

2 区分多項式の双直交展開による近似誤差

2.1 はじめに

フルーエンシ関数系はサポートが無限区間で定義されているものも存在することから、計算機上へ実装するためにはそのサポートを有限区間とする必要が生じる。しかし、サポートを単純に打ち切った場合、A/D 関数、D/A 関数の双直交性は保たれなくなり、近似誤差が生じる。従来用いられている理想ローパスフィルタ等と比較して収束速度が速いため、同じサポート幅に対する低次フルーエンシ関数クラスの近似誤差は小さいが、その誤差についての理論的検証はなされていない。よって本章では、A/D 関数の上界をまず導出し、これと文献 [18] で導出された D/A 関数の上界から、サポートの打ち切りにより生じる近似誤差の上界をサポート幅の関数として導出する。この関係式から、許容誤差に応じた打ち切り幅の選択が可能となるため、実システムを構築するにあたって非常に有用であると考えられる。

2.2 準備

本節では改めて $L_2(\mathbf{R})$ に対する信号空間 ${}^m S$ の位置づけ, そして $L_2(\mathbf{R})$ に属す信号と ${}^m S$ に属す信号の関係を述べる.

2.2.1 信号空間 ${}^m S$

フルーエンシ理論では信号はその連続微分可能性によりクラス分けされる. ${}^m S \subset L_2(\mathbf{R})$ を $m-1$ 次: ($m=1, 2, \dots$) の B スプライン基底, $\{\phi_l(t)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ により張られる信号空間だとする. ここで B スプライン関数 $\phi_l(t)$ は次のように定義される:

$${}^m \phi_l(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi f h}{\pi f h} \right)^m e^{j2\pi f(t-lh)} df. \quad (8)$$

$\{\phi_l(t)\}_{l=-\infty}^{\infty}$ の性質として次の 3 つが挙げられる.

- $\phi_l(t)$ のサポートはローカルである.

$$t \notin ((l-m/2)h, (l+m/2)h) \text{ に対して,} \\ \phi_l(t) = 0 \quad (9)$$

- $\phi_l(t)$ はシフト不変である.

$$\phi_l(t) = \phi_0(t-lh) \quad (10)$$

- $\phi_l(t)$ は lh に対して対称である.

$$\phi_l(t) = \phi_l(2lh-t) \quad (11)$$

$l=0$ とすると, (11) 式は,

$$\phi_0(t) = \phi_0(-t) \quad (12)$$

となるので, $\phi_0(t)$ は偶関数となる.

$m \geq 2$ のとき, ${}^m S$ は $(m-2)$ 階微分可能な B スプライン信号空間となる. また $m=1$, そして $m=\infty$ の場合, ${}^m S$ はそれぞれウォルシュ信号空間, およびフーリエ信号空間となる.

2.2.2 A/D 関数と D/A 関数

s を ${}^m S$ に属するアナログ信号とし、これを時刻 $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}, (t_k = kh)$ で離散化したとすると、 ${}^m S$ の標本化基底は

$$\forall s \in {}^m S, s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t_k) {}^m \psi_k(t), \quad (13)$$

を満たす $\{{}^m \psi_k(t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ によって与えられる。また、展開係数 $s(t_k)$ は標本化基底とは双直交な関係にある基底 $\{*_m \psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ によって与えられる:

$$s(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{*_m \psi_k(t)} dt. \quad (14)$$

(13) 及び (14) 式による信号の展開を ${}^m S$ における双直交展開とよぶ。

${}^m S$ に対するこれらの基底はすでに次のように求められている。

$${}^m \psi_k(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^m \beta_{|l-k|} {}^m \phi_0(t - lh), \quad (15)$$

$$*_m \psi_k(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^m g_{|l-k|} {}^m \psi_0(t - lh), \quad (16)$$

ここで、

$${}^m \beta_p = h \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} {}^m_f B(f) e^{j2\pi f p h} df, \quad (17)$$

$${}^m_f B(f) = \frac{1}{\sum_{q=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} {}^m \phi_0(qh) e^{-j2\pi f q h}}, \quad (18)$$

$${}^m g_p = h \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} \frac{1}{*_m_f G(f)} e^{j2\pi f p h} df, \quad (19)$$

$$*_m_f G(f)^{-1} = \frac{h}{\sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi(fh+q)}{\pi(fh+q)} \right)^{2m} {}^m_f B(f+q/h)^2} \quad (20)$$

である。

${}^m_f B(f)$ と $*_m_f G(f)^{-1}$ はそれぞれ $\{{}^m \beta_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$ と $\{*_m g_p\}_{p=-\infty}^{\infty}$ のフーリエ変換である。以後、 ${}^m \psi_k(t)$ と $\{{}^m \psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ をそれぞれ、D/A 関数、D/A 基底、そして $*_m \psi_k(t)$ と $\{*_m \psi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ をそれぞれ、A/D 関数、A/D 基底と呼ぶ。

クラス $m = 1$, および 2 の $*_m \psi_0(t)$ と ${}^m \psi_0(t)$ を図 4 に、そしてクラス $m = 3$, および ∞ の $*_m \psi_0(t)$ と ${}^m \psi_0(t)$ を図 5 にそれぞれ示す。

