

3 区分多項式の双直交展開による離散データ近似

3.1 はじめに

実システムを構築するためにフルーエンシ関数のサポートを有限区間とする必要があることは第2章で述べた。2章では単純にサポートを打ち切ることで関数を有限区間とした場合に生じる近似誤差について検討した。これに対し、本章では関数を単に打ち切るのではなく、A/D関数とD/A関数の間で双直交性が成立するよう有限化かつ離散化されたA/D関数とD/A関数を新たに定義する。

3.2 コンパクトな D/A 関数

本章では，サポートを有限区間とした場合にも A/D 関数と D/A 関数の間で双直交性が成立するよう，離散化された A/D 関数と D/A 関数を新たに定義する．この目的のため，文献 [21] で導出された D/A 関数を利用する．これを C タイプと呼ぶことにし，2 章において定義した関数系を B タイプとして区別する．本節では C タイプのフルーエンシ関数系の概説を行うとともに，C タイプを用いた理由についても述べる．以降特に断りのない限り，フルーエンシ関数系と記した場合は C タイプを意味するものとする．

3.2.1 フルーエンシ関数系-C タイプ

文献 [21] で新しく導出されたクラス m の D/A 関数 ${}^m_c\psi_k(t)$ は信号空間 mS を張る基底であり，次のように $(m-1)$ 次のスプライン関数の線形結合の形で定義されている．

$${}^m_c\psi_0(t) \equiv \sum_{j=-m+1}^{m-1} b_m(j) {}^m\phi\left(t + \left(\frac{m}{2} - \frac{j}{2}\right)h\right). \quad (90)$$

${}^m_c\psi_l(t)$ は B スプライン関数の線形結合で表現されているため，B タイプの D/A 関数と同様，

- シフト不変性：

$${}^m_c\psi_l(t) = {}^m_c\psi_0(t - lh) \quad (91)$$

- lh に対する対称性：

$${}^m_c\psi_l(t) = {}^m_c\psi_l(2lh - t) \quad (92)$$

が成立する．形状も $m=1$ ， $m=2$ においては C タイプと B タイプの D/A 関数は一致し，それぞれ方形波，三角波となっている．異なっている点は，C タイプの D/A 関数のサポートが $3 < m < \infty$ においてコンパクトな点である．

(90) 式における $b_m(j) \{j = -m+1, \dots, m-1\}$ は

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

としたとき、次の関係：

$$\begin{aligned} \sum_{j=-m+1}^{m-1} 2a_m(2k-j)b_m(j) &= \delta(k), \\ \sum_{j=-m+1}^{m-1} a_m(2k-j)b_m(j) &= \frac{1}{2}\delta(k), \end{aligned} \quad (93)$$

$$k = -m+1, \dots, m-1.$$

を満足する係数列として導かれる。ここで $a_m(j)$ は、

$$\Phi_m(z) \equiv \sum_{-m+1}^{m-1} {}^m\phi_0(t)z^k, \quad (94)$$

$$H_m(z) \equiv \left(\frac{1+z^{-1}}{z}\right)^m, \quad (95)$$

と定義したとき、次の (96) 式と (97) 式：

$$A_m(z) = H_m(z)\Phi_m(z), \quad (96)$$

$$A_m(z) \equiv \sum_{-m+1}^{m-1} a_m(j)z^{-j}, \quad (97)$$

が等価になるよう置かれた係数列である。

b_2 , b_3 , そして b_4 に関しては、それぞれ以下のように求められている：

$$\begin{aligned} \{b_2(i)\}_{i=-1}^1 &= \{0, 1, 0\}, \\ \{b_3(i)\}_{i=-2}^2 &= \left\{0, -\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 0\right\}, \\ \{b_4(i)\}_{i=-3}^3 &= \left\{0, \frac{1}{6}, -\frac{8}{6}, \frac{20}{6}, -\frac{8}{6}, \frac{1}{6}, 0\right\}. \end{aligned}$$

高次クラスの ${}^m\psi_0(t)$ ほどサポートが大きくなり、最終的に ${}^\infty\psi_0(t)$ は無限区間サポートを持つ sinc 関数、すなわち：

