

### 第3章 SPECTの画像再構成（減衰項を含むRadon変換）

#### 第1節 再構成問題

SPECTの画像再構成問題には、大きく分けて、被写体内での $\gamma$ 線の減衰と散乱、そして深さに依存した検出器特性の3つの問題がある。1番目の減衰の問題は、SPECTの画像再構成問題の中で最も大きな問題で、被写体内から放出された $\gamma$ 線が、被写体内で減衰を受けてしまうために、被写体外で検出される $\gamma$ 線の量が、被写体内で放出された $\gamma$ 線の量と異なってしまうというものである。PETでは、1度の崩壊過程で180度反対方向に2つの光子が放出されるので、第2章で説明したように減衰の補正は比較的単純に行なうことができる。しかし、SPECTの場合は、1度の崩壊過程で1つの光子しか放出しないので、減衰の補正は非常に厄介な問題となる。2番目の散乱の問題は、 $\gamma$ 線が被写体内で散乱することによって放出された方向と別な方向に向きを変えられてしまい、そのまま減衰せずに検出器で検出されることがあるため、その分実際の検出されるべき値よりも大きな値が検出されてしまう問題である。これは、あらかじめどのくらいの値が検出されたかによって、その値における散乱による増加量を求めておき、その量を検出された値から差し引くことによって補正が行なわれている。3番目の問題は、SPECTでは、 $\gamma$ 線を検出する前にそれをコリメートする必要があり、そのコリメータの特性によったコリメータからの距離に依存して変化するPSF(Point Spread Function)が、生じてしまう問題である。一般には、検出器のPSF特性は場所に依存せず一定でなければならないが、コリメータを用いる場合、どうしても検出器からの距離によってその特性は変わってきてしまう。よって、この場合、検出器から離れるにしたがって、その分解能が悪くなっていくことが考えられる。この問題については、繰り返しの方法を用いて減衰補正を行なうと同時に、この特性による補正を行うといったものが報告されている[1]。

このように、SPECTの画像再構成問題には、大きく3つの問題があるが、ここではその中でも最も大きな問題である減衰補正の問題に焦点をあてて検討していく。この減衰補正の問題は、SPECTの初期の段階から様々な議論がなされ、そして様々な方法が提案されてきた。また、なんの仮定もなしに純粋に測定データから再構成を行なおうとすると、求めるべき量は、RIの濃度分布に加えてRIの減衰係数分布も求めなければならなくなり、それは不完全問題となり一意に解くことは一般には不可能になる。それでも、繰り返しの方法などを用いてそのまま解こうとしている報告をいくつか目にすることもある。一般には、いくつかの実用的な仮定を用いて解いていく。この仮定は、減衰係数が一様であることや、被写体の輪郭が既知であるなどといったものである。これらの仮定のもとで解かれてきた方法は、そのほとんどが経験的な方法であった。

本章では、それらの実用的な仮定のもとで、この再構成問題を解析的に解き、それを実用的に応用する際に生じる様々な問題点に対し、検討を行なった結果について述べる。

## 第2節 従来の再構成法

前節で述べたように、SPECTの画像再構成において最も問題となるのは被写体内での $\gamma$ 線の減衰であり、X線CTの画像再構成法に対し不合理なデータとして現われ、この方法をそのまま適用することを困難にする。そこで何らかの減衰補正を行わなければならない。ここではまずSPECTで得られるデータがどのようなものかを示し、そのデータに対する従来のSPECTの画像再構成法（減衰の補正方法）を簡単に紹介する。

### 1. 単光子放射型CTの投影データ

SPECTではX線CTの場合と異なり、被写体内部に分布した線源から放出される $\gamma$ 線の強度が画像化される。その $\gamma$ 線は被写体内で減衰して体外に放出され、これを検出器で体軸周りで測定しデータを得る。Fig.9に示すように、まずX線CTの場合と同様な座標系をとり、被写体内の線源濃度分布を $f(x,y)$ とする。また、被写体内部の $\gamma$ 線の減衰係数分布を $\mu(x,y)$ とする。位置 $(x_0, y_0)$ からY軸に沿って放出された $\gamma$ 線は、被写体内部で減衰を受ける。その減衰分を $M(x,y)$ とすると、

$$M(x,y) = \int_{-\infty}^Y \mu(x,y) dY' \quad (25)$$

と表される。ここで、 $Y'$ はY軸に平行な直線を表す。

(25)式を用いると、被写体の外部で測定される強度分布 $g_0(X, \theta)$ は、以下のように表される。

$$g_0(X, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-M(x,y)} dY \quad (26)$$

SPECTの画像再構成問題は、 $g_0(x, \theta)$ から $f(x,y)$ と $\mu(x,y)$ の2つの独立な分布を求める問題となる。これは、1つの2次元分布から2つの2次元分布を求めることになり、一般的に考え

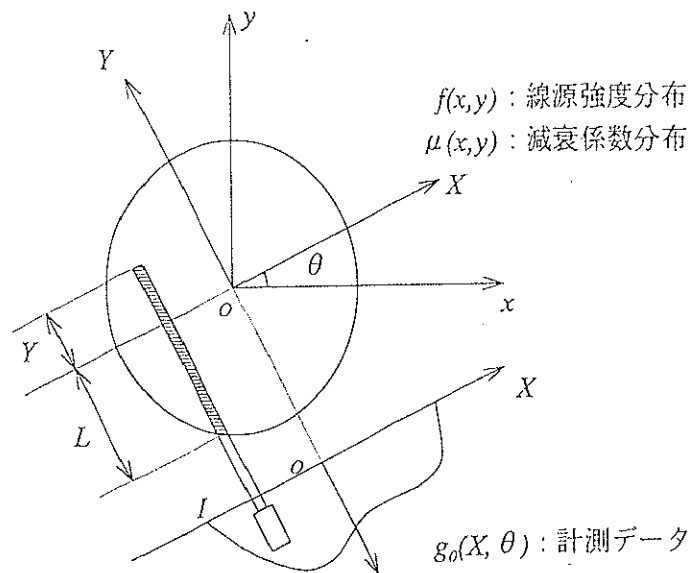


Fig.9 SPECTの座標系

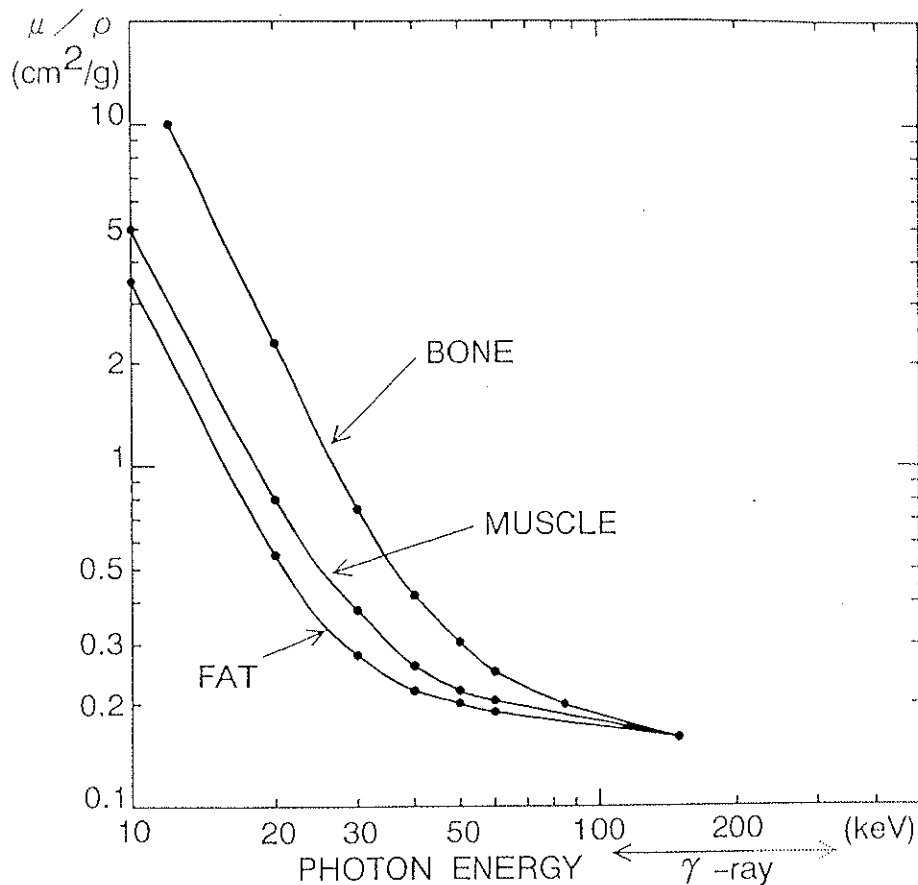


Fig.10 フォトンエネルギーに対する減衰係数の値

て解を出すのが困難な問題となる。これを繰り返しの方法を用いて同時に解こうとする方法[2]も提案されているが、通常はこれを扱いやすい形にするために次のような仮定がなされる。

SPECTで使用されるRIから放出されるγ線のエネルギーは数百KeVと高く、Fig.10からも分かるように、このエネルギーの範囲では減衰係数 $\mu$ の値は $[\text{cm}^2/\text{g}]$ の単位でほぼ一定と見なすことができる。この値に密度 $[\text{g}/\text{cm}^3]$ を掛け合わせて $[\text{cm}^{-1}]$ の単位で減衰係数 $\mu$ の値を扱うことになるが、ここで対象とする人体においては、骨の部分を除いて密度の値はほぼ一定と見なすことができる。よって、被写体内の減衰係数の分布を一様と仮定する。これは、実際問題として影響が少ないと考えられる。従来のSPECTの画像再構成法のほとんどが、この仮定を用いている。

この仮定を用いて、一様な減衰係数の値を $\mu$ とし、X軸から被写体の輪郭までの長さを $L(X, \theta)$ とすると、

$$M(x,y) = \mu[Y+L(X,\theta)] \quad (27)$$

と表される。これを(26)式に代入すると、以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
g_0(X, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-\mu(Y+L(X, \theta))} dY \\
&= e^{-\mu L(X, \theta)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-\mu Y} dY
\end{aligned}
\tag{28}$$

ここで、 $L(X, \theta)$ は外部から測定できる量として（被写体の輪郭が分かれば求められる）既知であると仮定する。そして、投影データ  $g(X, \theta)$ として、

$$\begin{aligned}
g(X, \theta) &= g_0(X, \theta) e^{\mu L(X, \theta)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-\mu Y} dY
\end{aligned}
\tag{29}$$

と表す。

(29)式において減衰が無い、すなわち  $\mu=0$  の場合、 $g(X, \theta)$ はX線CTの投影データと同じになり、そのままX線CTの画像再構成法を適応することができる。しかし実際には  $\mu \neq 0$  であるから、何らかの修正が必要となる。ここで(28)式の  $g_0(X, \theta)$ を測定データ、(29)式の  $g(X, \theta)$ を投影データと定義したが、(28)式を投影データ、(29)式を規格化された投影データと呼ぶこともある。以後、特に強調しない場合は前者を用いることにする。

また、X線CTの投影データは単なるRadon変換であったのに対して、SPECTの投影データは、プラスとマイナスの両方向へのラプラス変換の形をしており、減衰項を含むRadon変換として与えられていることが分かる。よって、SPECTの画像再構成は減衰項を含むRadon変換の逆問題を解くことに相当するが、このためには特定の値に対して与えられている  $\mu$  が複素平面上で虚数軸に平行な直線上の値として得られなければならない。(29)式に示されている投影を種々の角度方向に得てもこのような値に相当するようなものは求められないので、SPECTの場合、投影からの画像再構成問題はきわめて厄介であるといえる。

## 2. 前補正法

得られた測定データに減衰の補正を加えてから、X線CTの画像再構成法によって画像を得る方法、すなわちフィルタ補正逆投影の前に減衰を補正する方法を前補正法 (pre-correction method) [3]-[11]という。

この方法は、以下の3つのことを基本として導かれたものである。

- ①被写体の断面が円または楕円である。
- ②断層面内のR Iの分布が一様である。
- ③断層面内での $\gamma$ 線の減衰係数 $\mu$ が一定である。

SPECTの測定データは、 $\gamma$ 線が被写体内で減衰するため、検出器に近い部分から放出された $\gamma$ 線の情報を多く含んでいる。よって前補正法では、互いに180度方向の対向する測定データを平均化し、それにあるファクターをかけて投影データを作る。平均化には対向する測定データの算術平均[3][4]あるいは幾何平均[5]-[11]を利用するものがある。具体的には、次のような補正式が提案されている。

ある測定データ $g_0(X, \theta)$ に対して、それと対向する測定データは $g_0(-X, \theta + \pi)$ と表される。これらの算術平均、幾何平均をそれぞれ $g_A(X, \theta)$ 、 $g_G(X, \theta)$ として、補正された投影データを $g_C(X, \theta)$ とすると、以下のような式になる。

★ 算術平均を用いたもの

$$g_C(X, \theta) = \frac{2}{2 - \mu T} g_A(X, \theta) \quad (30)$$

Kayの方法[3]

$$g_C(X, \theta) = \frac{4}{1 + e^{-\mu T} + 2e^{-\mu T/2}} g_A(X, \theta) \quad (31)$$

但し、

$$g_A(X, \theta) = \frac{g_0(X, \theta) + g_0(-X, \theta + \pi)}{2} \quad (32)$$

★ 幾何平均を用いたもの

Budingerの方法[7]-[9]

$$g_C(X, \theta) = \frac{e^{\mu T/2} \cdot f \mu T}{2 \sinh(f \mu T/2)} g_G(X, \theta) \quad (33)$$

Sorensonの方法[6]

$$g_c(X, \theta) = \frac{\mu T}{1 - e^{-\mu T}} g_G(X, \theta) \quad (34)$$

Keyesの方法[10]

$$g_c(X, \theta) = \frac{2}{1 + e^{-\mu T} + 2e^{-\mu T/2}} g_G(X, \theta) \quad (35)$$

但し、

$$g_G(X, \theta) = \sqrt{g_0(X, \theta) \cdot g_0(-X, \theta + \pi)} \quad (36)$$

ここで、 $T$ は投影データが被写体を通過する長さ、 $f$ は長さ $T$ のうちRIが分布している割合を表し、共に $X$ と $\theta$ の関数である。また両者とも対向する値は等しくなる。

幾何平均は算術平均に比べて、極端に大きな、または極端に小さな値の影響を抑える効果がある。

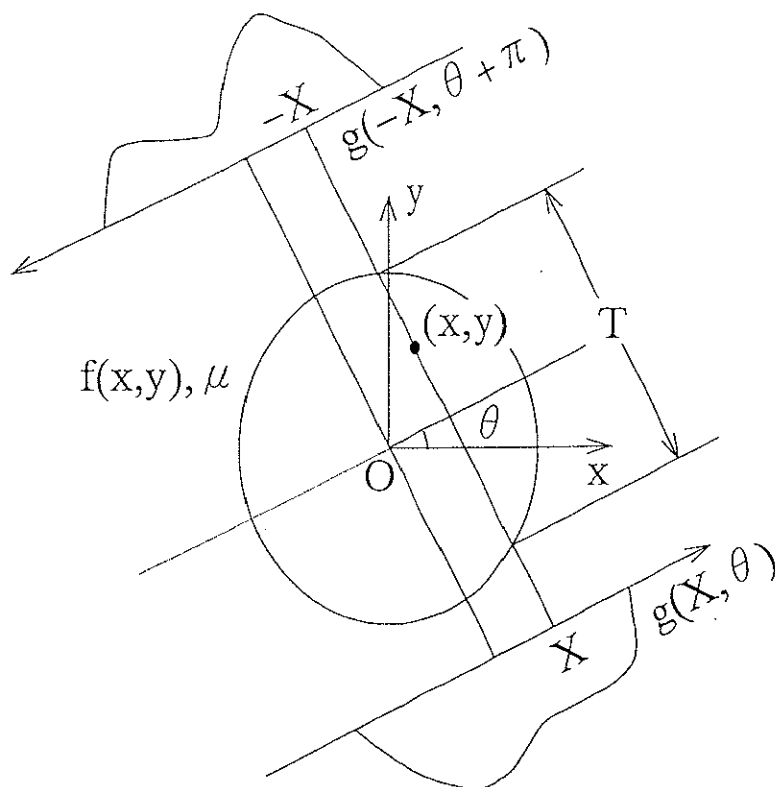


Fig.11 前補正法の座標系

### 3. 後補正法

X線CTの画像再構成法によって得られた画像に対して、画素毎にその減衰の補正を行う方法、すなわちフィルタ補正逆投影の後に減衰を補正する方法を後補正法(Post-correction method)という。この方法は、Changら[12][13]によって示された。

