RADON変換とその逆問題の研究

1994年 3月

橋本 雄幸

目次

論文要旨

１９７２年のX線ＣＴの出現以来、ＣＴ（Computed Tomography）は医学診断の分野で大きな役割を担ってきた。一般にＣＴは、被写体分布よりその投影を求めるRadon変換を逆に解いて、得られた投影の集合から原像を復元する画像処理システムを意味する。この基本となる投影関数の具体的な性質にもとづき、ＣＴは次の二つの形式のものに分類することができる。一つは、X線ＣＴのような被写体の放射線に対する減衰率を画像化する透過型ＣＴで、その性質から被写体の形態的特長を観測するのに用いられる。最近では、産業応用が盛んでγ線や中性子線などX線以外の線源を用いた透過型ＣＴの研究も盛んに行なわれている。もう一つは、被写体に放射性同位元素（ Radio Isotope : ＲＩ）を投与し、その濃度分布を画像化する放射型ＣＴで、生体内に投与したＲＩを標識した薬剤は生体機能にともなって分布するため、放射型ＣＴでは、被写体の生理学的、または生化学的な機能を表す画像が得られる。さらに薬剤によっては、人間の代謝過程を観測することも可能であり、放射型ＣＴの画像は機能画像であるともいえる。また、このＣＴの技術は、非侵襲性を極限にまで改善したＮＭＲ（Nuclear Magnetic Resonance : 核磁気共鳴）の技術と結合し、ＭＲＩ（ Magnetic Resonance Imaging : 磁気共鳴映像法）と呼ばれる医学診断用映像法を創りだした。このＭＲＩの画像再構成もRadon変換を逆に解くという画像処理システムから発展したものである。以上のようにＣＴの画像再構成は、Radon変換がもととなり、その逆問題を解く形になっている。本研究では、それにともなう種々の問題について研究を行なった。

第２章では、種々の計算機トモグラフィ（ＣＴ）について説明を行ない、その中で最も一般的になっているX線ＣＴの画像再構成について述べる。これは、Radon変換の逆問題に相当し、その解析的に厳密な解とそれに対する計算上のアルゴリズムをいくつか紹介する。さらに、同じ解に対するアルゴリズムであっても、実際の計算機で実行すると種々の変動成分の影響などで、画像が同様に再構成されるとは限らないことを示す。

第３章では、前述の放射型ＣＴの一種の、単光子放射型ＣＴ（ Single Photon Emission Computed Tomography ：ＳＰＥＣＴ）の再構成問題について述べる。ＳＰＥＣＴとは、被写体内にＲＩをトレーサとして投与し、そこより放出されるγ線の体軸の周りの投影関数を測定して断層像を得るものである。その画像再構成はX線ＣＴのような透過型ＣＴの場合の逆Radon変換と同様に行うことができず、被写体内でのγ線強度の減衰効果に対する補正が必要となる。しかしながら、ＳＰＥＣＴでは比較的高いエネルギーのγ線が用いられるので、この領域では減衰係数をほぼ一定としても大きな誤差は生じない。そこで、被写体内でのγ線の減衰係数の分布は、一般に均一として扱っている。この条件のもとで被写体の輪郭を既知とすると

ＳＰＥＣＴの投影データは、減衰項を含むRadon変換として表すことができる。その式をもとに多くの解法が考案されてきたが、そのほとんどは経験的な解法であった。

我々の研究室の研究で、減衰項を含むRadon変換の複素数となる周波数を実空間と結び付けることによって、減衰の効果を厳密に補正し再構成を行なう、数学的に厳密に解かれた画像再構成法を提案し、この方法を用いてその有効性を計算機シミュレーションで示し、従来考えられてきた画像再構成法との比較を行い、この方法で良質な画像が得られることを示した。

今までの著者の研究において、実際の臨床画像でもこの方法で得られた画像は、医療診断に非常に有効であることを確認した。さらに、被写体内の減衰係数を一定とするときの最適な減衰係数を決定する方法と、この厳密に解かれた画像再構成法ではフーリエ変換を用いるので、その計算効率を上げるための投影データの補間の方法を計算機シミュレーションで検討した。またこの方法では、被写体の輪郭は既知としているので、おもに頭部の投影データからの輪郭の自動抽出方法を考案し、その有効性を確認した。それから実際の装置を用いたファントム実験で、この方法で再構成された画像の定量性などを減衰補正を行わないで再構成した画像と比較し、実用上の問題点について検討し、実際の頭部の臨床データにこの方法を用いて再構成を行い、減衰補正を行わないで再構成した画像との比較検討を行い、その有効性を確認した。本研究では、さらに以下のことを行なった。

・輪郭補正によるアーティファクトの除去

直接計測された投影データから投影関数を得るには、被写体の輪郭は既知でなければならないが、最初に得られる投影データより自動的に輪郭を抽出する方法は、これまでの研究で提案している。輪郭補正をするときに、座標軸から輪郭までの長さＬを出す必要がある。輪郭は画像上にデジタル的に求められるので、長さＬを直接求めると凹凸が生じる。このため、$\exp(\mu L)$を乗じて得られる投影関数は、この変動成分が拡大されて与えられたものとなり、これによるアーティファクトが問題となる。その結果得られる画像は、凹凸の激しいものとなる。そこで、輪郭を多角形に近似し、座標軸から輪郭までの長さＬを求めるとき、多角形の辺までの長さを求めて、補正の計算を行なう。前者に比べて非常に滑らかに求めることができる。よって、前者の画像に比べて画質が良くなっていることが確認できる。