$$\frac{\sin \pi ft}{\pi ft}$$

となる。この点も B タイプと一致する。 $m=3$ と $m=4$ についての C タイプの D/A 関数をそれぞれ図 7(a) と (b) に示す。

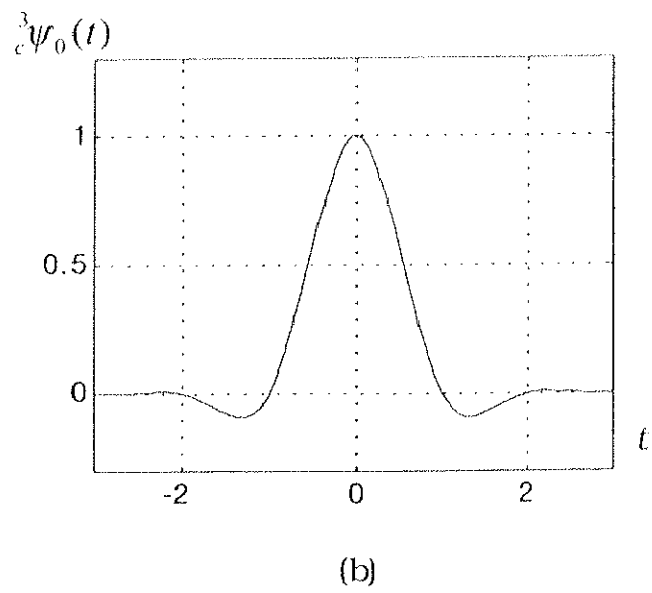
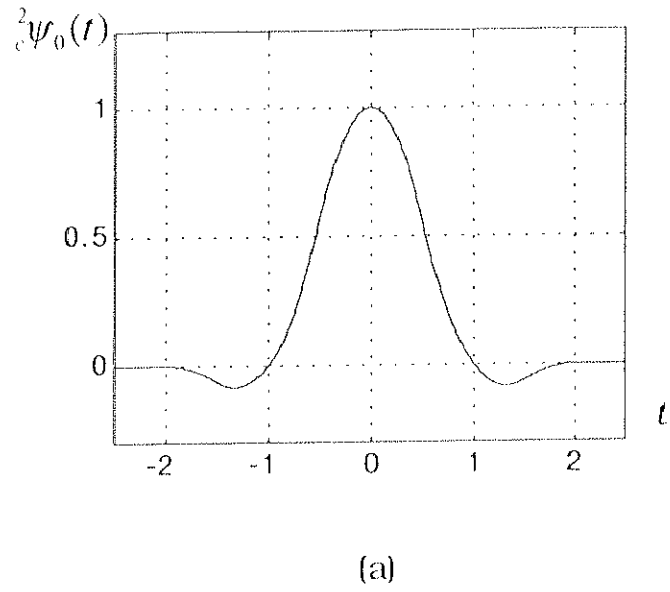


図 7: $h = 1$ とした場合の D/A 関数の特性. (a) $m = 3$. (b) $m = 4$.

3.2.2 Cタイプフルーエンシ関数系を用いる理由

計算機のメモリ資源は有限であるため、実装するフルーエンシ関数系を選択する必要がある。本研究では、信号を効率よく記述できるとして低次クラスのフルーエンシ関数に特に注目している。

空間 mS に属する微分可能な信号は、クラス m かそれ以上のフルーエンシ関数で記述することが可能であるが、高次になるほど滑らかさの差異が減少する。よって、滑らかさを表現するにあたっては $m = 3$ および 4 程度のフルーエンシ関数を用いれば十分可能であり、これと $m = 1$ と 2 のフルーエンシ関数を合わせて用いることで微分不可能な信号、尖った信号、滑らかな信号を幅広く表現できると考えられる。一方、CタイプのD/A関数に関しては低次クラスほどそのサポート幅がコンパクトであるため、近似に必要な演算量、メモリ量等のコストも同時に押さえることが可能であり、実装上非常に優れた性質を持ちあわせている。以上の理由から以降ではこのCタイプフルーエンシ関数系を用いる。

コンパクトであるというCタイプフルーエンシD/A関数の特性を活かした応用例として、不均等補間が考えられる。離散信号を補間する場合、データ点は通常何らかの標本化関数（従来では sinc 関数が多く利用されている）と畳み込まれる。標本化関数は離散化幅の間隔で時間軸と交差するという特性を持つため、データ点を標本化関数と畳み込むことで、データ点を補間できる。しかし不均等な間隔で離散化された信号の場合、標本化関数が時間軸と交差する点を標本点にあわせて伸長し、それをデータ点と畳み込むだけでは滑らかな補間を行うことはできない。これはデータ点の時間情報が反映されないためである。すなわち、補間する点に対して時間的に離れたデータ点は近くに位置するデータ点よりも影響が小さいことを考慮する必要がある。よって、不均等間隔で離散化されたデータ点に対してそれらが均等な間隔で並び替えられた場合の値を予測し、これを擬似的なデータ点（これを擬似サンプル点と呼ぶ）として補間を行うことが考えられる。このときサポート幅が大きい標本化関数に対しては求める擬似サンプル点も多くなるため、コンパクトなサポートを持つCタイプフルーエンシD/A関数が適している。

3.3 離散データ近似とダウンサンプリング・アップサンプリング基底行列

\mathbf{x} を $t_j = jh' : (j = 0, 1, \dots, d-1)$ で離散化されている d 次の離散周期信号

$$\mathbf{x} = (x(t_0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_{d-1}))^T, x(t_d) = x(t_0) \quad (98)$$

であるとしたとき、これを n 個の離散化されたD/A基底 ${}^m\hat{\psi}_k, (k = 0, 1, \dots, (n-1))$ で近似することを考える。即ち $r = d/n$ としたときに、 \mathbf{x} を $h = h' \cdot r$ の間隔でサンプリング

する ${}^m\hat{\psi}_0$ は h' の間隔で離散的に生成された d 次の D/A 関数：

$${}^m\hat{\psi}_0 = \begin{bmatrix} {}^m\psi_0(t_0) \\ {}^m\psi_0(t_1) \\ {}^m\psi_0(t_2) \\ \vdots \\ {}^m\psi_0(t_{d-1}) \end{bmatrix} \quad (99)$$

