

第4章 逆Radon変換における不完全問題

第1節 不完全投影再構成問題

近年、計算機トモグラフィ（CT）や磁気共鳴映像法（MRI）において、通常必要とされるものよりもはるかに少ないデータから画像を再構成することを目的とする、いわゆる“超解像”（Superresolution）の問題がしばしば論じられるようになった[1][2]。しかしながら、CTの実用的なレベルの画像再構成の議論では、従来から言われている通りの被写体をめぐる全方向からの投影データが再構成のために必要であることについての考え方が修正された訳ではない。すなわち、実際のCT装置においては、一つの角度方向の投影に関して被写体全体を覆う領域を確保し、かつ被写体の周りの全ての角度方向の“完全”（complete）な投影データを用いることが必要であるとされていることには変わりはない。また、一種のCTと見なすことが出来るMRIの現実の装置では、画像データの標本化間隔より決定される高周波領域までのk空間のデータをすべて収集して再構成計算が行われ、特に必要とされる基本的なデータの範囲は縮小していない。

実用的に用いられる再構成アルゴリズムに関する限りにおいては、一般にこのような範囲のデータが不可欠であり、データに対する“完全”の言葉の使い方に関して誤りはないように思われる。しかし一方、純粋な数学的問題としてCTやMRIの画像再構成を考えた場合には、必ずしもこのような結論が示される訳ではない。

例えばCTの場合、投影データの全体の分布を示すサイノグラム（sinogram）において、投影関数の動径方向の成分の一部が欠落した制限領域投影再構成問題（limited region reconstruction problem）や、角度方向成分の欠落がある場合の制限角度投影再構成問題（limited angle reconstruction problem）を解く種々の方法[3][4]が明瞭に示されている。またMRIでは、k空間の一部の領域のみから、全領域のデータを推定する方法[5]–[7]が、少なくとも論理的に誤りのないアルゴリズムを用いて表されている。

しかしながら、これらの方法を用いて具体的な画像再構成を行った結果は、いずれの場合においても実用的な手法としてこれらのアルゴリズムが全く問題なく使用可能であることを保証しているとは言い難いことも事実である。このことは、上記のような“不完全投影再構成”と呼ばれる問題は、やはり本質的に解くための条件の不足したill-posed problemであることを示唆しているとも考えられるのである。

いずれにしても、不完全とされる投影データから物体の断面が正しく再構成できれば、CT技術の応用範囲がさらに拡大されることが期待される。

1. 制限領域投影再構成問題

不完全投影再構成問題のうち、すべての方向の投影データが測定できても一部の領域の投影データしか測定できない場合や、物体の内部にX線などのビームを通さない不透明な部位がある場合など、すべての投影データの一部が欠落しているものから再構成を行なう問題を制限領域投影再構成問題という[8]-[10]。投影データを横軸に投影の座標、縦軸に角度方向を取りそれを二次元直交座標系で表したサイノグラムを考えると、完全投影再構成問題のときは、被写体を囲む領域の投影が全角度方向から取れるので、Fig.48に示した斜線領域全体が取れることになる。ここで、全角度領域は、一般に $0 \leq \theta < 2\pi$ であるが、透過型CTの場合は投影データの対称性より

$$g(X, \theta) = g(-X, \theta + \pi) \quad (97)$$

が成り立つので、 $0 \leq \theta < \pi$ と考える。これに対し、制限領域投影再構成問題では、物体の一部の領域の投影データしか取れない場合は、Fig.49に示すサイノグラムの斜線部分の領域のデータから再構成することになり、また物体の内部にビームを通さない不透明な部分がある場合には、Fig.50に示すサイノグラムの斜線部分の領域のデータから再構成することになる。それぞれ図の横に被写体分布と投影データの関係を描いている。

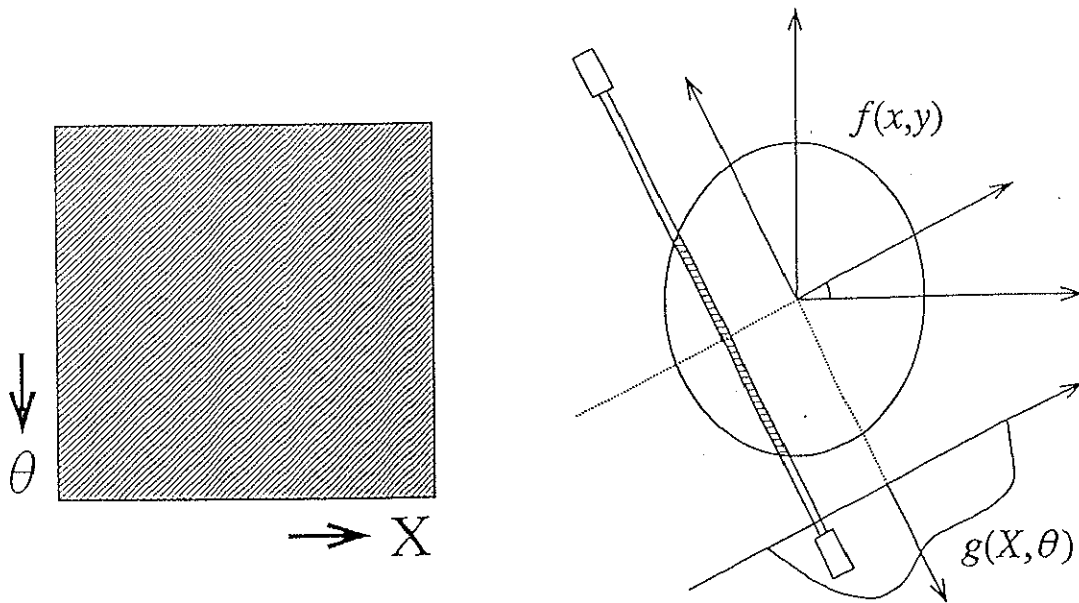


Fig.48 完全投影のサイノグラム、および被写体分布と投影データの関係

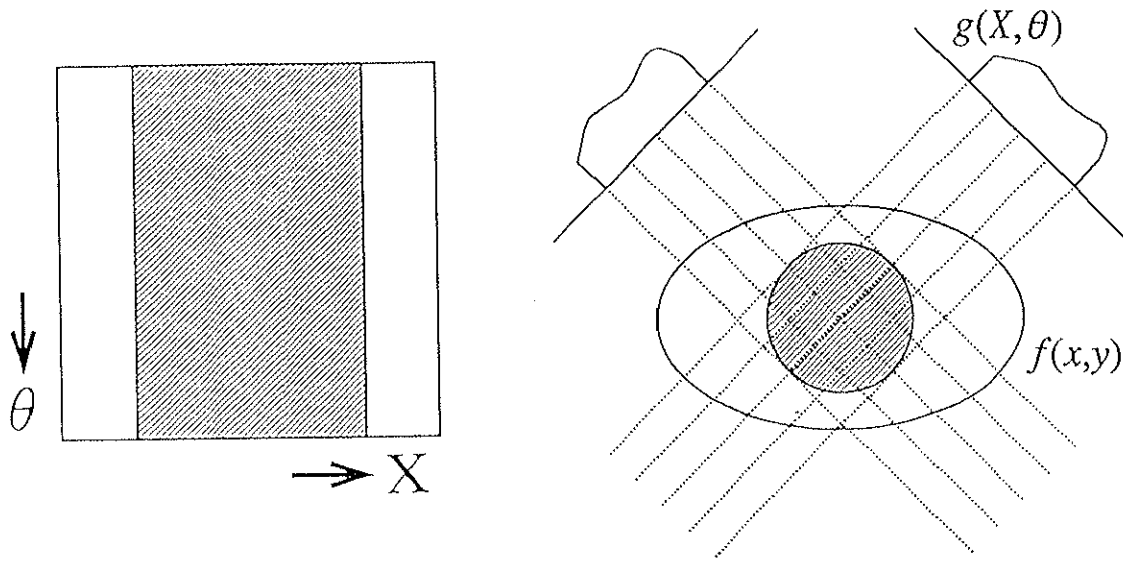


Fig.49 制限領域投影のサイノグラム、および被写体分布と投影データとの関係(1)

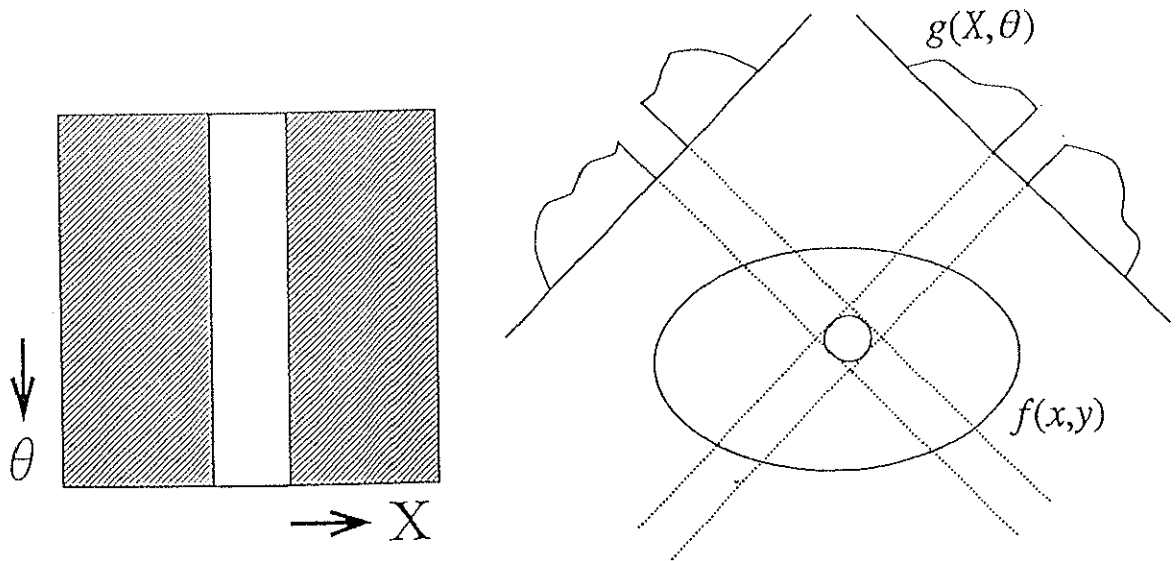


Fig.50 制限領域投影のサイノグラム、および被写体分布と投影データの関係(2)

2. 制限角度投影再構成問題

不完全投影再構成問題のうち、画像化する物体のまわりに障害物が存在するときなど、一部の方向の投影データが測定できない場合、つまり、それぞれの投影データでは被写体領域全体のデータが取れているが、ある方向で投影データが取れないものから再構成を行なう問題を制限角度投影再構成問題という[3]-[6][11]-[20]。制限角度投影再構成問題では、角度方向で一部の投影データが欠落しているので、Fig.51に示すサイノグラムの斜線部分の領域から再構成することになる。その図の横に被写体分布と投影データの関係を描いている。

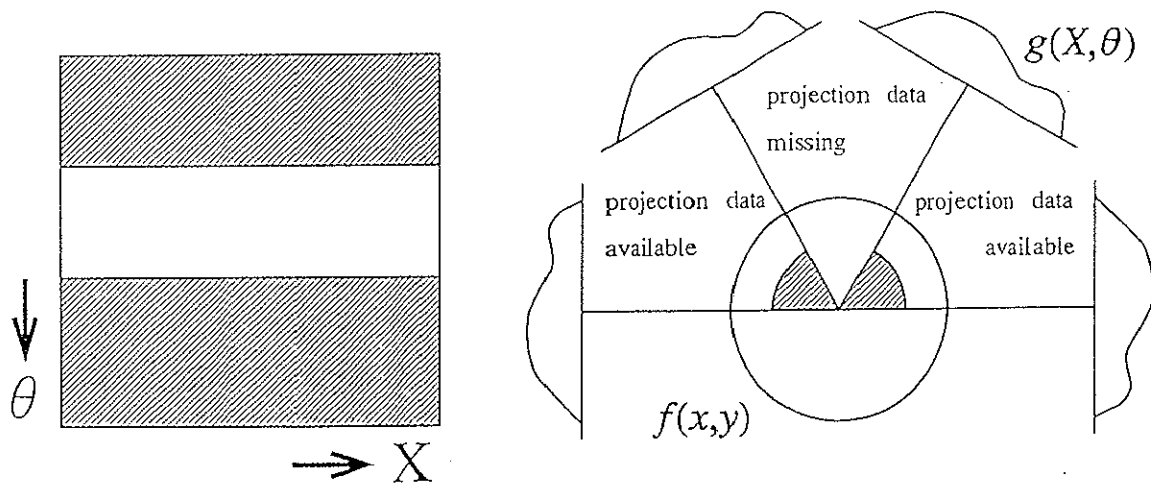


Fig.51 制限角度投影のサイノグラム、および被写体分布と投影データの関係

第2節 解析性の条件

1. 画像再構成に用いられる制限条件

投影データにおける制限条件には、Helgason-Ludwigの制限条件と呼ばれるものがある。これは、被写体領域が、単位円内の有限領域に存在する場合、投影データ $g(X, \theta)$ が以下の2つの条件を満足するというものである[21][22]。

$$\text{条件1 : } \quad g(X, \theta + \pi) = g(-X, \theta) \quad (98)$$

$$\text{条件2 : } \quad \int_{-1}^1 g(X, \theta) X^k dX \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (99)$$

は、 θ に関して k 次以下の三角多項式になる。

条件1は、投影データの対称性を表し、条件2は、投影データの k 次モーメントを表し、投影方向 θ を変えて測定したデータの間には、相関が存在することを示している。条件2において0次と1次の式から以下のようなことがいえるのは容易に分かる。

0次では、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(X, \theta) dX = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \quad (100)$$

となり、投影データの和と被写体分布の和が等しくなることが分かる。

1次では、投影データの重心の位置と被写体分布の重心を投影データに射影した位置が等しくなることがいえる。それは、投影データの重心の位置を $X_0(\theta)$ 、被写体分布の重心を (x_0, y_0) 、0次での値を M とすると、 $X_0(\theta), x_0, y_0$ はそれぞれ、

$$X_0(\theta) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} X g(X, \theta) dX}{\int_{-\infty}^{\infty} g(X, \theta) dX} \quad (101)$$

$$x_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy}, \quad y_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy} \quad (102)$$

と表され、

$$\begin{aligned}
X_0(\theta) &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} X g(X, \theta) dX \\
&= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X f(x, y) dX dY \\
&= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x \cos \theta + y \sin \theta) f(x, y) dx dy \\
&= x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta
\end{aligned} \tag{103}$$

となることより重心の関係が分かる。また、この式より条件2における1次の式は、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} X g(X, \theta) dX &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy \right] \cos \theta \\
&\quad + \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy \right] \sin \theta
\end{aligned} \tag{104}$$

となり、1次の三角多項式になっていることが分かる。

このほかに画像再構成に用いられる制限条件には、投影データおよび被写体分布が非負であるというものがある。この制限条件を繰り返しの方法に応用して、再構成を行なうものも多く提案されている。これらの制限条件は、投影データに潜在する冗長性を示すものであるが、比較的緩やかな条件でもある。

これらに対して、不完全投影再構成問題などでよく用いられる制限条件に、解析性の条件がある。これは、極めて強い制約条件を与え、このため、一般の実用的な状況での制約条件からでは解が与えられない場合でも、解析性を利用することにより解を得ることが可能になる場合が多く存在する。この解析性の条件について、この後に詳しく述べる。

