

# 1 概要

本論文ではフルーエンシ理論に基づき信号を近似するための実用的な手法を提案する。本概要では研究の背景と目的について述べ、フルーエンシ関数系と呼ばれる区分多項式について概説する。最後に、本研究における成果と本論文の構成を説明する。

## 1.1 研究の背景と目的

自然界には、連続、不連続、滑らか(微分可能)、およびこれらの組み合わせからなる信号等の様々な時系列データが存在する。音声、画像、通信等の工学分野において、観測された信号を関数展開によって正確に近似し記述することは、後段の目的とする情報処理、例えばノイズ除去、情報圧縮等を的確に行うために極めて重要である [1]。

関数展開に利用される関数系としては、フーリエ級数 [2] が一般的である。フーリエ級数の展開係数は周波数という物理的意味を持つため、人間の視聴覚を対象とする多くの工学分野に応用されている。しかし、フーリエ信号空間は無限回微分可能な指数関数を基底としているために、パルスや方形波を例とする不連続信号や三角波を例とする滑らかさのない信号をフーリエ級数によって効率的に扱うことは困難である。また、信号の時間軸上に局在する構造は、周波数領域においてその位置が特定できないという問題点も指摘されている。近年、フーリエ基底系の上記の問題を克服するために、ウェーブレットやスプライン等の新しい関数系が注目されている。

ウェーブレット級数 [3, 4, 5, 6, 7] は、一つの関数(マザーウェーブレット)から拡大・縮小と平行移動によって導出される一連の関数系を基底とする階層的な信号展開である。マザーウェーブレットを拡大・縮小することでその解像度が変化するため、特異点の位置を抽出することが可能となる。しかし、展開結果はマザーウェーブレットに依存して大きく変化するため、対象信号の性質に応じてマザーウェーブレットを適切に選択する必要がある。現段階においてマザーウェーブレットの選択法に関する統一的な方法は確立されていない。

他方、区分多項式から構成されるスプライン関数系 [8, 9, 10] は、元来与えられたデータ点を通る曲線、即ち補間曲線を生成する目的で導出された。しかし、目的に適した次数のスプライン関数を展開基底とすることで、フーリエ級数では扱うことが困難な信号も効率的に記述できることから、関数近似の分野においても広く用いられるようになった。中でも B スプラインと呼ばれる一連の関数は、方形波の畳み込みだけで生成が可能である

ため実装が簡単な上、低次の B スプラインはサポートが小さいという理由から少ない演算量で近似が行えるという利点も持ち合わせている。しかし、利用するスプラインの次数を決定する方法については未だ多くの検討を必要としている。

以上の関数系における有用性や問題点を踏まえ、本研究では

- 時間軸上に局在する信号の構造を捕らえることができ、かつ
- 不連続信号や特異点を持つ信号を効率良く記述することが可能

という特性を有するフルーエンシ関数系に注目し、計算機実装を前提とした実用的近似手法の提案を目的とする。

次節では、フルーエンシ理論とフルーエンシ関数系について説明する。

## 1.2 フルーエンシ関数系とその性質

フルーエンシ理論 [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] が考慮するアナログ信号空間  ${}^m S$  は、その連続微分可能性  $m (= 1, 2, 3, \dots)$  により類別されており、対応するクラス  $m$  のフルーエンシ・デジタル/アナログ (D/A) 関数  ${}^m \psi_k(t)$  とフルーエンシ・アナログ/デジタル (A/D) 関数  ${}^*_m \psi_k(t)$  と呼ばれる区分多項式によって張られている。信号空間  ${}^m S$  は  $(m-2)$  次、 $(m-1)$  階微分可能である信号により構成される。よって方形波は  $m = 1$ 、三角波は  $m = 2$ 、そしてフーリエ信号空間に属する信号は  $m = \infty$  に分類される (図 1 参照)。また、スプライン関数基底により構成される信号も  ${}^m S$  中に含まれることになる。