となる。また、 \mathbf{x} は周期信号であるので、 ${}^m\hat{\psi}_k$ はつぎのように rk だけ巡回させた次数 d の列ベクトルとなる。

$${}^m\hat{\psi}_k = \Omega^{rk} {}^m\hat{\psi}_0 \quad (100)$$

ここで Ω とは、

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{d \times d} \quad (101)$$

である。

${}^m\hat{\psi}_k$ が列ベクトルを構成する行列 ${}^m\hat{\Psi}$ を

$${}^m\hat{\Psi} = \left[{}^m\hat{\psi}_0 \mid {}^m\hat{\psi}_1 \mid {}^m\hat{\psi}_2 \mid \cdots \mid {}^m\hat{\psi}_{n-1} \right], \quad (102)$$

と定義すると、 \mathbf{x} を近似することは次の誤差関数：

$$\left(\mathbf{x} - {}^m\hat{\Psi}\boldsymbol{\alpha} \right)^T \left(\mathbf{x} - {}^m\hat{\Psi}\boldsymbol{\alpha} \right) \quad (103)$$

を最小化する展開係数

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})^T$$

を求める問題となる。

行列 ${}^m\hat{\Psi}$ とその働きを図 8 に示す。図において、ベクトル \mathbf{s} は ${}^m\hat{\Psi}$ による \mathbf{x} の最小二乗近似である。 ${}^m\hat{\Psi}$ は n 次の展開係数列を $r (= d/n)$ 倍に展開するため、クラス m のアップサンプリング基底行列、そして ${}^m\hat{\Psi}$ の列を構成する離散化された D/A 関数 ${}^m\hat{\psi}_k$ をアップサンプリング基底ベクトルと呼ぶことにする。また ${}^m\hat{\psi}_k$ がアップサンプルする割合 r は近似レートと呼ぶ。これに対して近似レート r のダウンサンプリング基底行列 ${}^m\hat{\Psi}_*$ とは (103) を最小にする展開基底 $\boldsymbol{\alpha}$ を生成するものである。 ${}^m\hat{\Psi}_*$ を用いて誤差関数 (103) を書き直すと、

$$\|\mathbf{x} - {}^m\hat{\Psi}_* \boldsymbol{\alpha}\|. \quad (104)$$

となり, これは

$$\|\mathbf{x} - {}^m\hat{\Psi}_*^m \hat{\Psi} \mathbf{x}\| \leq \|I - {}^m\hat{\Psi}_*^m \hat{\Psi}\|_F \|\mathbf{x}\|,$$

という関係を満たす. $\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルムを意味する [22]. \mathbf{x} が任意に選ばれた正規化されたベクトルであれば, 最適なダウンサンプリング基底行列は次の式を最小にするものとなる.

$$\|I - {}^m\hat{\Psi}_*^m \hat{\Psi}\|_F. \quad (105)$$

${}^m\hat{\Psi}_*$ は ${}^m\hat{\Psi}$ の疑似逆行列 [22]:

$${}^m\hat{\Psi}_* = {}^m\hat{\Psi}^{-1} = ({}^m\Psi^T {}^m\Psi)^{-1} {}^m\Psi^T. \quad (106)$$

を解くことで容易に求められる. 第一行を ${}^m\hat{\psi}_0^T$ とすると, 他のすべての行ベクトルは ${}^m\hat{\psi}_0$ を巡回させた形式:

$${}^m\hat{\psi}_k = \Omega^{rk} {}^m\hat{\psi}_0. \quad (107)$$

で表わすことができる. よって ${}^m\Psi$ は:

$${}^m\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} {}^m\hat{\psi}_0^T \\ \hline {}^m\hat{\psi}_1^T \\ \hline {}^m\hat{\psi}_2^T \\ \hline \vdots \\ \hline {}^m\hat{\psi}_{n-1}^T \end{bmatrix}$$

となる. ダウンサンプリング基底行列 ${}^m\hat{\Psi}$ とその働きを図 9 に図示する. 行列 ${}^m\hat{\Psi}$ は次数 d の信号から次数 n の展開係数を生成する様子を示している.

実際に疑似逆行列を求めた結果得られた $m=2$, $m=3$ のダウンサンプリング基底ベクトルの特性を図 10(a) および (b) に示す. ここで $h=1$ とした. 対象信号の次数 d と基底ベクトルの数 n によってダウンサンプリング基底ベクトルの形状が少しずつ変化している様子が示されている. n と d を十分大きくすると, ダウンサンプリング基底ベクトルの特性は収束する.

3.4 実験

本節では, 3.3 節において定義したダウンサンプリング・アップサンプリング基底ベクトル (以降これらを一対でフルーエンシベクトルと呼ぶ) を用いて実データを近似するための手法について述べ, これを適用した近似結果について考察する.

