む 1 次関数 (c) 2 次関数 (d) 正弦波

$m-1$ とクラス m のダウンサンプリング基底ベクトルが与えるクラス決定尺度の間に大きな差異が現れるはずである。直流信号に対してはクラス間におけるクラス決定尺度に差異が現れていないが、他の対象信号におけるクラス決定尺度のオーダーと比較しても値が小さいため、いずれのクラスのフルーエンシベクトルも対象信号を精度よく近似することを示している (図 17(a) 参照)。故に直流信号は 1S に属することが特定される。

また 1 次関数については小さい h ほど差異が大きくなっており、クラス決定尺度を最も小さくするダウンサンプリング基底ベクトルとして必ずクラス $m \geq 2$ が選択される。よって 1 次関数は 2S に属することが特定できる (図 17(b) 参照)。同様に 2 次関数においても必ずクラス $m \geq 3$ が選択され、2 次関数の属する空間を 3S と特定できる (図 18(a) および 20(a) 参照)。正弦波に関しては、2 次関数ほどクラス間の差異が明らかでないが、クラス $m = 3, 4$ がクラス決定尺度を最も小さくし、正弦波が滑らかな信号であることを特定できる (図 18(b) および 20(b) 参照)。したがって、特異点を含まない信号に対してはクラス決定尺度に基づいたクラスの特定法は有効であると考えられる。

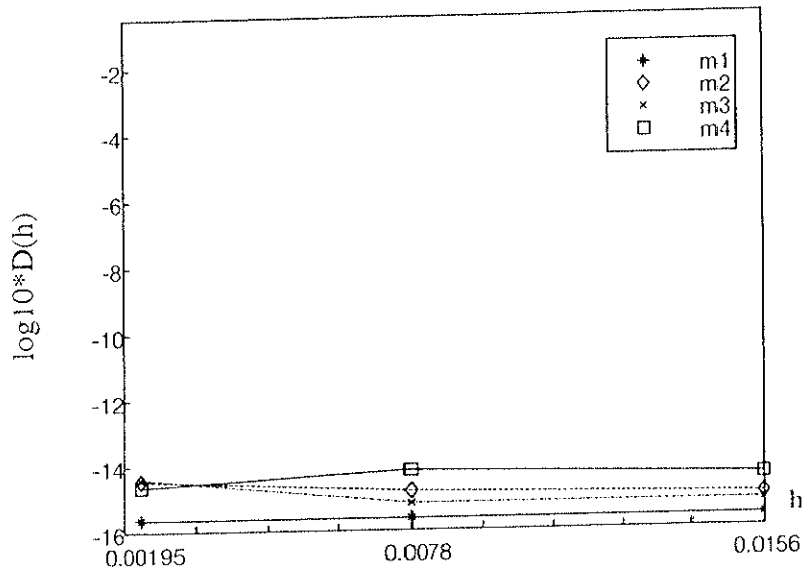
一方、特異点を含む場合、0 次関数および 1 次関数とも特異点を含まない場合のクラス決定尺度と比較してそのオーダーが大きく、差異もみられない (図 19(a) および (b) 参照)。よって、対象信号が特異点を含む場合クラス決定尺度が有効であるとはいえず、離散系におけるクラス決定尺度は特異点を含まない信号にのみその有効性が確認された。

4.4 クラス決定尺度を用いた離散信号クラスの特定法

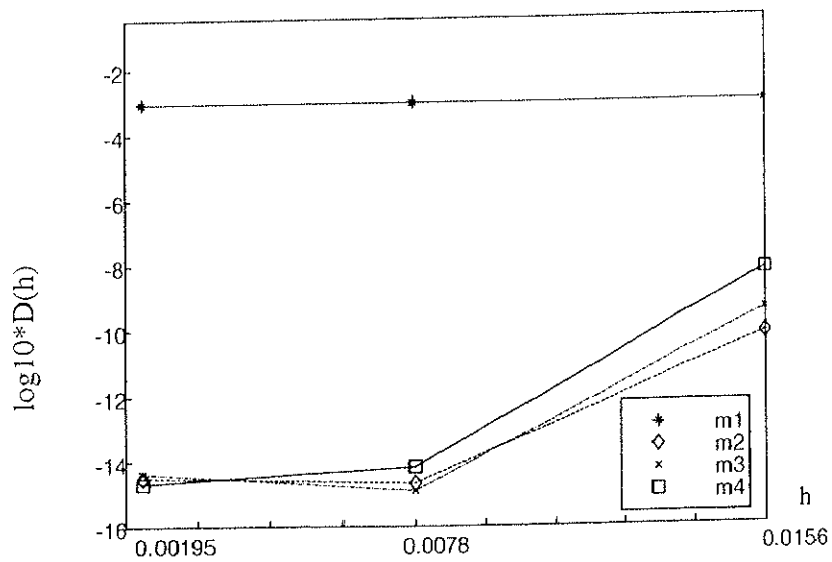
4.3 節では特異点を含まない信号に対して、クラス決定尺度の有効性を示した。よって本節ではこれに基づいた離散信号のクラスを特定する手法について提案する。