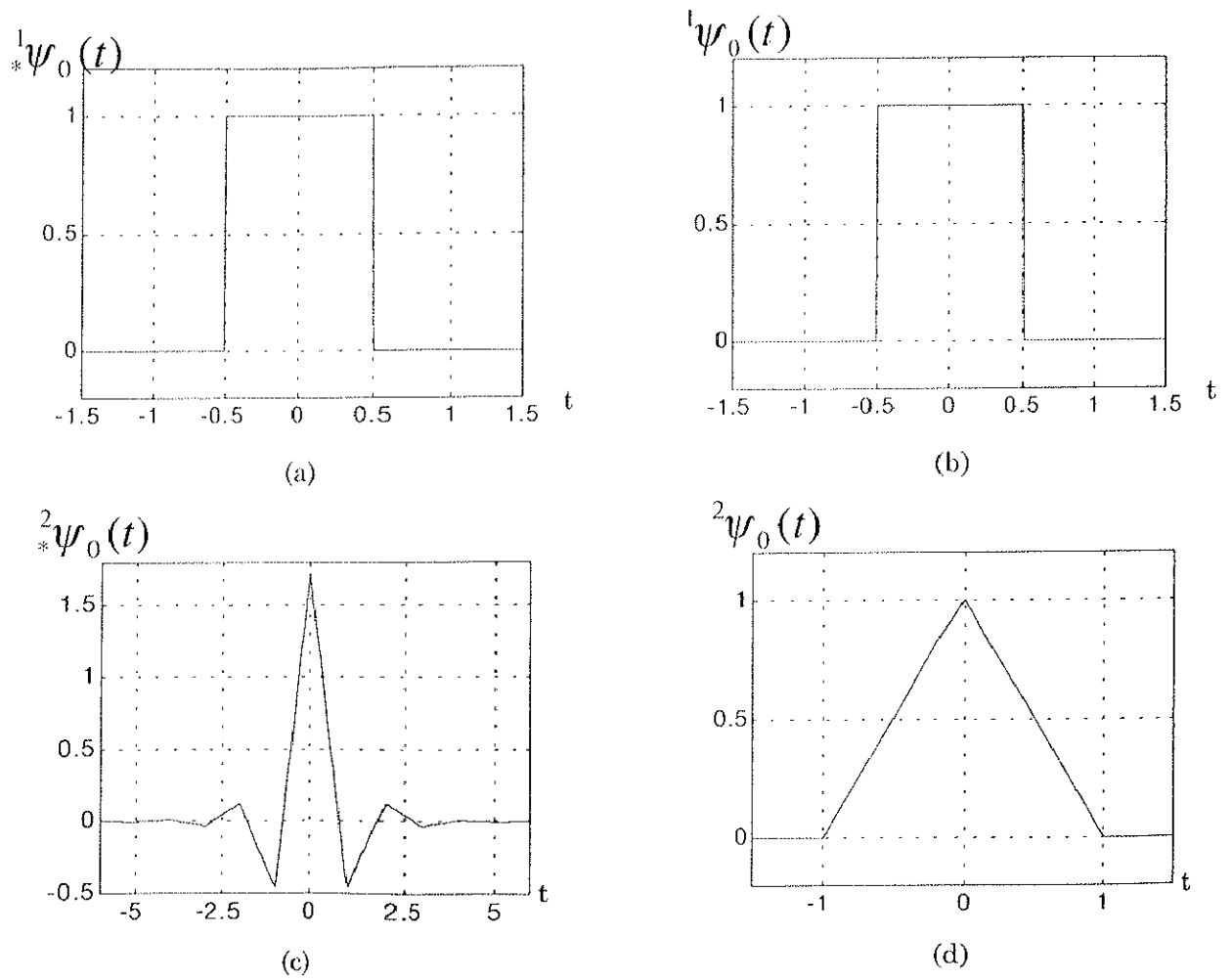


図 4: A/D 関数と D/A 関数の特性 (1) (a) $m = 1$ の A/D 関数 (b) $m = 1$ の D/A 関数
 (c) $m = 2$ の A/D 関数 (d) $m = 2$ の D/A 関数