2. 制限条件としての解析性

CTやMRIの超解像に関する問題では、いろいろな方法が提案されているが、そこには問題を解くための条件を認めることについて多くの相互矛盾があるように感じられる。とくに、それらにおいて最も共通に存在する問題点は、画像を表す関数やそのFourier変換関数が、数学的に言って解析的(analytic)であるとする事の正当性についてである。ここで、“解析的”という言葉の意味について明確にすると、通常定義に従ってここでも、関数が解析的であるとは、この関数がTaylor展開できることを意味する。そして関数が、ある領域の中の全ての点で解析的であるとき、これをこの領域内における“解析関数”と呼ぶ。

すなわち、一般的に2次元の画像関数 $f(x,y)$ を考えるならば、これが解析的であるとは、ある点 (x_0, y_0) のまわりに

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[(x-x_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left[(x-x_0)^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0) \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right. \\
 &\quad \left. + (y-y_0)^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \right] \\
 &\quad + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x,y) \Big|_{x=x_0, y=y_0}, \quad \begin{pmatrix} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{105}$$

のように表わされることを意味する。

したがって、解析性が保証される領域内では、 (x_0, y_0) より隔たった点の画像情報が (x_0, y_0) の近傍のこの関数の性質のみで決定されるという、画像に関する極めて強い制約条件を与えることになる。このため、一般の実用的な状況での制約条件からは解が与えられない場合でも、解析性を利用することにより解を得ることが可能になる場合が多く存在する。ただし、この条件は変動成分に非常に敏感であり、実用的レベルにおいては用いることが困難となることが多い。

この解析的であるとする仮定は、画像再構成方法の技術の研究の初期の段階より常に問題とされていた。例えば、超解像の場合のみならず、CT全般の技術の出発点の一つともなったといえるCormackの論文[23]に示された画像再構成の方法自体、まさにこのような性質を仮定して初めて導かれるものであった。そこでは、投影と被写体との関係が、チェビシェフ関数による展開として表され、チェビシェフ関数の解析的性質を最初に仮定した領域を越えて延長すること、すなわち解析接続をすることにより再構成が行われるのである。このようなことを考えると、真の意味における超解像問題を考察するためには、投影データや被写体分布の解析性が、問題解法のための条件として成立するとして良いかについてのより基本的な立場からの検討が重要であると思われる。

3. 解析性を利用した制限角度投影再構成法

純粋な数学的問題として捉えた場合（すなわち、全く変動成分の存在を仮定しないで、確定的な定式を得る場合）の制限角度再構成問題を考え、そのような場合連続的に分布したいくらかでも微小な角度範囲の投影からでも完全な再構成が可能であるような解を示すことが出来る[4]。したがって、このような再構成法を考える場合、いくらかでも小さい角度範囲の投影データであっても“完全投影”ということになる。

Fig.52に示すような座標系を定義する。被写体に対して固定した直交座標系をx-O-yとする。そのときの被写体分布を極座標で表して $f(r, \theta)$ とする。次にこの座標系x-O-yに対して、原点を中心に角度 ϕ だけ回転した新たな直交座標系をp-O-qと定義する。この被写体分布の投影関数 $g(p, \phi)$ は、q軸に沿った線積分として表すことができ、つまり、

$$g(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r, \theta) dq \quad (106)$$

となる。 $f(r, \theta)$ と $g(p, \phi)$ はそれぞれ角度 θ と ϕ に対して周期 2π の周期関数となっているので、それぞれの関数は以下のようにFourier級数展開ができる。

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) \exp(in\theta) \quad (107)$$

$$g(p, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(p) \exp(in\phi) \quad (108)$$

ここで、

$$f_n(r) = \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \exp(-in\theta) d\theta \quad (109)$$

$$g_n(p) = \int_0^{2\pi} g(p, \phi) \exp(-in\phi) d\phi \quad (110)$$

(107)式と(108)式を(106)式に代入し、計算することにより以下の関係式が導出される。

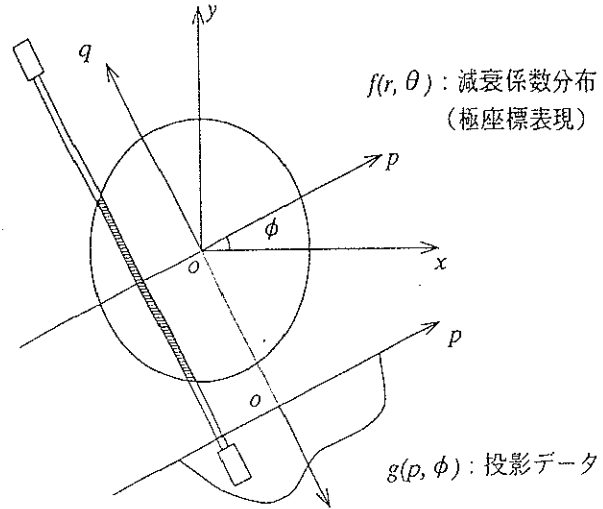


Fig.52 Cormackの画像再構成法の座標系

$$g_n(p) = 2 \int_p^\infty \frac{f_n(r) T_n(p/r)}{\sqrt{1-(p/r)^2}} dr \quad (111)$$

ここで、 $T_n(\cdot)$ は n 次の第一種チェビシェフ多項式である。これは、被写体分布をチェビシェフ関数で展開するときの展開係数として、投影関数が表されることを示している。

この積分方程式の $f_n(r)$ に関する1つの解は、Cormack[23]によって以下のように得られている。

$$f_n(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^\infty \frac{g_n(p) T_n(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2 - 1} \cdot p} dp \quad (112)$$

この式は以下のように考えることができる。

チェビシェフ多項式展開の式

$$f(x) = a_0 + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots$$

$$a_n = \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (113)$$

において、 $x=c/y$ とおくと

$$a_n = \int_c^\infty \frac{f(c/y) T_n(c/y)}{\sqrt{1-(c/y)^2}} \cdot \frac{c}{y^2} dy + \int_{-\infty}^{-c} \dots \quad (114)$$

となり、これより、Cormackの再構成の式を考えると、(111)式で求めた展開係数を用いて、チェビシェフ関数による合成を行う場合と類似の形式であることが分かる。しかし、注意すべきことは、チェビシェフ関数が完全直交系を構成する $[-1,+1]$ の外側に延長して用いられていることである。すなわち、解析接続されて定義されたチェビシェフ関数を用いて、投影から被写体分布が再構成されており、形式的にはTaylor展開によるものと全く同様な意味を表す定式である。

これらの式を(107)式に代入することによって、被写体分布 $f(r, \theta)$ が得られる。(112)式に注目すると、 r における $f_n(r)$ の値は r よりも大きい p における $g_n(p)$ の値のみを使って求めることができる。そこで、Fig.53に示すようにある角度の範囲で投影データがなく、被写体分布は斜線部分の中にあると仮定する。Fig.53において、中心の円の半径は被写体分布の大きさによって選ぶことができ、そして被写体分布はある有限領域の中に完全に含まれること（有限サポートの条件）を前提としている。この条件のもとでは、投影データのない角度範囲における被写体分布の投影データは、中心の円の内側に分布しているので、そのデータがなくても画像再構成が可能となる。また、角度制限を受けた投影関数 $g_0(X, \phi)$ は、被写体分布が斜線部分に含まれるように、角度 ϕ を変えずにシフトさせることができる。Fig.54に示すように、投影関数 $g_0(X, \phi)$ は(108)

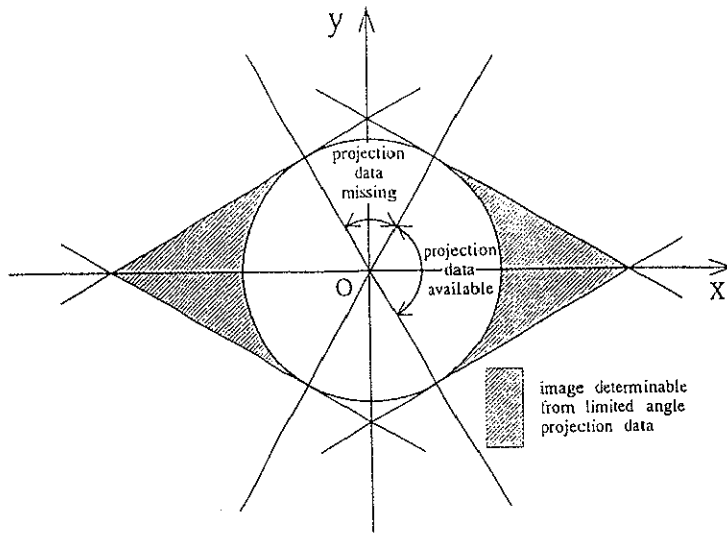


Fig.53 制限角度投影再構成問題における再構成可能領域

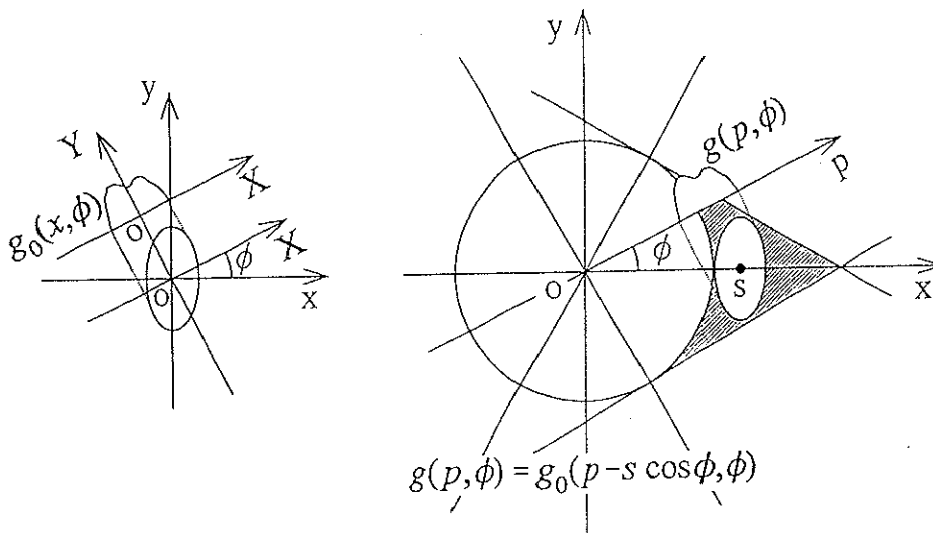


Fig.54 投影データの再構成可能領域へのシフト

式における $g(p, \phi)$ に以下の関係式によって変換することができる。

$$g(p, \phi) = g_0(p - s \cos \phi, \phi) \quad (115)$$

ここで、 s は斜線部分における移動した被写体分布の中心である。

投影データにこの変換を行った後、(112)式によって被写体分布のFourier係数が計算される。これは数学的には、チェビシェフ関数を使った動径方向の変数に関する解析接続を意味する。チェビシェフ関数は具体的には多項式の形で表されるので、同一のTaylor級数展開を与える同じ多項式をそのまま用いて、解析接続された関数を得ることができ、(112)式は実行可能となる。

CTのためのこの再構成法は、MRIにおける超解像にそのまま応用できる。MRIでは、計測データは被写体分布のFourier変換関数であり、これらが周波数空間 (k 空間) で直接計測さ

れる。そのとき、原点を通るある角度方向の直線上にデータを計測すれば、その一次元Fourier変換した関数は、CTにおける同じ方向の投影データと全く同一のものであることを示すことができる。したがって、投影再構成法を用いたMRIにおいてk空間の原点のまわりのある角度方向の成分のみのデータを収集して、これをもとに再構成することは、CTにおける制限角度投影再構成問題と等価になる。よって、k空間データのFourier逆変換である実空間における被写体分布を示す関数が、有限サポートを持つ分布であるという条件を用いることにより、前述の通り如何に微小な角度範囲のデータからでも確定的な解を出すことが出来る。

この方法の、解析接続されたチェビシェフ関数を用いた計算では、具体的に(112)式を実行せねばならない[2]。n次のチェビシェフ関数 $T_n(\cdot)$ は、その次数nを最高次数として持つ多項式として表される。このため、(112)式を計算するのに用いられる $[-1,+1]$ の外側へ解析接続されたこの関数は、きわめて大きな値をとり、一般に計算結果に大きな誤差を与える。しかしながら、具体的な演算を次のように変形することにより比較的誤差の拡大の少ない安定な解法にすることができる。すなわち、被写体分布が有限領域に存在しているという当然の条件を利用することにより、被写体の動径成分の小さな領域も比較的精度よく求めることを可能とすることができる。次に、このような具体的な応用に際して発生する問題点の解決法について述べる。

(112)式において、積分の上限を $g_n(p)$ が0でない最大の値 p_c とし、ある r_s において、 r_s よりも少し大きな値を p_s として $f_n(r_s)$ の値を Δr を用いて計算すると以下のように考えることができる。

$$-\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{\infty} \frac{gn(p)Tn(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2-1} \cdot p} dp \quad (116)$$

上式において、実際の積分は有限範囲までであるので、これを p_c とすると

$$-\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{p_c} \frac{gn(p)Tn(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2-1} \cdot p} dp \quad (117)$$

を求めることになるが、これは積分の下限が変数となっているので積分の内に微分をそのまま入れることが出来ず、次のように変形される。すなわち定義にしたがって、これは

$$-\frac{1}{\pi} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left\{ \left[\int_{r+\Delta r}^{p_c} \frac{gn(p)Tn(p/(r+\Delta r))}{\sqrt{(p/(r+\Delta r))^2-1} \cdot p} dp - \int_r^{p_c} \frac{gn(p)Tn(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2-1} \cdot p} dp \right] / \Delta r \right\} \quad (118)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left\{ \left[\int_{r+\Delta r}^{p_c} \frac{gn(p)Tn(p/(r+\Delta r))}{\sqrt{(p/(r+\Delta r))^2-1} \cdot p} dp - \int_{r+\Delta r}^{p_c} \frac{gn(p)Tn(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2-1} \cdot p} dp - \int_r^{r+\Delta r} \frac{gn(p)Tn(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2-1} \cdot p} dp \right] / \Delta r \right\} \quad (119)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left\{ \int_{r+\Delta r}^{p_c} \frac{\partial}{\partial r} \frac{gn(p)Tn(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2-1} \cdot p} dp - \left[\int_r^{r+\Delta r} \frac{gn(p)Tn(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2-1} \cdot p} dp \right] / \Delta r \right\} \quad (120)$$

のように変形され、さらに第一項の積分下限の r はfixした値に対するものとせねばならず、これ

を p_s とすれば、以下のような2つの形の計算となる。

$$\int_r^{r+\Delta r} \frac{gn(p)T_n(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2-1} \cdot p} dp \quad (121)$$

$$\int_{p_s}^{p_e} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{T_n(p/r)}{\sqrt{(p/r)^2-1}} \right] \frac{gn(p)}{p} dp \quad (122)$$

(121)式においては $p/r \approx 1$ であるから、チェビシエフ関数 $T_n(p/r)$ を1のまわりで展開して近似することにより、実際に計算が可能となる。但し、この近似を用いるとき、チェビシエフ関数を50次ぐらいまでとると、 Δr は 10^{-6} 程度でなければならず、 $gn(p)$ における p のきざみ幅は画像領域の 10^{-6} 程度と細かくとらなければならなくなる。(122)式の計算は、 r の小さいところで p/r の値が大きくなるので、チェビシエフ関数の値が次数の大きいところで、非常に大きな値をとる。このため、定式の成立を乱す変動成分の存在に敏感であり、従って定式に従った計算を正しく実行するためには、それに見合った精度が必要となる。それを少しでも緩和するために、以下のことを行う。画像領域のかからないくらい内側に r_0 を取ると、 $f_n(r_0)$ の値は零となることが自明であるから、 $r=r_0$ における(122)式の値は実際の積分計算を行わずに求めることができる。この結果を用いて、(122)式を計算することにより、積分における誤差を抑えることができる。