強度Aの点状線源が、一定の減衰係数 $\mu$ を持つ被写体内の点Q( $x_p, y_q$ )に存在すると仮定する。減衰の補正を行わないで、そのまま測定データを投影データとしてX線CTの画像再構成法を行うと、投影データ $g(X, \theta)$ は、

$$g(X, \theta) = A \delta(X - [x_p \cos \theta + y_q \sin \theta]) e^{-\mu s} \quad (37)$$

となり、再構成画像 $f(x, y)$ はフィルタ補正逆投影法によって、

$$f(x, y) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\mu s} e^{i\omega[(x-x_p)\cos\theta + (y-y_q)\sin\theta]} |\omega| d\omega d\theta \quad (38)$$

となる。よって、点Qにおける再構成画像の強度 $f(x_p, y_q)$ は、

$$f(x_p, y_q) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu s} |\omega| d\omega d\theta \quad (39)$$

と書ける。ここで $s$ はFig.12に示すように点Qから角度 $\theta$ 方向への被写体の境界までの距離であり、 $x$ 、 $y$ 、 $\theta$ の関数である。明らかにこの場合は減衰の補正が可能で、上の画像に、

$$\begin{aligned} C(x_p, y_q) &= \frac{f^{\mu=0}(x, y)}{f^{\mu>0}(x, y)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\mu s} d\theta} \end{aligned} \quad (40)$$

で与えられる補正マトリックス $C(x_p, y_q)$ をかけることで減衰は完全に補正される。つまり、得られた画像の画素ごとに点状線源を仮定し、(40)式で定義される補正マトリックス $C(x_p, y_q)$ を求め、掛け合わせるにより画像全体の減衰を補正しようとするものである。しかし、実際には線源が広がりを持っているため、完全には補正しきれず歪んだ画像しか得られない。このためChangらは繰り返しによる方法が必要であるとしている。

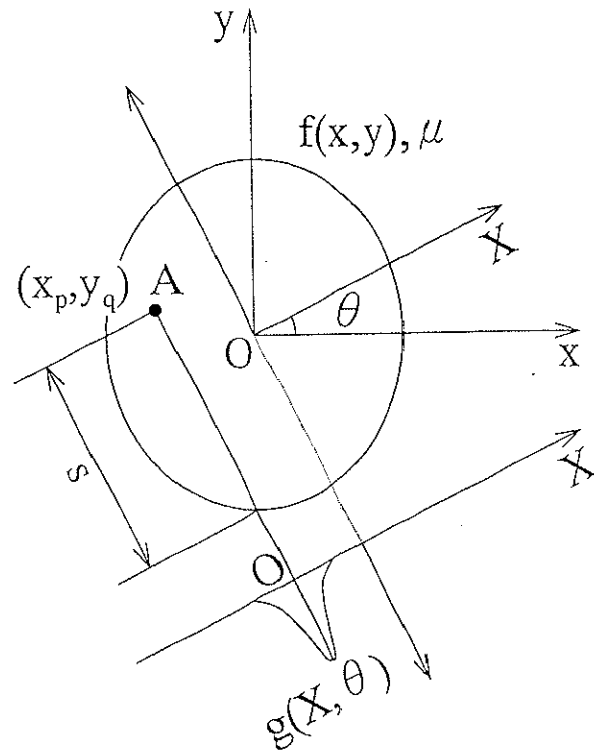


Fig.12 後補正法の座標系



#### 4. 荷重逆投影法と放射-後補正法

SPECTの測定データは、検出器から遠くなるにつれて指数関数的な減衰をうけている。それとは逆に増大するように重みをつけて逆投影する方法を荷重逆投影法(Weighted Back Projection Method : WBP)[14]-[17]と呼ぶ。

TretiakとDelanyら[15]は、純粹に指数関数的な重みをつけて逆投影する方法を提案している。この方法によると、まず重畳積分法に従って $h(X)$ という関数を取り、投影データ $g(X, \theta)$ とコンボリューションを行い、 $q(X, \theta)$ を得る。

$$q(X, \theta) = g(X, \theta) * h(X) \quad (41)$$

ここで\*は1次元のコンボリューションを表す。これを指数関数的な重みをつけて逆投影し、関数 $f_1(x, y)$ を得る。

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(X, \theta) e^{\mu Y} d\theta \quad (42)$$

次に、

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(X) e^{\mu Y} d\theta \quad (43)$$

となる関数 $v(x, y)$ を定めると、求めるべき関数 $f(x, y)$ との間に、

$$f_1(x, y) = f(x, y) ** v(x, y) \quad (44)$$

なる関係が成立することを証明した。(証明略)ここで\*\*は2次元のコンボリューションを表す。つまり、(44)式の意味は、 $v(x, y)$ が2次元のデルタ関数 $\delta(x, y)$ であれば[(45)式]  $f(x, y)$ は完全に再構成されるということである。

$$v(x, y) = \delta(x, y) \quad (45)$$

しかし周辺部の再構成には、その反対方向からみた投影に大きな荷重がかけられることになるので、雑音の異常増大の原因となる。

SPECTの測定データは被写体内での $\gamma$ 線の減衰のために、検出器に近い部分の情報を多く含んでいる。よって、周辺部の再構成にはその部分に近い方から測定したデータに大きな荷重をもたせて逆投影すべきであり、このような考えからTanaka[16]は、周辺部のノイズを抑えるために修正した重みをつけることを提案している。このTanakaの方法は、次のように行われる。

まず、投影データ $g(X, \theta)$ に次のように修正した重畳積分操作を行う。

$$q(X, \theta) = \frac{[g(X, \theta) F(X)] * h(X)}{F(X)} \quad (46)$$

ここで、\*は1次元のコンボリューションを表し、補正関数 $F(X)$ は、

$$F(X) = e^{C_1(\mu X)^2} \quad (47)$$

$h(X)$ は、Shepp-Loganフィルター $h_0(X)$ を次のように補正したものである。

$$h(X) = h(id) = h_0(i) e^{-C_2(\mu id)^4}$$

$$h_0(i) = \frac{2}{\pi d^2(1-4i^2)} \quad (48)$$

但し、 $i$ は整数、 $d$ はサンプリング間隔を示し、 $x=id$ である。

これにより求めた $q(X, \theta)$ を、重みづけ関数 $W(Y)$ を用いて逆投影、

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(X, \theta) W(Y) d\theta$$

$$W(Y) = \frac{e^{-k\mu Y}}{\cosh[(k+1)\mu Y]} \quad (49)$$

して画像 $f(x,y)$ は求められる。

ここで $C_1$ 、 $C_2$ は定数であり、半径を変化させた、円形で均一に分布したR Iのモデルを複数個用いて、この方法により再構成された画像の歪が小さくなるように、繰り返しのプログラムによって決定される。

この荷重逆投影法の計算には長い処理時間を要するため、これを簡略化した方法としてTanaka [17]は放射-後補正法を提案している。

荷重逆投影では、(49)式により $f(x,y)$ は求めた。ここで、 $k=0$ とすると、

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[g(X, \theta)F(X)] * h(X)}{F(X) \cosh(\mu Y)} d\theta \quad (50)$$

となる。ここで、 $F(X) \cosh(\mu Y)$ は角度によらないものと仮定して、新しく、

$$H(\mu R) = \frac{e^{C_5(\mu R)^2} + C_6}{1 + C_6} \quad (51)$$

なる関数 $H(\mu R)$ を定義する。ここで、 $R$ は回転中心からの距離である。よって、

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{H(\mu R)} \int_0^{2\pi} [g(X, \theta)F(X)] * h(X) d\theta \quad (52)$$

となり、 $H(\mu R)$ は被写体の形状によらないので、これをあらかじめ計算しておくことにより、計算処理時間はX線CTの画像再構成法と同じぐらい早くすることができる。

ここで用いる補正関数 $F(X)$ 、 $h(X)$ は、

$$F(X) = \frac{e^{C_1(\mu X)^2 + C_2}}{1 + C_2} \quad (53)$$

$$h(i) = h_0(i) \frac{1 + C_3(\mu id)^2}{1 + C_4(\mu id)^4} \quad (54)$$

$$h_0(i) = \frac{2}{\pi d^2(1 - 4i^2)} \quad (55)$$

で与えられる。また、 $h_0(X)$ はShepp-Loganフィルターを表す。

ここで $C_1 \sim C_6$ は定数であり、前と同様に半径を変化させた、円形で均一に分布したR Iのモデルを複数個用いて、この方法により再構成された画像の歪が小さくなるように、繰り返しのプログラムによって決定される。

## 5. 逐次近似法

解析的に解くことが難しい問題に対して有効な方法として逐次近似法 (Iterative Method) [1][18]-[31]と呼ばれるものがある。これは、初めに任意の画像 (例えば平坦な分布の画像) を仮定する。次に、その推定されたR Iの濃度分布から作られる投影データを計算し、これを実測投影と比較して差があればこの差を小さくするように画像を逐次に修正していく方法である。逐次近似法には一般に、不完全投影や被写体内の $\gamma$ 線の減衰係数の分布が不均一なときにも計算が実行できる。この1つの例として、Soussaline[19]の提案した方法を示す。

まず、測定データの集合から

$$C(x,y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} g(X,\theta) e^{\mu s(x,y,\theta)} d\theta \quad (56)$$

で与えられるマトリックス $C(x,y)$ を計算しておく。ここで、Fig.13に示すように $s(x,y,\theta)$ は点 $(x,y)$ から角度 $\theta$ 方向への被写体の境界までの距離を表し、 $g(X,\theta)$ は測定データを表す。

次に、減衰の補正を行わないでX線CTの画像再構成法をそのまま用いて画像を得て、これを初期分布 $f_0(x,y)$ とする。この分布 $f_0(x,y)$ から、

$$C_0(x,y) = \int_{x'} \int_{y'} \frac{f_0(x',y')}{R} \cosh(\mu R) dx' dy' \quad (57)$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (58)$$

を計算する。ここで $f_0(x,y)$ が正しい答えならば、 $C(x,y)$ と $C_0(x,y)$ は一致する (証明略) が、実際には統計雑音、再構成誤差などからこれらの値に差が生じる。よって、この差に適当なファクター $\lambda$ をかけ、もとの画像再構成像 $f_0(x,y)$ にたしあわせて第1近似の分布 $f_1(x,y)$ を得る。すなわち、

$$f_1(x,y) = f_0(x,y) + \lambda [C(x,y) - C_0(x,y)] \quad (59)$$

となる。ここで $\lambda$ は収束のスピードをコントロールするファクターで、一つの計算で共通に用いられる定数であり、経験的に求められる。よって、 $n$ 回目の推定値分布 $f_n(x,y)$ から $n+1$ 回目の推定値分布 $f_{n+1}(x,y)$ を求めるには、

$$f_{n+1}(x,y) = f_n(x,y) + \lambda [C(x,y) - C_n(x,y)] \quad (60)$$

$$C_n(x,y) = \int_{x'} \int_{y'} \frac{f_n(x',y')}{R} \cosh(\mu R) dx' dy' \quad (61)$$

を計算することになる。

しかしこの方法の場合、逐次の近似の修正が正しい答えに収束する保証は全くなく、また計算に長い時間を要するのであまり実用的ではないと考えられる。

また最近では放射型CTの画像再構成問題に、統計的方法を用いようとする試みが盛んに行

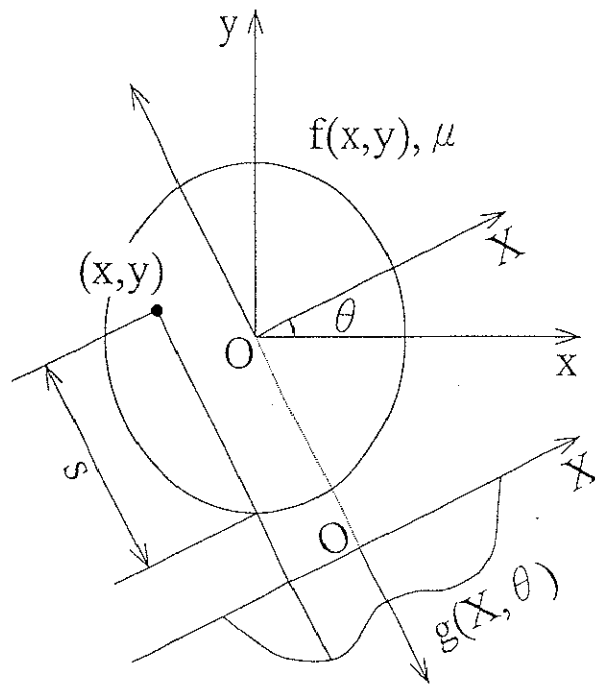


Fig.13 Soussalineの方法の座標系

なわれている[21]-[31]。Sheppら[21]は、放射型CTに適するEM (Expectation Maximization) アルゴリズムを提案している。そして、Millerら[22]がそれをSPECTに応用している。エントロピーの概念を用いて、それを最大にするように画像を修正していく方法 (Maximum Entropy Method) [24]や、確率におけるベイズの定理を応用した方法[25][28]-[30]も提案されている。これらも前と同様に初期分布を与え、実測値をもとにして各画素のそれらの値をとる条件付き確率を最大となる方向へ、繰り返しの方法を用いて修正していく統計的な方法である。この特徴は、近似の収束性が保証され、データが統計雑音を含む場合でも「統計的に最も確からしい画像 (最尤推定画像)」に限りなく近づくことが証明されていることと、画像の非負値性が保たれていることである。

しかし実際問題として、逐次の近似を無限に繰り返すことは不可能であり、ある一定の解像力が得られた時点でその操作を停止する必要がある。逐次近似を途中で停止すると、解像力はきわめて不均一で場所により大きく異なってしまうことがある。またこの場合にも、計算時間が長くなることが問題となる。

逐次近似法は、被写体内の減衰係数の分布が均一とみなせない場合の画像の修正には不可欠な手法であるため、この方法ではほかの方法で求めた画像を初期分布として使用することが多い。

### 第3節 解析的厳密解

減衰項を含むRadon変換の逆問題における解析的厳密解は、Tretiak[32]とBellini[33]とInouye[34]の3つの方法が提案されている。この節では、Inouyeの方法にもとづいて我々の研究室で導かれた数学的に厳密に解かれた画像再構成法[34][35][36]を示す。この方法の基本的な考えは、Belliniらによって提案されたものと同様である。

まず、(29)式を投影データとして画像再構成アルゴリズムを考える。

X座標に対応する周波数領域の座標を $\gamma$ で表し、 $g(X, \theta)$ をXに関して1次元Fourier変換した関数を $g(\gamma, \theta)$ とすると、

$$\begin{aligned} G(\gamma, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(X, \theta) e^{-i\gamma X} dX \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\gamma X - i\mu Y)} dXdY \end{aligned} \quad (62)$$