3.4.1 実装方式

近似対象データの大きさに応じてフルーエンシベクトルを導出するのは効率が悪いいため、本実験では近似対象データの次数 d' に対して、次数 $d (\leq d')$ の信号をレート r で近似することを仮定する。例えば、 $d = 512$, $r = 4$ と仮定したとき、アップサンプリング基底行列を $d/r = 128$ のアップサンプリング基底ベクトルから構成し、これの疑似逆行列を求めることでダウンサンプリング基底行列を求める。

このようにして求められたダウンサンプリング基底行列とアップサンプリング基底行列をそのまま d 次のブロック毎に対象信号に適用し近似することも考えられるが、本実験ではブロックノイズを防ぐため、ダウンサンプリング基底行列から最も対称性の高いダウンサンプリング基底ベクトル $\hat{\psi}_{(n/2)}$ を1つ選択し、これを r ずつシフトしながら展開係数を得る (図 11 参照)。

このようにして得られた展開係数は、その各要素間に $r - 1$ 個のゼロを埋め込み、 r ずつずらしながらアップサンプリング基底ベクトルとの畳み込みを行うことで展開される。前処理としては、対象信号の直流成分が 0 となるように、ゼロ平均をとった。

3.4.2 実験

3.4.1節で述べた方式に基づいて2つのCDオーディオデータ (44.1kHz, 16ビット, モノラル, 441000 サンプル (10 秒分)) :

1. Donald Fagen. Trans-island Skyway.
2. J.S.Bach. チェロ・ソナタ第3番ト長調. Mischa Maisky・Martha Argerich 演奏

を近似した。曲 (1) は高周波を多く含む信号、そして曲 (2) は滑らかな成分を多く含む信号の代表として選曲した。実験に使用したフルーエンシベクトルのパラメータは次に示す通りである。

- クラス : $m = 1, 2, 3, \infty$
- 次数 : $d = 512$, ($m = \infty$ のみ $d = 512$ および 24000)
- 近似レート : $r = 2, 4$

- 精度:倍精度

本研究ではフルーエンシ関数系の中でも特に低次クラスに注目していることは前述した。そこで低次クラスの有効性を検証するため、高次クラスの代表として従来のレート変換法において理想ローパスフィルタとして応用されているクラス $m = \infty$ のフルーエンシベクトルに関しても実験を行い比較した。従来法との比較という意味も兼ね、クラス $m = \infty$ に関しては通常行われているダウンサンプル/ アップサンプル操作を適用した。その方法は次の通りである。まず、無限区間サポートを持つ理想ローパスフィルタ（クラス $m = \infty$ のフルーエンシ A/D 関数と D/A 関数）をガウス窓を適用して有限化する。次にエイリアシングが生じないようにこの有限化されたローパスフィルタを対象信号に適用した後 $1/r$ に間引く。最後に間引いた結果と有限化されたローパスフィルタとを畳み込むことで r 倍にアップサンプリングする（図 12 参照）。

近似結果を表 2 に示す。表は対象信号に対する SN 比：

$$SN \text{ 比} = -20 \log_{10} \sum \frac{(\text{対象信号} - \text{近似信号})^2}{(\text{対象信号})^2} [dB]$$

を示している。

従来法 ($m = \infty$) は必ずしもよい近似を与えていない。 $m = \infty$ のフルーエンシ関数が無限区間サポートを持つため、特に $d=512$ のとき近似結果に与える影響が大きく、低次クラスと同等の近似精度を得るにはフルーエンシ関数の次数は少なくとも 10^4 のオーダー程度必要であることが確認できる。全体的な傾向として、曲 (1) における近似精度は各クラスのフルーエンシベクトルともあまり差が見られないが、曲 (2) では $m = \infty$ を除いて、高次クラスほど SN 比が高くなっている。これは曲 (1) は高周波成分を多く含むためであると考えられる。しかし、信号の性質は時間とともに変化していることを考慮した場合、クラス $m = 3$ のフルーエンシベクトルが全区間において最適な近似を与えるとは断定できない。そこで、局所的な性質の差異が明確である曲 (2) を小区間に分割し、同様の実験を再度行った。表 3 および 4 は、曲 (2) を 151 から 350 番目の 200 サンプル（区間 1）と 20351 から 20550 番目の 200 サンプル（区間 2）に対して、それぞれ $r=2$ と $r=4$ で近似した結果を示したものである。

近似レート 2 および 4 において、区間 1 ではクラス $m = 1$ がよい近似を与えているのに対して、区間 2 ではクラス $m = 3$ がよい近似を与えている。したがって、対象信号を最適に近似するフルーエンシベクトルは時間とともに変化していることが把握できる。

区間 1 と 2 に対する近似レート 2、クラス $m = 1, 2, 3$ のフルーエンシ関数による近似結果の詳細を図 13 と 14 に示す。図 13 および 14 では (b) が原波形、そして (b) をそれぞれ