D/A 関数と A/D 関数は、自己とは直交しないが互いに直交する双直交性

$$({}^m \psi_i(t), {}^*_m \psi_j(t)) = \delta_{ij}, \quad (1)$$

を満たす。ここで、

$${}^m \psi_k(t) = {}^m \psi_0(t - kh), \quad (2)$$

$${}^*_m \psi_k(t) = {}^*_m \psi_0(t - kh), \quad (3)$$

であり、 $(u, v)$  は内積：

$$(u, v) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{v(t)} dt$$

を意味する。また、 ${}^m \psi_k(t)$ ,  ${}^*_m \psi_k(t)$ , および  $s(t) \in {}^m S$  は次の関係:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t_k) {}^m \psi_k(t), \quad (4)$$

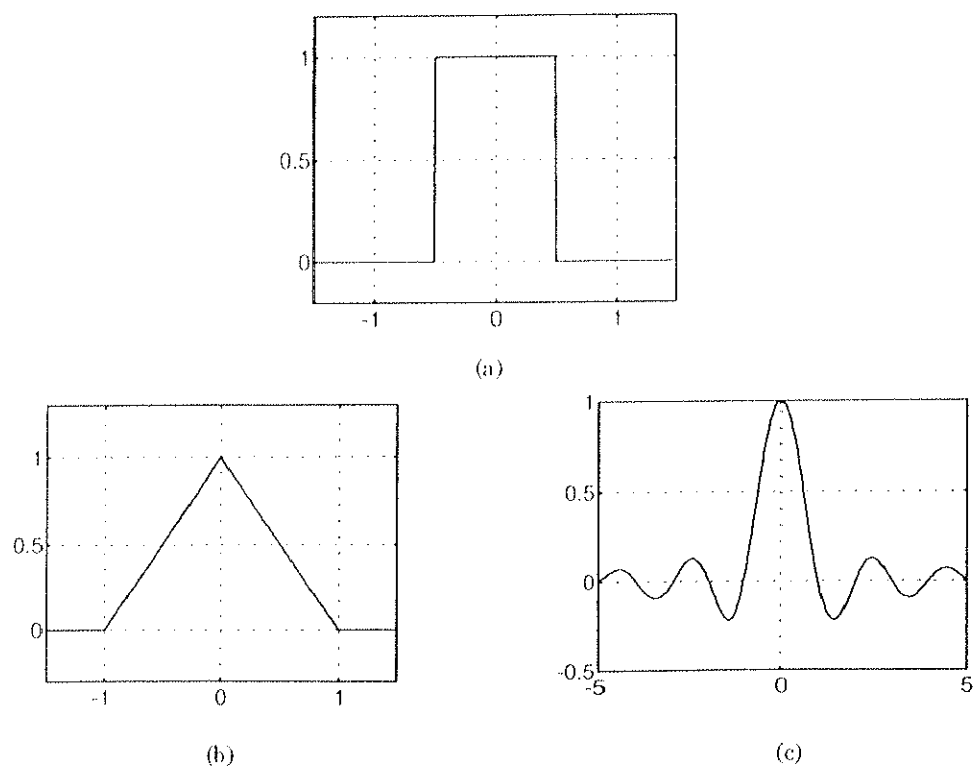


図 1: 信号空間  $mS$  に属す信号の例. (a)  $m = 1$ . (b)  $m = 2$ . (c)  $m = \infty$ .

$$s(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \overline{{}^m\psi_k(t)} dt, \quad (5)$$