まず、対象信号をより正確に捕らえるため、 h を最も小さくする近似レート $r = 2$ を用いる。そして各点に対してクラス決定尺度の値にばらつきが生じないように、すべてのデータ点に対してダウンサンプリング基底ベクトルを作用させ、(110) 式における $\hat{d}_k(h)$ を求める。これを各クラスのダウンサンプル基底ベクトルで行い、 $\hat{d}_k(h)$ を比較し、最もクラス決定尺度を小さくするダウンサンプリング基底ベクトルのクラスを t_k におけるクラスとする。

本手法を適用した結果を図 21, 22, および 23 に示す。このうち、対象信号の波形が (a)、そして特定されたクラスが (b) である。特異点以外の場所では直流成分は 1S 、そして直線は 2S に属することが特定されているが、特異点が存在する境界部分は 3S に属すると判定されている。特異点周辺では係数値および $d_k(h)$ に変動があると考えられる。こ

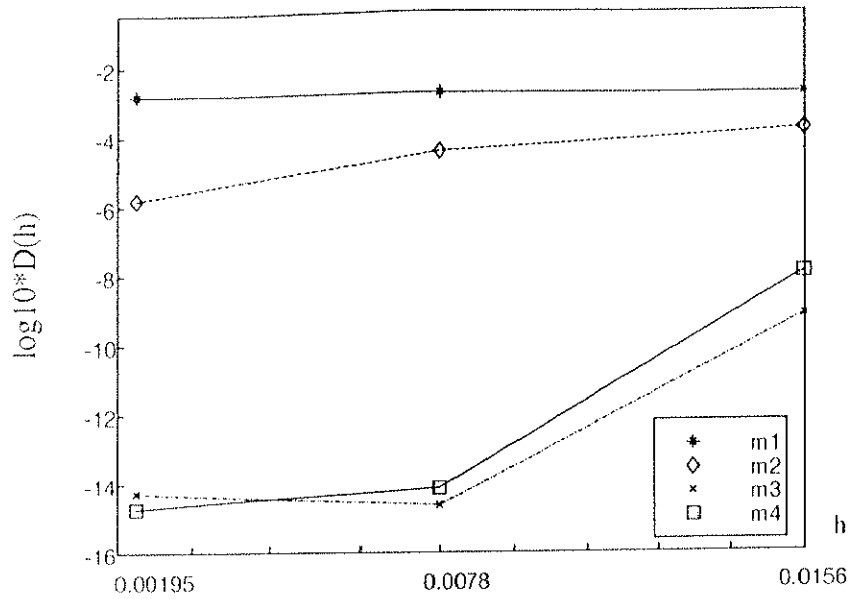


(a)

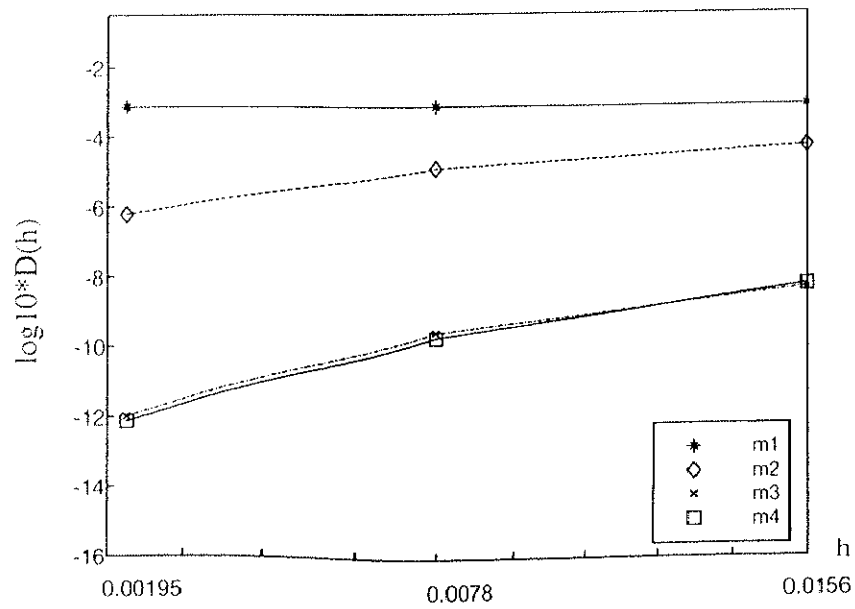


(b)