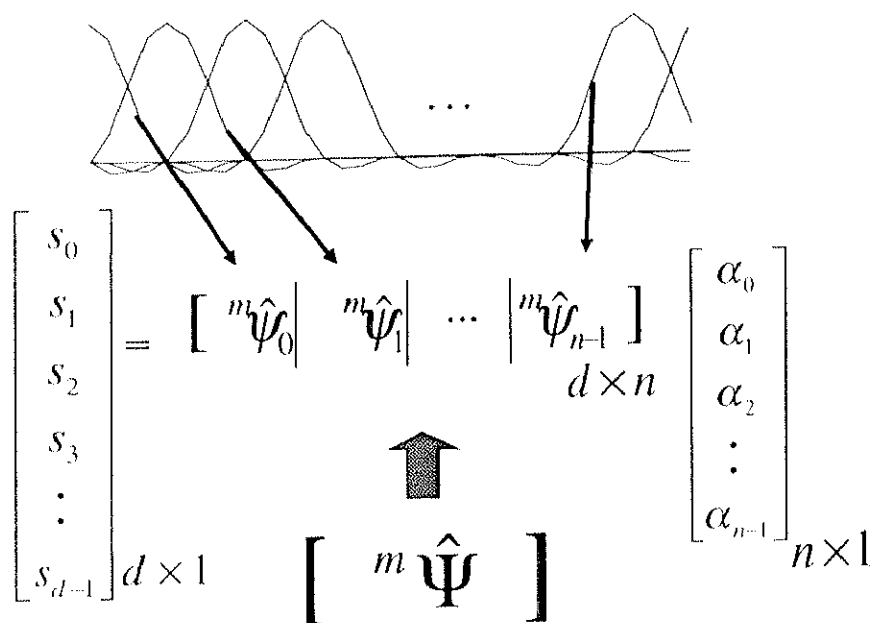


図 8: アップサンプリング基底行列 ${}^m\hat{\Psi}$

クラス	r=2		r=4	
	Fagen	Bach	Fagen	Bach
m=1	40.2	49.4	32.5	35.6
m=2	42.5	89.4	34.5	68.6
m=3	42.9	109.6	34.6	77.3
m=∞	34.6	62.5	20.5	62.0
m=∞ (d=24000)	43.1	81.8	34.79	77.9

表 2: 近似結果の SN 比 [dB]. (d=512)

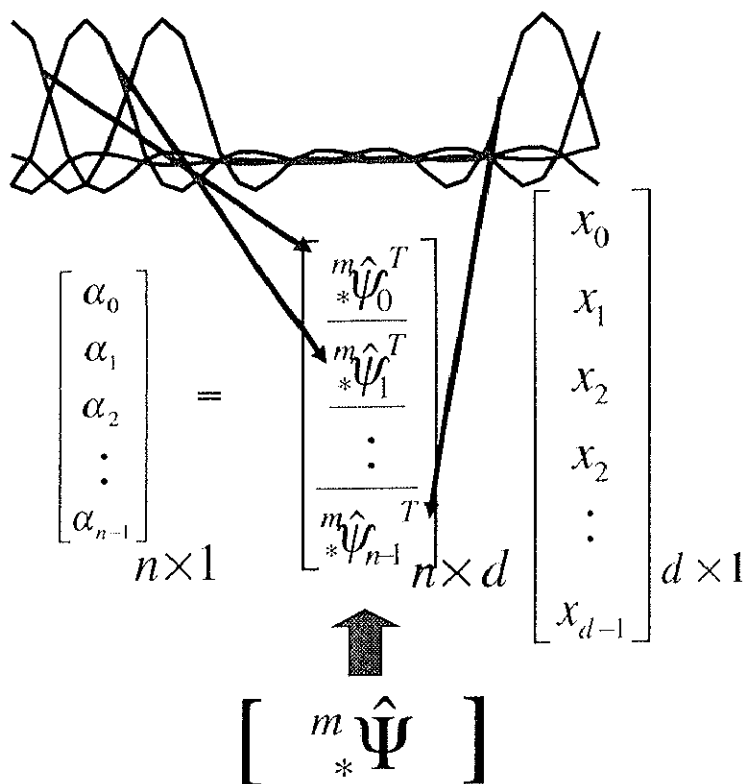


図 9: ダウンサンプリング基底行列 $m\hat{\psi}$

クラス	SN 比 [dB]		
	区間 1	区間 2	全区間
m=1	87.6	60.3	49.4
m=2	87.1	100.2	89.4
m=3	87.1	115.4	109.6
m=∞	7.5	55.1	62.5
m=∞ (d=24000)	17.4	52.9	81.8

表 3: Bach における近似結果の SN 比 [dB]. $(r, d)=(2, 512)$

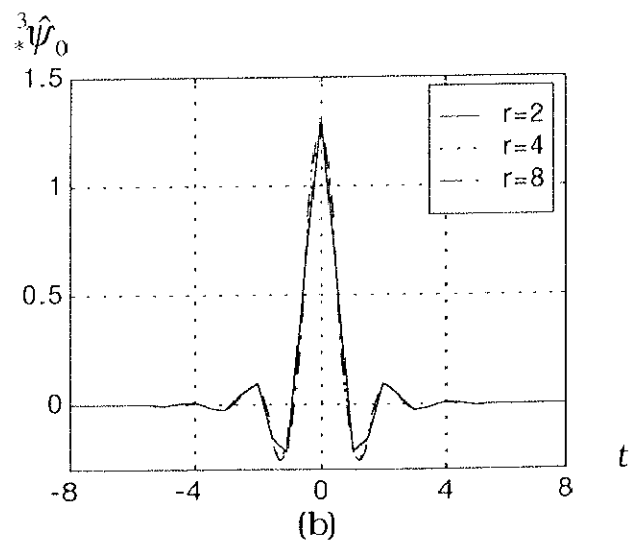
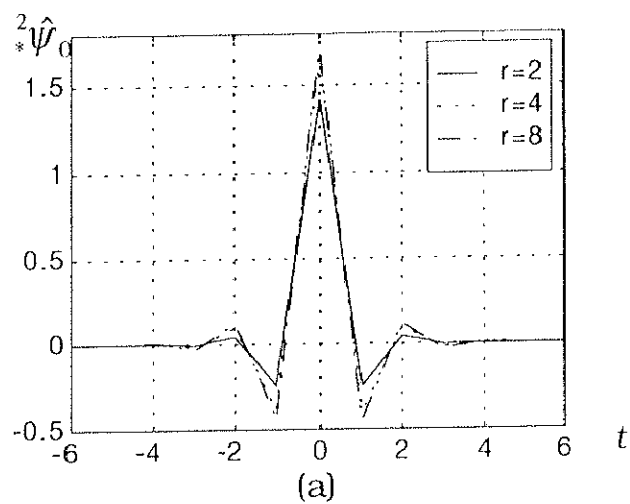