を満足する。これは、クラス  $m$  の D/A 関数によって完全に再構成可能な信号は  ${}^mS$  に属し、このような信号がクラス  $m$  の A/D 関数により幅  $h$  で離散化された場合、幅  $h$  でサンプルされた信号の値そのものと一致することを意味する (図 2 参照)。ただし、 $h$  は固定されているとする。したがって、対象信号が  ${}^mS$  に属す場合、クラス  $m$  の A/D 関数は  $\delta$  関数と同様の働きをし、A/D 関数を作用させた結果と原信号との差を最小とするクラス  $m$  は信号の属する空間を直ちに与える。スプライン関数系やウェーブレット級数において課題となっている適切な基底の選択法がフルーエンシ理論では提供されているのである。よってフーリエ級数の適用が困難な不連続信号や滑らかさのない信号も、適切なフルーエンシ関数を適用することで効率よく記述できる。

一般にアナログ信号  $x(t) \in L_2$  に対しては、

$$v(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{{}^m\psi_k(t)} dt, \quad (6)$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t_k) {}^m\psi_k(t), \quad (7)$$

とすることで、 $x(t)$  を  $L_2$  ノルムの意味で最適近似する  $s(t) \in {}^mS$  を生成できる (図 3 参照)。

以上のような性質を持つフルーエンシ関数系は実用上様々な点において有用である。第一に A/D 関数による展開係数の導出は積分操作で実現されるためノイズに強い。また、通常フーリエ級数に代表される多くの関数展開は一つの信号を表すために無限個の基底を必要とするのに対して、フルーエンシ理論では対象信号のクラスを特定することで、有限個のフルーエンシ関数基底で信号を表現することが可能となるため、計算機実装に適しているといえる。

任意の有限次元空間への最適な射影を与える直交変換として、Karhunen-Loève 変換 (KL 変換) が知られている。KL 変換は、 $M$  次元ユークリッド空間  $E^M$  において観測された入力パターン (入力信号)  $\{x_n : n = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $x_n \in E^M$  を任意の  $K$  次元空間に最も効率よく射影する変換である [20]。即ち、 $J(\{\phi_k\}_{k=1}^K)$  を

$$J(\{\phi_k\}_{k=1}^K) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \left\| x_n - \sum_{k=1}^K (y_k^{(n)}, \phi_k) \phi_k \right\|^2,$$

$$y_k^{(n)} = (x_n, \phi_k)$$

と定義したときに、汎関数  $J$  を最小にする正規直交関数によって定義される。KL 変換が信号を効率良く表現する有限次元の基底を与える点については、フルーエンシ関数による展開と目的が似ているといえる。しかし、この 2 つの関数系による展開の立場は大きく異