図 17: クラス決定尺度 (パターン 1) (a)0 次関数 (b)1 次関数

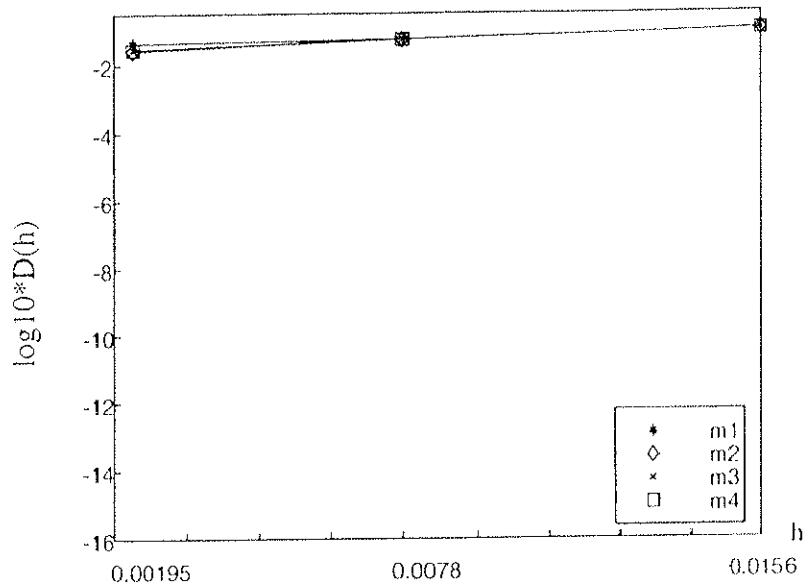


(a)

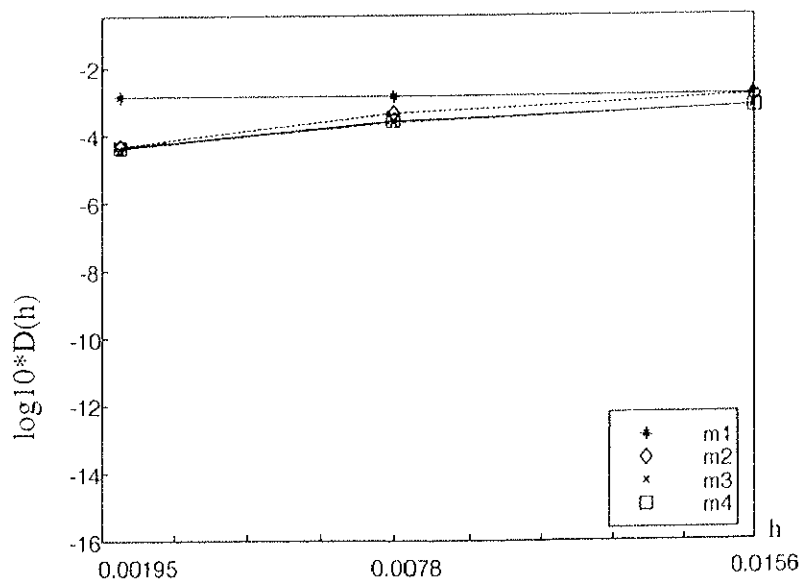


(b)

図 18: クラス決定尺度 (パターン 1) (a)2 次関数 (b)正弦波



(a)



(b)

図 19: クラス決定尺度 (パターン 2) (a) 特異点を含む 0 次関数 (b) 特異点を含む 1 次関数

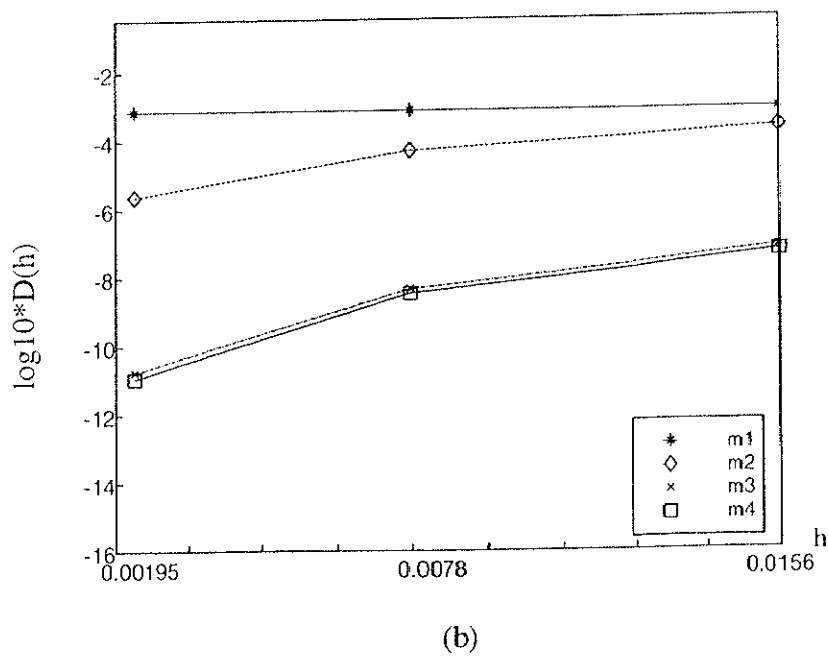
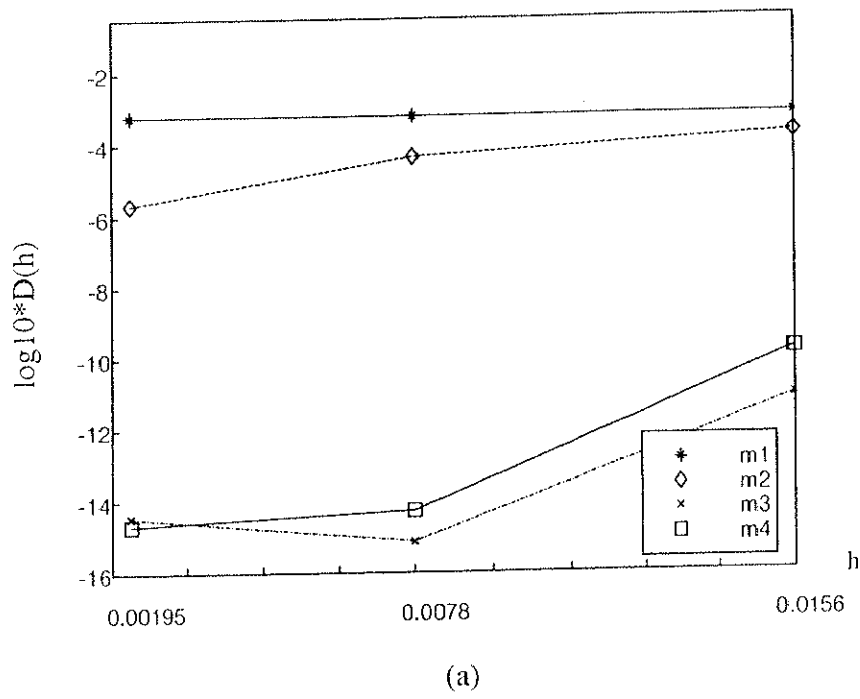