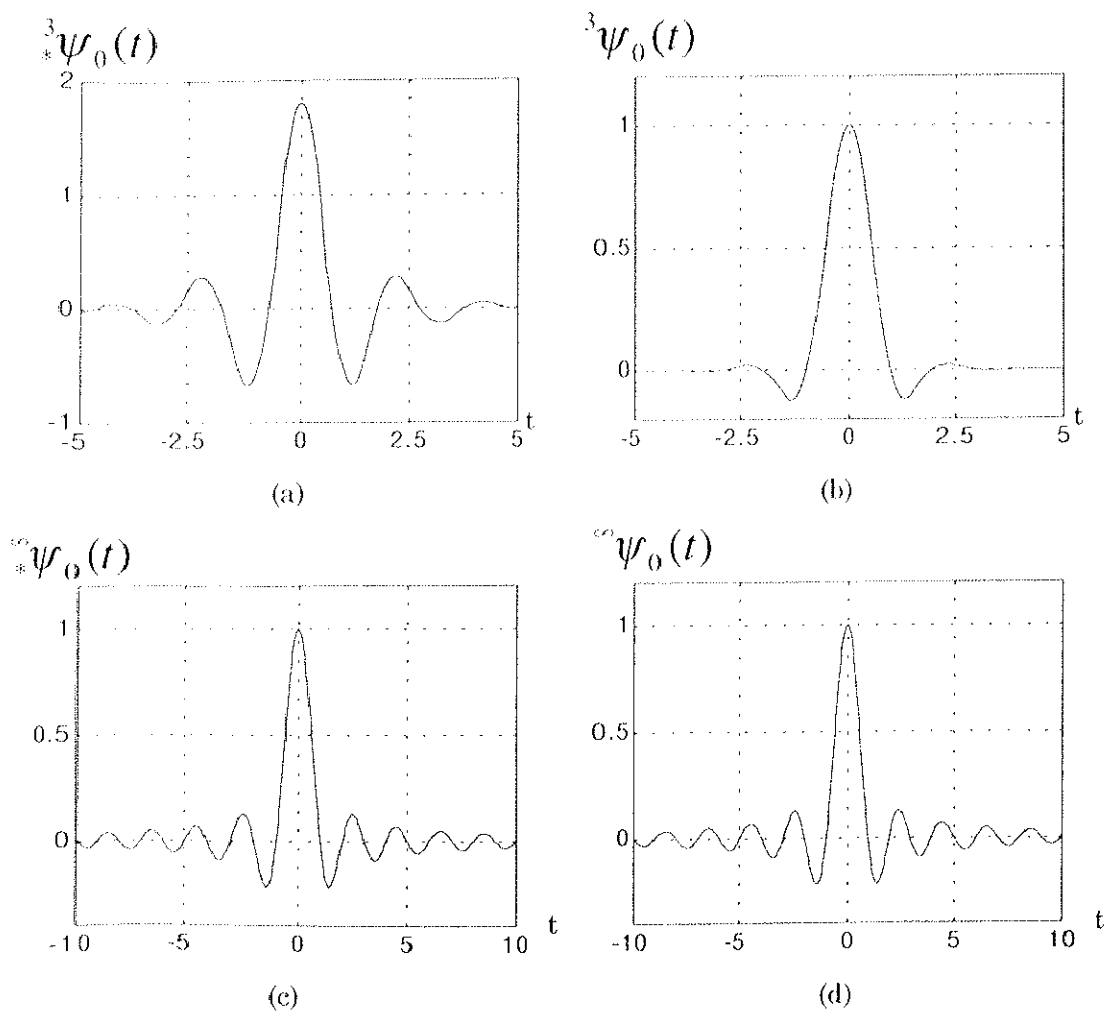


図 5: A/D 関数と D/A 関数の特性 (2) (a) $m = 3$ の A/D 関数 (b) $m = 3$ の D/A 関数
 (c) $m = \infty$ の A/D 関数 (d) $m = \infty$ の D/A 関数

2.3 サポートの打ち切りによる近似誤差

信号空間 $L_2(\mathbf{R})$ は ${}^m S$ とその直交空間である ${}^m S^\perp$ の直和から構成されているので、任意の $x \in L_2(\mathbf{R})$ は $s_o \in {}^m S$ と $s_c \in {}^m S^\perp$ の和：

$$x(t) = s_o(t) + s_c(t) \quad (21)$$

で表わすことができ、 s_o は x の ${}^m S$ への最小二乗近似となる。実信号は通常有限時間で観測されるので、 x も

$$x(t) = 0, t < 0 \text{ or } t > T \triangleq (N-1)h, \quad (22)$$

とし、有限時間 $[0, T]$ で定義する。ここで N は正の整数である。以後、(22) 式で定義した x を近似することを考える。

x に A/D 関数を作用させ、その結果を v_k とする：

$$\begin{aligned} v_k &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m \psi_k(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m \psi_0(t - kh)} dt \\ & \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

(21) 式を (23) 式の x に代入し、さらに次の関係

$$(s_c, {}^m \psi_k)_{L_2} = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24)$$

を用いると、

$$v_k = s_o(t_k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (25)$$

が導かれる。

(25) 式は $x \in L_2(\mathbf{R})$ の最小二乗近似 $s_o \in {}^m S$ は

$$\begin{aligned} s_o(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k {}^m \psi_k(t), \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k {}^m \psi_k(t), \end{aligned} \quad (26)$$

によって表わせることを意味している。 $s_o \in {}^m S$ に対する $v_k : (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ から構成されるすべてのベクトル \mathbf{v} はヒルベルト空間の部分空間となる。ヒルベルト空間においては、内積が

$$\forall \mathbf{u}, \forall \mathbf{w} \in \mathcal{C}; (\mathbf{u}, \mathbf{w})_{l_2} \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \overline{w_k}, \quad (27)$$

$$l_2 \triangleq \left\{ \mathbf{v} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2 < +\infty \right\} \quad (28)$$

のように定義されており，次のノルムを保証する：

$$\|\mathbf{u}\|_{l_2} \triangleq \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{l_2}}. \quad (29)$$

(23) 式及び (26) 式は無間区間積分と無限級数の形で表わされているため，計算機上にはこれらの積分区間と級数を有限とする必要が生じる．そこで $H > 0$ に対してサポートを $[-Hh, Hh]$ とした D/A 関数と A/D 関数を

$${}^m\tilde{\psi}_0(t) \triangleq \begin{cases} {}^m\psi_0(t), & |t| \leq Hh, \\ 0, & |t| > Hh, \end{cases} \quad (30)$$

$${}^m\tilde{\psi}_0^*(t) \triangleq \begin{cases} {}^m\psi_0^*(t), & |t| \leq Hh, \\ 0, & |t| > Hh, \end{cases} \quad (31)$$