図 10: $h = 1$ とした場合のダウンサンプリング基底ベクトルの特性. (a) $m = 2$. (b) $m = 3$.

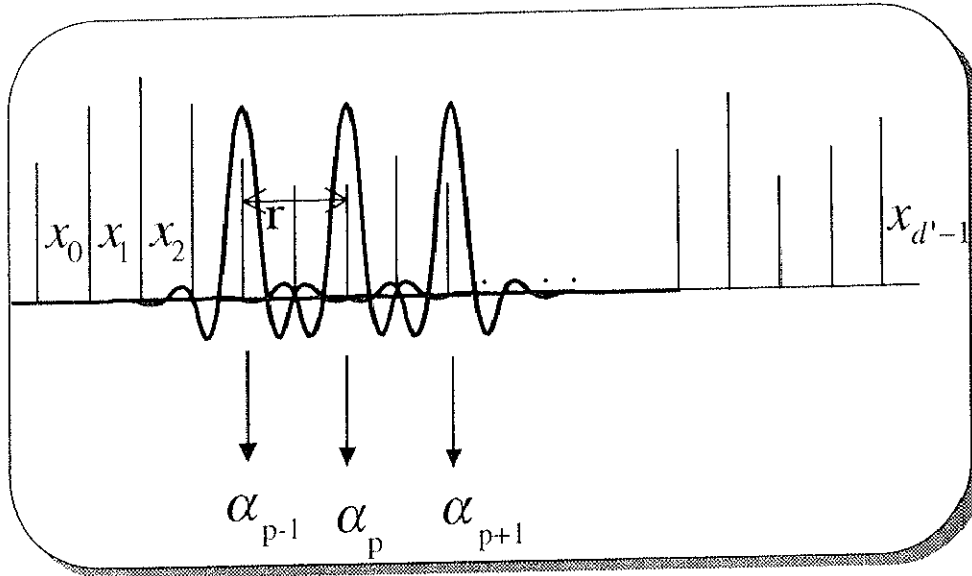


図 11: ダウンサンプリング基底ベクトルによる対象信号のダウンサンプリング. ダウンサンプリング基底ベクトルを r ずつシフトしながら対象信号との内積を求める.