図 20: クラス決定尺度 (パターン 2) (a)2 次関数 (b) 正弦波

の場合、特異点が周辺点に及ぼす影響の範囲は h が大きいほど広がるが、 h を十分小さくすることで、影響の範囲も収束する。特異点やその周囲点に対しクラス決定尺度は有効な値は与えないが、 h が十分小さければ、クラスが変化する部分を特異点として抽出することができる。

4.4.1 実験

4.4節で提案したクラス特定手法を実データに適用した。

対象データの大きさに応じてフルーエンシベクトルを導出するのは効率が悪いので、近似対象データの次数 d' に対して、次数 $d (\leq d')$ の信号をレート 2 で近似することを仮定し、ダウンサンプリング基底行列を求める。そしてブロックノイズが生じないように、ダウンサンプリング基底行列から最も対称性の高いダウンサンプリング基底ベクトル $\hat{\psi}_{(n/2)}^m$ を 1 つ選択し、これを 1 ずつシフトしながら作用させる。この様子を図 24 に示す。展開係数列ベクトル α を得る場合は近似レートに応じてダウンサンプリング基底ベクトルを r ずつシフトさせながら \mathbf{x} との内積を求めるが (図 24(a) 参照)、クラス決定尺度を求める場合は 1 ずつシフトしながら \mathbf{x} の全点に対してダウンサンプリングベクトルを作用させる (図 24(b) 参照)。

以下に実験条件をまとめる。近似対象信号は 2 つの CD オーディオデータ (44.1kHz, 16 ビット, モノラル, 441000 サンプル (10 秒分)):

1. Donald Fagen. Trans-island Skyway.
2. J.S.Bach チェロ・ソナタ第 3 番 ト長調. Mischa Maisky · Martha Argerich 演奏

である。曲 (1) は高周波を多く含む信号、そして曲 (2) は滑らかな成分を多く含む信号の代表として選曲した。利用したダウンサンプリング基底ベクトルは 3 章において提案した手法で生成した。パラメータは次に示す通りである。