以上のように、解析性を利用したいいわゆる不完全投影再構成法の同一の定式であっても、具体的なアルゴリズムにより、その変動成分伝播の様子は大きく異なったものとなる。すなわち、このような逆問題解法の意義は、具体的な演算の内容によって著しく影響され、基本の定式の形によってのみ決定されるものではないことに注意せねばならない。

4. 解析的性質の有効性

いわゆる不完全データからの画像再構成では、直接的表現では欠落している部分のデータを如何に作成するかが問題である。ここでは、このような場合、最も一般的に用いられる解析的な条件が、実際のデータを用いるときに、どの程度まで利用できるかについて簡単なモデルを用いて調べてみる。二次元の問題として、ある標本点に対し、 $h(x,y)=\text{sinc}(x)\text{sinc}(y)$ なる関数を重畳した実関数を考える。 $\text{sinc}(x)$ の関数は、複素平面で考えて $w=\text{sinc}(z)$ とした場合、よく知られているように無限遠点を除いて全領域で正則（解析的）である。ここで、正則とは、複素平面上のいずれの方向からの導関数も一致することを保証するものである。したがって、実軸上を含めて任意の点において収束半径が無限大のTaylor級数に展開できる。よって、前述の関数 $h(x,y)$ を重畳した実関数もTaylor級数に展開できる。この関数が原点の近くのみで与えられているものとしたとき、解析的であるとする条件だけで、原点から隔たった位置における値がどの程度正確に決定できるかという一種の再構成問題を考える。

まず、以下のような標本点分布 $f(x,y)$ を考える。

$$\left(\begin{array}{l} f'(1,1) = 1.0, f'(2,1) = 2.0, f'(3,1) = 1.0 \\ f'(1,2) = 1.0, f'(2,2) = 2.0, f'(3,2) = 1.0 \\ f'(1,3) = 1.0, f'(2,3) = 2.0, f'(3,3) = 1.0 \\ f'(x,y) = 0.0 \quad x,y : \text{otherwise} \end{array} \right) \quad (123)$$

それに $h(x,y)$ を重畳すると、

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x',y') h(x-x',y-y') dx' dy' \quad (124)$$

のようになる。この関数の鳥瞰図をFig.55に示す。

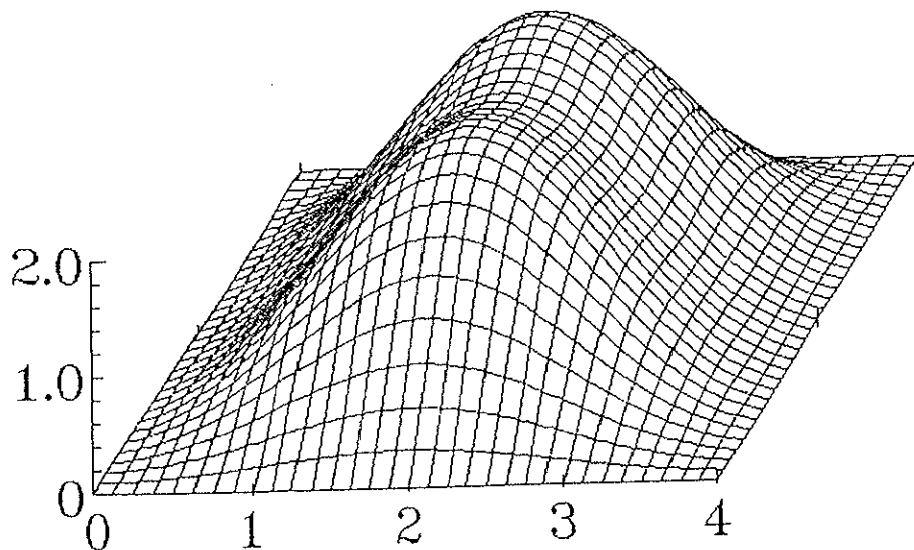


Fig.55 仮定した関数の鳥瞰図

次に、その展開係数を決定するための高次導関数を求め、それをもとに原点より遠くはなれた点における関数の値を調べる。

この関数を原点を中心に等間隔に0.001刻みでサンプリングし、その値を用いてサンプリング区間よりも外側を推定することを試みる。この関数の解析性を利用し、原点における導関数を通常の階差式による表現を用いて以下のように順次求める。

$$\begin{aligned}
 f_x(0,0) &= \frac{1}{2h} [f(h,0) - f(-h,0)] \\
 f_y(0,0) &= \frac{1}{2h} [f(0,h) - f(0,-h)] \\
 f_{xx}(0,0) &= \frac{1}{h^2} [f(h,0) - 2f(0,0) + f(-h,0)] \\
 f_{xy}(0,0) &= \frac{1}{4h^2} [f(h,h) - f(-h,h) - f(h,-h) + f(-h,-h)] \\
 f_{yy}(0,0) &= \frac{1}{h^2} [f(0,h) - 2f(0,0) + f(0,-h)] \\
 &\vdots \quad (h=0.001)
 \end{aligned} \tag{125}$$

それを以下に示す原点におけるTaylor展開の式に代入する。

$$\begin{aligned}
 f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{1!} \left[x \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} + y \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left[x^2 \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} \right] \\
 &\quad + \dots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[x \frac{\partial}{\partial x'} + y \frac{\partial}{\partial y'} \right]^n f(x',y') \Big|_{x'=0,y'=0}
 \end{aligned} \tag{126}$$

そして、仮定した関数を再現する。

これらの式を用いて、有効桁数が150桁の精度で、14次と55次導関数まで求めて仮定した関数の $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$ の領域を推定した画像の鳥瞰図と $y=2$ における x 方向のプロファイルを Fig.56 から Fig.59 に示す。14次導関数まで求めた画像では、途中から発散してしまうが、55次導関数まで求めると非常に正確に仮定した関数を再現しているのが分かる。次に、有効桁数が50桁の精度で、12次と14次導関数まで求めて仮定した関数を推定した画像の鳥瞰図と $y=2$ における x 方向のプロファイルを Fig.60 から Fig.63 に示す。計算精度を落とすと、計算仮定で混入する変動成分の影響を受けやすくなり、高次導関数を正確に求められなくなる。そのため、推定した画像は、14次導関数あたりで発散に転じている。