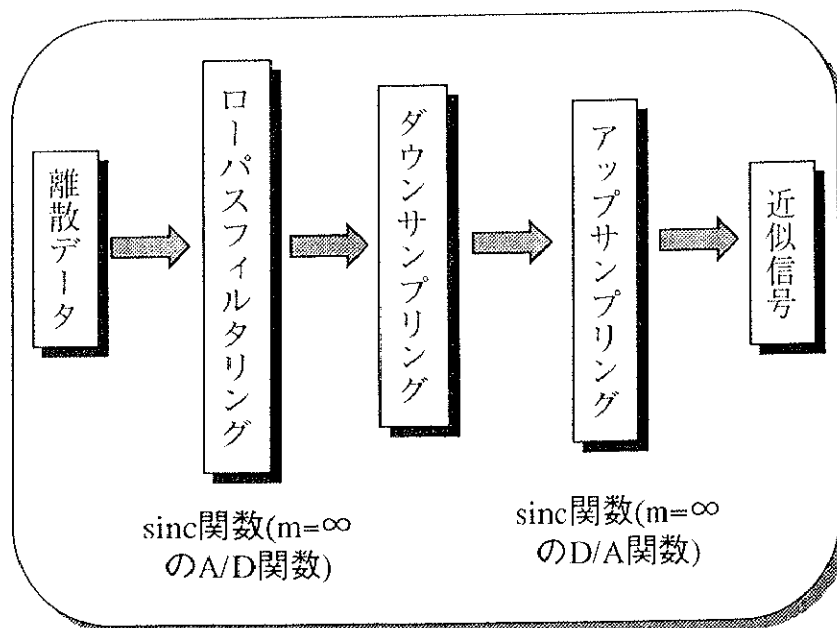


図 12: 通常のレート変換法

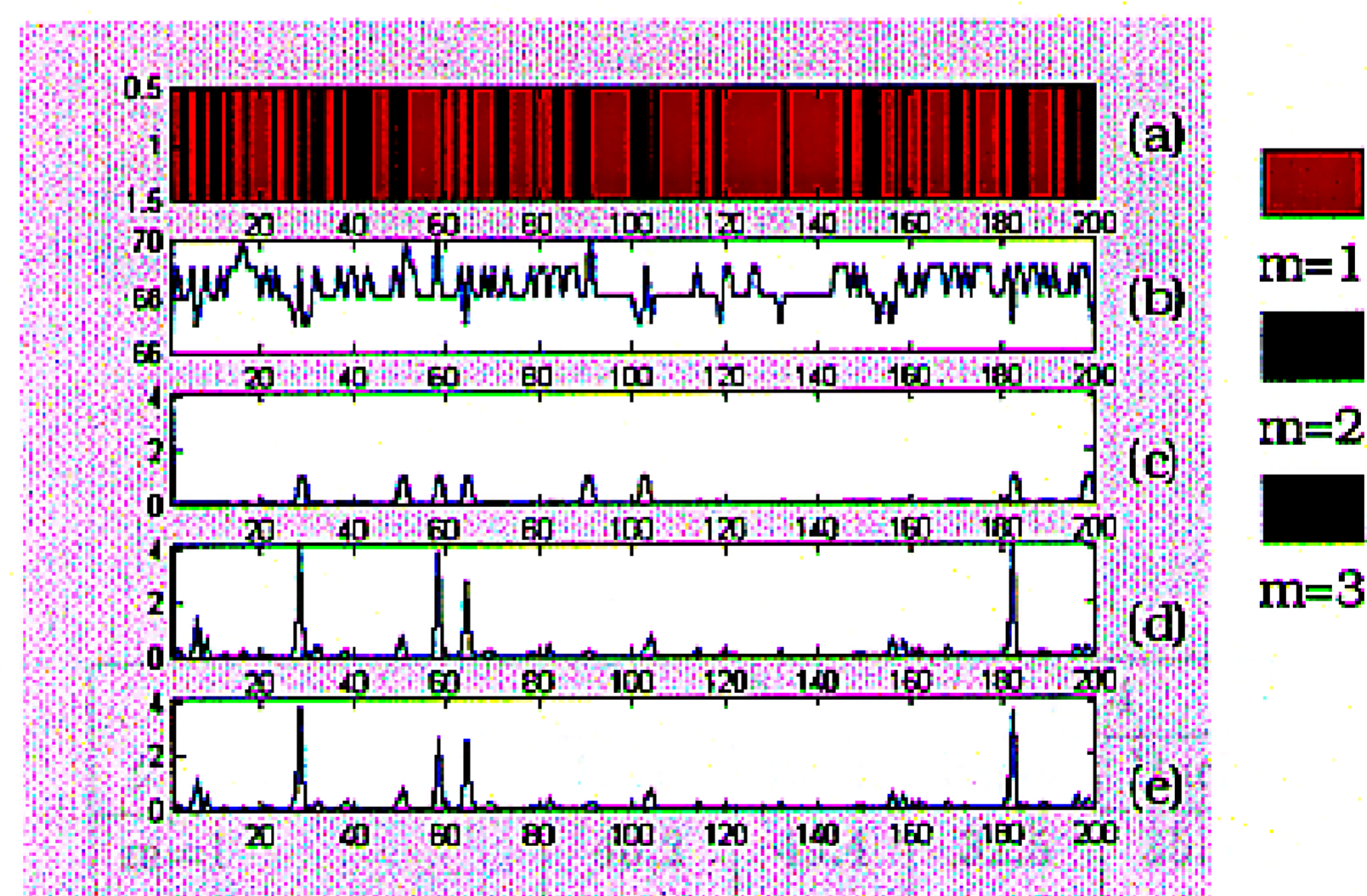
クラス $m = 1, 2, 3$ のフルーエンシベクトルで近似した二乗誤差をデータ点毎に求めたものが (c), (d), そして (e) である. このうち最も小さい誤差を与えたクラスを (a) に示す.

区間 1 および 2 ともに, 最適なフルーエンシベクトルのクラスは時間とともに変化していることが読み取れる. また, 区間 1, そして区間 2 において最適なフルーエンシベクトルがそれぞれクラス $m = 1$, クラス $m = 3$ である率が多い. 表 3 において, 区間 1 ではクラス $m = 1$ がよい近似を与えているのに対して, 区間 2 ではクラス $m = 3$ がよい近似を与えているはこのためである. これらの結果から, 信号の性質の変化に応じて最適なフルーエンシベクトルを用いることで, $m = \infty$ 単一クラスで近似する従来法よりも近似精度を向上できることが理解できる. 実際各クラスのフルーエンシベクトルによって得られた近似値の内, 最も誤差の小さなものを選択した場合 (最適近似) の SN 比を表 5 に示す. 比較のため, 各単一クラスで近似した結果も記載する.

3.5 まとめと考察

本章ではフルーエンシ理論を用いた実用的なデータ点の近似法について述べた. 双直交性が保持されるよう, 離散化された D/A 関数と離散化された A/D 関数を定義した. この新たに定義した有限かつ離散化されたフルーエンシ関数であるフルーエンシベクトルを実データに適用した結果, 最適な近似を与えるフルーエンシベクトル (最適なフルーエンシベクトル) が変化していることが明らかとなった. これは, フルーエンシベクトルには信号の局所的な性質の変化を捕らえる能力があることを示しており, 信号の変化に応じて最もよい近似を与えるフルーエンシベクトルを選択することで, $m = \infty$ 単一クラスで近似を行う従来法よりも近似精度を向上できることを意味している.