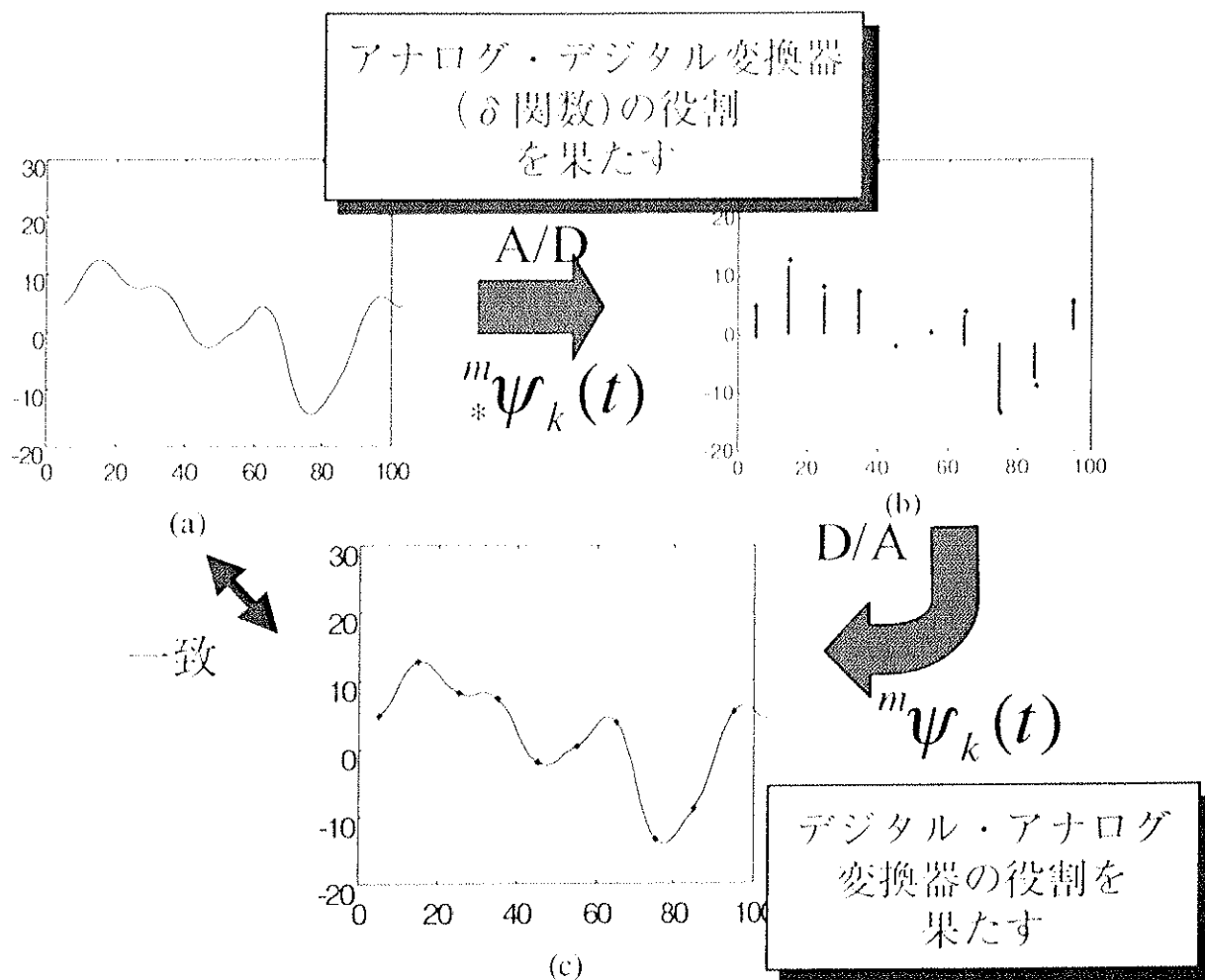


図 2: フル一エンシモデル (1). (a)  ${}^mS$  に属する信号. (b)  ${}^m\psi_k(t)$  によって離散化された結果. (c)  ${}^m\psi_k(t)$  によって展開された結果.