と表される。ここで、実領域 $(x, y)$ に対応する周波数領域の座標を $(\xi, \eta)$ で表し、求めたいR Iの濃度分布 $f(x, y)$ の2次元Fourier変換を $F(\xi, \eta)$ とすると、

$$F(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy \quad (63)$$

と定義される。ここで(62)式と(63)式を比較すると、 $g(\gamma, \theta)$ はX、Yの周波数成分が各々 $\gamma$ 、 $-i\mu$ である $f(x, y)$ の2次元Fourier変換であることが分かる。但し、(62)式の座標系は(63)式の座標系より角度 $\theta$ だけ回転している。

次に、(62)式と(63)式の周波数成分を極座標系で表現する。まず(62)式で、直交座標系 $(X, Y)$ の周波数成分 $(\gamma, -i\mu)$ を、極座標系 $(\omega, \nu)$ を用いて表す。すなわち、

$$\begin{pmatrix} \gamma = \omega \cos \nu \\ -i\mu = \omega \sin \nu \end{pmatrix} \quad (64)$$

ここで、 $\omega$ 、 $\nu$ は一般に複素数である。これにより、 $\omega$ 、 $\nu$ について解くと、

$$\begin{pmatrix} \omega = \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \\ \nu = \frac{i}{2} \ln \frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu} \equiv i\phi \end{pmatrix} \quad (65)$$

となる。よって(65)式を(62)式に代入し、被写体に固定した座標系に直すと、

$$\begin{aligned} G(\gamma, \theta) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i[\omega \cos \nu (x \cos \theta + y \sin \theta) + \omega \sin \nu (-x \sin \theta + y \cos \theta)]} dx dy \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\omega [x \cos(\theta + \nu) + y \sin(\theta + \nu)]} dx dy \end{aligned} \quad (66)$$

となる。さらに(63)式を極座標系で表すと、

$$\begin{pmatrix} \xi = \omega \cos \theta \\ \eta = \omega \sin \theta \end{pmatrix} \quad (67)$$

より、

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (68)$$

と書くことができる。ここで(66)式と(68)式を比較すると、

$$\begin{aligned} G(\gamma, \theta) &= F(\omega \cos[\theta + \nu], \omega \sin[\theta + \nu]) \\ &= F(\omega \cos[\theta + i\phi], \omega \sin[\theta + i\phi]) \end{aligned} \quad (69)$$

の関係が導き出せる。このことから直交座標で表された関数 $F(\xi, \eta)$ を極座標で表した関数 $F(\omega, \phi)$ に置き換えて考えると、減衰ありのデータ $G(\gamma, \theta)$ と減衰なしのデータ $F(\omega, \phi)$ が、

$$G(\gamma, \theta) = F(\omega, \psi) \quad (70)$$

$$\begin{pmatrix} \omega = \sqrt{\gamma^2 - \mu^2} \\ \psi \equiv \theta + \nu = \theta + i\phi = \theta + \frac{i}{2} \ln \frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu} \end{pmatrix} \quad (71)$$

の関係で結び付けられていることが分かる。さらに $\omega$ は $\omega \geq 0$ で求まればよいので実数で表され、角度のずれ $\nu$ は純虚数 ( $\phi$ は実数) で表されていることがいえる。よって、(69)式で角度成分 $\phi$ が複素数で与えられている $F(\omega, \phi)$ の値が、実数の角度成分 $\theta$ を持った $F(\omega, \theta)$ にどう対応しているかを求めるのが、この研究のポイントである。

ここで、 $G(\gamma, \theta)$ 、 $F(\omega, \theta)$ はそれぞれ $\theta$ 、 $\theta$ に関して周期 $2\pi$ の周期関数であり、以下のよう表すことができる。

$$G(\gamma, \theta) = G(\gamma, \theta + 2m\pi) \quad (72)$$

$$F(\omega, \theta) = F(\omega, \theta + 2m\pi) \quad (73)$$

ここで、 $m$ は整数である。したがって、それぞれはFourier級数展開することができ、このFourier級数展開係数を各々 $G_n(\gamma)$ 、 $F_n(\omega)$ とすると、

$$G(\gamma, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(\gamma) e^{in\theta} \quad (74)$$

$$F(\omega, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\omega) e^{in\theta} \quad (75)$$

ここで、

$$G_n(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\gamma, \theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (76)$$

$$F_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega, \Theta) e^{-in\Theta} d\Theta \quad (77)$$

である。(75)式の右辺の $\Theta$ を $\theta + i\phi$ で置き換えると、

$$F(\omega, \Theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\omega) e^{in\theta - n\phi} \quad (78)$$

となる。(78)式と(74)式を比較すると、それぞれのFourier級数展開係数の関係は、

$$\begin{aligned} F_n(\omega) &= G_n(\gamma) e^{n\phi} \\ &= G_n(\gamma) e^{\frac{n \ln \frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu}}{2}} \\ &= G_n(\gamma) \left[ \frac{\gamma - \mu}{\gamma + \mu} \right]^{\frac{n}{2}} \end{aligned} \quad (79)$$

となり、これにより $F_n(\omega)$ をFourier合成し、(75)式より $F(\omega, \Theta)$ を求めることができる。よって、 $F(\omega, \Theta)$ は全空間で完全に定まることになるので、これを最終的に(80)式によって2次元逆Fourier変換することにより、求めるべきR Iの濃度分布である $f(x, y)$ は得られることになる。

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \quad (80)$$

以上の画像再構成の流れ図を、Fig.14に示す。

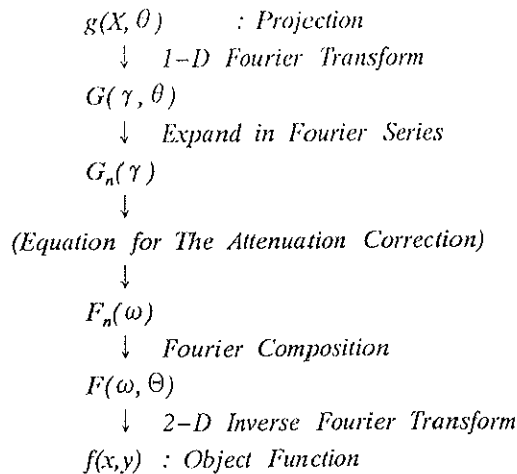


Fig.14 画像再構成の流れ図



この画像再構成を実際に行うとき、計算が安定に行われる必要がある。(79)式において、 $n$ が正の数のときには安定に $F_n(\omega)$ を求めることができるが、 $n$ が負の数のときには $\omega$ が小さい値をとるところで、 $n$ の絶対値が大きくなると、

$$F_n(\omega) = G_n(\gamma) \left[ \frac{\sqrt{\omega^2 + \mu^2} - \mu}{\sqrt{\omega^2 + \mu^2} + \mu} \right]^{\frac{n}{2}} \quad (81)$$

のべき乗の値が発散してしまい、非常に大きな値を掛け合わせることになる。結果としてこれがノイズの増幅、計算エラーを引き起こす原因となってしまう。よって、安定な $n$ の正の数の $F_n(\omega)$ のみを用いてFourier合成の方が有利である。

そこで、 $F(\omega, \theta)$ のFourier合成の式を考える。

$$F(\omega, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\omega) e^{in\theta} \quad (82)$$

ここで、値の実数部、虚数部をそれぞれ $\text{Re}\{\cdot\}$ 、 $\text{Im}\{\cdot\}$ で表すものとし、 $F_n(\omega)$ の実数部、虚数部をそれぞれ $\text{Re}\{F_n(\omega)\}$ と $\text{Im}\{F_n(\omega)\}$ で表すとFourier合成の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Re}\{F(\omega, \theta)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\text{Re}\{F_n(\omega)\} \cos n\theta - \text{Im}\{F_n(\omega)\} \sin n\theta] \\ \text{Im}\{F(\omega, \theta)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\text{Re}\{F_n(\omega)\} \sin n\theta + \text{Im}\{F_n(\omega)\} \cos n\theta] \end{aligned} \quad (83)$$

ここで実関数 $f(x, y)$ の2次元Fourier変換の複素共役条件、

$$\begin{pmatrix} \text{Re}\{F(\omega, \theta)\} = \text{Re}\{F(\omega, \theta + \pi)\} \\ \text{Im}\{F(\omega, \theta)\} = -\text{Im}\{F(\omega, \theta + \pi)\} \end{pmatrix} \quad (84)$$

を用いると、

・  $n$ が偶数のとき

$$\begin{pmatrix} \text{Re}\{F_n(\omega)\} = \text{Re}\{F_{(-n)}(\omega)\} \\ \text{Im}\{F_n(\omega)\} = -\text{Im}\{F_{(-n)}(\omega)\} \end{pmatrix} \quad (85)$$

・  $n$ が奇数のとき

$$\begin{pmatrix} \text{Re}\{F_n(\omega)\} = -\text{Re}\{F_{(-n)}(\omega)\} \\ \text{Im}\{F_n(\omega)\} = \text{Im}\{F_{(-n)}(\omega)\} \end{pmatrix} \quad (86)$$

となることが分かる。

したがって、Fourier合成はnが正の数の $F_n(\omega)$ だけで可能となり、

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\{F(\omega, \Theta)\} &= \operatorname{Re}\{F_0(\omega)\} \\
 &\quad + 2 \sum_{\substack{\text{even} \\ n=2}} [\operatorname{Re}\{F_n(\omega)\} \cos n\Theta - \operatorname{Im}\{F_n(\omega)\} \sin n\Theta] \\
 \operatorname{Im}\{F(\omega, \Theta)\} &= 2 \sum_{\substack{\text{odd} \\ n=1}} [\operatorname{Re}\{F_n(\omega)\} \sin n\Theta + \operatorname{Im}\{F_n(\omega)\} \cos n\Theta]
 \end{aligned} \tag{87}$$

で与えられる。ここで、even、oddはそれぞれnが正の数の偶数、奇数の和を示している。このようにして、(79)式を含めてFourier合成を安定に計算することができる。

以上のように、この方法はFourier変換やFourier級数展開など、現在の計算機で高速で安定に計算できるような関数しか用いていないので、実用的にも容易に実行が可能な方法といえる。

## 第4節 計算機シミュレーション

本研究で提案する画像再構成法を用いた場合の有効性と、実用的に応用する際に生じる問題点について、計算機シミュレーションを行なった。

### 1. 厳密解の有効性

本研究で提案する画像再構成法を評価するために、計算機シミュレーションを行なった。まずは、この厳密解の画像再構成法が、他の従来提案されてきたの再構成法と比べてどのくらい精度よく再構成できるかを調べるために、画像再構成計算のモデルとして数種類の数値ファントムを用意した。この数値ファントムは、計算機上で人工的につくられた、線源（R I）の濃度分布を表している疑似画像で、中心座標、長軸、短軸、軸の傾き、線源強度（R Iの濃度）を指定した複数の楕円の合成体であり、減衰係数 $\mu$ は一様にしている。これらの詳細をFig.15からFig.18に示す。

- ・数値ファントム(A) R Iが均一に分布した円形のファントム
- ・数値ファントム(B) hot spotの検出能力を見るファントム
- ・数値ファントム(C) cold spotの検出能力を見るファントム
- ・数値ファントム(D) Shepp,Vardiが陽電子放出型C Tの画像再構成計算において考案したものと同じであり、被写体である人間の頭部の断層面を模擬したファントムである。aからhはそれぞれ、

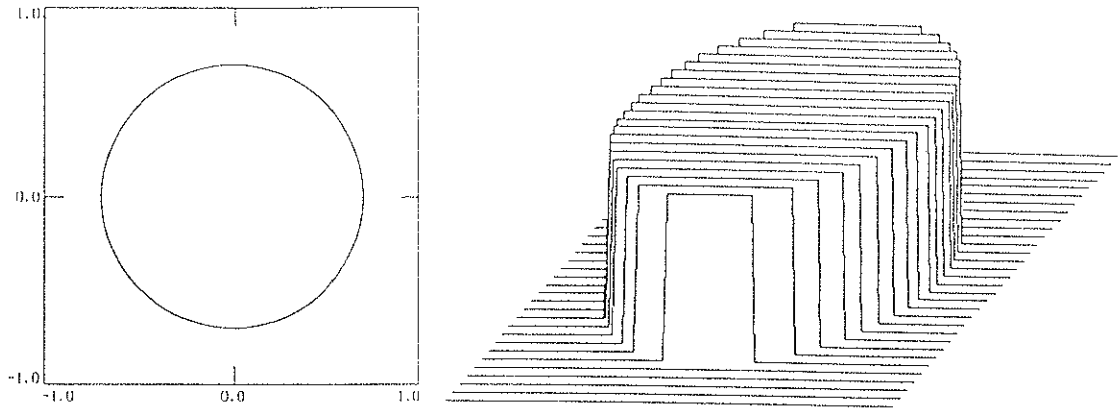
a-b間	: 頭蓋骨	b	: 内部組織
c	: 脳室部	d,e,f,g,h	: 腫瘍部

を模擬しており、内部組織の線源強度（R Iの濃度）でそれぞれの部分の値を規格化している。

これらの数値ファントムを、以下の従来提案されてきた画像再構成法と、今回の厳密解の方法で再構成する。

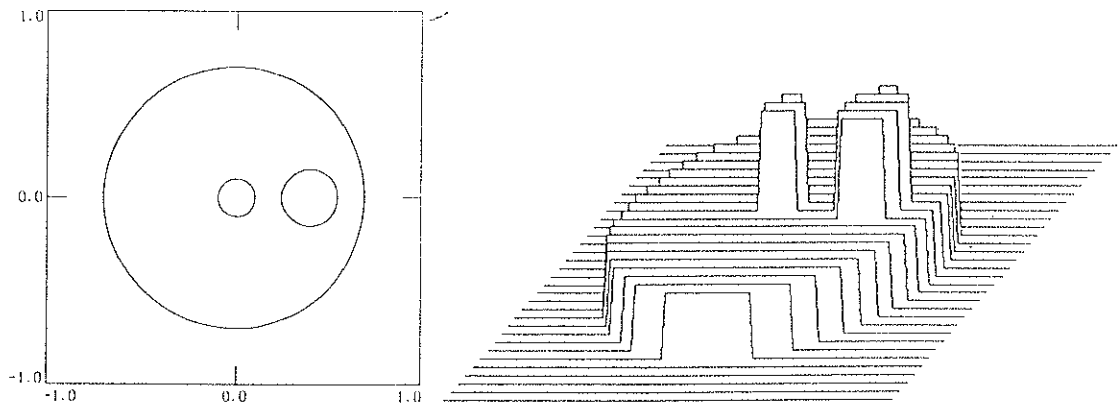
- |            |                            |
|------------|----------------------------|
| (1) 前補正法1  | Kayの方法[3]（算術平均を用いたもの）      |
| (2) 前補正法2  | Sorensonの方法[6]（幾何平均を用いたもの） |
| (3) 後補正法   | Changの方法[12]               |
| (4) 荷重逆投影法 | Tanakaの方法[16]              |
| (5) 放射後補正法 | Tanakaの方法[17]              |

減衰係数 $\mu$ の値を $0.10\text{cm}^{-1}$ , $0.20\text{cm}^{-1}$ , $0.30\text{cm}^{-1}$ と変化させて、それぞれの画像再構成法で再構成した画像の鳥瞰図を図に示す。