と表わす，これら ${}^m\tilde{\psi}_0(t)$ と ${}^m\tilde{\psi}_0^*(t)$ を (23) 式と (26) 式に代入し， $t - kh = \tau$ とすると，有限区間とした D/A 関数と A/D 関数による近似は次のようになる：

$$\tilde{v}_k = \int_{-Hh}^{Hh} x(\tau + kh) \overline{{}^m\tilde{\psi}_0^*(\tau)} d\tau, \quad (32)$$

$$\tilde{s}_0(t) = \sum_{k=\lfloor t/h-H \rfloor}^{\lfloor t/h-H \rfloor} \tilde{v}_k {}^m\tilde{\psi}_0(t - kh). \quad (33)$$

よって， x の最小二乗近似 s_0 とサポートを打ち切った場合の近似 \tilde{s}_0 との相対的な誤差は次の二乗ノルムとして表すことができる：

$$\frac{\left[\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \right]^{1/2}}{\left[\int_0^T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}}. \quad (34)$$

2.4 サポートの打ち切りによる近似誤差の理論的評価

本節では $x \in L_2$ の最小二乗近似 s_0 とサポートを打ち切った場合の近似 \tilde{s}_0 との相対的な誤差を導出する．その準備として，まず D/A 関数と A/D 関数の上界を示す．

2.4.1 D/A 関数と A/D 関数の上界

D/A 関数の上界は文献 [18] において既に導出されている。これを補助定理に示す。

Lemma 1 1. $m = 1, 2$ のとき

$${}^1\psi_0(t) = \begin{cases} 1, & |t/h| < 1/2, \\ 0, & |t/h| \geq 1/2, \end{cases} \quad (35)$$

$${}^2\psi_0(t) = \begin{cases} 1 - |t/h|, & |t/h| < 1, \\ 0, & |t/h| \geq 1. \end{cases} \quad (36)$$

2. $m \geq 3$ のとき、以下の関係を満たす mU と mu , ($0 < {}^mU < \infty$, $0 < {}^mu < 1$) が存在する：

$$|{}^m\psi_0(t)| \leq {}^mU ({}^mu)^{|t|/h} \quad (37)$$

$m = 1$ か 2 のとき、 ${}^m\psi_0$ のサポートは有限なので、打ち切る必要はない。 $m \geq 3$ の場合、 $|{}^m\psi_k(t)|$ は $|t|$ が増加するとともに指数関数的に減少していく。

続いて、A/D 関数の上界を求める準備として 3 つの補助定理を示す。

Lemma 2 任意の整数 l に対して、次の関係

$${}^m_f B(f + l/h) = {}^m_f B(f) \quad (38)$$

が成立する。

[証明] 文献 [17] の補助定理 3 より、 ${}^m_f B(f)$ は次のように変形できる：

$${}^m_f B(f) = \frac{h}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi((fh+p))}{\pi(fh+p)} \right)^m}. \quad (39)$$

任意の整数 l に対して、

$$\begin{aligned} {}^m_f B(f + l/h) &= \frac{h}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi((f+l/h)h+p)}{\pi((f+l/h)h+p)} \right)^m}, \\ &= \frac{h}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi(fh+(l+p))}{\pi(fh+(l+p))} \right)^m}, \\ &= \frac{h}{\sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi(fh+q)}{\pi(fh+q)} \right)^m} \end{aligned} \quad (40)$$

となる. ここで $q = l + p$ とした, (39) および (40) 式から

$${}^m_j B(f + l/h) = {}^m_j B(f) \quad (41)$$

が導出される. この補助定理は, ${}^m_j B(f)$ が周期 $1/h$ の周期関数であることを意味している.

Lemma 3 $\{ {}^m d_p \}_{p=-\infty}^{\infty}$ が

$${}^m d_p = \sum_{k=-[(m-1)/2]}^{[(m-1)/2]} 2^m \beta_{p-k} {}^m \phi_0(kh) \quad (42)$$

として与えられているとすると, A/D 関数 ${}^m \psi_0(t)$ は B スプライン関数の線形結合

$${}^m \psi_0(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} {}^m d_p {}^m \phi_p(t), \quad (43)$$

で表わすことができる.

[証明] (13) 式を (14) 式の ${}^m \psi_0$ として代入すると, ${}^m \psi_0(t)$ は B スプラインの線形結合の形で表わすことができる:

$$\begin{aligned} {}^m \psi_0(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} {}^m g_k {}^m \psi_0(t - kh), \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} {}^m g_k {}^m \beta_{p-k} \right] {}^m \phi_0(t - ph). \end{aligned} \quad (44)$$

${}^m d_p$ を $\sum_{k=-\infty}^{\infty} {}^m g_k {}^m \beta_{p-k}$ とすると, ${}^m d_p$ は離散フーリエ変換における畳み込みの定理より,

$${}^m d_p = h \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} \frac{{}^m_j B(f)}{{}^m_j G(f)} e^{j2\pi f p h} df, \quad (45)$$

となる. 補助定理 2 と (39) 式を (20) 式に適用すると, ${}^m_j G(f)$ は

$${}^m_j G(f) = \frac{{}^m_j B(f)^2}{{}^m_j B(f)} \quad (46)$$

となり,

$${}^m d_p = h \int_{-1/(2h)}^{1/(2h)} \frac{{}^m_j B(f)}{{}^m_j B(f)} e^{j2\pi f p h} df, \quad (47)$$

が得られる. さらに, (18) 式より, $\{ {}^m \phi_0(ph) \}_{p=-\infty}^{\infty}$ は $1/{}^m_j B(f)$ に対する逆離散フーリエ変換であるので, ${}^m d_p$ は $\{ 2^m \beta_k \}_{k=-\infty}^{\infty}$ と $\{ {}^m \phi_0(kh) \}_{k=-\infty}^{\infty}$ の畳み込み

$${}^m d_p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^m \beta_{p-k} {}^m \phi_0(kh), \quad (48)$$

で与えられる。(9)式より, $|k| > \lceil (m-1)/2 \rceil$ のとき ${}^m\phi_0(kh) = 0$ なので, (42)式が導出される.