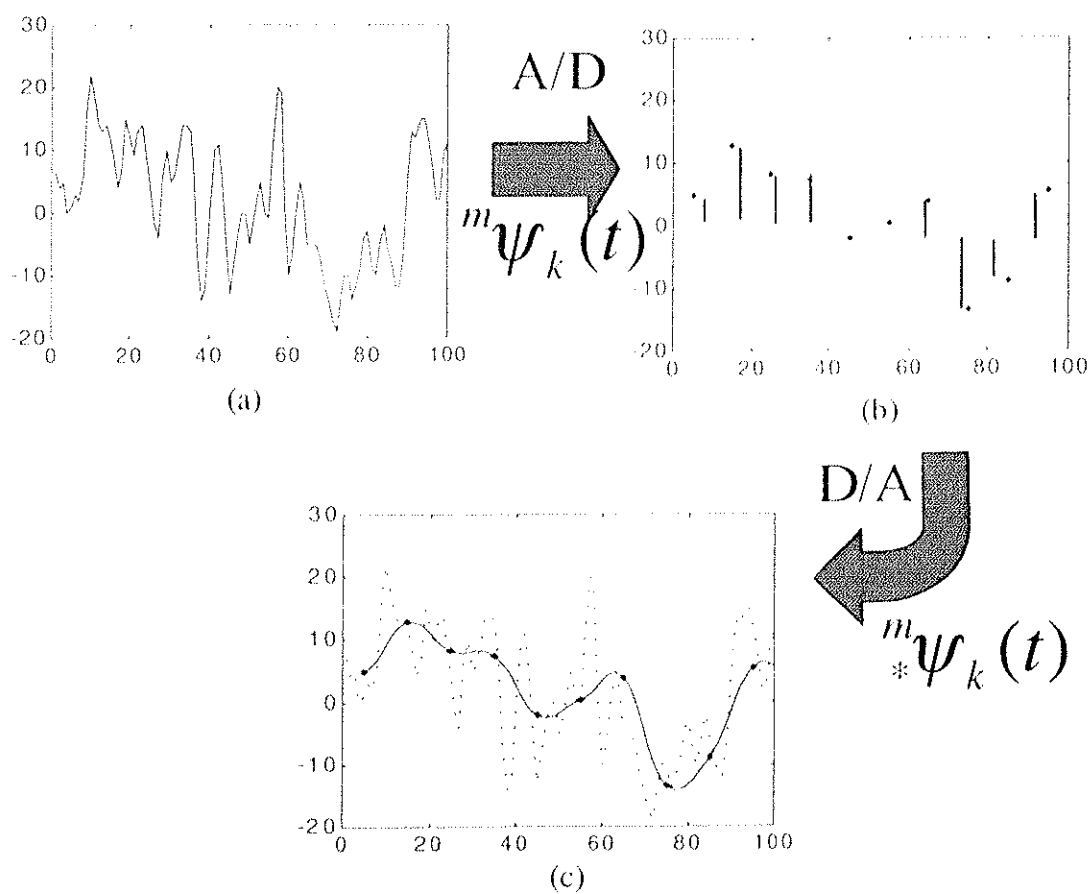


図 3: フルオーダーモデル (2). (a)  ${}^mS$  に属さない信号. (b)  ${}^m\psi_k(t)$  によって離散化された結果. (c)  ${}^m\psi_k(t)$  によって展開された結果.

なっている。フルーエンシ理論は微分可能性に基づいた基底で信号を効率良く近似し、その局所的な性質を捉えようとするものである。これに対してKL変換によって得られる基底の形状は未知であり、入力のパターンや次数によって変化する。本研究では信号の局所的な性質を捉えられる可能性があるとして、フルーエンシ関数系を用いることにした。

さらに、対象信号の属する信号空間クラスを特定することで、フルーエンシ関数系には次のような利点がある。フルーエンシ関数系は低次クラスほど収束が早いため、クラス  $m$  の信号に対してはクラス  $m$  のフルーエンシ関数を用いることで、変換に要する演算量が最小となる。これはクラス  $m$  のフルーエンシ関数系は、微分可能なクラス  $m$  以下の信号を記述できるためである。故に、対象信号のクラスを特定することで計算機上への実装を行う際演算量の削減が可能となる。

### 1.3 本研究における成果

フルーエンシ関数系は上記の優れた性質を有すが、実データへ適用する場合、以下の点が問題となる。

1. サポート（台）が無限区間であるフルーエンシ関数が存在する。
2. フルーエンシ関数のサポートを打ち切り、かつ時間方向に離散化した場合、双直交性が保証されない。
3. 連続微分可能性が定義できない離散データからの原信号の属する空間の特定が困難である。

上記のフルーエンシ関数系の問題を踏まえ、本研究では

1. サポートの打ち切りから生じる誤差の理論的評価を行い、
2. 双直交性を保つ離散フルーエンシ関数を定義し、
3. 離散データにおける最適クラスの決定法を提案する。