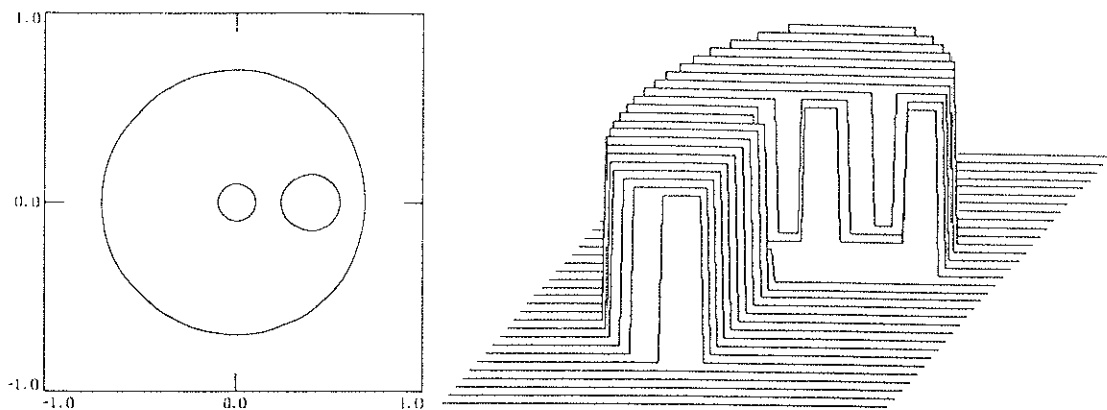
Ellipses	Center	Major axis	Minor axis	Theta	Contrast
a	( 0.0 , 0.0 )	0.7	0.7	0.0	1.0

Fig.15 数値ファントム(A)



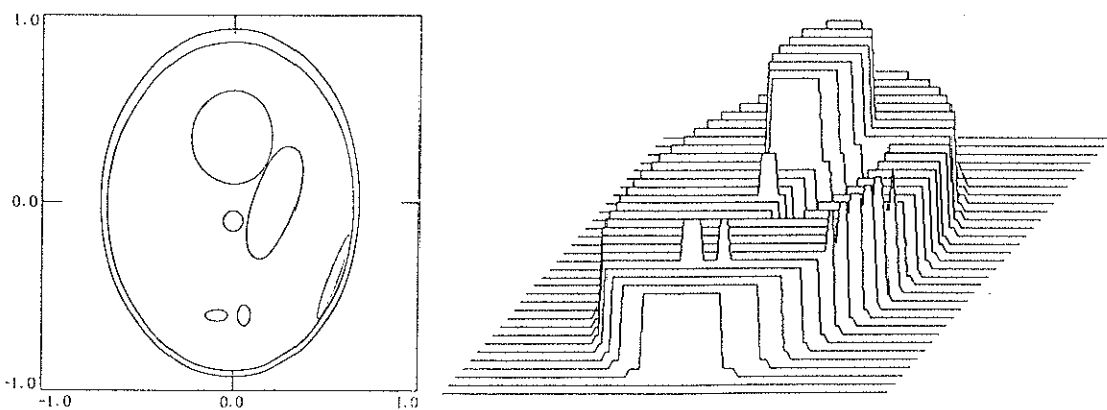
Ellipses	Center	Major axis	Minor axis	Theta	Contrast
a	( 0.0 , 0.0 )	0.7	0.7	0.0	0.4
b	( 0.0 , 0.0 )	0.1	0.1	0.0	1.0
c	( 0.4 , 0.0 )	0.15	0.15	0.0	1.0

Fig.16 数値ファントム(B)



Ellipses	Center	Major axis	Minor axis	Theta	Contrast
a	( 0.0 , 0.0 )	0.7	0.7	0.0	1.0
b	( 0.0 , 0.0 )	0.1	0.1	0.0	0.2
c	( 0.4 , 0.0 )	0.15	0.15	0.0	0.2

Fig.17 数値ファントム(C)



Ellipses	Center	Major axis	Minor axis	Theta	Contrast
a	( 0.0 , 0.0 )	0.69	0.92	0.0	0.1
b	( 0.0 , -0.0184 )	0.6624	0.874	0.0	1.0
c	( 0.22 , 0.0 )	0.11	0.31	-18.0	0.3
d	( 0.0 , 0.35 )	0.21	0.25	0.0	2.0
e	( 0.0 , -0.1 )	0.046	0.046	0.0	1.5
f	( -0.08 , -0.605 )	0.046	0.023	0.0	1.5
g	( 0.06 , -0.605 )	0.023	0.046	0.0	1.5
h	( 0.56 , -0.4 )	0.025	0.2	-21.0	1.5

Fig.18 数値ファントム(D)