続いて, A/D 関数の上界を導出する.

Lemma 4 1. $m = 1$ のとき

$${}^1\psi_0(t) = \begin{cases} 1/h, & |t/h| < 1/2, \\ 0, & |t/h| \geq 1/2, \end{cases} \quad (49)$$

2. $m \geq 2$ のとき, 以下の関係を満たす mW と mw , ($0 < {}^mW < \infty$, $0 < {}^mw < 1$) が存在する:

$$|{}^m\psi_0(t)| \leq \frac{{}^mW}{h} ({}^mw)^{|t|/h}. \quad (50)$$

[証明]

1. $m = 1$ のとき, (13) および (14) 式より

$${}^1\psi_0(t) = {}^1\phi_0(t) = \frac{1}{h} {}^1\psi_0(t) \quad (51)$$

となる. よって (35) 式から, (49) 式が導かれる.

2. $m \geq 2$ のとき, (42) 式より

$$|{}^m d_p| \leq \sum_{k=-\lceil (m-1)/2 \rceil}^{\lceil (m-1)/2 \rceil} |{}^{2m}\beta_{p-k}| |{}^m\phi_0(kh)| \quad (52)$$

となる. A_m を

$$A_m = m \sum_{p=0}^{\lceil m/2 \rceil} \frac{(-1)^p}{p!(m-p)!} (m/2 - p)^{m-1}, \quad (53)$$

とし, (9) 式:

$${}^m\phi_0(t) = 0, \quad |t/h| \geq m/2, \quad (54)$$

を利用すると, B スプライン関数 ${}^m\phi_0(t)$ は

$$0 < {}^m\phi_0(t) \leq \frac{A_m}{h}, \quad |t/h| < m/2 \quad (55)$$

を満足するため,

$$|{}^m d_p| \leq \frac{A_m}{h} \sum_{k=-\lceil (m-1)/2 \rceil}^{\lceil (m-1)/2 \rceil} |{}^{2m}\beta_{p-k}| \quad (56)$$

が得られる. 文献[18]で示されている補助定理1と2より, $(0 < {}^{2m}b < 1, 0 < {}^{2m}B < \infty)$ を満たす定数 ${}^{2m}b$, および ${}^{2m}B$ に対して, ${}^{2m}\beta_p$ は

$$|{}^{2m}\beta_{p-k}| \leq h({}^{2m}B)({}^{2m}b)^{|p|} \quad (57)$$

を満足する. ここで ${}^{2m}B$ は h で正規化されている. このとき, $|{}^m d_p|$ の上界は

$$\begin{aligned} |{}^m d_p| &\leq \frac{A_m}{h} \sum_{k=-\lceil(m-1)/2\rceil}^{\lceil(m-1)/2\rceil} h({}^{2m}B)({}^{2m}b)^{|p-k|} \\ &\leq A_m \sum_{k=-\lceil(m-1)/2\rceil}^{\lceil(m-1)/2\rceil} ({}^{2m}B)({}^{2m}b)^{p-k} \end{aligned} \quad (58)$$

によって与えられる. ${}^m D$ および ${}^m d$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} {}^m D &= \frac{\{({}^{2m}b)^{-\lceil(m-1)/2\rceil} - ({}^{2m}b)^{\lceil(m-1)/2\rceil+1}\}}{1 - ({}^{2m}b)} A_m ({}^{2m}B), \\ {}^m d &= {}^{2m}b \end{aligned} \quad (59)$$

とすると, 上界は,

$$|{}^m d_p| \leq {}^m D ({}^m d)^{|p|}, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (60)$$

となる. ここで, $0 < {}^m d < 1, 0 < {}^m D < \infty$ である.

(12) 式より, B スプライン関数は対称であるので, (13) および (14) 式から ${}^m \psi_0(t)$ も対称であることが導かれる:

$${}^m \psi_0(t) = {}^m \psi_0(|t|). \quad (61)$$

したがって, (50) 式が成立することを示すには $t \geq 0$ のみについて考慮すればよいことになる. (54) および (55) 式より, $|{}^m \psi_0(t)|$ の上界は次の式によって与えられる:

$$\begin{aligned} |{}^m \psi_0(t)| &\leq \frac{A_m}{h} \sum_{p=\lfloor t/h-m/2 \rfloor}^{\lceil t/h+m/2 \rceil} |{}^m d_p| \\ &\leq \frac{A_m ({}^m D)}{h} \sum_{p=\lfloor t/h-m/2 \rfloor}^{\lceil t/h+m/2 \rceil} ({}^m d)^{|p|}. \end{aligned} \quad (62)$$