- クラス: $m = 1, 2, 3$
- 次数: $d = 512$
- 近似レート: $r = 2$

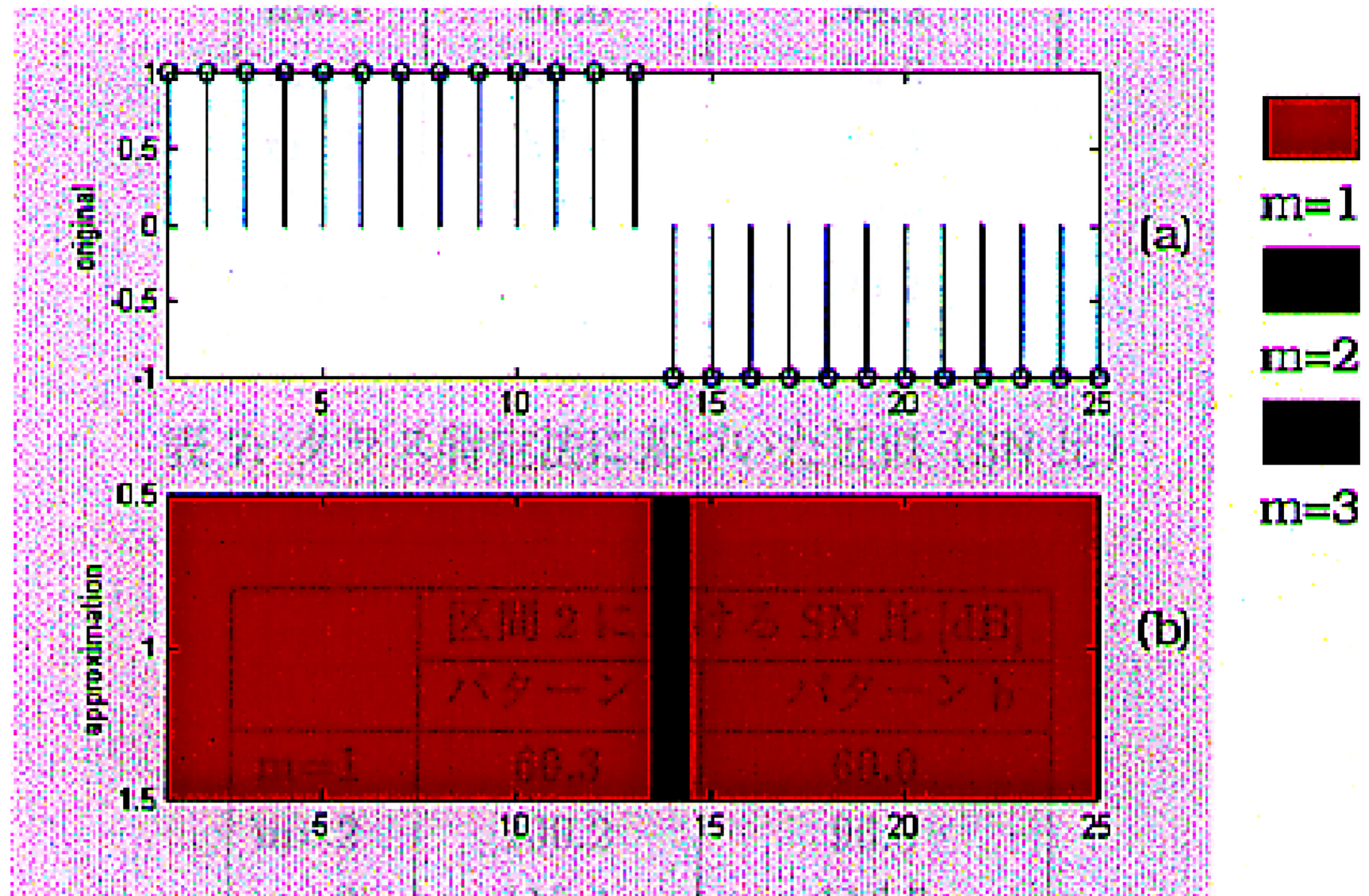


図 21: クラス決定尺度に基づいたクラス特定結果 (1)