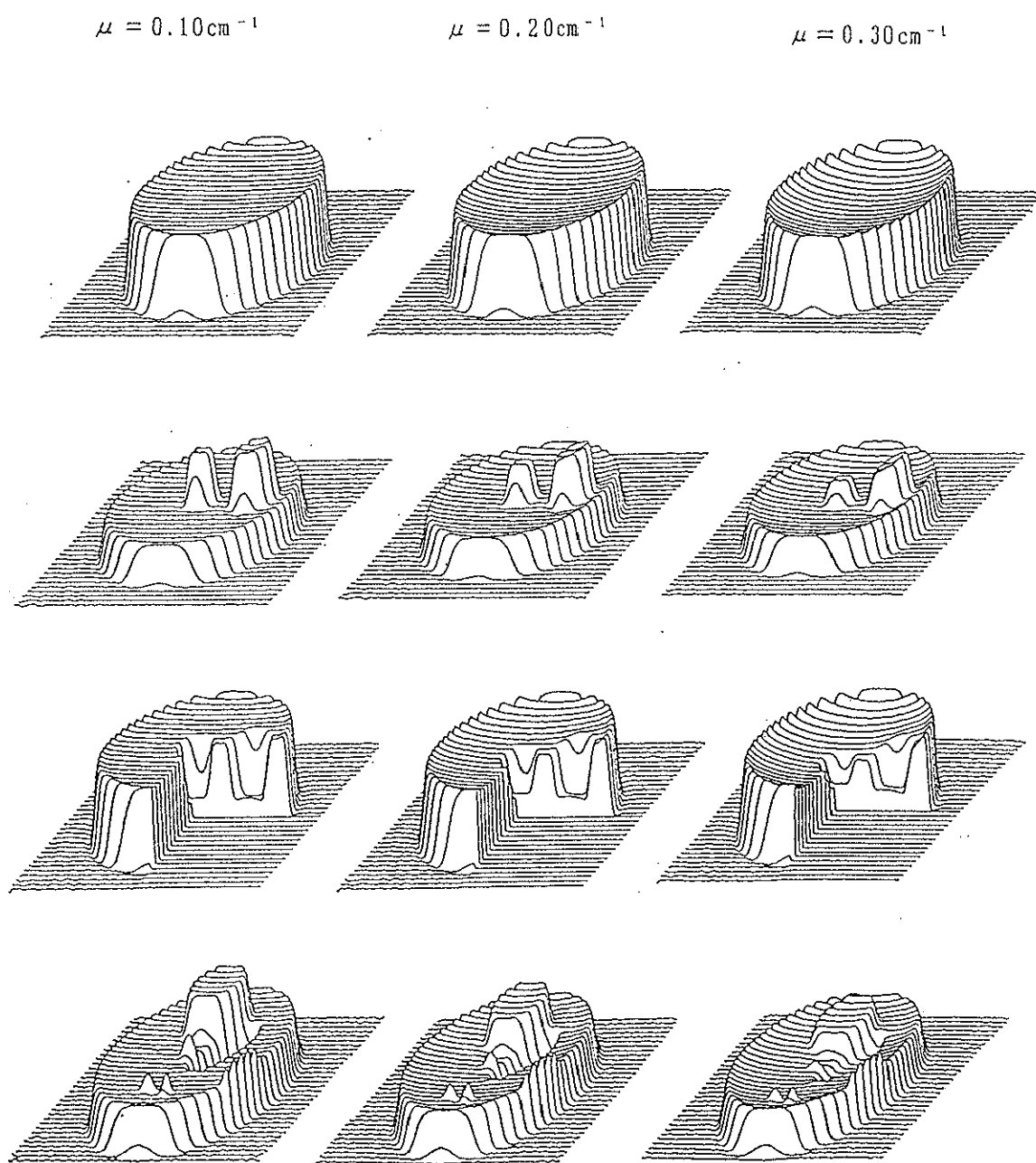


Fig.19 前補正法 1 で再構成した画像の鳥瞰図

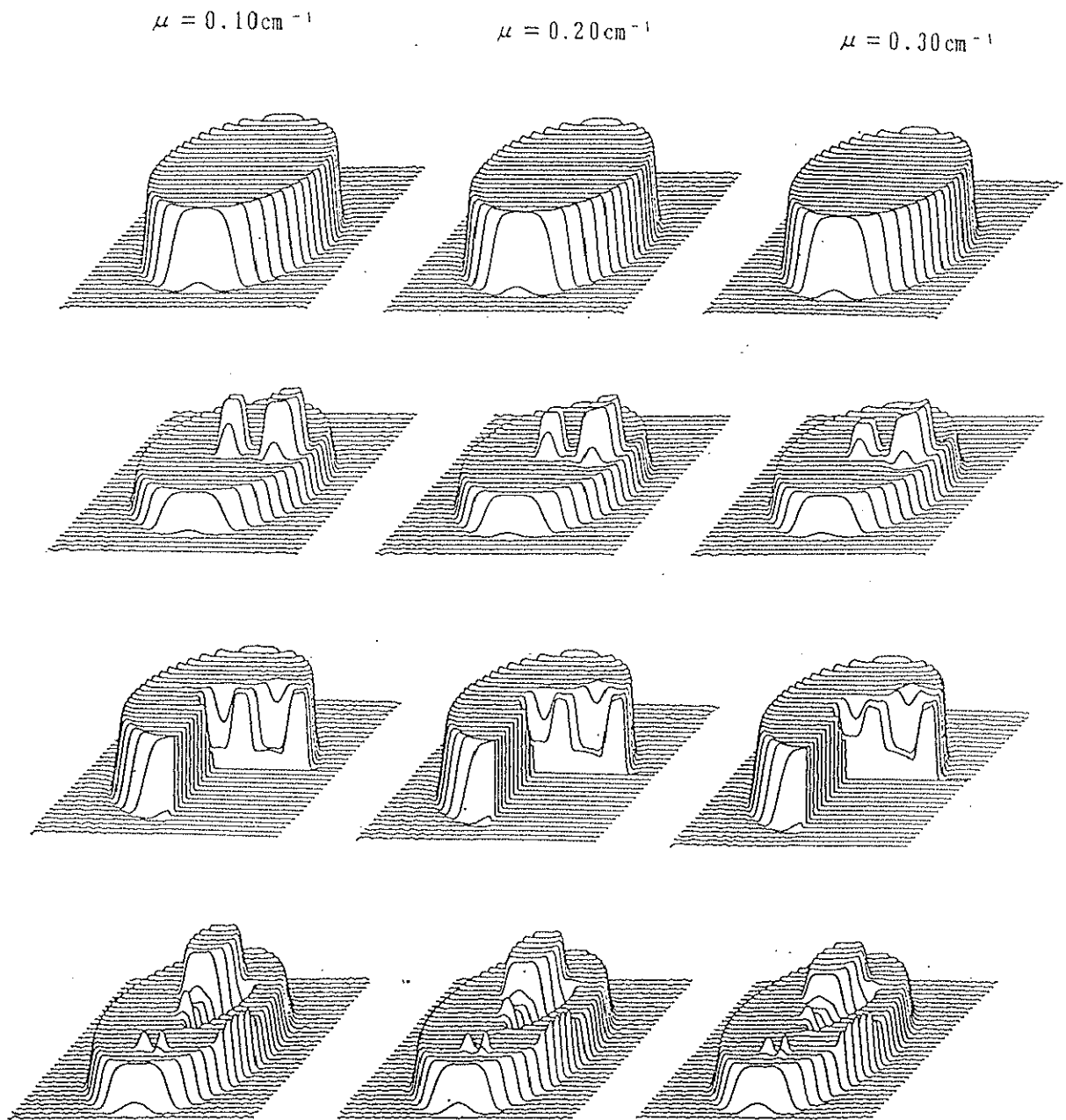


Fig.20 前補正法2で再構成した画像の鳥瞰図

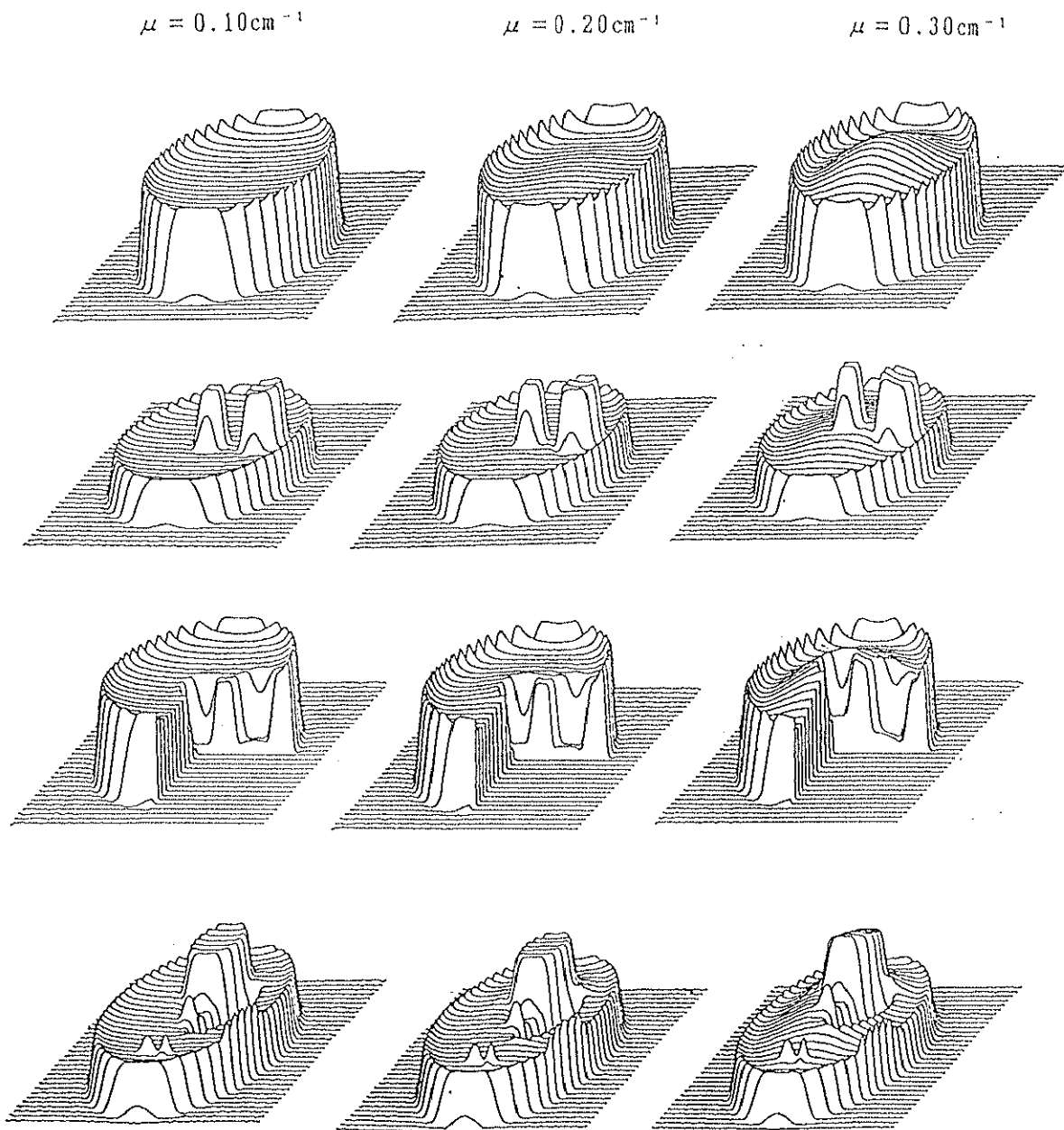


Fig.21 後補正法で再構成した画像の鳥瞰図



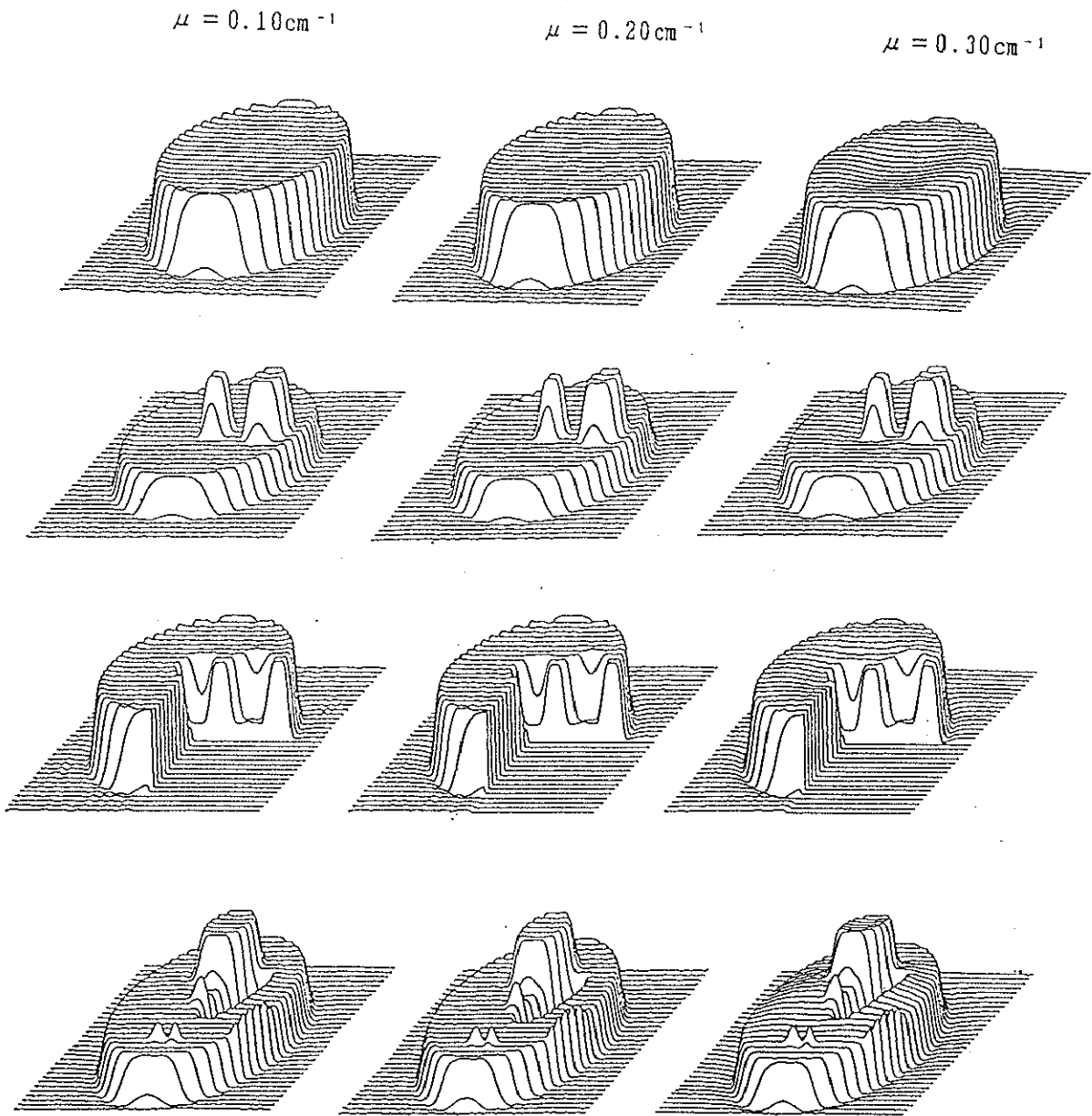


Fig.22 荷重逆投影法で再構成した画像の鳥瞰図

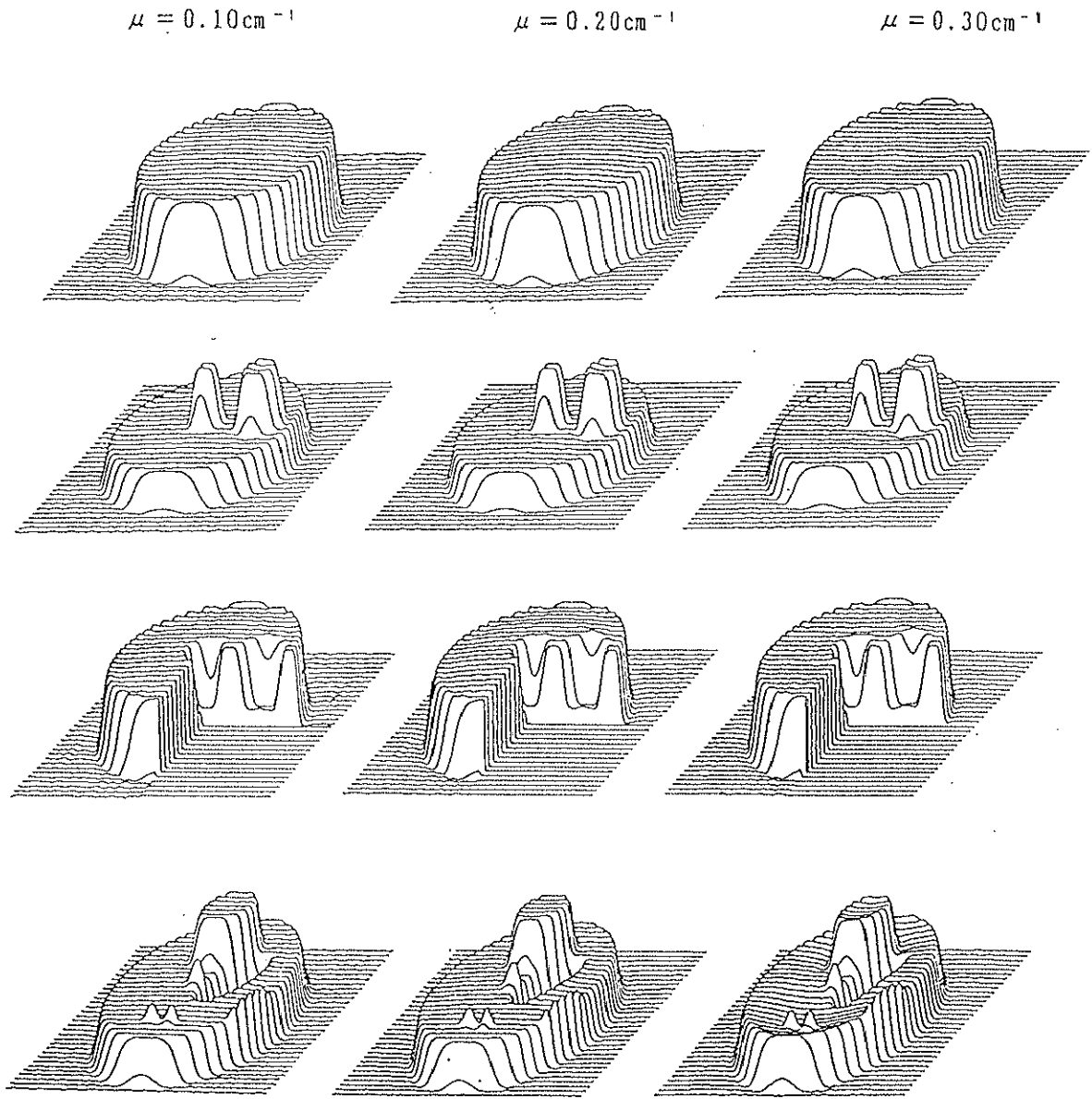


Fig.23 放射後補正法で再構成した画像の鳥瞰図

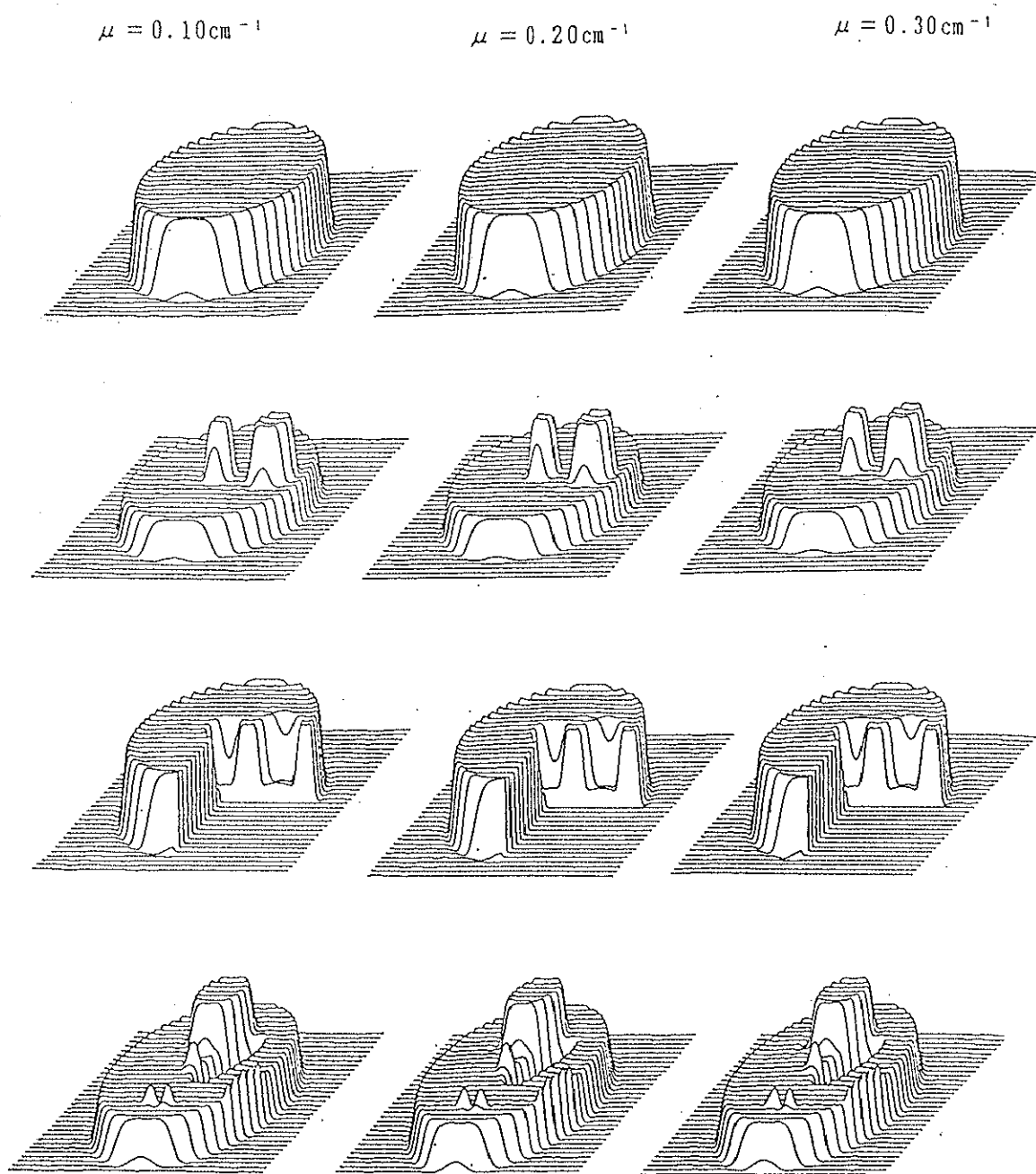


Fig.24 厳密解の方法で再構成した画像の鳥瞰図

算術平均を用いた前補正法1は、減衰係数の値が小さい場合では、比較的正しく減衰補正が行なわれているが、減衰係数の値が大きくなるにつれて、減衰補正が不足して、画像の中心部が落ち込んだ凹状の歪みが見られる。

幾何平均を用いた前補正法2は、数値ファントム(A)では、減衰係数の値によらず正しく減衰補正が行なわれている。これは、この再構成法が円形で一様に分布したR Iの濃度分布を仮定したときに求めた補正式を使っているからである。そのため、ほかの数値ファントムにおいては、最も多くを占めている一定濃度の部位では歪みは見られないが、そのほかの部位では減衰係数の値が大きくなるにつれて減衰補正が不足するため、歪みが見られる。

後補正法は、点線源を仮定して補正マトリックスを作成しており、R Iの濃度分布が広がりを持っている実際の場合では、各画素ごとの減衰の補正が正しく行なわれず、画像に歪みが生じてしまう。再構成像を見ると、被写体のエッジの部分に歪みが見られ、減衰係数の値が大きくなるにつれて、画像に歪みも大きくなっているのがわかる。

荷重逆投影法と放射後補正法は、減衰の補正に使用する関数が、円形のファントムの再構成画像の誤差が小さくなるように、計算機シミュレーションによって、統計的に求められたものであり、ファントムの形状によりその再構成像の歪みかたが異なってきている。しかし、前の3つの方法に比べて歪みの度合いは小さなものとなっている。

本研究で提案する厳密解の方法は、減衰係数の値が異なっても、ファントムの形状が異なっても再構成像に歪みは見られず、正しく減衰補正が行なわれていることがわかる。

次に、本研究で提案する厳密解の方法の実用的な評価をするために、実際の装置を用いたファントム実験を行った。測定に用いた円柱状のファントムの容器の材質は全てアクリル性で、そこに小さな円柱状の穴を開けてR Iを満たしている。使用したR Iは $^{99m}\text{Tc}$ で、装置は東芝製のGCA-9300を用いた。 $^{99m}\text{Tc}$ は140KeVの $\gamma$ 線を放出し、このエネルギーに対するアクリルの減衰係数の値は $\mu=0.15\text{cm}^{-1}$ である。厳密解の方法の実際の定量性を調べるために、図に示すような2種類のファントムを使用した。

- |                 |              |                |
|-----------------|--------------|----------------|
| (1) 定量性ファントム(1) | 投影数          | : 90投影/360度    |
|                 | 1投影あたりのサンプル数 | : 128点         |
|                 | ピクセル実長       | : 1.72mm/pixel |
|                 | 全カウント数       | : 776,371      |
| (2) 定量性ファントム(2) | 投影数          | : 90投影/360度    |
|                 | 1投影あたりのサンプル数 | : 128点         |
|                 | ピクセル実長       | : 1.72mm/pixel |
|                 | 全カウント数       | : 939,799      |

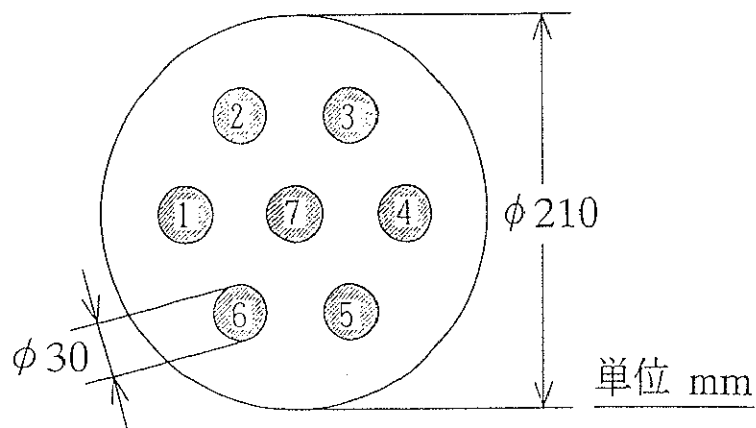
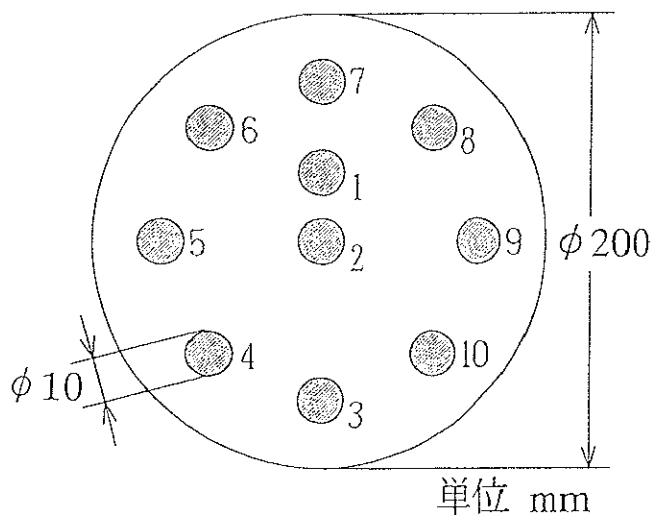