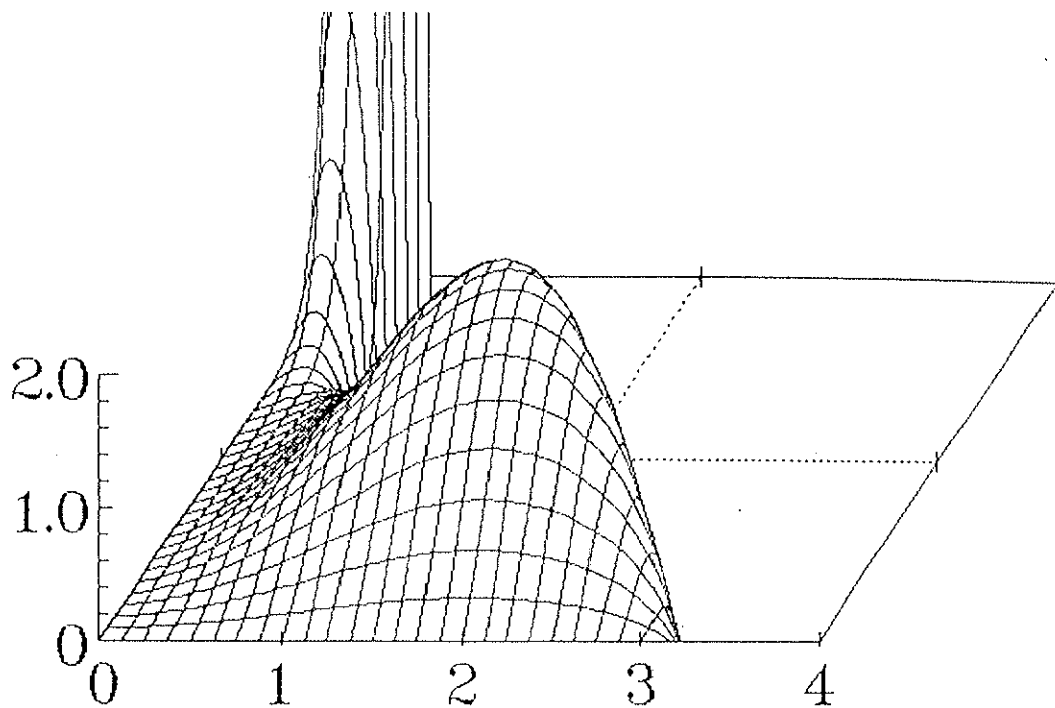


Fig.56 150桁精度で14次まで計算した画像の鳥瞰図

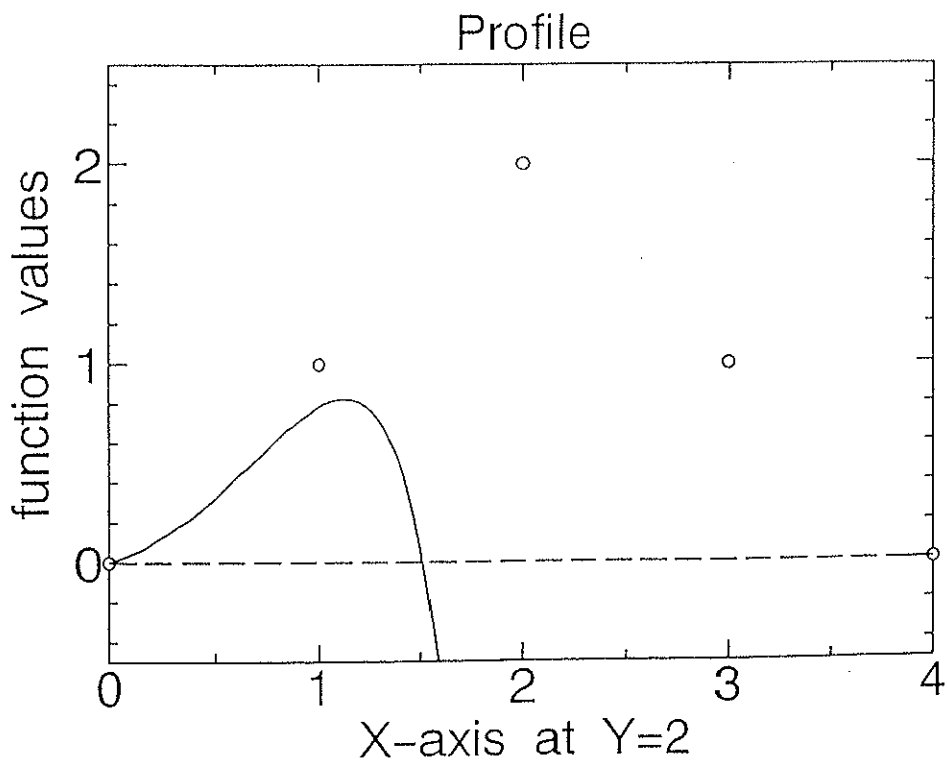


Fig.57 150桁精度で14次まで計算した画像のy=2におけるプロフィール

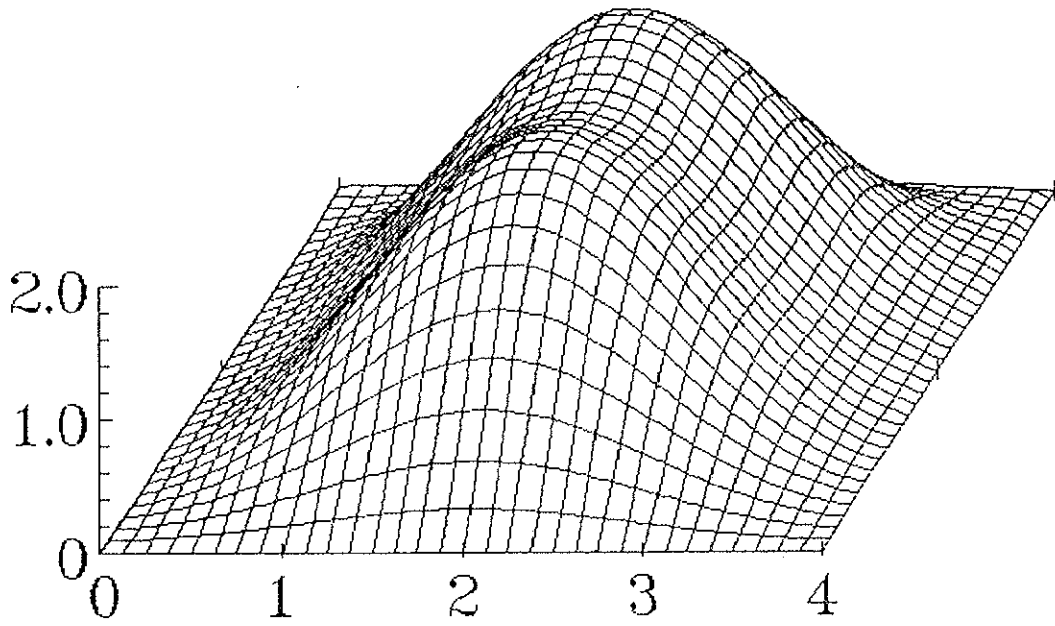


Fig.58 150桁精度で55次まで計算した画像の鳥瞰図

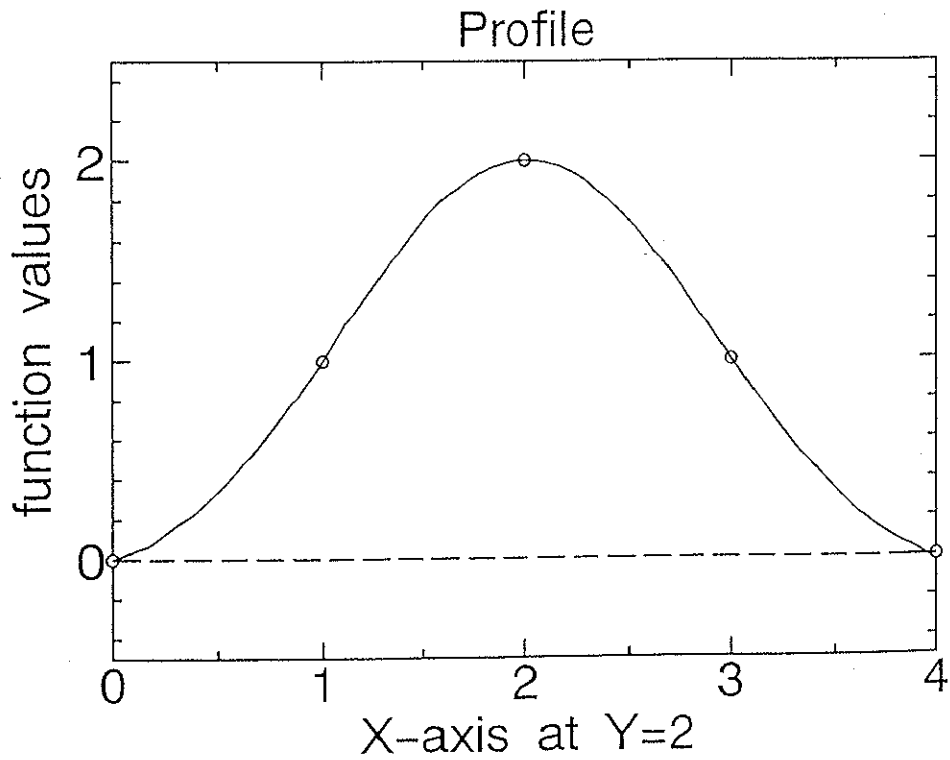


Fig.59 150桁精度で55次まで計算した画像の $y=2$ におけるプロフィール

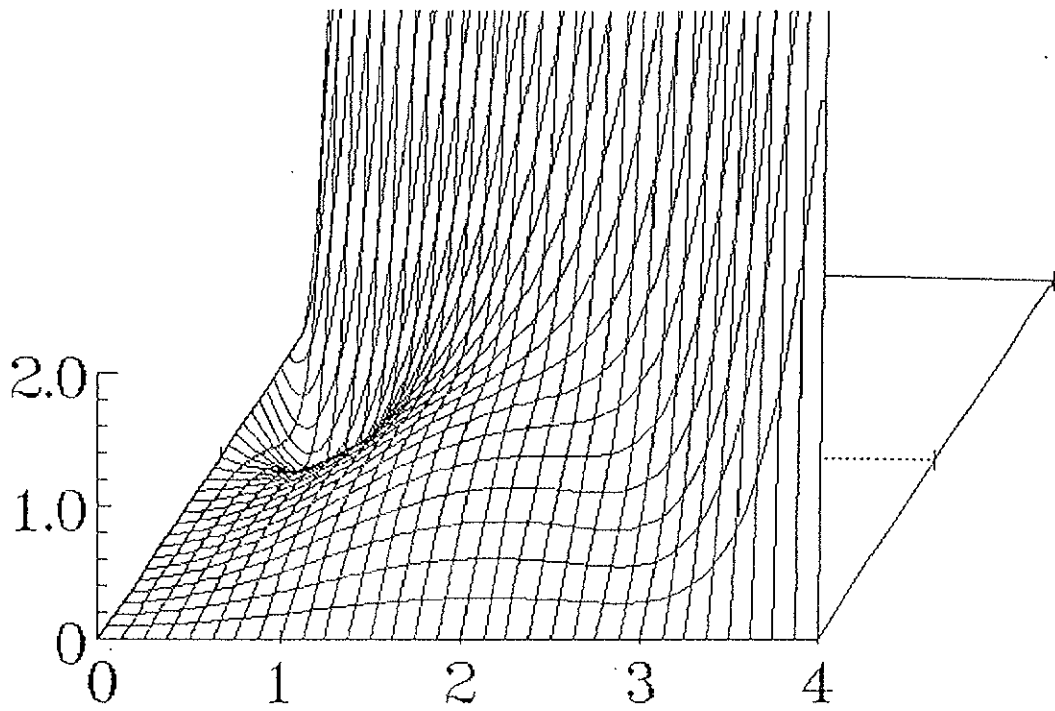


Fig.60 50桁精度で12次まで計算した画像の鳥瞰図

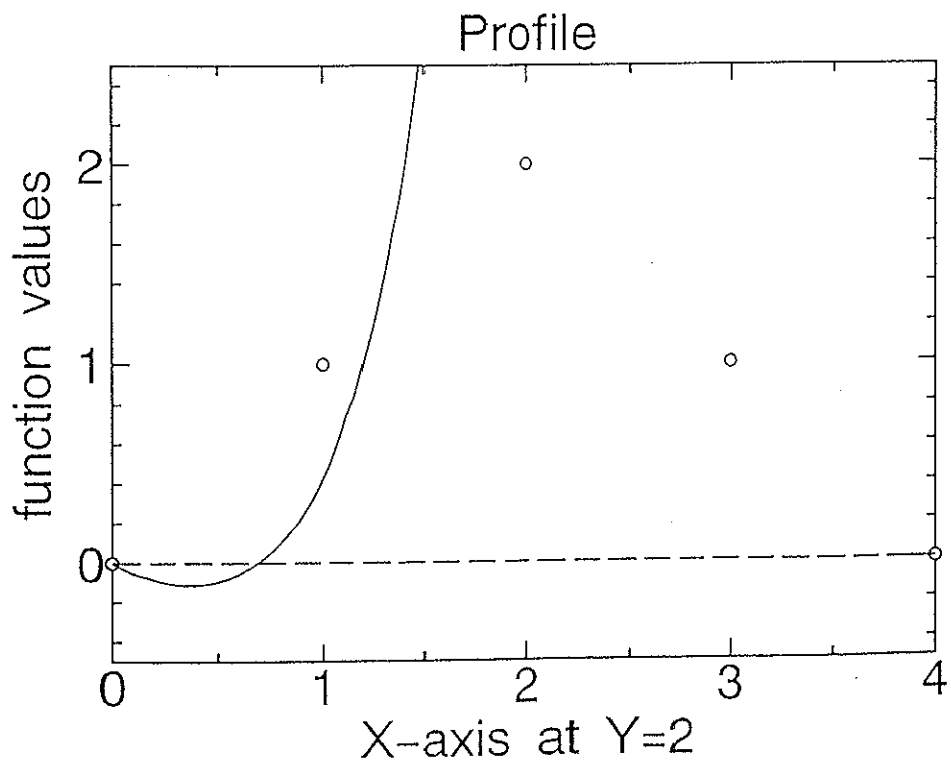


Fig.61 50桁精度で12次まで計算した画像のy=2におけるプロフィール

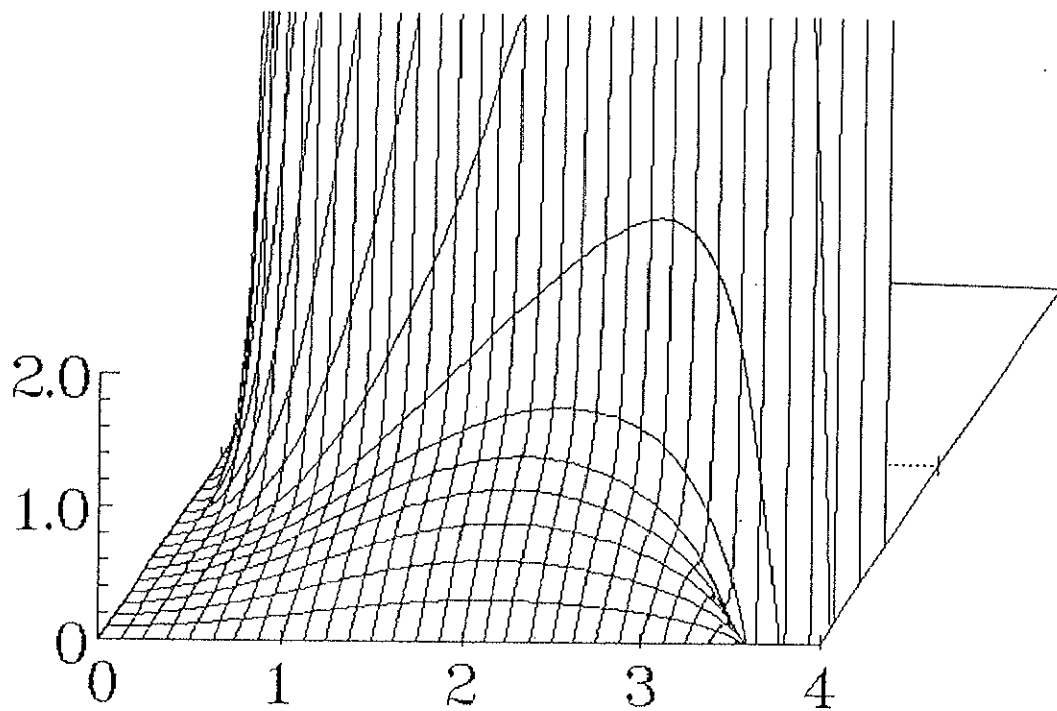


Fig.62 50桁精度で14次まで計算した画像の鳥瞰図

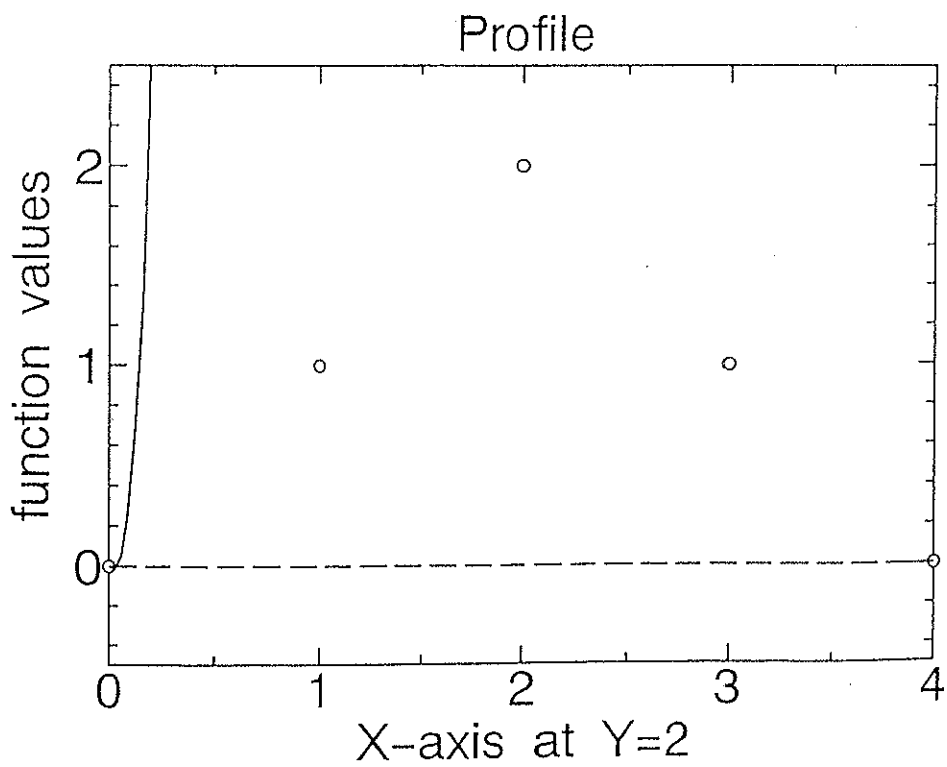


Fig.63 50桁精度で14次まで計算した画像の $y=2$ におけるプロフィール

このように、画像関数が解析的である場合、十分な計算精度があれば一部のデータからでも、関数の解析性を利用して、画像関数を再現することができる。変動成分のない、すなわち雑音を含まないデータについては、もちろん計算で用いる有効桁数に関する変動成分の混入は当然存在するのでその影響は考慮せねばならないが、その場合十分な計算精度のもとでは以上のような解析的条件は比較的高次まで利用でき、それを再構成における条件として用いることができる程度可能である。一般に数学的定式では変動成分を含めていないので、それらを有限回積み重ねたとしても、結果の論理の正当性は常に保証されている。

しかし、計算精度が落ちると計算過程で混入する変動成分によって、画像関数を再現することが困難になる。したがって、実用的な精度が要求される場合では、このような解析性の条件を使うことによりこの再構成問題の解法が得られるとすることは困難であるということになる。

さらに、実空間においてはもっと根本的なところに問題がある。ここでは、画像関数を解析的であると仮定し、シミュレーションを行なったが、一般に実空間における画像関数は、解析的であるとはいえない。したがって、実空間で画像関数の解析性を用いた再構成法は、実際には使用することができないことになる。そこで、画像関数のFourier変換関数を考えると、画像関数は一般には有限サポートなので、そのFourier変換関数の解析性が保証される。これを利用して、Fourier空間で直接データが取られるMRIへの応用を考えた。第3節でこれを詳しく述べる。

第3節 磁気共鳴映像法における超解像問題

1. 磁気共鳴映像法の原理

磁気共鳴映像法(MRI)は、被写体分布を $f(x,y)$ とすると

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dY \quad (127)$$

という形で信号が取られることは、第2章で述べた。しかし、現在の通常のNMR計測法であるパルス・フーリエ変換法によるデータ収集では、(127)式に示す周波数 ω の関数は計測されず、 $S(\omega)$ のFourier変換であるFIDやエコーのような時間 t の関数が直接の計測対象となる。このFourier変換は基準の周波数 ω_0 に対する相対的な値について得られるので、したがって、 θ 方向への線型勾配磁場の印加のもとで計測される信号は、

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega \quad (128)$$

と表されることになるが、一方この信号は、逆Radon変換の関係式と(127)式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(X, \theta) e^{-i\gamma GXt} dX = F(\gamma Gt \cos\theta, \gamma Gt \sin\theta) \quad (129)$$

に比例したものとなる。すなわち、このような信号の計測により、被写体分布を示す関数の二次元Fourier変換の原点を通る線型勾配磁場方向の直線上の関数値が、そのまま読み出される。この議論から明らかなように、たとえば x 、および y 方向にそれぞれ G_x および G_y の強度を持つ線型勾配磁場を、時間 t_x 、および t_y の間、印加した後には得られる信号は、被写体のFourier変換 $F(\xi, \eta)$ の

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma G_x t_x \\ \eta &= \gamma G_y t_y \end{aligned} \quad (130)$$

における関数値を与える。したがって、たとえば y 方向へ G_y の強度の線型勾配磁場を t_y の間与えた後、 x 方向に G_x の強度の線型勾配磁場に切り替えて、そのあとの時間信号を読みだすならば、被写体 $f(x,y)$ の二次元Fourier変換 $F(\xi, \eta)$ の $\eta = \gamma G_y t_y$ の直線上の値が

$$s(t_x) = F(\gamma G_x t_x, \gamma G_y t_y) \quad (131)$$

として、FIDやエコーの信号を通じて読み出されることになる。このため、はじめの y 方向への線型勾配磁場の強度と印加時間の積を種々の値に変化させて同様な操作を繰り返せば、被写体の二次元Fourier変換関数を、 x 軸に平行な直線群の上で求めることができる。現在の最も一般的なMRIでは、このような形で画像の基礎となるデータを収集している。ここで、線型勾配磁場の印加の前者の過程を“位相エンコード(phase encoding)”、また後者の過程を“読み出し(read out)”と呼んでいる。

このような方法で被写体の二次元Fourier変換の直交座標表現の標本点が求められれば、この

Fourier逆変換を高速Fourier変換 (FFT) を直接適用して、きわめて高速に、また容易に実行し、再構成画像を得ることができる。この“Fourier変換”法と呼ばれる方法の一般的な理論は、Kumarら[24]によって発表された。それによれば、空間のx,y,z方向へ、それぞれ $G_x(t), G_y(t), G_z(t)$ と表される強度の線型勾配磁場を t_x, t_y, t_z の間与えた後に得られる横磁化ベクトルの示す位相角は、

$$\begin{aligned} k_x &= \gamma \int^{t_x} G_x(t) dt \\ k_y &= \gamma \int^{t_y} G_y(t) dt \\ k_z &= \gamma \int^{t_z} G_z(t) dt \end{aligned} \quad (132)$$

により表され、三次元被写体分布 $f(x,y,z)$ に対し、

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dx dy dz \quad (133)$$

に対応した関数値が読み出される。

以上の説明から明らかなように、MRIの画像データは、被写体分布のFourier変換領域の関数値を、線型勾配磁場ベクトルを印加時間に応じて種々に変化させることにより走査して得ることができる。したがって、MRIの具体的な画像再構成方法は、被写体のFourier変換領域の走査の内容を示すことにより明瞭となる。たとえば、二次元の場合では、Fig.64に示すように平面内の直交座標系における格子点を標本点としてデータを取得するように、直交するx,yの2方向への線型勾配磁場を作用させるのが、二次元Fourier変換法であり、またFig.65に示すように極座標系の格子点を放射状に走査するのが投影再構成法である。さらに、エコープラーナ法と呼ばれる代表的な高速撮像法の場合では、定常的に印加する1方向と、これに垂直方向で短時間に交互にその向きを変える線型勾配磁場を印加する。このようにして、わずかの時間内に被写体のFourier変換領域の必要な範囲全体をFig.66に示すようにジグザグに走査して、1回の走査で1枚の画像再構成に要する全データを取得することを目標としているが、このようなことも原理的には可能である。