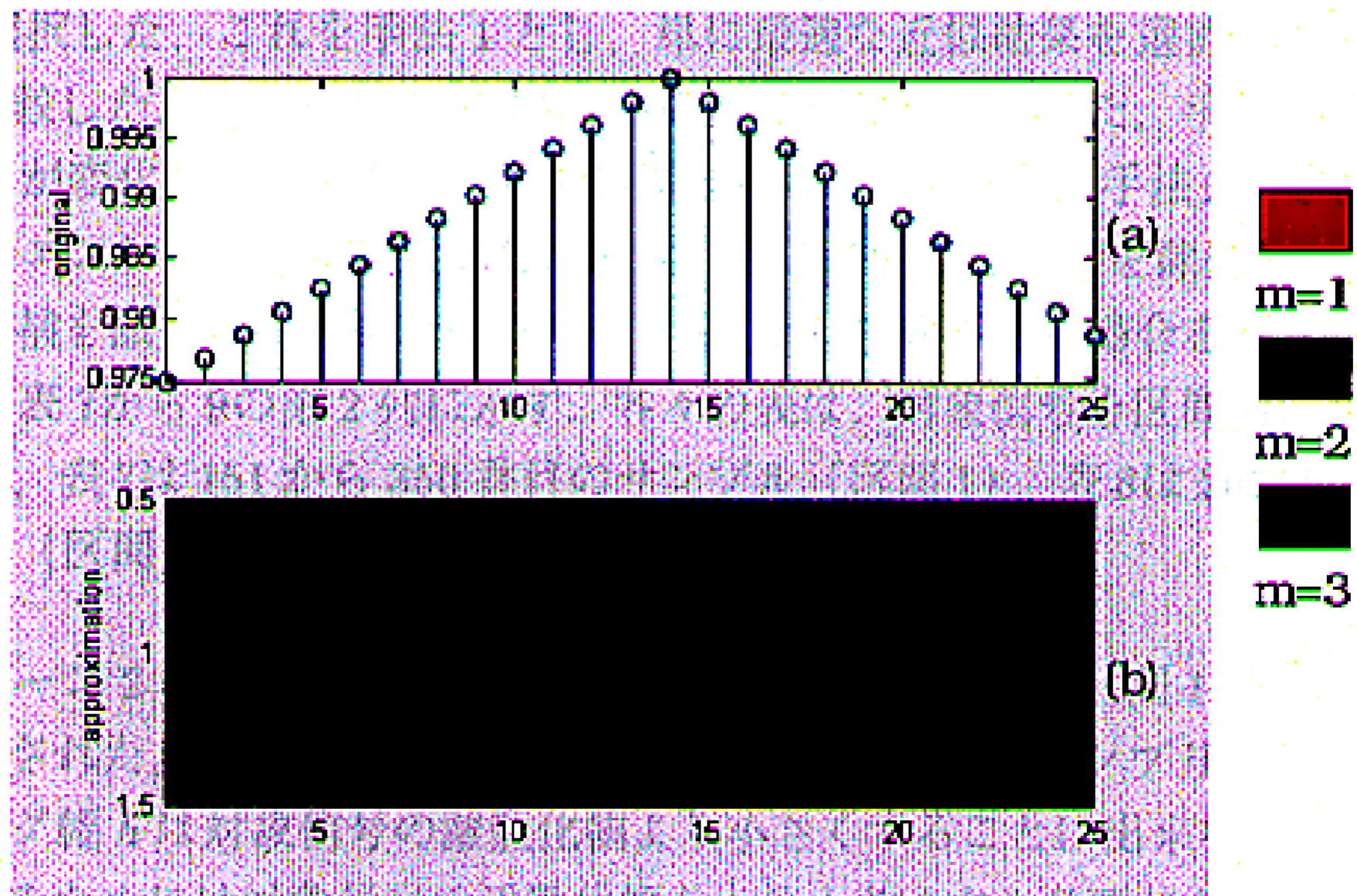


図 22: クラス決定尺度に基づいたクラス特定結果 (2)

	区間 1 における SN 比 [dB]	
	パターン a	パターン b
m=1	87.6	94.2
m=2	87.1	94.0
m=3	87.0	93.4
手法 1	87.1	92.9
手法 2	92.0	99.2

表 7: クラス特定法に基づいた近似 (SN 比)

	区間 2 における SN 比 [dB]	
	パターン a	パターン b
m=1	60.3	60.0
m=2	100.2	96.8
m=3	115.4	116.7
手法 1	114.2	116.8
手法 2	116.9	117.3

表 8: クラス特定法に基づいた近似 (SN 比)

以上の条件の下で本手法を用いて特定されたクラスのフルーエンシベクトルが生成した近似結果を選択した。これを手法 1 とし、単に最適な近似結果を選択する手法 (手法 2 とする) と比較した。この結果を表 7 から 9 の第 1 列に示す。また、手法 1 によって特定されたクラスが変化した部分を特異点の候補とみなし、手法 1、手法 2、そして各単一クラスのフルーエンシベクトルで近似した結果からこの特異点候補を除外し、SN 比を求めた。特異点候補を除外しない場合をパターン a、そして除外した場合をパターン b とする。この結果を表 7 から 9 の第 2 列に示す。各々の表は、対象信号を区間別に評価したものとなっており、表 7 は 151 から 350 番目のサンプル (区間 1)、表 8 は 20351 から 20551 番目のサンプル (区間 2) そして表 9 は全点に対する結果を示す。

各手法のパターン 2 において除外された点数の数は表 10 に示す。区間 1 は高周波成分を多く含み、除外された点数の割合も 77.5% と非常に多い。ダウンサンプリング基底ベクトルのサンプリング幅 h は対象信号の離散化幅より小さくすることは出来ないため、クラスを正確に特定するためには対象信号の離散化幅を十分小さくする必要があるが、このように高周波成分の多い区間のクラスを特定するためには当初のサンプリング幅 ($x(t_k)$ のサンプリング幅) が大きすぎると考えられる。このため、特定されたクラスが変化する部分