Fig.25 定量性ファントム(1)の形状



RIの量 (mCi)	
1	0.547
2	0.548
3	0.554
4	0.659
5	0.763
6	0.872
7	0.983
8	1.088
9	1.194
10	1.285

Fig.26 定量性ファントム(2)の形状

定量性ファントム(1)では、斜線の1～7の部分に均一にRIが満たされている。

定量性ファントム(2)では、斜線の部分にそれぞれ図の中に示した量のRIが満たされている。

本研究で提案する厳密解の方法では、角度方向にフーリエ級数展開を行うが、このとき投影数が2のべき乗であれば通常のFFTの表現を用いることができるので、非常に便利である。そこで、3次多項式補間を用いて投影数を90投影から128投影にして画像再構成を行った。

定量性ファントム(1)を減衰の補正を行わずに、そのままX線CTの画像再構成法で、再構成した結果の鳥瞰図をFig.27に、また、厳密解の方法で再構成した結果の鳥瞰図をFig.28に示

す。その画像をもとにして円柱部(1)を基準にしたそれぞれの相対カウント値の表をFig.29に示す。減衰補正を行なわないと、円柱部(7)において25%近くも値が落ち込んでいるが、厳密解の方法では、全体が2%以内におさまっている。

定量性ファントム(2)を厳密解の方法で再構成した結果の鳥瞰図をFig.30に示す。これをもとに、R Iの量に対する相対カウント値を求めたグラフをFig.31に示す。それぞれの点が原点を通る直線上にのっていることから、非常によく定量性が保たれていることがわかる。

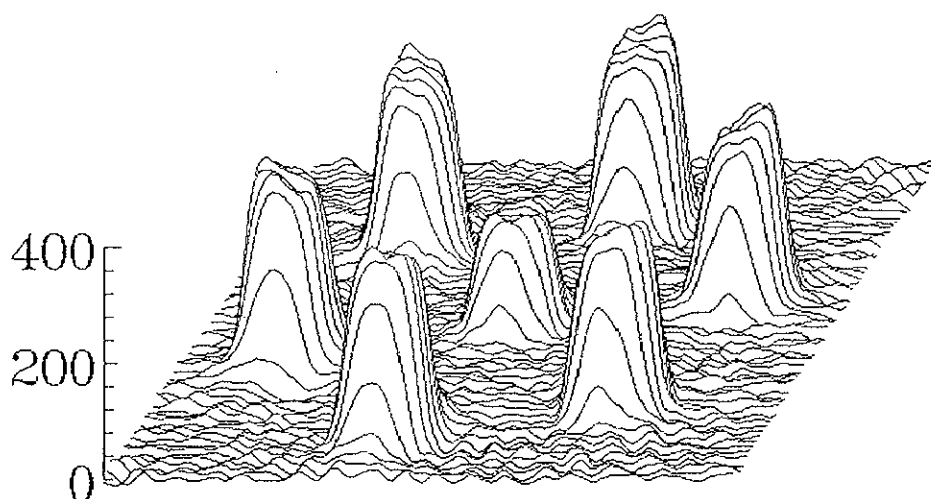


Fig.27 定量性ファントム(1)を減衰補正なしで再構成した画像の鳥瞰図

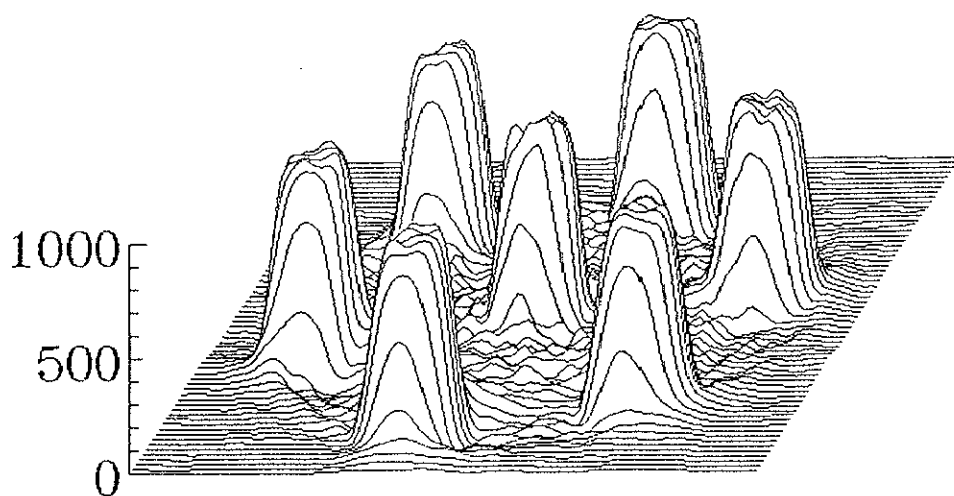


Fig.28 定量性ファントム(1)を厳密解の方法で再構成した画像の鳥瞰図

	減衰補正なし	厳密解の方法
1	1.00	1.00
2	1.01	1.02
3	1.02	1.02
4	1.02	1.00
5	1.01	0.99
6	1.00	1.01
7	0.76	1.01

Fig.29 円柱部(1)を基準にした相対カウント値

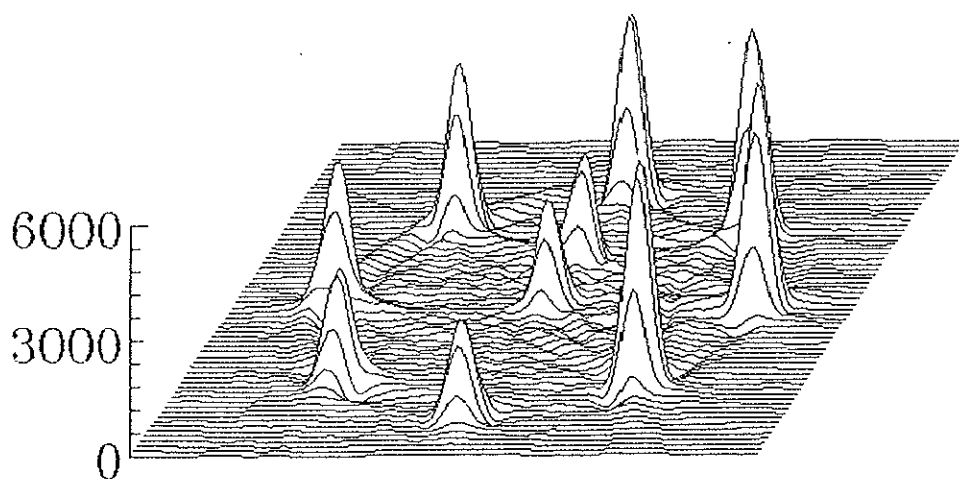


Fig.30 定量性ファントム(2)を厳密解の方法で再構成した画像の鳥瞰図

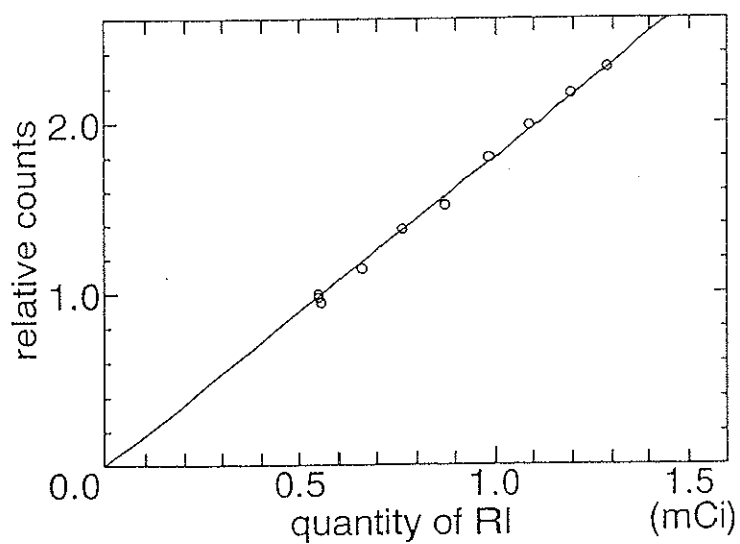


Fig.31 R Iの量に対する相対カウント値のグラフ

## 2. 輪郭の抽出およびその補正法

直接計測された測定データから(29)式に示す投影関数を得るには、被写体の輪郭が既知でなければならない。今回提案する画像再構成法はその投影関数をもとに計算されているので、輪郭が既知でない場合、なんらかの方法で輪郭を求める必要がある。これは被写体が頭部のような凸体である場合、最初に得られる投影データより次のようにして容易に求められる[37]。

まず、図に示すように投影データを左右から検索し、最初にある閾値を越える点を左右2点検出する。そして、その2点より内側をすべて零とし、一方その外側に適当な正の値を与えた関数を $p(X, \theta)$ とする。これをもとに逆投影を行うと、

$$h(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(X, \theta) d\theta \quad (88)$$

但し、 $X = x \cos \theta + y \sin \theta$ 、が得られる。この分布において、 $h(x,y)=0$ は被写体領域を与え、この境界が輪郭となる。

この方法は、多少のノイズで左右の閾値を越える点が誤った外側を検出したとしても、その近くの投影データで正確な点を検出していれば、逆投影によって誤ったところは塗りつぶされてしまうので、ノイズに強い性質を持っている。

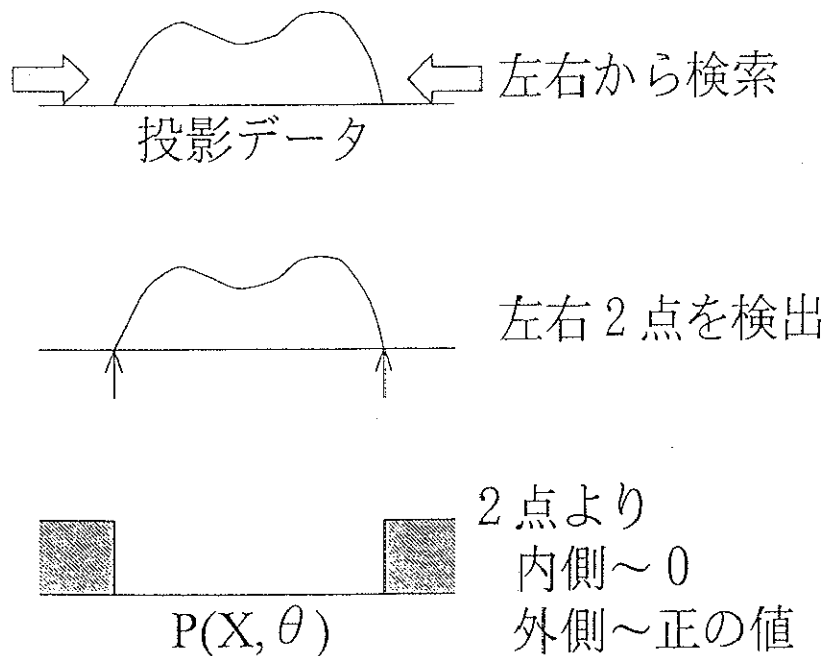


Fig.32 輪郭の抽出法



この方法を利用して、輪郭補正をするときに、座標軸から輪郭までの長さLを出す必要がある。上述の方法によって、輪郭は画像上にデジタル的に求められるので、長さLを直接求めるとFig.33の破線のように凹凸が生じてしまう。このため、 $\exp(\mu L)$ を乗じて得られる(29)式に示す投影関数は、この変動成分が拡大されて与えられるものと予想される。凹凸を生じたLを、そのまま輪郭の補正に用いて再構成したファントムの画像の鳥瞰図をFig.34に示す。ここで用いたファントムは、第4節の1に示した数値ファントム(D)である。その結果得られる画像は、予想通り凹凸の激しいものとなる。そこで、以下の方法で、この凹凸が生じないようにLの値を導出する。上述の輪郭抽出の方法で、逆投影によって求めた領域は外に凸の多角形となることが保証される。そこで、その多角形の頂点の座標を求め、投影データの角度に合わせて頂点の座標を回転し、長さLを求める直線に最も近い2つの頂点の座標から線形内挿することにより、Lの値を求める。この方法を用いてえられた画像の鳥瞰図をFig.35に示す。前者の画像に比べて細かいアーティファクトがなくなっていることが確認できる。

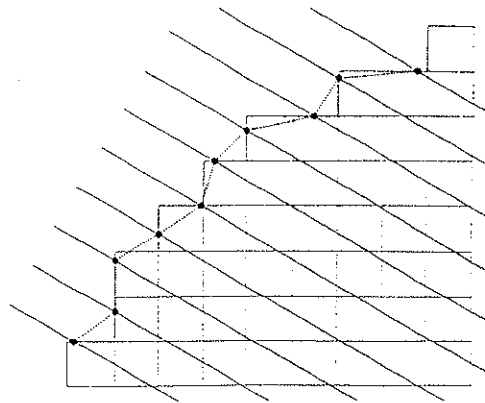


Fig.33 輪郭補正におけるLの算出

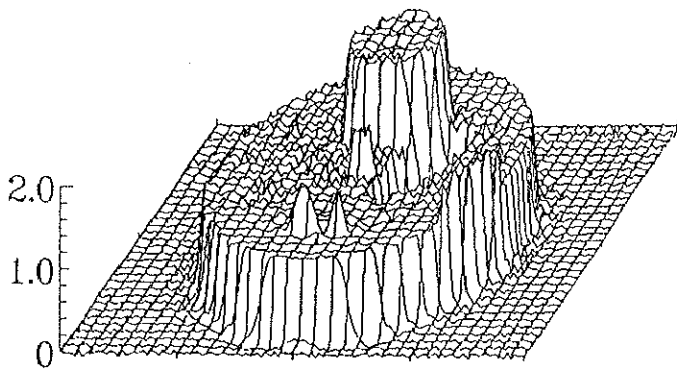


Fig.34 そのままLを算出して画像再構成した  
ファントムの鳥瞰図

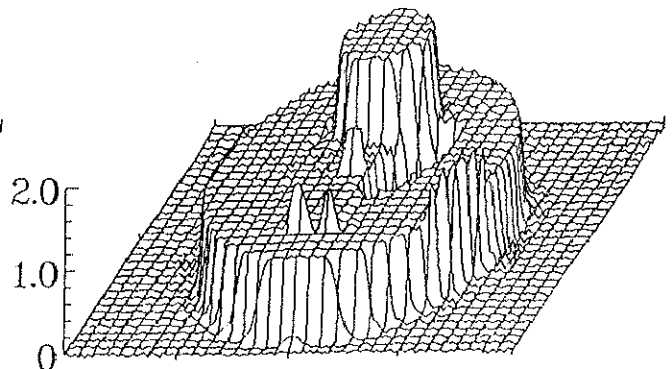


Fig.35 提案する方法でLを算出して画像再構  
成したファントムの鳥瞰図

### 3. 低計数値の場合のアーティファクトの除去

SPECTでは、対象物である人体にRIを投与し、そこから放出される $\gamma$ 線を利用して画像を再構成する。 $\gamma$ 線は少なからずも人体に影響を及ぼすので、人体に投与するRIの量は、なるべく少ないことが望ましい。