また、実関数の二次元Fourier変換の複素共役条件から

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{F(\omega, \theta)\} &= \operatorname{Re}\{F(\omega, \theta + \pi)\} \\ \operatorname{Im}\{F(\omega, \theta)\} &= -\operatorname{Im}\{F(\omega, \theta + \pi)\} \end{aligned} \quad (134)$$

のような関係がある。ここで、実関数 $f(x,y)$ に対する二次元Fourier変換関数 $F(\omega, \theta)$ は

$$F(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)} dx dy \quad (135)$$

のように表される。この関係を用いてFig.67に示すようにFourier空間の半分の領域のみから再構成を行なうhalf-plane reconstructionという方法がある。この方法によって、データを取得する領域が半分になるが、Fourier空間では実数部と虚数部の両方のデータを取得するので、情

報量としては変わっていないことが分かる。よって、このhalf-plane reconstructionは一般に必要とされる最小限のデータから再構成を行なっているといえる。

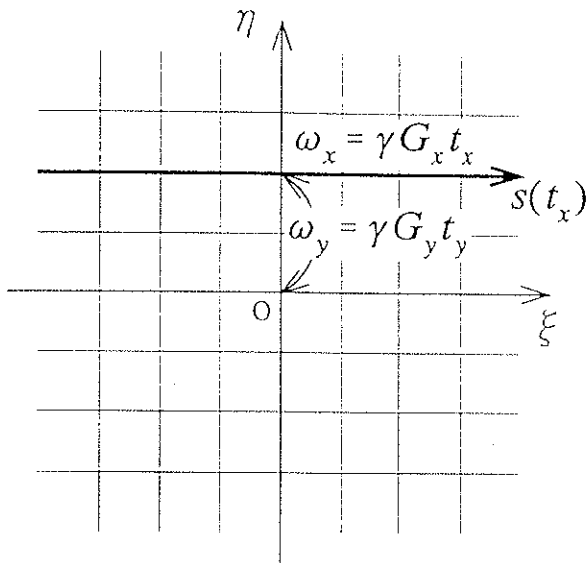


Fig.64 二次元Fourier変換法

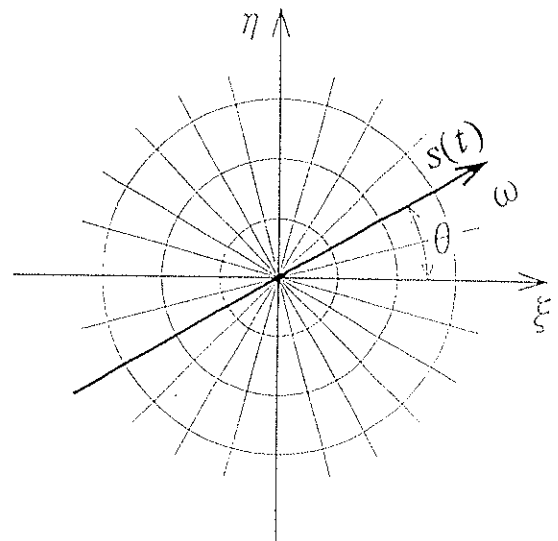


Fig.65 投影再構成法

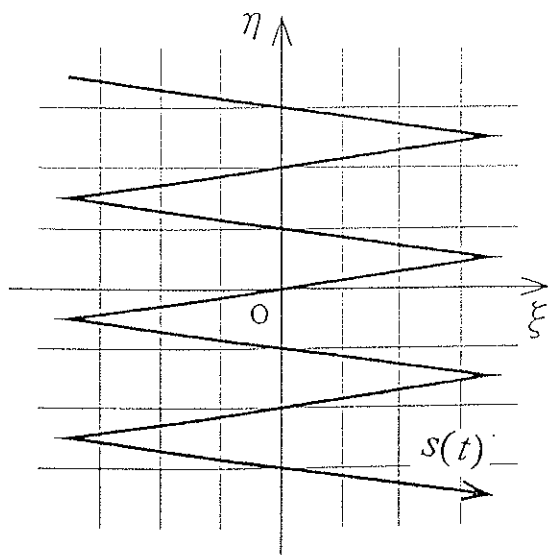


Fig.66 エコープラナー法

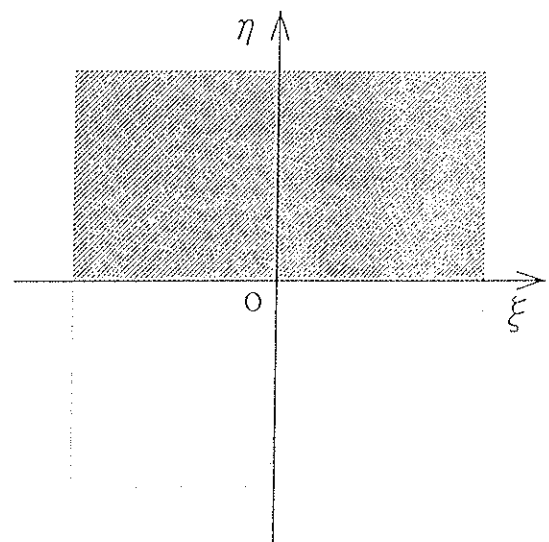


Fig.67 half-plane reconstruction
 斜線部分：測定領域
 (実数部と虚数部)

2. Fourier変換関数の解析性と超解像問題

MR Iにおいては、データはFourier空間で計測される。一般に被写体の断層像である実空間における画像は、ある領域内に収まっており、その領域の外側はすべて零であるという有限サポートの条件が成り立っている。この有限サポートの領域が、一辺が1の正方領域であると仮定すると、画像関数 $f(x,y)$ は

$$f(x,y) = f'(x,y) \cdot \text{rect}(x) \cdot \text{rect}(y) \quad (136)$$

のように定義できる。ここで、 $f(x,y)$ は領域制限のない適当な関数であり、 $\text{rect}(x)$ は

$$\begin{aligned} \text{rect}(x) &= 1 & : & \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right) \\ &= 0 & : & \textit{otherwise} \end{aligned} \quad (137)$$

と表される。これを二次元Fourier変換したFourier変換関数 $F(\xi, \eta)$ は、

$$F(\xi, \eta) = F'(\xi, \eta) ** [\text{sinc}(\xi) \cdot \text{sinc}(\eta)] \quad (138)$$

のように表すことができる。ここで、 $F'(\xi, \eta)$ は $f(x,y)$ のFourier変換関数であり、**は二次元のコンボリューションを意味している。また、 $\text{sinc}(x)$ は、

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (139)$$

のように表される。 sinc 関数は解析関数なので、それをコンボリューションした関数 $F(\xi, \eta)$ は解析関数となる。このように、有限サポートである画像関数のFourier変換関数は解析関数となり、その関数の解析性が保証されることになる。

つまり、MR Iにおいては、計測された関数が、Fourier空間でTaylor展開できることになる。二次元で考えて、被写体分布を $f(x,y)$ とし、そのFourier変換関数 $F(\xi, \eta)$ が計測されるものとする。この $F(\xi, \eta)$ が変数 ξ, η に関して解析的であるとすると、すなわちこれがデータ平面内のある一点 (ξ_0, η_0) の周りにTaylor展開できるものとするならば、データ平面内の一部の領域から離れた位置のデータを構成できることになる。したがって、雑音が存在しない理想的な場合であるならば、幾らでも小さな領域からでも必要な全領域を構成することが可能となり、どのような微小な $\xi-\eta$ 面の領域でも完全データとなる。問題は、このような方法が実用的な環境でどの程度用いることが出来るかである。

3. Fourier空間における解析的性質の有効性

Fourier変換関数が解析的である場合に、これが超解像問題においてどの程度有効であるかを計算機シミュレーションで確認する。

まず、比較的単純な幾何学的配置の画像分布を仮定する。そのFourier変換関数が解析的であることを利用して、信号の強度な原点付近の微小領域を定め、それを中心にとられた標本点より高次導関数を数値的に精度良く求め、そこからTaylor展開の具体的な形を定める。これによりFourier逆変換に必要な領域のデータを決定し再構成を行う。

仮定した画像分布は、以下に示す点を通るそれぞれx方向に三角波状で、y方向に矩形波状の関数を考える。これを解析的にFourier変換して、 $F(\xi, \eta)$ を決定する。

$$\begin{cases} f(-1, 1)=1, f(0, 1)=2, f(1, 1)=1 \\ f(-1, 0)=1, f(0, 0)=2, f(1, 0)=1 \\ f(-1, -1)=1, f(0, -1)=2, f(1, -1)=1 \end{cases} \quad (140)$$

この画像分布にフィルタをかけた鳥瞰図と $y=0$ におけるプロファイルをそれぞれFig.68とFig.69に示す。このFourier変換関数 $F(\xi, \eta)$ の原点付近の値を0.001きざみでサンプリングし、その値から次に示す階差式によって、原点における導関数の値を導出する。

$$\begin{aligned} F_{\xi}(0,0) &= \frac{1}{2h} [F(h,0) - F(-h,0)] \\ F_{\eta}(0,0) &= \frac{1}{2h} [F(0,h) - F(0,-h)] \\ F_{\xi\xi}(0,0) &= \frac{1}{h^2} [F(h,0) - 2F(0,0) + F(-h,0)] \\ F_{\xi\eta}(0,0) &= \frac{1}{4h^2} [F(h,h) - F(-h,h) - F(h,-h) + F(-h,-h)] \\ F_{\eta\eta}(0,0) &= \frac{1}{h^2} [F(0,h) - 2F(0,0) + F(0,-h)] \\ &\vdots \quad (h=0.001) \end{aligned} \quad (141)$$

この導関数の値をもとに(126)式に示したTaylor展開の式を用いてFourier領域のデータを決定し、Fourier逆変換により再構成を行う。

約50桁のという十分な精度で計算した結果の8次、10次、12次、および14次の画像の鳥瞰図と、 $y=0$ でのプロファイルをそれぞれFig.70~Fig.77に示す。14次まで計算すると、仮定した画像分布をきれいに再構成しているのが分かる。14次の場合、Fourier空間でのデータは0.001刻みでサンプリングしているので、0.015幅の正方領域から8幅の画像領域を再構成していることになる。これは、ノイズがなく、十分な精度があれば、画像の約25万分の1という微小な領域のデータからでも再構成が可能であることを示している。

また、倍精度（約15桁精度）でも同様に計算を行なった。この場合、計算精度が制限されるので、この計算精度の範囲内で階差式を用いて微係数を求める必要があるので、刻み幅をそれに対応して広く取る必要がある。0.1刻みでサンプリングした場合、倍精度においても14次まで発散せずに再構成することができた。そのときの14次まで計算した結果の画像の鳥瞰図と $y=0$ でのプロファイルをFig.78とFig.79に示す。この場合、Fourier空間でのデータは0.1刻みでサンプリングしているので、画像の約25分の1の領域のデータから再構成していることになる。

さらに、それぞれの精度において、14次まで計算した結果の $y=0$ における $x=0,1,2$ の値を以下の表に示す。この結果から、倍精度でも刻み幅を広げて計算することにより、14次まで発散せずに計算でき、ほぼ仮定した画像に近くなることがわかる。

	50桁精度	倍精度	真値
$x=0$	1.9965	1.9987	2.0000
$x=1$	1.0022	0.8856	1.0000
$x=2$	0.0312	0.1058	0.0000