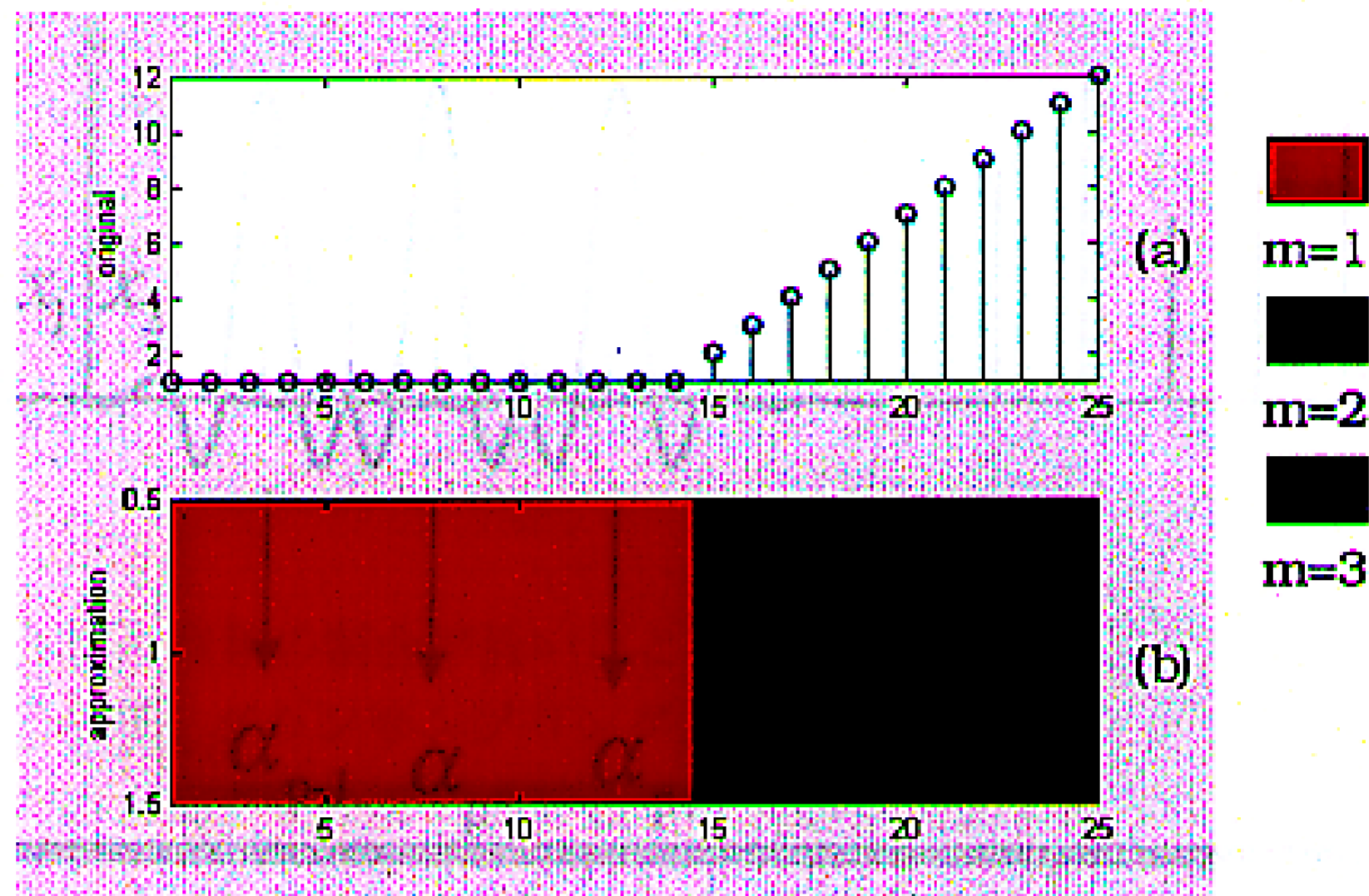


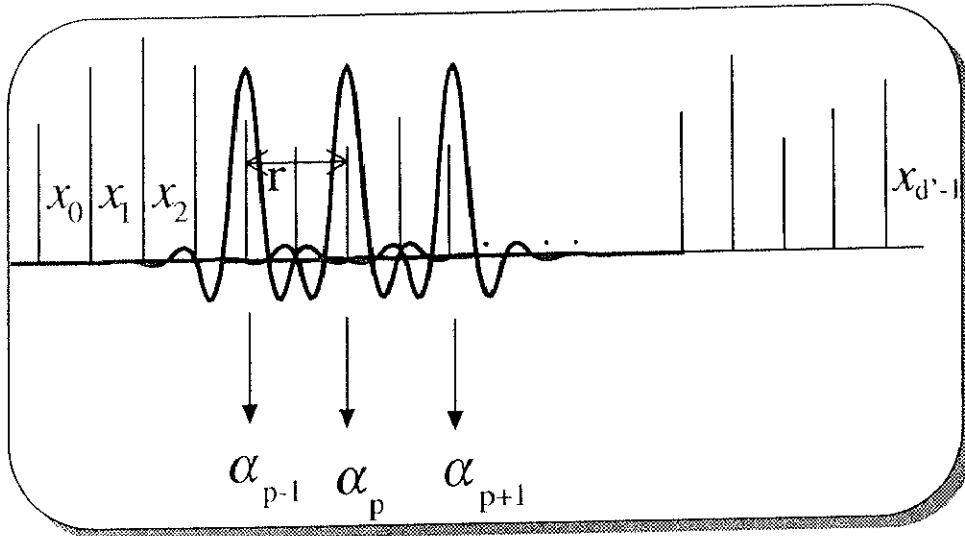
図 23: クラス決定尺度に基づいたクラス特定結果 (3)

	パターン a	パターン b
m=1	49.4	50.1
m=2	89.4	88.7
m=3	109.6	111.9
手法 1	106.9	111.8
手法 2	111.3	112.9