そこで、投与するRIの量を少なくしたときを考え、本節の1で示した数値ファントム(D)において $\gamma$ 線のtotal countが極端に少ない( $5 \times 10^5$  count)投影データから、筆者らが提案した厳密解を用いて再構成を行なった。その再構成像をFig.36に示す。もちろん、total countが極端に少ないため、投影データには統計ノイズが多く入り、その再構成像は非常にノイズの多い画像になっている。しかし、この画像には、統計ノイズによる画像の乱れのほかに同心円状のアーティファクトがみられる[38]。このアーティファクトは、この厳密解に特有なもので、厳密解において角度方向にFourier級数展開し、減衰の補正を施しFourier合成を行うところに起因していると考えられる。Fourier合成を行う際に、その次数をある所で切断すると、値が急激に変化するところでリングング(Gibbs アーティファクト)が発生することは、よく知られている。この場合、角度方向にFourier合成を行っているので、リングングは角度方向、つまり同心円状に現れると考えられる。さらに、total countが少ないが場合、ノイズによって値が急激に変化するところが増えるので、リングングが目立ってくるため、同心円状のアーティファクトとして発生したと考えることができる。そこで、このアーティファクトを抑えるため、Fourier合成の際に次数を切断するところで、その次数よりも小さいところから少しずつ値を滑らかに減衰させることが必要であると考えた。今回は、以下のようにガウス関数を用いて、 $F_n(\omega)$ を高い次数で滑らかに落とした $F'_n(\omega)$ を求めてFourier合成を行なった。

$$F'_n(\omega) = F_n(\omega) \quad : n < n_0$$

$$F'_n(\omega) = F_n(\omega) \cdot \exp\left[-\frac{(n-n_0)^2}{\sigma^2}\right] \quad : n_0 \leq n \leq n_e \quad (89)$$

$$\sigma^2 = -\frac{(n_e - n_0)^2}{\ln(f_e)}$$

ここで、 $n_0$ は値を落とし始める次数で、 $n_e$ はFourier合成の際の最大次数であり、 $f_e$ はFourier合成の最大次数で数値を落とす割合である。また、 $n_0$ より小さな次数では、そのままの値を用いる。この式を用いて、 $n_0=45$ ,  $n_e=64$ ,  $f_e=0.01$  として高い次数を滑らかに落とし、Fourier合成を行なって再構成した画像をFig.37に示す。Fig.36に比べると、同心円状のアーティファクトが低減されているのが分かる。

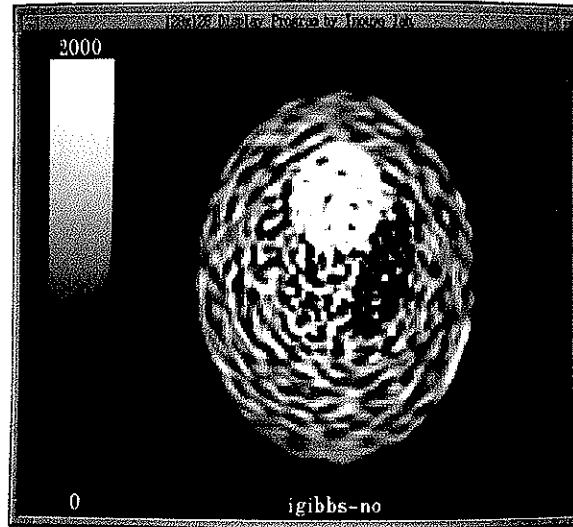


Fig.36  $\gamma$ 線のtotal countが極端に少ない場合の再構成像

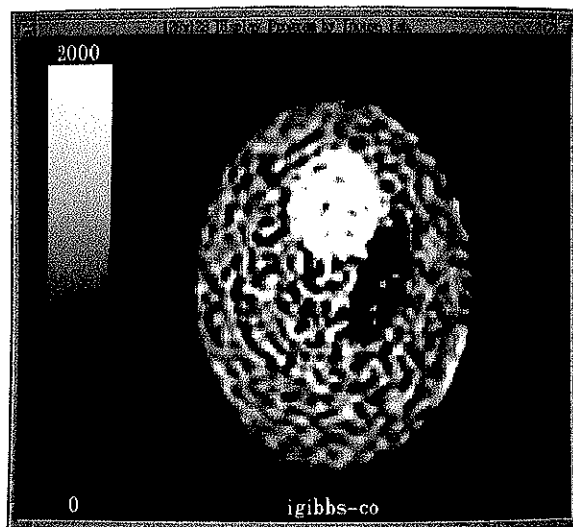


Fig.37 Fourier合成の際に、4 5次から6 4次まで滑らかに値を落とした場合の再構成像

#### 4. 不均一な減衰係数の場合への拡張

今回提案する厳密解の方法は、減衰係数が一様であると仮定した場合について解かれた方法である。現実には正確に減衰係数が一様であるとはいえないが、周辺部分あるいは中央部分に減衰係数 $\mu$ の異なる部分が集中している場合には、この方法の拡張が可能である。(26)式の測定データを求める式において、測定データから、被写体分布と減衰係数分布の両方を同時に求めることは一般には困難なので、ここでは減衰係数分布は透過型CTなどを用いて測定されている量であると仮定して考える。

人間の頭部の場合、脳と頭蓋骨の2つの組織に分けることができ、しかも頭蓋骨にはRIが入り込まず、被写体分布を零とおいても差しつかえない。そのような場合、(26)式は以下のように書き換えることができる[39]。

$$\begin{aligned} g_0(X, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-[\mu_T(Y+L_T)+\mu_B L_B]} dY \\ &= e^{-\mu_B L_B} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-\mu_T(Y+L_T)} dY \end{aligned} \quad (90)$$

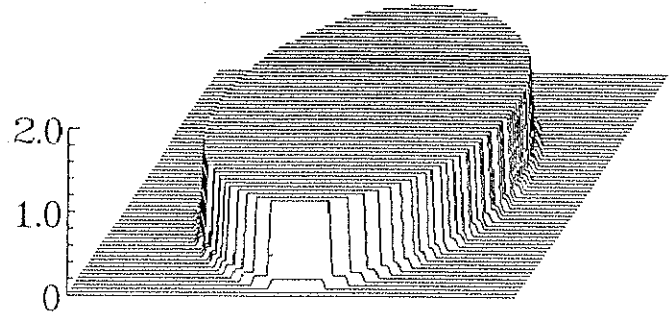
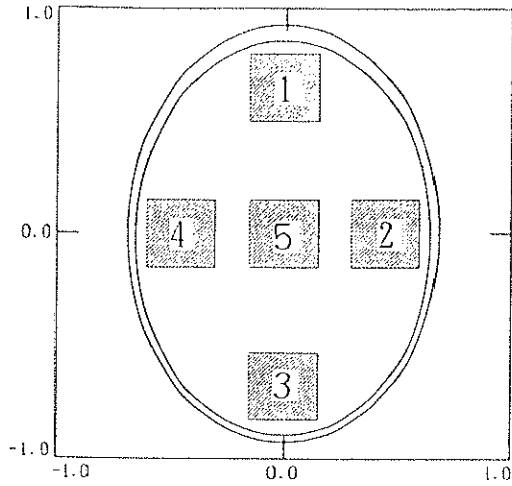
ここで、 $\mu_T$ 、 $\mu_B$ はそれぞれ脳と頭蓋骨の減衰係数の値で、 $L_T$ はX軸から脳の輪郭までの長さで、 $L_B$ は脳の輪郭から、頭蓋骨の輪郭までの長さである。仮定より、 $\mu_T$ 、 $\mu_B$ 、 $L_T$ 、 $L_B$ は既知の量であるといえるので、(90)式の両辺に、 $\exp[-\mu_B L_B]$ を乗じると、その式は、(28)式と等価になり、以下今までの方法と同様に再構成することが可能となる。

この方法の有効性を確かめるために、Fig.38に示す数値ファントムを用いて計算機シミュレーションを行なった。図中の数字の入った斜線部は、評価を出す際に使用する領域を示す。減衰係数の値は、脳と頭蓋骨をそれぞれ、 $\mu_T=0.15\text{cm}^{-1}$ と $\mu_B=0.26\text{cm}^{-1}$ として計算を行なった。今まで通り、減衰係数の値をすべて一様な脳の値にして再構成した画像の鳥瞰図と、上で示した方法を用いて再構成した画像の鳥瞰図をそれぞれ、Fig.39とFig.40に示す。減衰係数を一様とした場合は、減衰補正に頭蓋骨分の誤差が含まれるため、再構成像に若干の歪みが見られる。それに対し、上述の方法で行なった再構成像では、歪みは見られず、非常によく再構成されているのが分かる。また、それぞれの定量評価を、Fig.38に示す斜線部1から5の領域について、以下に示す評価関数を用いて行なった。

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [p(i, j) - r(i, j)]^2}{N^2}} \quad (91)$$

その評価値の結果をFig.41に示す。これを見ると、頭蓋骨に近いところの評価値は、減衰係数を一様とした場合では、頭蓋骨の影響を大きく受けて、その値が中心部に比べて悪くなっているのが分かる。上述の方法で行なった場合では、どの場所の評価値を見ても、非常に良い値に

なっている。



Ellipses	Center	Major axis	Minor axis	Theta	Contrast
a	( 0.0 , 0.0 )	0.69	0.92	0.0	0.1
b	( 0.0 , -0.0184)	0.6624	0.874	0.0	1.0

Fig.38 数値ファントムの形状と値

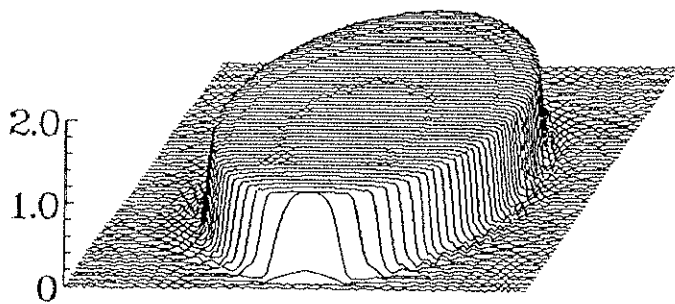


Fig.39 減衰係数を一様とした場合の再構成像の鳥瞰図

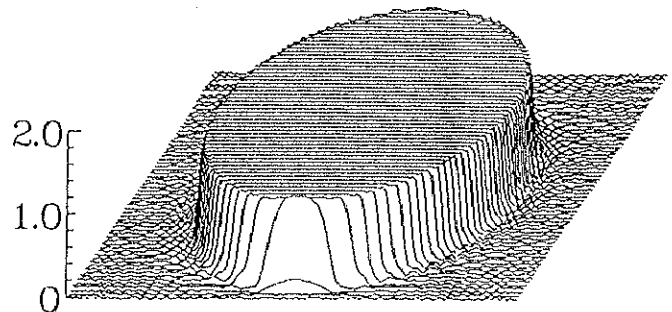


Fig.40 上で示した方法を用いて再構成した画像の鳥瞰図

領域	減衰係数を一様と仮定した場合	上述の方法で行なった場合
1	0.0746	0.0039
2	0.0368	0.0020
3	0.0194	0.0013
4	0.0495	0.0025
5	0.0204	0.0004

Fig.41 再構成像の評価値

人体の頭部のような場合は、以上の方法で不均一な減衰係数を補正することができることが分かったが、心筋のように周りに様々な組織があり、またその組織にもRIが分布しているときには、上で示した方法は用いることができない。そこで、そのような場合にもある程度補正をすることが可能な方法を考案したので、その方法を以下に示す。

(26)式において、減衰係数分布 $\mu(x,y)$ は既知であるとし、その分布の最も多くの部分を占める減衰係数の値を $\mu$ と置いて減衰係数分布 $\mu(x,y)$ を以下のようにおく。

$$\mu(x,y) = \mu + \Delta\mu(x,y) \quad (92)$$

ここで、 $\mu$ は一定値である。また、X軸から被写体までの長さをLとおくと、(26)式は以下のように書き換えることができる。

$$g_0(X,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp\left[-\int_{-L}^Y \mu(x,y) dY'\right] dY \quad (93)$$

この式の、減衰項の積分の式に(92)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \int_{-L}^Y \mu(x,y) dY' &= \int_{-L}^Y [\mu + \Delta\mu(x,y)] dY' \\ &= \mu[Y+L] + \int_0^Y \Delta\mu(x,y) dY' + \int_{-L}^0 \Delta\mu(x,y) dY' \end{aligned} \quad (94)$$

のように書くことができる。心筋を計測する場合のように被写体分布が、中心付近のある組織に高く分布する場合は、(94)式の右辺の第2項は第3項に比べて、比較的小さな値になるので、この項を無視することができる。第2項を無視して(94)式を(93)式に代入すると、

$$\begin{aligned} g_0(X,\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \exp\left[-\mu(Y+L) - \int_{-L}^0 \Delta\mu(x,y) dY'\right] dY \\ &= \exp\left[-\int_{-L}^0 \Delta\mu(x,y) dY'\right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-\mu[Y+L]} dY \end{aligned} \quad (95)$$

となる。減衰係数分布は既知としているので、右辺の積分の外に出た項は求めることができるので、それを補正したものを改めて $g'_0(X,\theta)$ とすると、

$$\begin{aligned}
g'_0(X, \theta) &= g_0(X, \theta) \cdot \exp\left[\int_{-L}^0 \Delta \mu(x, y) dY'\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-\mu(Y+L)} dY
\end{aligned}
\tag{96}$$

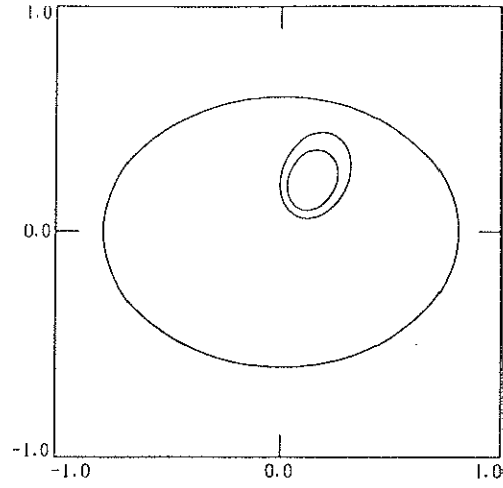
となる。これは、(28)式と等価になるので、ここから厳密解による画像再構成法で再構成することができる。

この方法の有効性を確認するために、心筋を模擬した数値ファントムを用いて計算機シミュレーションを行なった。心筋ファントムの濃度分布と減衰係数分布をそれぞれFig.42とFig.43に示す。それぞれの楕円は、以下の組織を模擬したものである。

- |             |      |          |
|-------------|------|----------|
| (1) RIの濃度分布 | a    | : 内部組織   |
|             | b    | : 心臓     |
|             | b-c間 | : 心筋部    |
| (2) 減衰係数の分布 | a    | : 内部組織   |
|             | b    | : 背骨, 脊髄 |
|             | c,d  | : 肺組織    |
|             | e    | : 肝組織    |

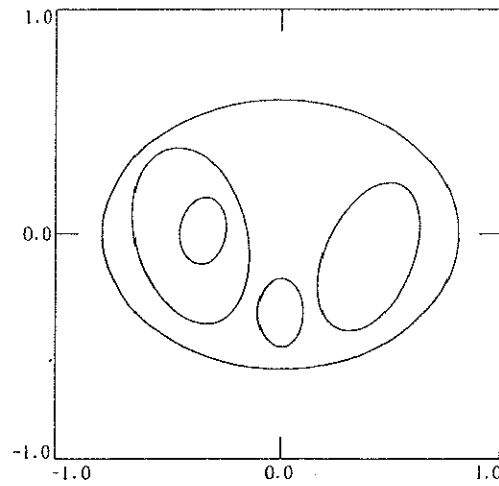
減衰係数をすべて一様の $\mu=0.18\text{cm}^{-1}$ として、厳密解の方法で再構成した画像と、上述の方法で $\mu=0.18\text{cm}^{-1}$ として減衰係数の不均一性を補正してから、厳密解の方法で再構成した画像をそれぞれFig.44とFig.45に示す。右側は全体の再構成像で、左側は心筋の周辺を拡大したものである。不均一性の補正を行なわないで再構成した画像は、一定であるはずの心筋の部分の値が、画像の中心に向かって高くなっていることが分かる。それに対し、不均一性の補正を行なってから再構成した画像は、心筋以外の部分では、減衰係数の不均一性が取りきれておらず値に多少の凹凸が見られるが、心筋の部分の値は、ほぼ一様になっているのが分かる。