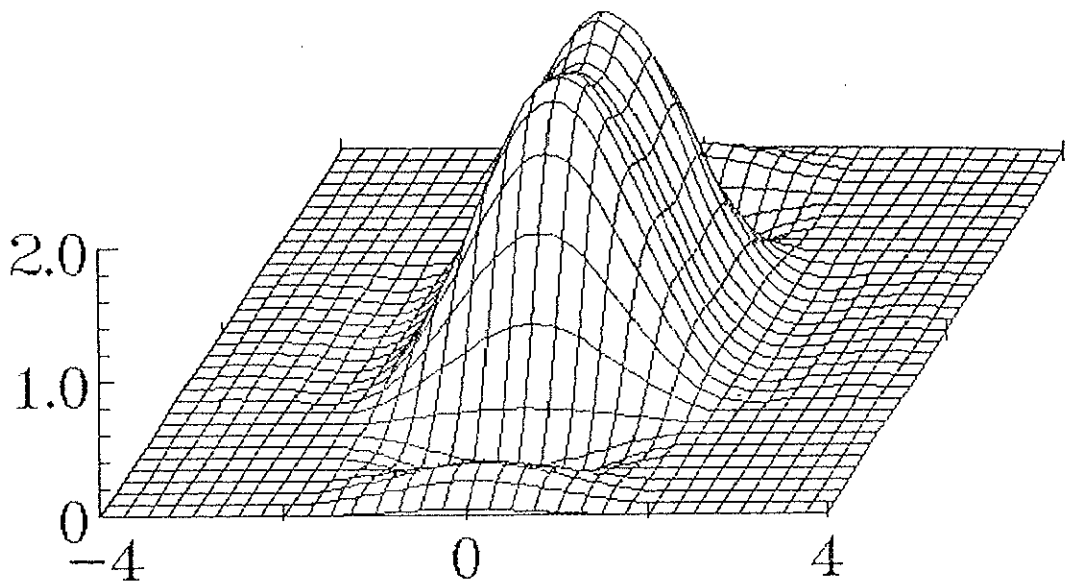


Fig.68 仮定した画像分布の鳥瞰図

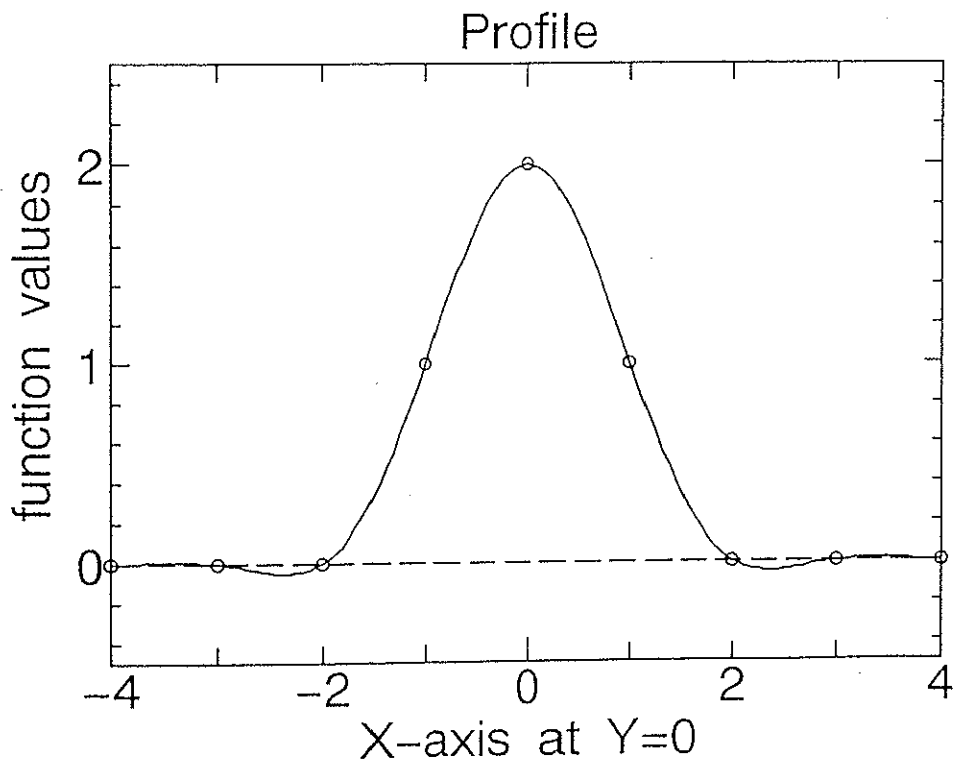


Fig.69 仮定した画像分布の $y=0$ におけるプロフィール

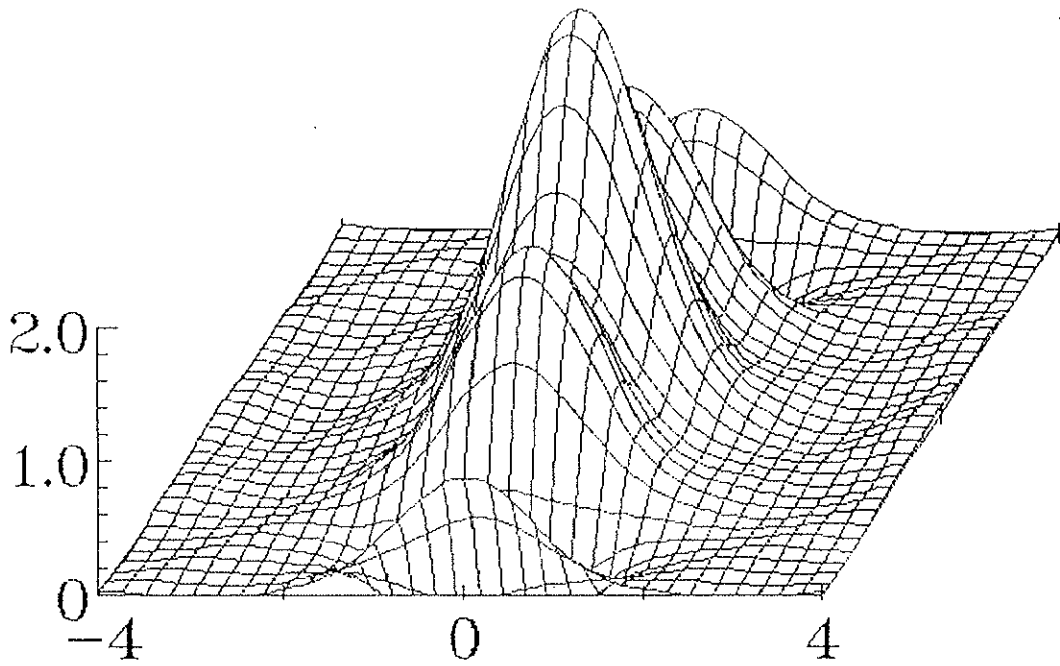


Fig.70 50桁精度で8次まで計算した画像の鳥瞰図

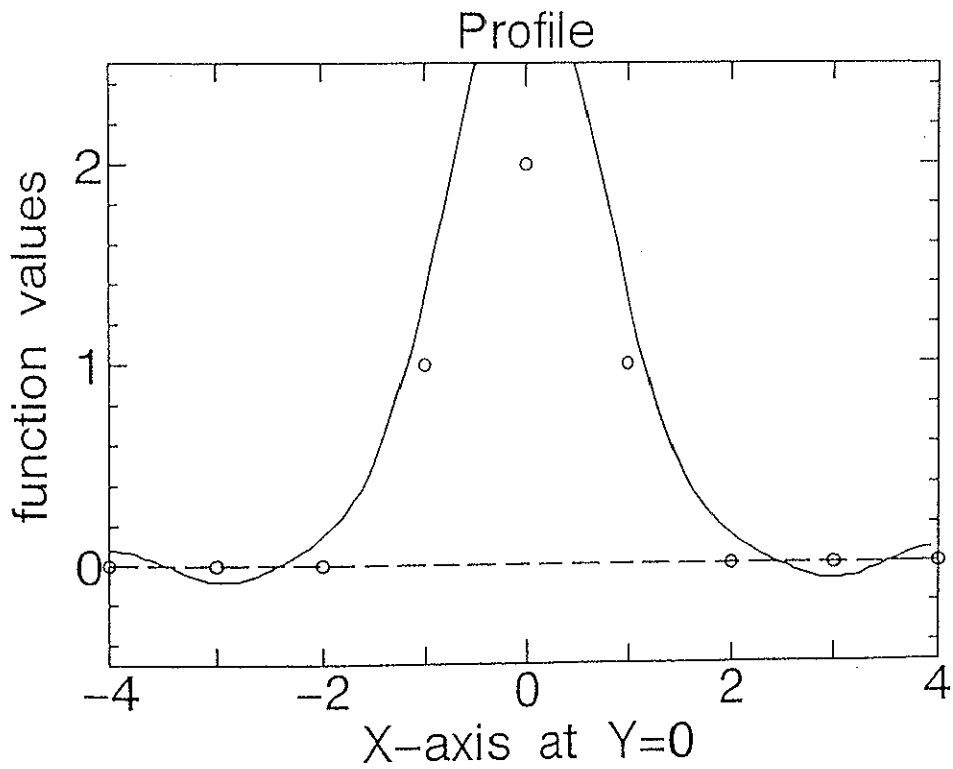


Fig.71 50桁精度で8次まで計算した画像のy=0におけるプロフィール

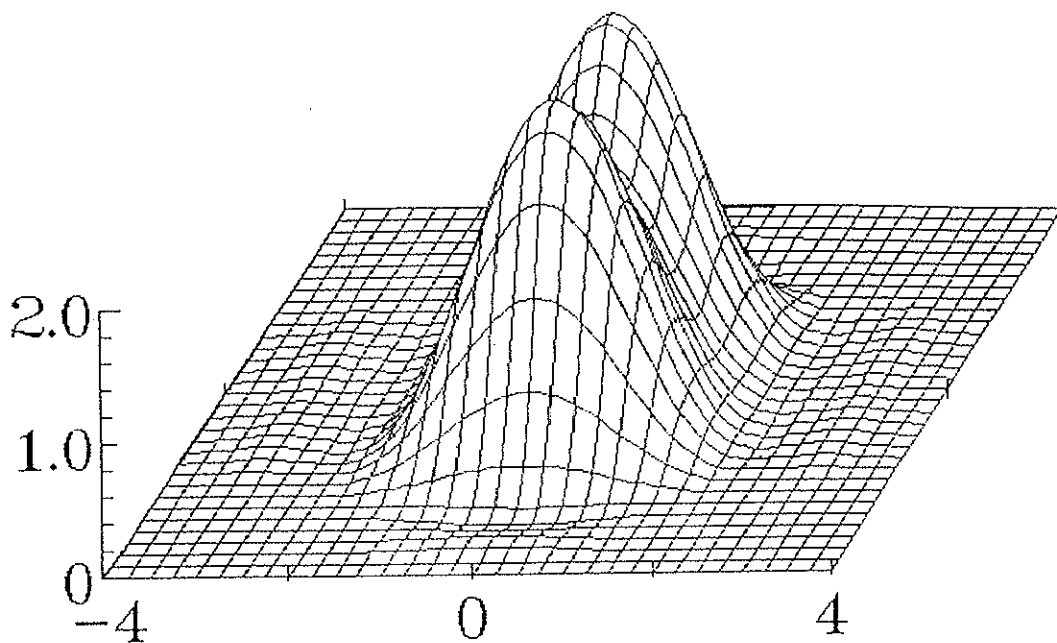


Fig.72 50桁精度で10次まで計算した画像の鳥瞰図

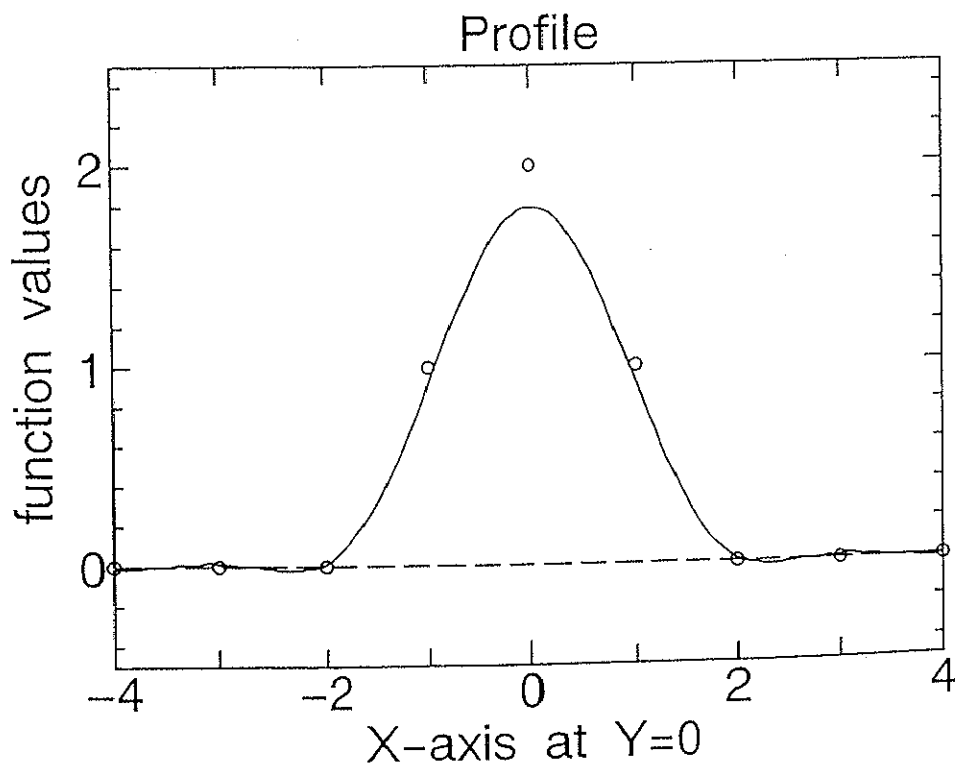


Fig.73 50桁精度で10次まで計算した画像の $y=0$ におけるプロファイル

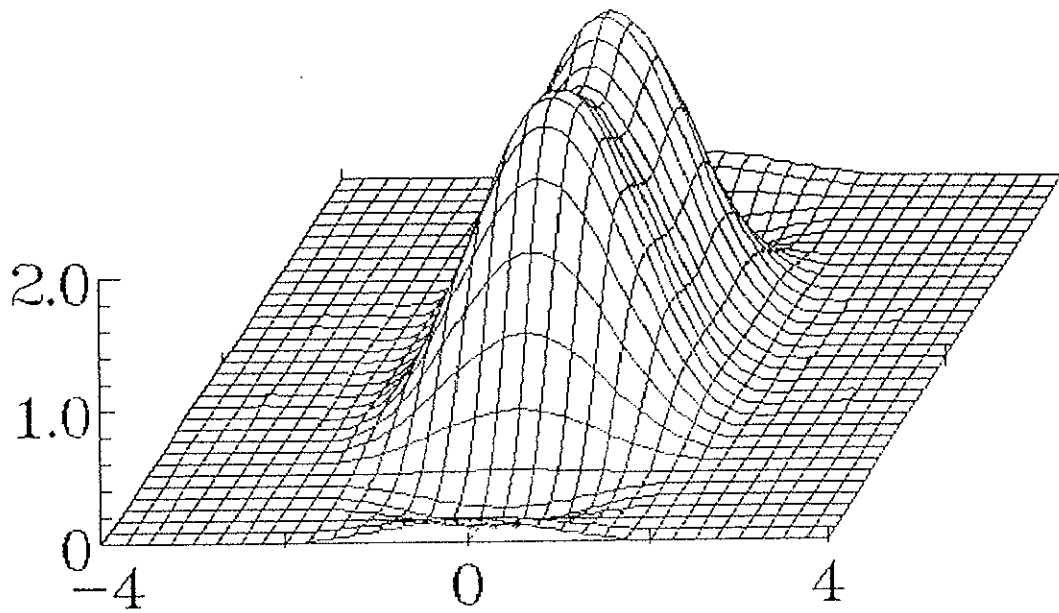


Fig.74 50桁精度で12次まで計算した画像の鳥瞰図

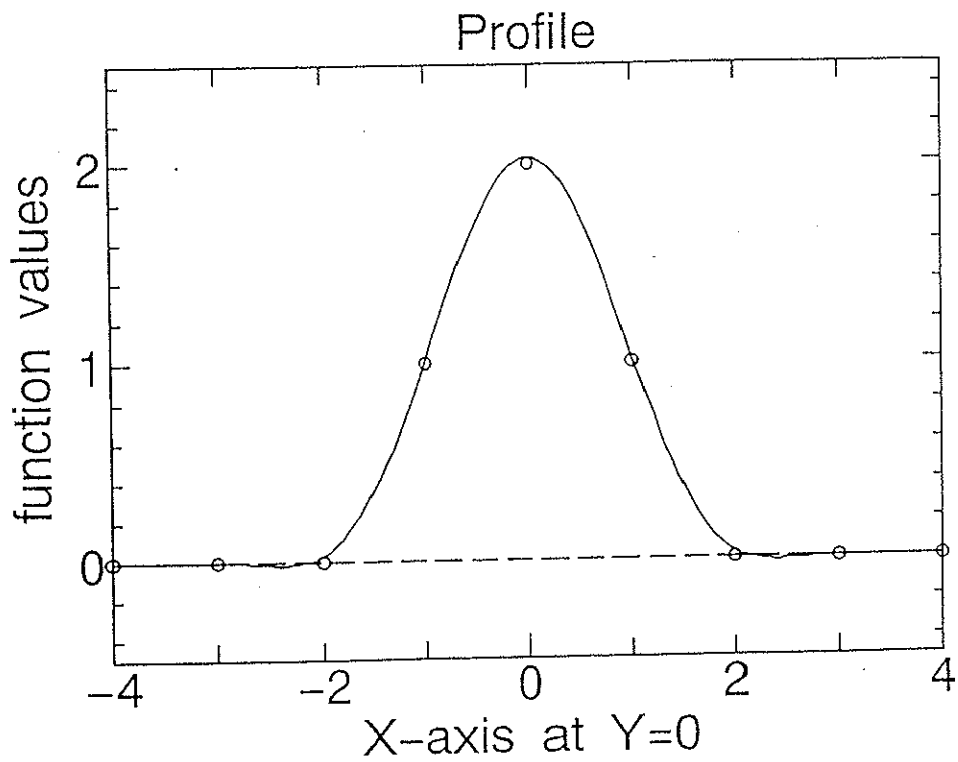


Fig.75 50桁精度で12次まで計算した画像の $y=0$ におけるプロフィール

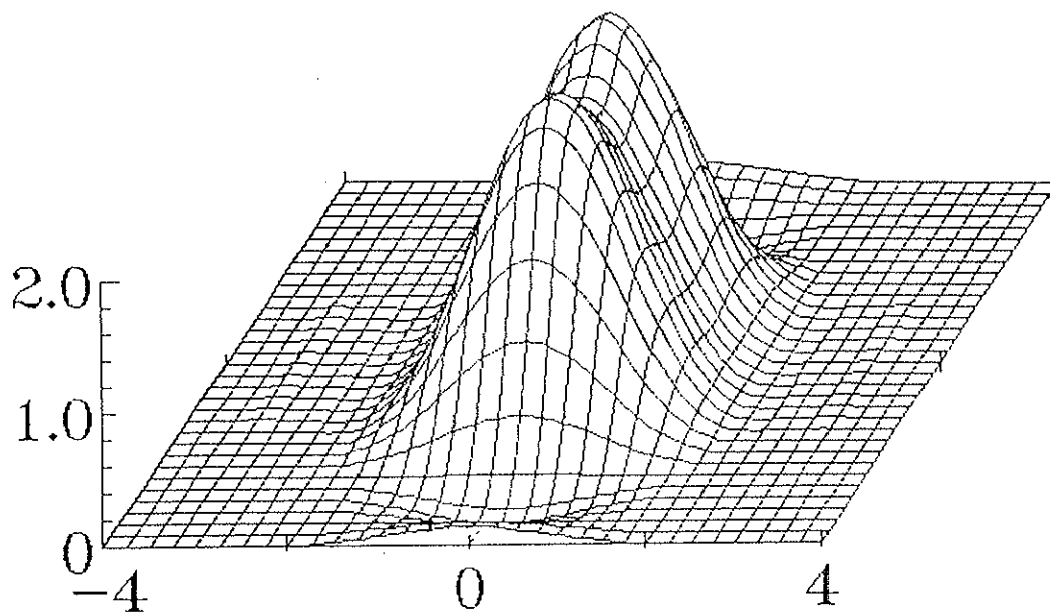


Fig.76 50桁精度で14次まで計算した画像の鳥瞰図

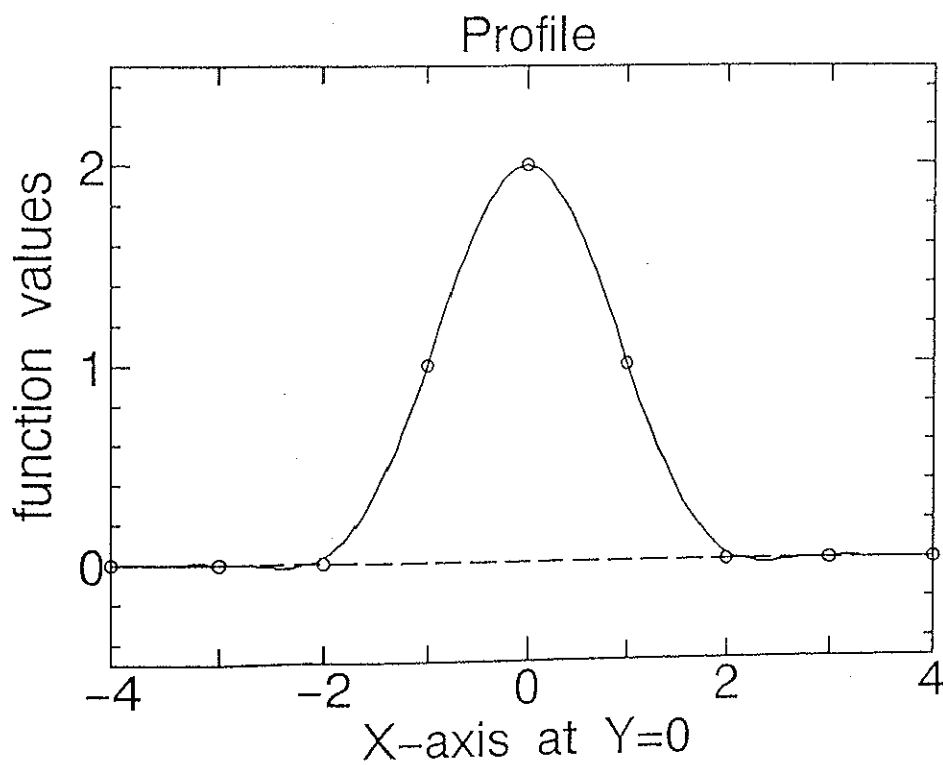


Fig.77 50桁精度で14次まで計算した画像のy=0におけるプロファイル

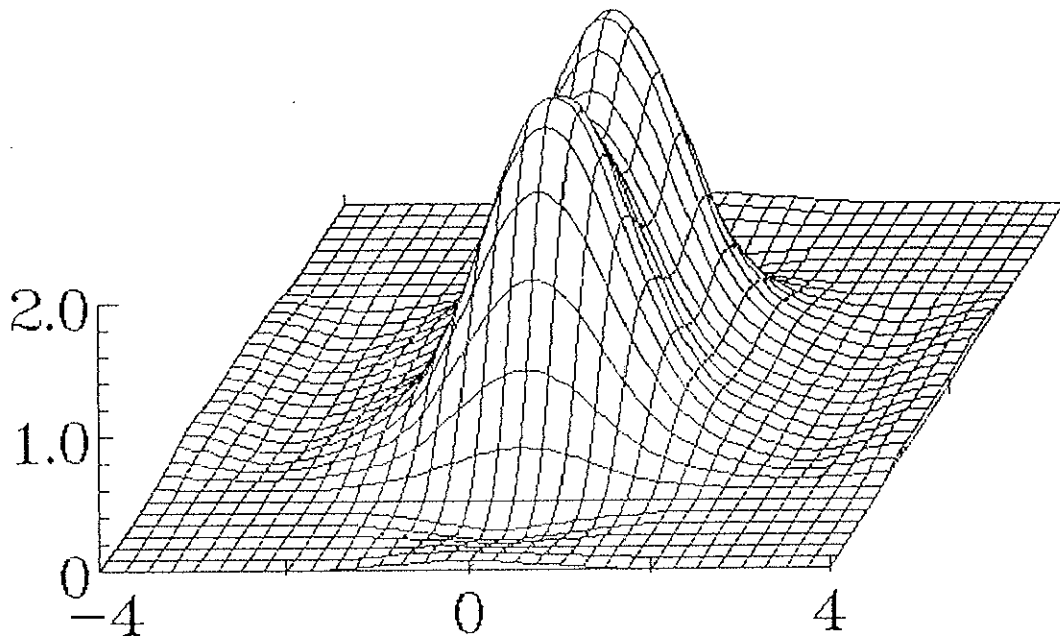


Fig.78 倍精度 (約15桁精度) で14次まで計算した画像の鳥瞰図

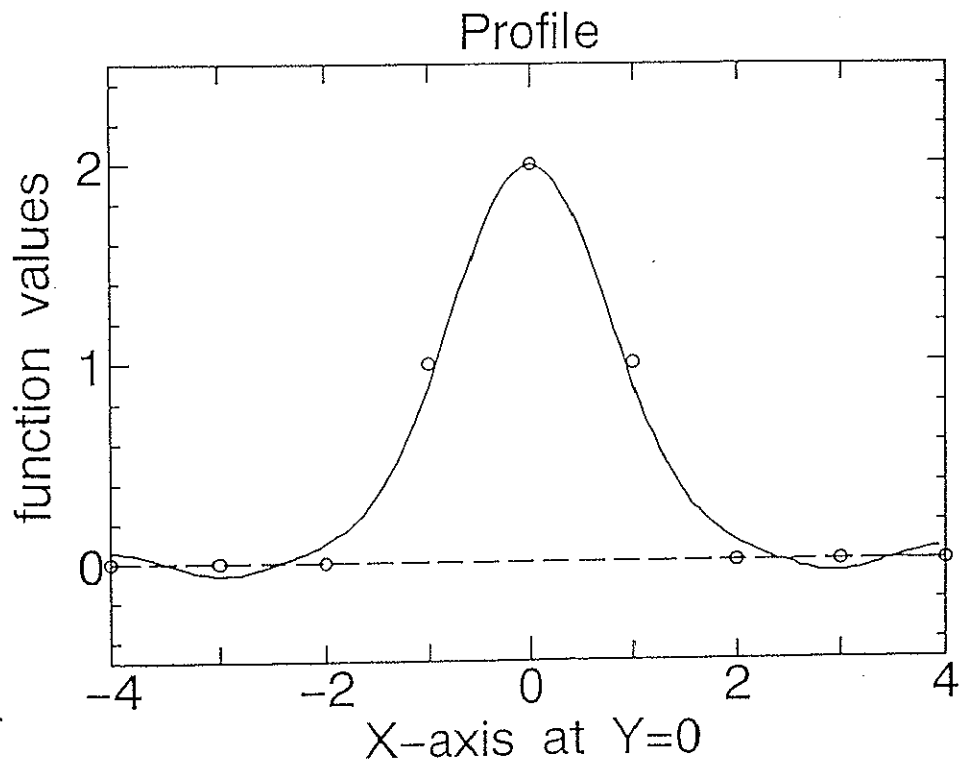


Fig.79 倍精度 (約15桁精度) で14次まで計算した画像の $y=0$ におけるプロファイル