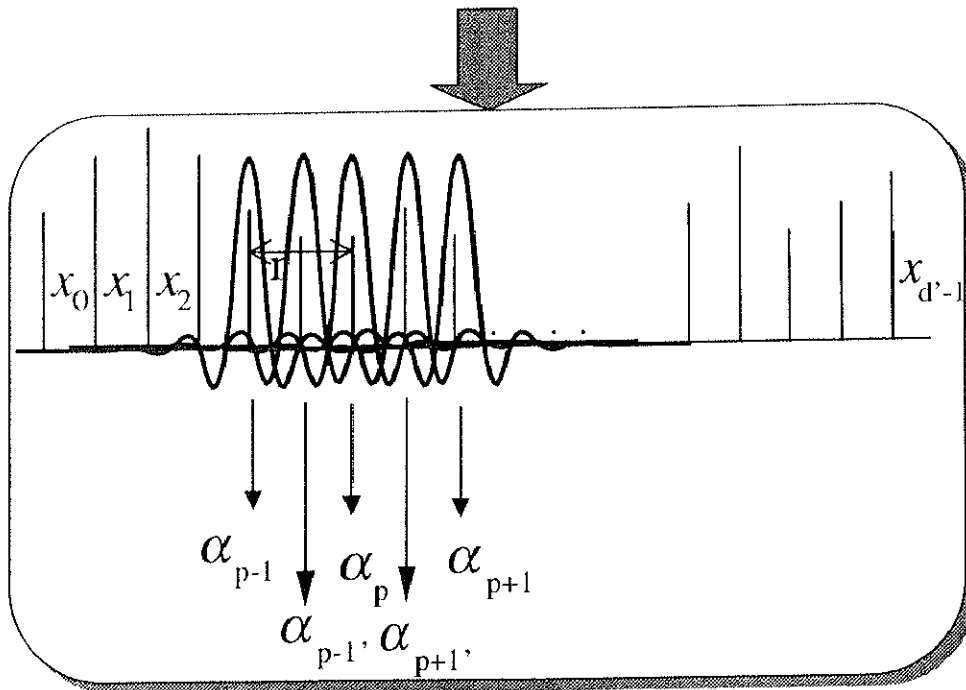
表 9: 特異点候補を取り除いた近似 (SN 比)

区間 1	区間 2	全区間
77.5%	48%	25.23%

表 10: 全体に対する特異点候補の割合



(a) 展開係数の生成



(b) クラス決定尺度の導出法

図 24: クラス特定法の実装方針

に特異点が存在するとは必ずしもいえず、パターン **b** において本手法における SN 比が最適な近似 (手法 2) と比較して、大幅に劣化していると考えられる。

一方区間 2 では、手法 1 におけるパターン **a** の SN 比がクラス $m = 3$ 単一のフルーエンシベクトルで近似結果と比較して低いのに対して、パターン **b** に対する手法 1 の SN 比はほぼ同程度となっており、特異点の多くが抽出されたものと考えられる (表 8 参照)。クラス $m = 3$ のフルーエンシベクトルは特異点を含まない 1S 、および 2S に属する信号を完全に近似できるため、特異点を取り除かれることにより、パターン **b** に対する手法 1 とクラス $m = 3$ のフルーエンシベクトルによる近似が等しくなることは妥当であるといえる。また、この SN 比はパターン **b** に対する手法 2 で得られた SN 比に近づいていくことも納得できる。

全区間で除去された点数の割合が低いことを考慮すると、全区間の傾向としては細かいクラスの変動はなく、ダウンサンプリング基底ベクトルのサンプリング幅 h が十分である区間が多いため、パターン **b** における手法 1 および 2 で得られた SN 比が、クラス $m = 3$ のフルーエンシベクトルによる近似とほぼ同等となったと予測される。

4.5 まとめと考察

フルーエンシ理論では対象信号の属するクラスを特定することで、信号を効率よく記述でき、また変換に要する演算量を削減できる。よって本章では、対象信号のクラスを特定することに大きな意義があると考え、多項式信号空間 mS のいずれか 1 つに属していると仮定した信号 $x(t)$ を時刻 $t_j = jh' : (j = 0, 1, 2, \dots)$ で離散化した $x(t_j)$ から、 $x(t)$ の属する空間を特定する手法を提案した。

その準備として、まず連続形においてクラスを特定を可能とするクラス決定尺度を離散信号に対して定義し、その有効性を検証した。この結果、離散系におけるクラス決定尺度は特異点を含まない信号に対してその有効性が確認された。またクラス $m = 3$ 、 $m = 4$ のフルーエンシベクトルはほとんど近似精度に差異がないことが判明した。離散系におけるクラス決定尺度の有効性を確認した上で、これに基づいたクラスの特定期法を提案した。本手法を微分可能性が既知である信号に適用した結果、クラスに変化のある境界部分が特異点の候補となることが判明した。実データに対しても本手法を適用した。クラス $m = 1$ から 3 のフルーエンシベクトルで近似した結果のうち、最も原波形との誤差が少ない近似結果を選択し、これに対して本手法によって検出された特異点の候補を取り除いたところ、高周波成分を多く含まない信号に対しては、クラス $m = 3$ 単一クラスで近似した結果とほぼ同等の SN 比が得られた。クラス m 以上のフルーエンシベクトルは特異点を

含まない mS に属する信号を完全に近似できる。よって適用したフルーエンシベクトルのうち最も高次クラスの近似結果と同等の SN 比が得られたということは、特異点の抽出に成功していると考えられる。一方離散化幅に対して変化が著しい場合、クラスの特特定が難しく、特異点の位置を抽出することが困難となる。結論としては、離散系においてはサンプリング幅 h は対象信号の離散化幅 h' より小さくすることは出来ないため、 h' を十分小さくすれば、本手法による離散信号の属するクラスの特特定法は有効であるといえる。