これを、定量的に見るために、Fig.46に示す心筋部分の4ヶ所の領域と心筋全体の評価値を求めた。そのとき、用いた評価関数は、(91)式に示したものと同一のものを用いた。その評価値の値をFig.47に示す。この表を見ると分かるように、不均一性の補正を行なわないで再構成した場合は、領域3において26%もの誤差が見られるが、不均一性の補正を行なってから再構成すると、その誤差は、すべて3%以内におさまっているのが分かる。



Ellipses	Center	Major axis	Minor axis	Theta	Contrast
a	( 0.0 , 0.0 )	0.8	0.6	0.0	0.2
b	( 0.15 , 0.25 )	0.15	0.2	-25.0	1.0
c	( 0.135 , 0.225 )	0.1	0.133	-25.0	0.2

Fig.42 心筋ファントムのR Iの濃度分布の形状



Ellipses	Center	Major axis	Minor axis	Theta	Contrast
a	( 0.0 , 0.0 )	0.8	0.6	0.0	0.18
b	( 0.0 , -0.35 )	0.1	0.15	0.0	0.40
c	( 0.4 , -0.1 )	0.2	0.35	-25.0	0.04
d	( -0.4 , -0.05 )	0.25	0.4	15.0	0.04
e	( -0.35 , 0.05 )	0.12	0.15	-10.0	0.18

Fig.43 心筋ファントムの減衰係数分布の形状



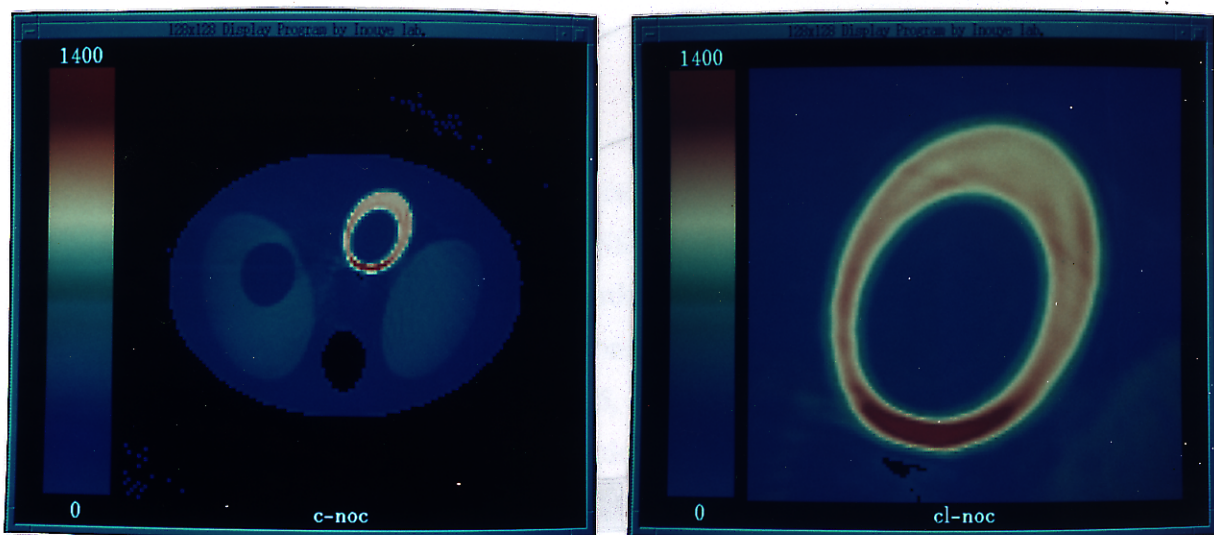


Fig.44 減衰係数の不均一性の補正をしないで再構成した画像

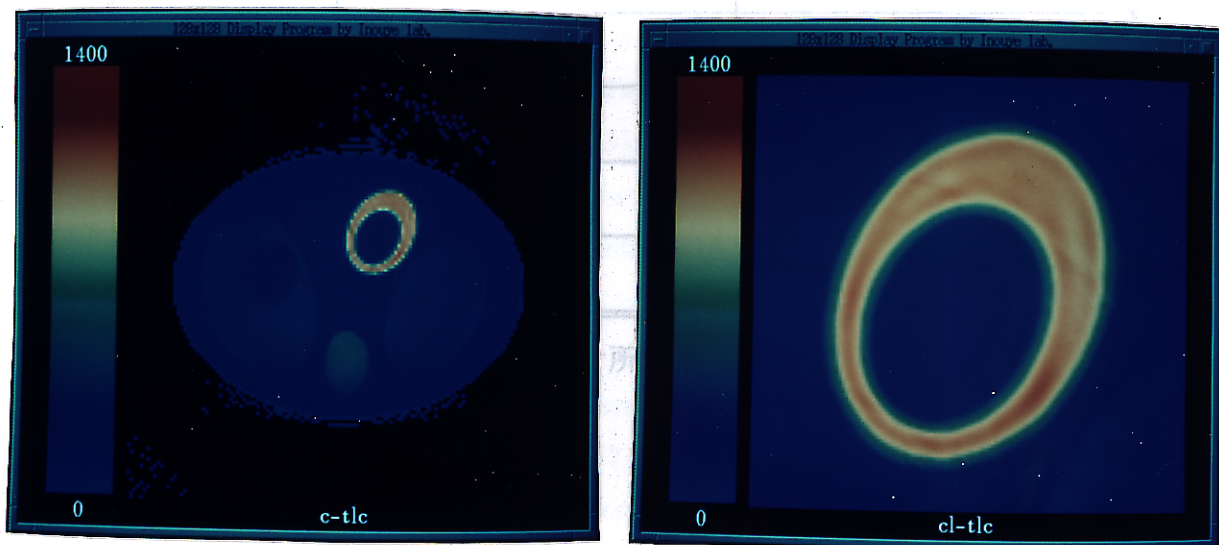


Fig.45 減衰係数の不均一性を補正してから再構成した画像

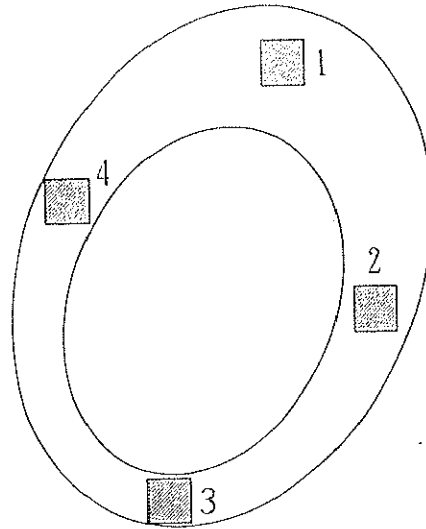


Fig.46 心筋の評価のための領域（心筋部を拡大している）

心筋の領域	不均一性の補正なし	不均一性の補正あり
1	0.0273	0.0229
2	0.0174	0.0280
3	0.2615	0.0139
4	0.0221	0.0083
心筋全体	0.1077	0.0217

Fig.47 心筋の4ヶ所と心筋全体の評価値

## 参考文献

- [1] E.S.Chornoboy, C.J.Chen, M.I.Miller, T.R.Miller and D.L.Snyder : An evaluation of maximum likelihood reconstruction for SPECT, IEEE Trans. Med. Imag., vol.9, pp.99-110 (1990)
- [2] Y.Censor, D.E.Gustafson, A.Lent and H.Tuy : A new approach to the emission computerized tomography problem: Simulation calculation of attenuation and activity coefficients, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-26, pp.2775-2779 (1979)
- [3] D.B.Kay and J.W.Keyes, Jr. : First order correction for absorption and resolution compensation in radionuclide fourier tomography, J. Nuclear Medicine, Proceedings of 22nd Annual Meeting, Vol.16, No.6, pp.540-541 (1975)
- [4] J.W.Keyes, Jr., N.Orlandea, W.J.Heetderks, P.F.Leonard, and W.L.Rogers : The Humogotron -- A Scintillation Camera Trasaxial Tomography, J. Nuclear Medicine, 18, pp.381-387 (1874)
- [5] S.Genna : Analytical Methods in Whole-Body Counting, in : Clinical Uses of Whole-Body
- [6] J.A.Sorenson : Quantitative measurement of radioactivity in vivo by whole-body counting. In : Hine GJ, Sorenson JA, eds. Instrumentation in nuclear medicine, Vol.2, New York : Academic Press, pp.311-348 (1974)
- [7] T.F.Budinger, G.T.Gullberg : Transverse section reconstruction of gamma-ray emitting radionuclides in patients. In : Ter-Pogossian MM, Phelps ME, Brownell GL, eds. Reconstruction tomography in diagnostic radiology and nuclear medicine, Baltimore : University Park Press, pp.315-342 (1977)
- [8] T.F.Budinger, S.E.Derenzo, G.T.Gullberg et al : Emission computer assisted tomography with single-photon and positron annihilation photon emitters, J. Comput. Assist. tomogr. 1, pp.131-145 (1977)
- [9] G.T.Gullberg and T.F.Budinger : The use of filtering methods to compensate for constant attenuation in single-photon emission computed tomography, IEEE Trans. Biomedical Eng., BME-28, pp.142-157 (1981)
- [10] W.I.Keyes : A Practical Approach to Trasverse-Section Gamma-Ray Imaging, British Journal of Radiology, 49, pp.62 (1976)
- [11] R.J.Jazczak, P.H.Murphy, D.Huard, and J.A.Burdine : Radionuclide Emission Computed Tomography of the 99m-Tc and a Scintillation Camera, J. Nuclear Medicine, Vol.18, pp.373-380 (1977)

- [12] L.T.Chang : A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography, IEEE Trans. on Nuclear Science, NS-25, pp.638-643 (1978)
- [13] L.T.Chang : Attenuation correction and incomplete projection in single photon emission axial tomography, IEEE Trans. on Nuclear Science, NS-26, pp.2780-2789 (1978)
- [14] K.I.Kim, R.P.Tewarson et al. : Inversion for the attenuated Radon transform with constant attenuation, IEEE Trans. on Nucl. Sci., NS-31, pp.538-542 (1984)
- [15] O.J.Tretiak and P.Delany : the exponential convolution algorithm for emission axial tomography. In : Brill AB, Price PR, McClain WJ, Landay MW, eds, Information processing in medical imaging, Nashvill : Biomedical Computing Technology Information Center, pp.266-289 (1978)
- [16] E.Tanaka : Quantitative image reconstruction with weighted backprojection for single photon emission tomography, J. Comput. Assist. Tomogr., No.7, pp.692-700 (1983)
- [17] E.Tanaka, H.Toyama and H.Murayama : Convolutional image reconstruction for quantitative single photon emission computed tomography, Phys. Med. Biol., Vol.29, No.12, pp.1489-1500 (1984)
- [18] T.E.Walters, W.Simon, D.A.Chesler, and J.A.Correia : Attenuation Correction in Gamma Emission Computed Tomography, J. Computer Assisted Tomography, Vol.5, pp.89-94 (1981)
- [19] F.P.Soussaline, A.Cao, G.L.Coq, C.Raynaud, C.Kellershohn : An analytical approach to single photon emission computed tomography with the attenuation effect, Eur. J. Nucl. Med., Vol.7, pp.487-493 (1982)
- [20] T.F.Budinger and G.T.Gullberg : Three-dimensional reconstruction in nuclear medicine emission imaging, IEEE Trans. on Nuclear Science, NS-21, No.3, pp.2-20 (1974)
- [21] L.A.Shepp and Y.Vardi : Maximum Likelihood reconstruction for emission tomography, IEEE Trans. Med., MI-1, No.2 (1982)
- [22] M.I.Miller, D.L.Snyder, and T.R.Miller : Maximum Likelihood reconstruction for single-photon emission computed-tomography, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-32, No.1 (1985)
- [23] E.Tanaka : A Fast Reconstruction Algorithm for Stationary Positron Emission Tomography based on a Modified EM Algorithm, IEEE Trans. Med. Imag.

- [24] G.T.Herman : The application of maximum entropy and Bayesian optimization methods to image reconstruction from projections, *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Inverse Problems*, C.R.Smith and W.T.Grandy, Jr., Eds. Dordrecht: Reidel, pp.319-338 (1985)
- [25] S.Geman and D.E.McClure : Bayesian image analysis: An application to single photon emission tomography, *Proc. Statist. Comput. Sect.*, Washington, DC: American Statistical Association, pp.12-18 (1985)
- [26] C.E.Floyd, Jr., R.J.Jaszczak and R.E.Coleman : Convergence of the maximum likelihood reconstruction algorithm for emission computed tomography, *Phys. Med. Biol.* vol.32, pp.463-476 (1987)
- [27] E.Levitan and G.T.Herman : A Maximum *A Posteriori* Probability Expectation Maximization Algorithm for Image reconstruction in Emission Tomography, *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-6, No.3, pp.185-192 (1987)
- [28] Z.Liang, R.Jaszczak and K.Greer : On Bayesian image reconstruction from projections: Uniform and nonuniform *a priori* source information, *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol.8, pp.227-235 (1989)
- [29] P.J.Green : Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified EM algorithm, *IEEE trans. Med. Imaging*, vol.9, pp.84-93 (1990)
- [30] J.Nunez and J.Llacer : A fast Bayesian reconstruction algorithm for emission tomography with entropy prior converging to feasible images, *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol.9, pp.159-171 (1990)
- [31] C.S.Butler and M.I.Miller : Maximum *A Posteriori* Estimation for SPECT Using Regularization Techniques on Massively Parallel Computers, *IEEE Trans. Med. Imag.*, vol.12, pp.84-89 (1993)
- [32] O.J.Tretiak and C.Metz. : The exponential radon transform, *SIAMJ. Appl. Math.*, Vol.39, pp.341-354 (1980)
- [33] S.Bellini, M.Piacentini, C.Cafforio, F.Rocco : Compensation of tissue absorption in emission tomography, *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-27, No.3, pp.213-218 (1979)
- [34] T.Inouye, K.Kose, A.Hasegawa : Image reconstruction algorithm for single-photon-emission computed tomography with uniform attenuation, *Phys. Med. Biol.*, Vol.3, No.3, pp.299-304 (1989)

- [35] T.Inouye, K.Kose, T.Hayashi : Image reconstruction algorithm for single photon emission computed tomography with suppressed noise and artifacts, Proceedings of the 1989 international symposium on noise and clutter rejection in radars and imaging sensors, pp.186-189 (1989)
- [36] 橋本雄幸, 小笠原洋一, 巨瀬勝美, 井上多門, 本村信篤, 市原隆 : 解析的厳密解を用いた S P E C T の画像再構成 ( I ) -基礎定式-, Medical Imaging Technology, Vol.9, No.3, pp.281 (1991)
- [37] 小笠原洋一, 橋本雄幸, 林孝典, 巨瀬勝美, 井上多門, 本村信篤, 市原隆 : 解析的厳密解を用いた S P E C T の画像再構成 ( II ) -実用計算における問題点-, Medical Imaging Technology, Vol.9, No.3, pp.283 (1991)
- [38] 橋本雄幸, 小笠原洋一, 裏岡昭博, 田仲史子, 井上多門 : E C T 画像再構成の解析的厳密解のアーティファクト, 第8回産業における画像センシング技術シンポジウム講演論文集, pp.7-10 (1993)
- [39] 篠原広行, 永島淳一, 國安芳夫, 浅沼眞一, 新尾泰男, 細羽実, 和邇秀信 : 近似的な頭蓋骨の厚さを用いた脳血流 S P E C T の吸収補正-計算機シミュレーション実験による-, Medical Imaging Technology, vol.11, no.2, pp.133-141 (1993)