次に、変動成分の混入によってどうなるかを調べるために、Fourier空間の原点付近の値を直接の計測対象と考え、あらかじめサンプリングした値に分散が原点の値に対して 10^{-10} 程度のガウス型の加法的雑音を重畳した場合を考える。0.1刻みでサンプリングしてTaylor展開の次数を10次と12次まで計算した場合の画像の鳥瞰図と $y=0$ でのプロファイルをそれぞれFig.80～Fig.83に示す。サンプリング間隔は、変動成分がない場合の倍精度の時と同様に行なったので、画像の約25分の1の領域から再構成していることになる。10次までは発散しないで再構成されているが、12次からは発散してしまうことがわかる。

また、通常用いられるデータに含まれる変動成分との関係を調べるために、分散が 10^{-4} 程度の変動成分が混入している場合についても行なった。変動成分の影響をなるべく減らすために、刻み幅を大きくする必要がある。刻み幅を約0.6強にしたとき、10次まで発散せずに再構成することができた。そのときの画像の鳥瞰図と $y=0$ でのプロファイルをそれぞれFig.84とFig.85に示す。この場合、画像の約80%のデータから再構成していることになり、約20%のデータの削減が可能であることがいえる。

さらに、第3章第4節の1で示した数値ファントム(D) (Sheppのファントム) を用いて、シミュレーションを行なった。このSheppのファントムをFourier変換した関数をMRIの計測データとみなし、そこに分散が 10^{-4} 程度の変動成分を混入させる。実際には、 128×128 のファントム画像に、8倍ゼロフィーリングしてからFFTによって、Fourier変換関数を計算し、そこに、原点の値に対して 10^{-4} 程度の変動成分の混入させた。全体の約8分の1の領域まで高周波成分を落として、残った低周波部分のデータを計測データとする。そのまま逆Fourier変換によって再構成を行なった画像をFig.86に示す。そして、今までの方法を応用して、そのデータから高周波成分を計算し、その計算が発散する手前でやめて再構成を行なった画像をFig.87に示す。ファントムの下の方に位置する2つの小さな腫瘍部分に注目すると、そのまま再構成した画像では、2つの腫瘍部分がつながっているが、解析性を利用して高周波成分を計算してから再構成した画像では、分解されているのが分かる。この場合、計測データに対して約15%程度の領域に相当する高周波部分のデータを計算することができた。