さらに, $0 < {}^m d < 1 < {}^m d^{-1}$ という関係から, (62) 式は,

$$\begin{aligned} |{}^m \psi_0(t)| &\leq \frac{A_m ({}^m D)}{h} \sum_{p=\lfloor t/h-m/2 \rfloor}^{\lceil t/h+m/2 \rceil} ({}^m d)^{|p|} \\ &\leq \frac{A_m ({}^m D) \{({}^m d)^{\lfloor t/h-m/2 \rfloor} - ({}^m d)^{\lceil t/h+m/2 \rceil+1}\}}{h(1 - ({}^m d))}, \end{aligned} \quad (63)$$

と変形できる。 mW と mw を,

$$\begin{aligned} {}^mW &= \frac{A_m({}^mD) \left\{ ({}^md)^{-m/2} - ({}^md)^{m/2+1} \right\}}{(1 - ({}^md))}, \\ {}^mw &= {}^md, \end{aligned} \quad (64)$$

と定義すると, $|\cdot^m\psi_0(t)|$ の上界は

$$|\cdot^m\psi_0(t)| \leq \frac{{}^mW}{h} ({}^mw)^{|t|/h}$$

によって与えられる。したがって, $t \in (-\infty, \infty)$ に対して, (50) 式が成立する。

補助定理4より, $m = 1$ のとき, $\cdot^m\psi_0$ のサポートは有限であるため打ち切る必要はない。 $m \geq 2$ の場合, $|\cdot^m\psi_k(t)|$ は $|t|$ が増加するとともに指数関数的に減少していく。 $|\cdot^m\psi_k(t)|$ の上界も指数関数的に減少していくので, サポートの幅を大きくとれば, 打ち切りにより生じる誤差も急速に減少していくことが期待される。

文献[18]に示されている補助定理1と2, および本研究において導出した補助定理4から, $2 \leq m \leq 10$ の各クラスに対して定数 ${}^mU, {}^mu, {}^mW, {}^mw$ を求めた結果を表1に示す。この結果から, $m \geq 3$ に関しては, 低次のクラスの方が高次に比べ収束速度が速いことが確認できる。

2.4.2 近似誤差とサポートの打ちきり幅の関係

前節までに導出された補助定理を用いて, サポートの打ちきりにより生じる相対的な近似誤差の上界を導出する。

Theorem 1 $m \geq 2$ の場合,

$$\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|_{L_2}}{\|\mathbf{x}\|_{L_2}} \right)^2 \leq \frac{T ({}^mW)^2 ({}^mw)^{2H}}{h^2 \ln({}^mw)} \quad (65)$$

が成立する。

[証明] (22),(23),(32) 式より,

$$\|\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|_{L_2}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m\tilde{\psi}_0(t-kh)} dt - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m\psi_0(t-kh)} dt \right|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T x(t) \overline{{}^m\tilde{\psi}_0(t-kh)} dt - \int_0^T x(t) \overline{{}^m\psi_0(t-kh)} dt \right|^2 \tag{66}
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T x(t)^2 dt \right) \left(\left| \int_0^T \overline{{}^m\tilde{\psi}_0(t-kh)} - \overline{{}^m\psi_0(t-kh)} \right|^2 dt \right). \tag{67}$$

(67) 式はコーシー・シュワルツの不等式：

$$\forall f, \forall g \in L_2[0, T] \tag{68}$$

$$\left(\int_0^T f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^T f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^T g(t)^2 dt \right) \tag{69}$$

を (67) 式に適用することで導出される。

したがって、

$$\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|_{l_2}}{\|\mathbf{x}\|_{L_2}} \right)^2 \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{(N-1)h} \left| \overline{{}^m\tilde{\psi}_0(t-kh)} - \overline{{}^m\psi_0(t-kh)} \right|^2 dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-kh}^{(N-1-k)h} \left| \overline{{}^m\tilde{\psi}_0(t)} - \overline{{}^m\psi_0(t)} \right|^2 dt \tag{71}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(N-1)({}^mW)^2 ({}^mw)^{2H}}{h^2 \ln({}^mw)}, \tag{72}$$

となる。(72) 式の導出は付録(A)に示す。最後に、 $T = (N-1)h$ としてこれを (72) 式に代入することで、(65) 式が導出される。これにより、 $\frac{\|\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|_{l_2}}{\|\mathbf{x}\|_{L_2}}$ の上界は、打ち切り幅 H の関数として表せることが明らかとなった。次に定理 1 を用いて、 $\frac{\left[\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \right]^{1/2}}{\|\mathbf{x}\|_{L_2}}$ の上界を導出する。

Theorem 2 $m \geq 2$ のとき、 $\frac{\left[\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \right]^{1/2}}{\left[\int_0^T |x(t)|^2 dt \right]^{1/2}}$ の上界 $E(H)$ は次の式によって与えられる。

$$\{E(H)\}^2 = \frac{T^2 ({}^mU)^2 ({}^mW)^2}{h^2 \ln({}^mu)({}^mw)} \left\{ ({}^mu)^H + ({}^mw)^H \sqrt{1 - ({}^mu)} \right\}^2. \tag{73}$$

[証明] (26) 式と (33) 式より, $\int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt$ は次のように表すことができる:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \tag{74} \\
&= \int_0^T \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{v}_k {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k {}^m \psi_0(t - kh) \right|^2 dt \\
&= \int_0^T \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{(\tilde{v}_k - v_k) {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh)\} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \{ {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m \psi_0(t - kh) \} \right|^2 dt \\
&\leq \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k| | {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) | + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k| | {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m \psi_0(t - kh) | \right\}^2 dt \\
&= \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k| | {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) | \right\}^2 dt \\
&\quad + \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k| | {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m \psi_0(t - kh) | \right\}^2 dt \\
&\quad + 2 \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k| | {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) | \right\} \\
&\quad \times \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k| | {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m \psi_0(t - kh) | \right\} dt. \tag{75}
\end{aligned}$$