クラス	SN 比 [dB]		
	区間 1	区間 2	全区間
$m=1$	82.3	46.5	35.6
$m=2$	81.9	79.2	68.6
$m=3$	81.8	85.9	77.3
$m=\infty$	7.5	55.0	62.0
$m=\infty (d=24000)$	17.5	53.0	77.9

表 4: Bach における近似結果の SN 比 [dB]. $(r, d)=(4, 512)$ 図 13: Bach (区間 1) における原波形と近似結果の二乗誤差. (a) 最適なフルオーダー関数クラス. (b) 原波形. (c) $(m, r)=(1, 2)$. (d) $(m, r)=(2, 2)$. (e) $(m, r)=(3, 2)$.

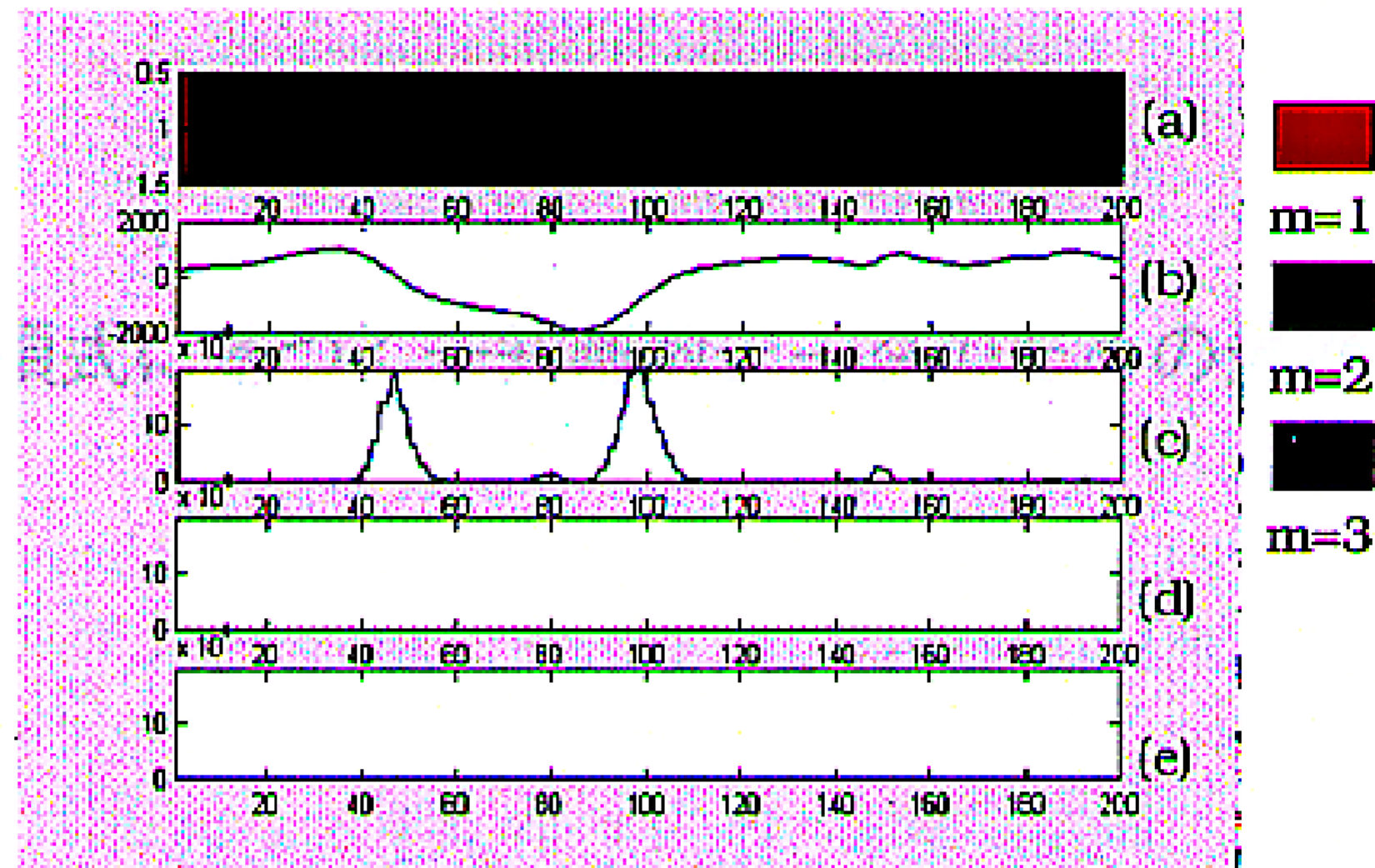


図 14: Bach (区間 2) における原波形と近似結果の二乗誤差. (a) 最適なフルーエンシ関数クラス. (b) 原波形. (c) $(m,r)=(1,2)$. (d) $(m,r)=(2,2)$. (e) $(m,r)=(3,2)$.

クラス	r=2		r=4	
	Fagen	Bach	Fagen	Bach
m=1	40.2	49.4	32.5	35.6
m=2	42.5	89.4	34.5	68.6
m=3	42.9	109.6	34.6	77.3
m= ∞ (d=24000)	43.1	81.8	34.7	77.9
最適近似	50.4	120.5	39.1	90.9

表 5: 各クラスにおける近似結果の SN 比と最適な近似結果の SN 比 [dB]