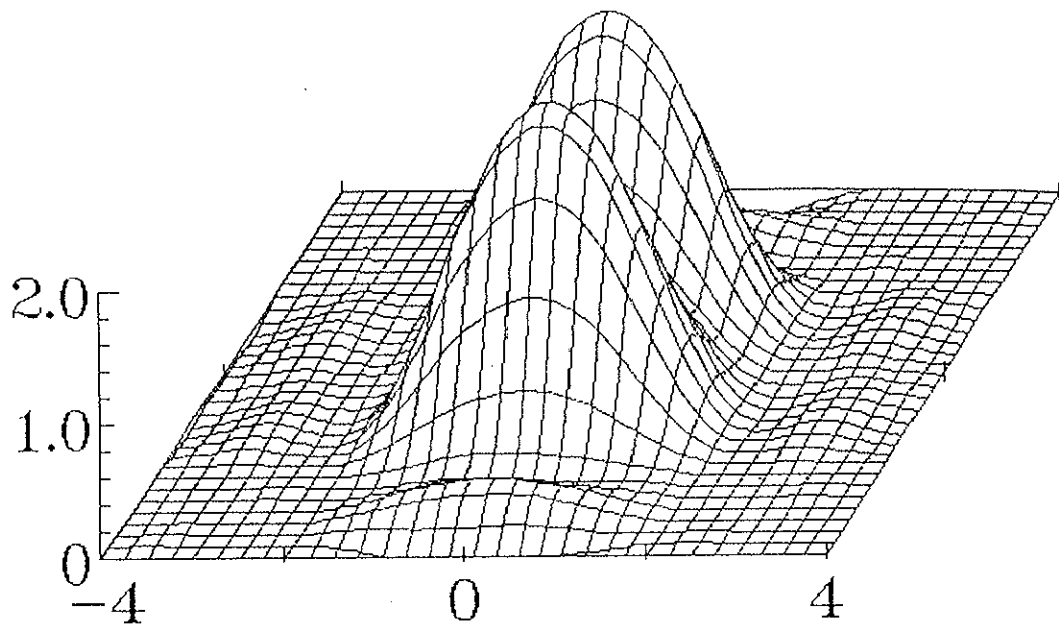


Fig.80 分散が 10^{-10} 程度の変動成分が混入した場合の10次まで計算した画像の鳥瞰図

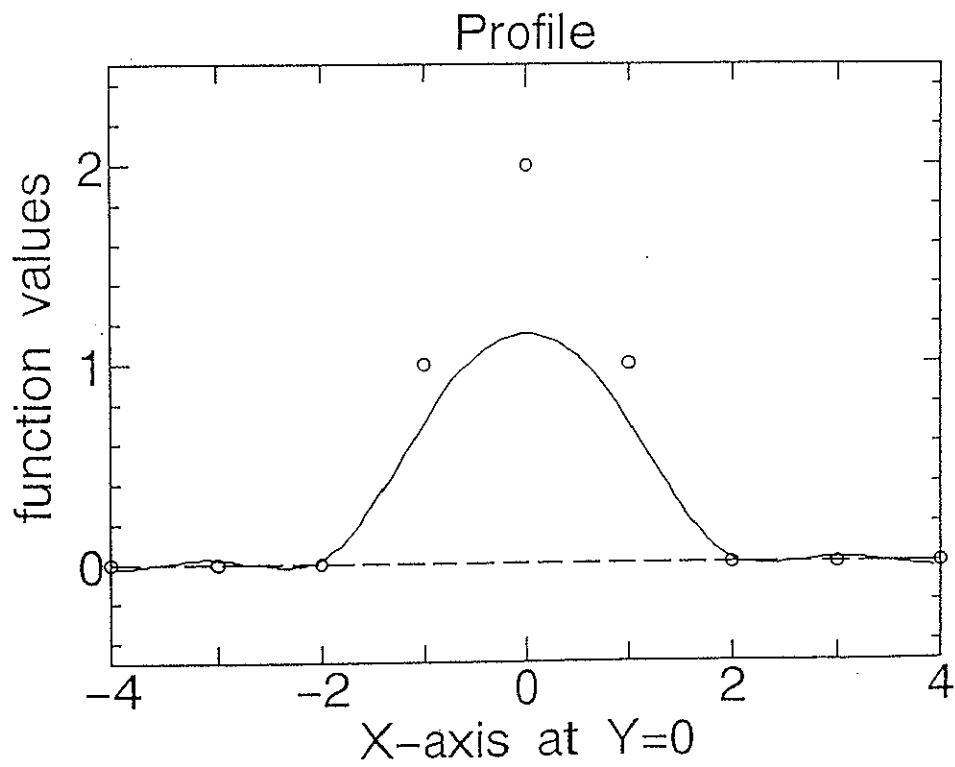


Fig.81 分散が 10^{-10} 程度の変動成分が混入した場合の10次まで計算した画像の $y=0$ におけるプロフィール

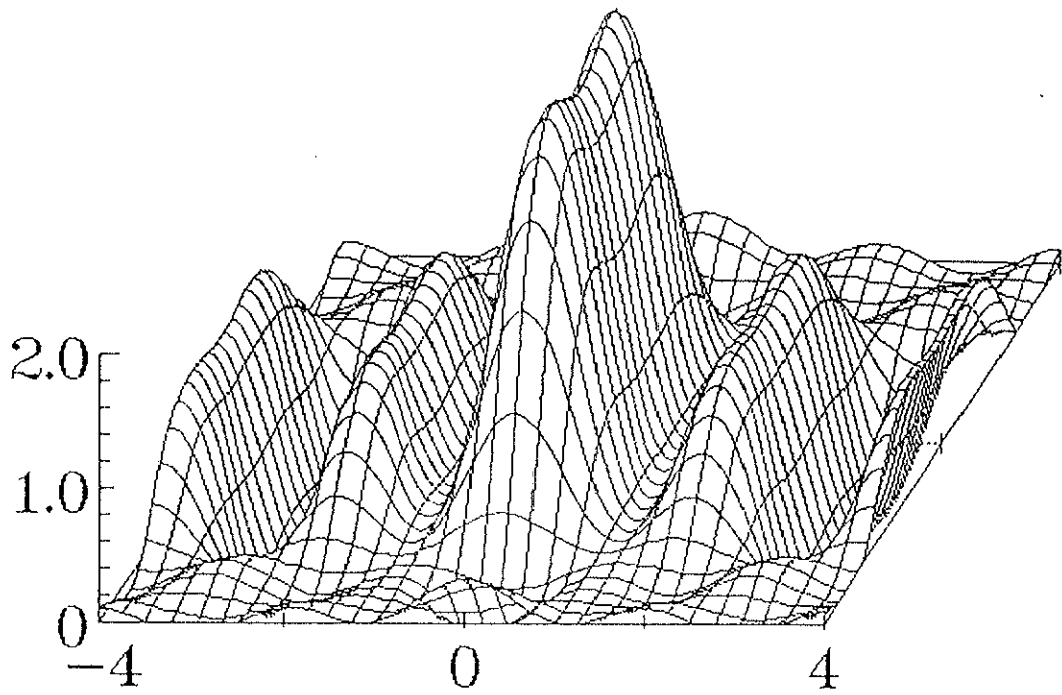


Fig.82 分散が 10^{-10} 程度の変動成分が混入した場合の1 2次まで計算した画像の鳥瞰図

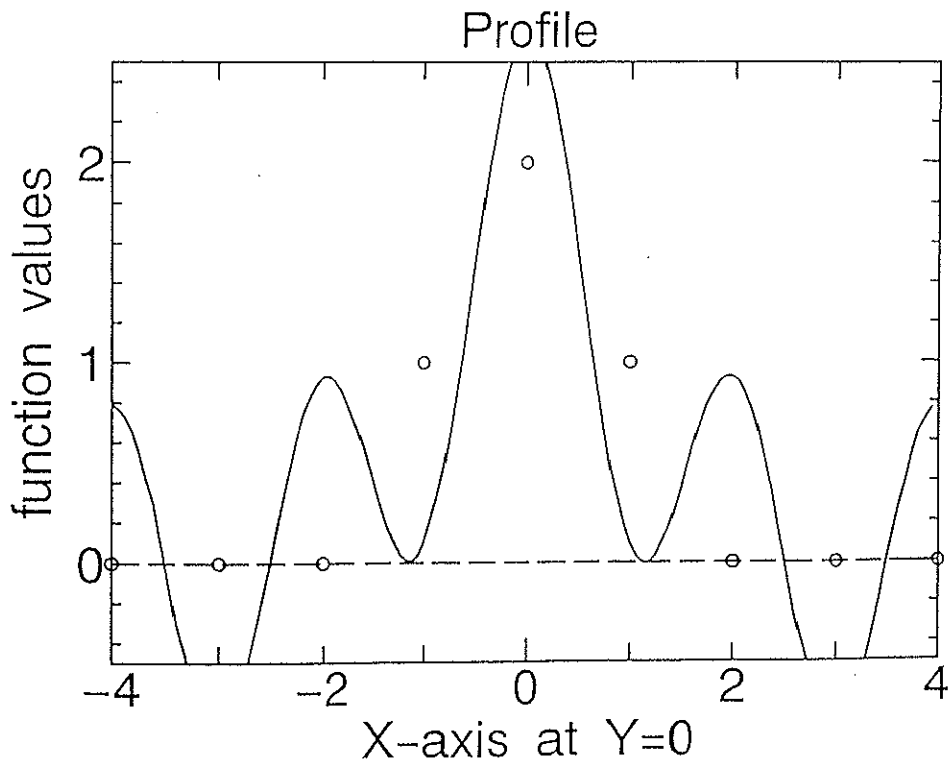


Fig.83 分散が 10^{-10} 程度の変動成分が混入した場合の1 2次まで計算した画像の $y=0$ におけるプロフィール

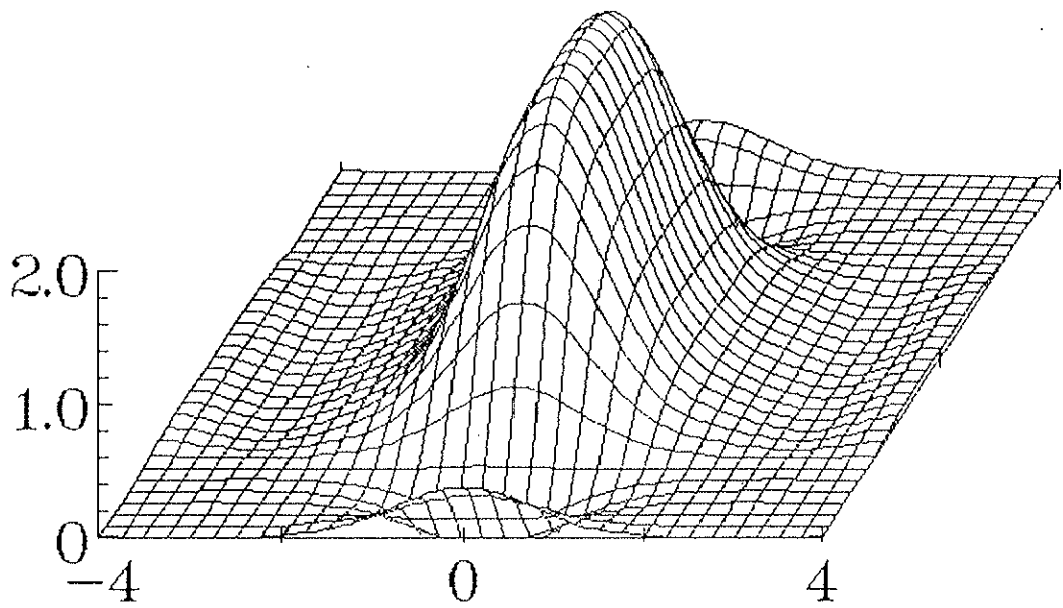


Fig.84 分散が 10^{-4} 程度の変動成分が混入した場合の10次まで計算した画像の鳥瞰図

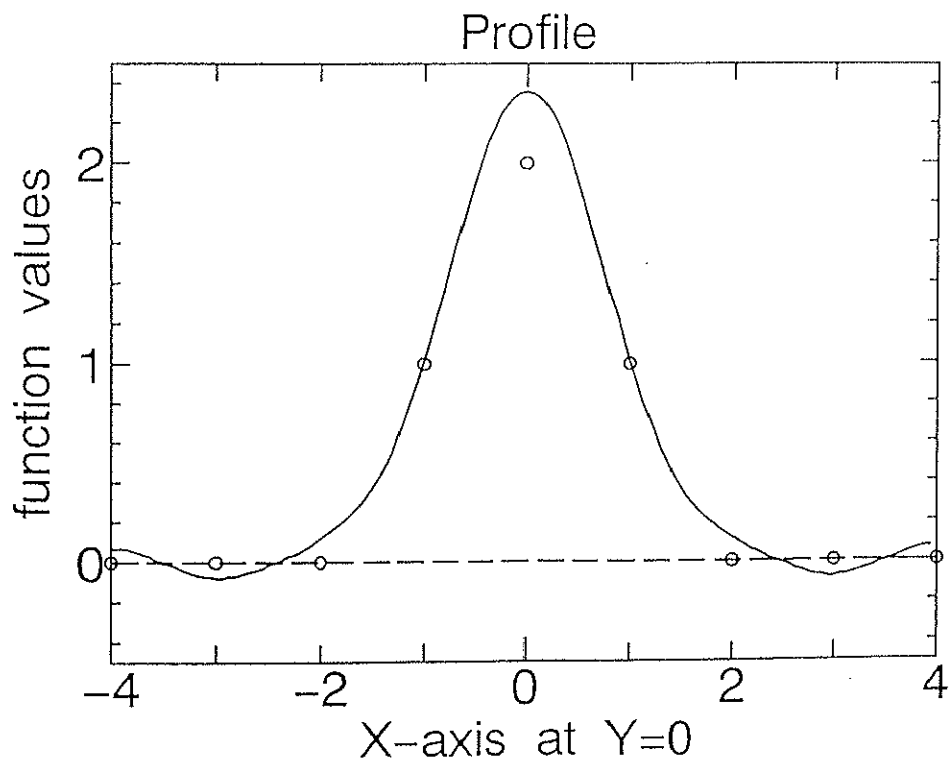


Fig.85 分散が 10^{-4} 程度の変動成分が混入した場合の10次まで計算した画像の $y=0$ におけるプロフィール

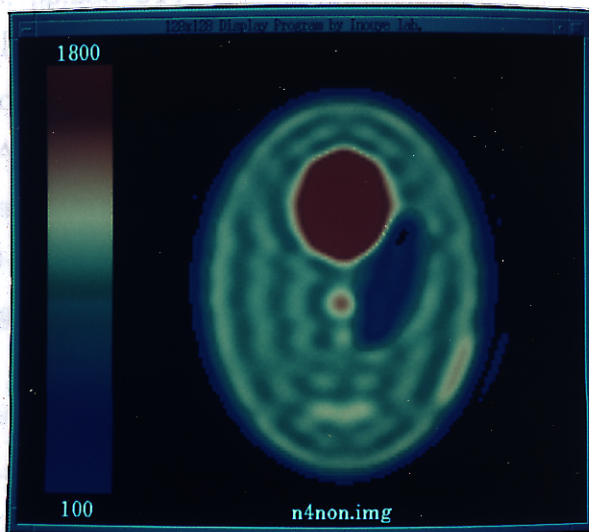


Fig.86 Sheppのファントムにおいてそのまま再構成した画像

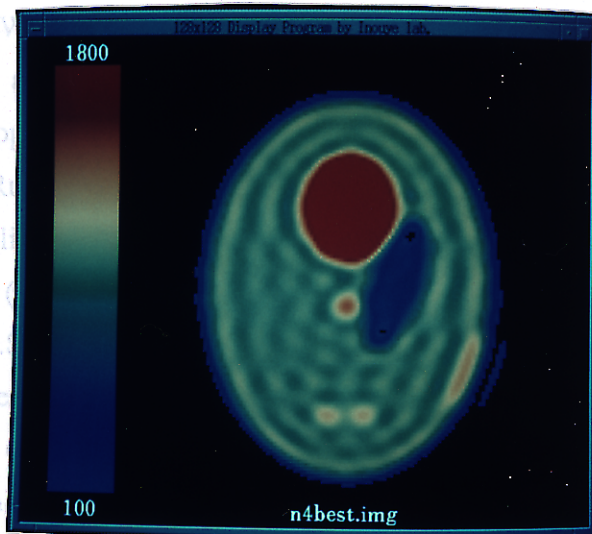


Fig.87 解析性を利用して高周波成分を計算してから再構成した画像

参考文献

- [1] J.M.Blackledge : Quantitative coherent imaging, Deconvolution III:Super resolution, Academic press, pp.288-314
- [2] 橋本雄幸, 小笠原洋一, 池田敏之, 井上多門 : 画像再構成における超解像問題, Medical Imaging Technology, Vol.11, No.5, pp.660-669 (1993)
- [3] R.Rangayyan, A.P.Dhawan and R.Gordon : Algorithms for limited-view computed tomography : an annotated bibliography and a challenge, Applied Optics Vol.24, No.23, pp.4000-4012 (1985)
- [4] T.Inouye : Image Reconstruction With Limited View Angle Projections, International Workshop on Physics and Engineering in Medical Imaging, Pacific Grove, pp.165-168 (1982)
- [5] E.M.Haacke, Z.-P.Liang and F.Boada : Image reconstruction using projection onto convex sets, model constraints, and linear prediction theory for the removal of phase, motion, and Gibbs artifacts in magnetic resonance and ultrasound imaging, Optical Engineering, Vol.29, No.5, pp.555-566 (1990)
- [6] 井上多門, 巨瀬勝美, 橋本雄幸, 他 : 磁気共鳴映像法における超解像, 日本磁気共鳴医学会雑誌, Vol.12, S-1, pp.192 (1992)
- [7] 橋本雄幸, 池田敏之, 巨瀬勝美, 他 : 磁気共鳴映像法における超解像 (II), 日本磁気共鳴医学会雑誌, Vol.12, S-2, pp.324 (1992)
- [8] B.P.Medoff, W.R.Brody, M.Nassi and A.Macovski : Iterative convolution backprojection algorithm for image reconstruction from limited data, J. Opt. Soc. Am., 73, 11, pp.1493-1500 (1983)
- [9] P.Seitz and P.Ruegsegger : Reconstruction algorithm for incomplete projections in the framework of linear operators in normed linear space, J. Opt. Soc. Am. A, 2, 10, pp.1667-1676 (1985)
- [10] H.Kudo and T.Saito : Sinogram recovery with the method of convex projections for limited-data reconstruction in computed tomography, J. Opt. Soc. Am. A, 8, 7, pp.1148-1160 (1991)
- [11] T.Inouye : Image reconstruction with limited angle projection data, IEEE Tras. Nucl. Sci., NS-26, 2, pp.2666-2669 (1979)
- [12] A.Peres : Tomographic reconstruction from limited angular data, J. Comput. Assis. Tomogr., 3, 6, pp.800-803 (1979)

- [13] A.Lent and H.Tuy : An iterative method for the extrapolation of bandlimited functions, *J. Math. Anal. Appl.*, vol.83, pp.544–565 (1981)
- [14] D.C.Youla and H.Webb : Image reconstruction by the method of projections onto convex sets – Part I, *IEEE Tras. Med. Imaging*, MI-1, pp.81–94 (1982)
- [15] M.I.Sezan and H.Stark : Image restoration by the method of convex projections: Part II, *IEEE Trans. Med. Imaging*, MI-1, pp.95–101 (1982)
- [16] G.T.Herman and A.Lent : Quadratic optimization for image reconstruction – I, *Comput. Graphics Image Processing*, vol.5, pp.319–332 (1976)
- [17] J.J.Clark, M.R.Palmer and P.D.Lawrence : A transformation method for the reconstruction of functions from nonuniformly spaced samples, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-33 (1985)
- [18] J.A.Reeds and L.A.Shepp : Limited angle reconstruction in tomography via squashing, *IEEE Trans. Med. Imaging*, MI-6, pp.89–97 (1987)
- [19] L.M.Bregman : Finding the common point of convex sets by the method of successive projections, *Doki, Akad. Nauk USSR*, vol.162, no.3, pp.487–490 (1965)
- [20] L.G.Gubin, B.T.Polyak and E.V.Raik : The method of projections for finding the common point of convex sets, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, vol.7, no.6, pp.1–24 (1967)
- [21] S.R.Deans : *The Radon Transform and Some of its Applications*, Wiley–Interscience (1983)
- [22] F.Natterer : *The Mathematics of Computerized Tomography*, John Wiley (1986)
- [23] A.M.Cormack : Representasion of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications, *J. Appl. Phys.*, 34, pp.2722–2727 (1963)
- [24] A.Kumar, D.Welti and R.R.Ernst : NMR–Fourier–Zeugmatography, *J. Mag. Reson.*, 18, pp.69–83 (1975)