ここでヘルダーの不等式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|a_k \cdot b_k|) \leq \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2} \tag{76}$$

を適用すると, (75) 式は,

$$\begin{aligned}
& \int_0^T |\tilde{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \tag{77} \\
&\leq \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k|^2 \right\} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} | {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) |^2 \right\} dt \\
&\quad + \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} | {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m \psi_0(t - kh) |^2 \right\} dt \\
&\quad + 2 \int_0^T \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{v}_k - v_k|^2} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} | {}^m \psi_0(t - kh) |^2} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2} \\
&\quad \cdot \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} | {}^m \tilde{\psi}_0(t - kh) - {}^m \psi_0(t - kh) |^2} dt \tag{78}
\end{aligned}$$

さらにヘルダーの積分における不等式：

$$\forall f, \forall g \in L_2[0, T]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(t)| dt \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt}$$

を (78) 式の第 3 項に適用することで、

$$\int_0^T |\bar{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \tag{79}$$

$$\leq \|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|_{l_2}^2 \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\bar{\psi}_0(t - kh)|^2 dt$$

$$+ \|\mathbf{v}\|_{l_2}^2 \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\bar{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh)|^2 dt$$

$$+ 2 \|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\|_{l_2} \|\mathbf{v}\|_{l_2} \sqrt{\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\bar{\psi}_0(t - kh)|^2 dt}$$

$$\cdot \sqrt{\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\bar{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh)|^2 dt} \tag{80}$$

となる。一方、(80) 式の $\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\bar{\psi}_0(t - kh)|^2 dt$ は次のように変形できる：

$$\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\bar{\psi}_0(t - kh)|^2 dt \tag{81}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-kh}^{(N-1-k)h} |{}^m\bar{\psi}_0(t)|^2 dt \leq \frac{T ({}^mU)^2 \{1 - ({}^mu)^{2H}\}}{\ln ({}^mu)}. \tag{82}$$

(82) 式の証明は付録 B に示す。

補助定理 1 より、 $\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\bar{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh)|^2 dt$ の上界は

$$\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |{}^m\bar{\psi}_0(t - kh) - {}^m\psi_0(t - kh)|^2 dt \tag{83}$$

$$\leq \frac{h(N-1)({}^mU)^2 ({}^mu)^{2H}}{\ln ({}^mu)} \tag{84}$$

$$= \frac{T ({}^mU)^2 ({}^mu)^{2H}}{\ln ({}^mu)}. \tag{85}$$

で与えられる。(85) 式の証明は付録 C に示す。

さらに、(22) および (23) 式と補助定理 4 より $\|\mathbf{v}\|_{l_2}^2$ の上界は次のように求まる：

$$\|\mathbf{v}\|_{l_2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m\psi_0(t - kh)} dt \right|^2 \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^T |x(t)| \left| \overline{{}^m\psi_0(t-kh)} \right| dt \right\}^2 \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^T |x(t)| \right\} \left\{ \int_0^T \left| \overline{{}^m\psi_0(t-kh)} \right|^2 dt \right\} \\
&= \|x\|_{L_2}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^T \left| \overline{{}^m\psi_0(t-kh)} \right|^2 dt \right\} \\
&\leq \|x\|_{L_2}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{2|t-kh|/h} \\
&= \|x\|_{L_2}^2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^0 \int_0^T \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{2(t-kh)/h} dt + \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^{kh} \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{-2(t-kh)/h} dt \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{N-2} \int_{kh}^T \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{2(t-kh)/h} dt + \sum_{k=N}^{\infty} \int_0^T \frac{({}^mW)^2}{h^2} ({}^mw)^{-2(t-kh)/h} dt \right\} \\
&= \frac{\|x\|_{L_2}^2 ({}^mW)^2 h (N-1)}{h^2 \ln({}^mw)} \\
&= \frac{\|x\|_{L_2}^2 ({}^mW)^2 T}{h^2 \ln({}^mw)}. \tag{87}
\end{aligned}$$