以下、各項目について概説する。

### 1.3.1 サポートの打ち切りから生じる誤差の評価

フルーエンシ関数系のサポートは無限区間であるが、DSP等のデジタル素子によって処理系を実装する場合は、サポートを有限区間で打ち切る必要がある。サポートを単純に打ち切った場合、A/D関数、D/A関数の双直交性は保たれなくなるが、その際に生じる近似誤差の理論的検討は過去になされていない。そこで、まずA/D関数の上界を導出し、これを基にフルーエンシ関数展開の近似誤差の理論的上界を、基底関数のサポートの打ち切り幅の関数として導出した。この関係式から、高次のフルーエンシ関数ほど近似精度を保つためには長いサポート幅を必要とすることが明らかになった。具体的には、44.1[kHz]で60分間サンプリングする場合に二乗誤差を-100[dB]に押さえるためには、クラス  $m = 2$  で 703.3[ $\mu\text{sec}$ ]、 $m = 4$  で 1135.0[ $\mu\text{sec}$ ]、そしてクラス  $m = 7$  で 2020.3[ $\mu\text{sec}$ ]のサポートを必要とすることが判明した。

### 1.3.2 離散フルーエンシ関数の提案

フルーエンシ関数のサポートを打ち切り、かつ時間方向に離散化した場合、双直交な関数の形状が理論値から大きく異なる。そこで、本研究では文献[21]で新たに導出されたコンパクトなD/A関数に注目し、これと双直交性が保証されるよう所望のサポート幅を持つ離散化されたA/D関数を新たに定義した。本研究ではこの新たに定義した離散化されたA/D・D/A関数をそれぞれダウサンプリング・アップサンプリング基底ベクトルと呼び、これらを総称してフルーエンシベクトルと呼ぶ。この新たに定義したフルーエンシベクトルを実データに適用し、従来の理想ローパスフィルタを用いるレート変換法と比較した。この結果、従来法が全ての離散データに対して必ずしも最適な近似を行わないことが明らかとなった。また、最適な近似を行うフルーエンシベクトルのクラスは単一ではなく、時間とともに変化していることが確認された。対象信号の局所的性質に応じて複数クラスのフルーエンシベクトルの中から適切なものを選択することで近似精度を改善できることが判明した。

### 1.3.3 区分多項式に基づく未知離散データのための最適クラス決定法の提案

フルーエンシ理論では対象信号の属するクラスを特定することで、信号を効率よく記述でき、また変換に要する演算量を削減できる。よって多項式信号空間 $mS$ のいずれか1つに属していると仮定した信号 $x(t)$ を時刻 $t_j = jh'$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ )で離散化した $x(t_j)$ から、 $x(t)$ の属す空間を特定する手法を提案した。



入力データ全点において各クラスのダウンサンプリング基底ベクトルとの相関を求め、その結果入力データと最も距離の近い ( $L_2$  ノルムにおいて距離が最も小さい) 相関値を与えるクラス  $m$  を信号の属する空間とした。さらには、方形波、三角波、2次曲線、等に本手法を適用し、その有効性を確かめた。この結果、対象信号がある程度細かくサンプリングされていれば本手法が有効であることが確認された。

## 1.4 本論文の構成

以下、本論文の構成を説明する。

第二章では、フルーエンシ関数系のサポートを有限区間で打ち切る場合に生じる近似誤差の理論的検討を行う。フルーエンシ関数展開の近似誤差の理論的上界を基底関数のサポートの打ち切り幅の関数として導出し、所望の精度を得るためのサポート幅について考察する。

第三章では、フルーエンシ関数を有限区間に打ち切り、かつ離散化した場合にも双直交性が保たれるよう、離散 A/D 関数を新たに定義する。また、これを実データに適用した結果について考察を加える。

第四章では、離散データにおける最適クラスの決定法を提案する。第三章で提案した離散化された A/D 関数と対象信号との相関値を求め、対象信号の属するクラスを決定する。様々な信号に対し本手法を適用し、その有効性を確かめる。

最後に、第五章で本研究の論点についてまとめ、今後の課題を述べる。