(82),(85) および (87) 式を (80) 式に適用し、定理1を用いると、

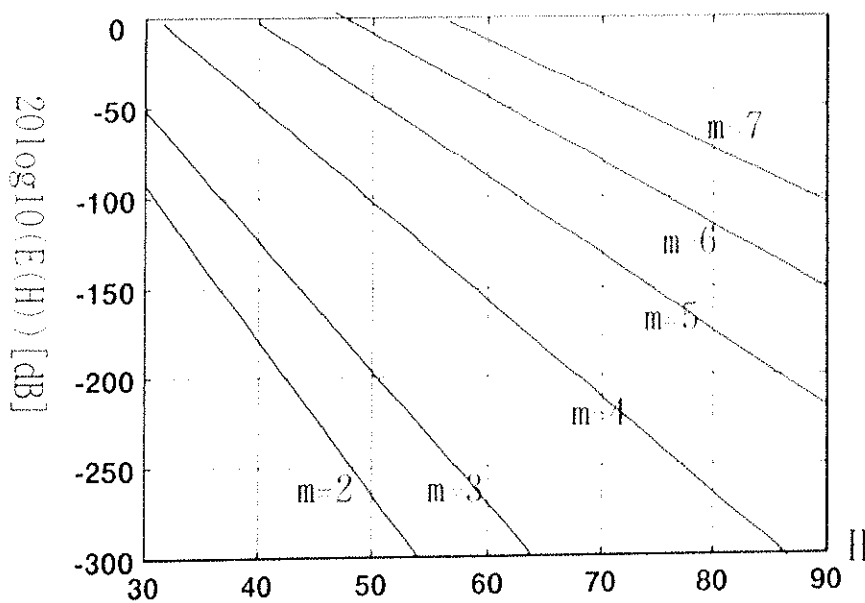
$$\begin{aligned}
&\int_0^T |\bar{s}_0(t) - s_0(t)|^2 dt \tag{88} \\
&\leq \frac{({}^mW)^2 ({}^mw)^{2H} T \|x\|_{L_2}^2}{h^2 \ln({}^mw)} \cdot \frac{({}^mU)^2 T \{1 - ({}^mu)^{2H}\}}{\ln({}^mu)} \\
&\quad + \frac{({}^mW)^2 T \|x\|_{L_2}^2}{h^2 \ln({}^mw)} \cdot \frac{T ({}^mU)^2 ({}^mu)^{2H}}{\ln({}^mu)} \\
&\quad + 2 \sqrt{\frac{-({}^mW)^2 ({}^mw)^{2H} T}{h^2 \ln({}^mw)}} \cdot \|x\|_{L_2} \cdot \sqrt{\frac{-({}^mW)^2 T}{h^2 \ln({}^mw)}} \cdot \|x\|_{L_2} \\
&\quad \cdot \sqrt{\frac{-({}^mU)^2 \{1 - ({}^mu)^{2H}\} T}{\ln({}^mu)}} \cdot \sqrt{\frac{-({}^mU)^2 ({}^mu)^{2H} T}{\ln({}^mw)}} \\
&= \frac{T^2 ({}^mU)^2 ({}^mW)^2}{h^2 \ln({}^mu) \ln({}^mw)} \cdot \left\{ ({}^mu)^H + ({}^mw)^H \sqrt{1 - ({}^mu)^{2H}} \right\}^2 \cdot \|x\|_{L_2}^2 \tag{89}
\end{aligned}$$

となり、サポートの打ちきりにより生じる誤差は (73) 式によって得られる。

定理2から、許容誤差を $E(H)$ とした場合に必要なサポート幅、 $h \cdot H$ を (89) 式で求めることができる。図6は $T = 3600 [\text{sec}]$ 、そしてサンプリング間隔を CD オーディオデータに相当する $h = 1/44.1 [\text{kHz}] = 22.7 [\mu\text{sec}]$ としたときのサポートの打ちきりにより生じる誤差 $20 \log_{10} E(H)$ を示したものである。

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_U	1.0000	1.5892	1.3335	1.2589	1.1481	1.1350	1.1220	1.1092	1.0965
m_u	0.3679	0.1716	0.2679	0.3613	0.4306	0.4883	0.5353	0.5747	0.6080
m_W	1.8011	1.3530	1.2861	1.2255	1.1861	1.1501	1.1320	1.1252	1.1135
m_w	0.2679	0.4306	0.5353	0.6080	0.6613	0.7019	0.7339	0.7597	0.7809

表 1: A/D 関数と D/A 関数における減衰パルスマーク

図 6: 打ち切り幅 (H) に対する打ち切り誤差の上界 (E(H)) ($T=3600[\text{sec}], h=22.7[\mu \text{ sec}]$)

打ち切り誤差を -100 [dB] に押さえるには, $m = 2, 4, 7$ でそれぞれ, $H \geq 31, 50, 89$ となる. よって, A/D 関数, D/A 関数のサポートの幅は最低で

- $m = 2$ のとき, $h \cdot H = 22.7 \times 31 = 703.3$ [μsec]
- $m = 4$ のとき, $h \cdot H = 22.7 \times 50 = 1135.0$ [μsec]
- $m = 7$ のとき, $h \cdot H = 22.7 \times 89 = 2020.3$ [μsec]

必要となる. クラスが高次になるにつれ, A/D 関数と D/A 関数の収束速度が遅くなるため, 近似精度を保つためには高次クラスほどそのサポート幅を大きくとる必要がある.

2.5 まとめと考察

本章では, フルーエンシ関数のサポートを打ち切ることによって生じる誤差を理論的に検証した. 文献[18]においてすでに導出されている D/A 関数の上界と, 本章で導いた A/D 関数の上界を用いて, 近似誤差の上界をフルーエンシ関数のサポートの幅 (打ち切り幅) の関数として導出した. この関係式を用いることで, 打ち切り誤差に応じてサポート幅を選択することが可能となった. 具体的には, 打ち切り誤差を -100 [dB] に押さえるために, $m = 2, 4, 7$ でそれぞれ,

- $m = 2$ のとき, 703.3 [μsec]
- $m = 4$ のとき, 1135.0 [μsec]
- $m = 7$ のとき, 2020.3 [μsec]

のサポート幅が必要となることを示した. クラスが高次になるにつれ, A/D 関数と D/A 関数の収束速度が遅くなるため, 近似精度を保つためには高次クラスほどそのサポート幅を大きくとる必要がある.