・低計数値の場合のアーティファクトの除去

γ線のtotal countが極端に少ない（$5*10^5$ count）投影データから、提案した厳密解を用いて再構成した画像には、同心円上のアーティファクトがみられる。このアーティファクトは、この厳密解に特有なもので、厳密解において角度方向にフーリエ級数展開し、補正を施しフーリエ合成を行うところに起因していると考えられる。フーリエ合成を行う際に、その次数をある所で切断すると、値が急激に変化するところでリンギング（Gibbsアーティファクト）が発生することは、よく知られている。この場合、角度方向にフーリエ合成を行っているので、リンギングは角度方向、つまり同心円上に現れると考えられる。さらに、total countが少ないが場合、ノイズによって値が急激に変化するところが増えるので、リンギングが出やすくなる。このような理由で同心円上のアーティファクトが発生したと考えることが出来る。そこで、このアーティファクトを抑えるためには、フーリエ合成の際の次数を切るときに、その次数よりも

小さいところから少しずつ値を滑らかに減衰させることが必要であると考えられる。フーリエ合成の際に、高次の項を少しずつ減衰させて再構成すると、同心円上のアーティファクトが低減されることが確認できる。

・不均一な減衰係数の場合への拡張

提案した再構成アルゴリズムは、減衰係数が一様であるとする仮定のもとで解かれている。確かに、計測の対象となる脳や心筋においては減衰係数はほとんど一様であるが、その周りにある骨や肺などの組織では必ずしも無視できるものではない。そこで、このような場合の補正方法として、以下の方法を提案する。幸い診断の対象となる組織の減衰係数はほとんど一様であるので、投影データ上で周りの組織の減衰を補正すれば、提案している再構成アルゴリズムを用いて厳密に再構成できることになる。各組織の形状と減衰係数は、透過型ＣＴなどによってあらかじめ分かっているものとする。そして、減衰係数を一様とせずに、既知である減衰係数をもとに輪郭の補正を正確に行なう。補正された投影データをもとに、提案している再構成アルゴリズムで再構成する。結果は、減衰係数をただ一様に仮定して再構成した画像より、その定量性は向上した。とくに、心筋の画像においては顕著なものがあった。

第４章では、計算機トモグラフィ（ＣＴ）や磁気共鳴映像法（ＭＲＩ）において、通常必要とされるものよりもはるかに少ないデータから画像を再構成することを目的とする、逆Radon変換の不完全問題について述べる。この問題は、"超解像"（Superresolution）の問題としてしばしば論じられているが、これらの方法を用いて具体的な画像再構成を行った結果は、いずれの場合においても実用的な手法としてこれらのアルゴリズムが全く問題なく使用可能であることを保証しているとは言い難いことも事実である。とくに、それらにおいて最も共通に存在する問題点は、画像を表す関数やそのFourier変換関数が、数学的に言って解析的（analytic）であるとすることの正当性についてである。

解析的であることを条件とすれば、いわゆる不完全投影再構成問題でも多くの場合、確定的な解を導くことができ、条件は完全と呼んでも差し支えない状況になる。一方、この計算に対する実用的なレベルの議論では、計算途中において変動成分の影響により計算の実行が一般に困難となり、この問題は「不完全再構成」と呼ぶことがふさわしい状況となる。しかし、これらの判断の基準となるものは、再構成された画像の質に関する主観的な評価が中心となり、問題の客観的な立場からの議論を困難にしている。

そこで本研究では、いわゆる超解像問題において、一般に２次元あるいは３次元の被写体分布、あるいはそのFourier変換関数が解析的であるとする条件が、画像再構成問題において如何なる意味を持つかについて基本的な立場から検討した。

画像空間が解析的であるとする仮定は、画像再構成方法の技術の研究の初期の段階より常に問題とされていた。例えば、超解像の場合のみならず、ＣＴ全般の技術の出発点の一つともなったと云えるCormackの論文に示された画像再構成の方法自体、まさにこのような性質を仮定して初めて導かれるものであった。このようなことを考えると、真の意味における超解像問題を考察するためには、投影データや被写体分布の解析性が、問題解法のための条件として成立するとして良いかについてのより基本的な立場からの検討が重要であると思われる。

そこで、画像空間が解析的であると仮定し、原点における高次導関数を精度良く求め、そこからTaylor展開の式を用いてその画像を再構成するということを試みた。簡単な幾何学的関数を仮定し、原点付近の値を0.001刻みでサンプリングし、その値から階差式によって、原点における導関数の値を導出する。その導関数の値をもとにTaylor展開の式を用いてもとの関数を再構成する。

その結果、約１５０桁の精度で５５次まで計算した場合、非常によく再現できることが確認された。また、５０桁程度の精度で、最も良い値を示した１２次まで計算した結果は、元画像とはかけ離れたものであった。この程度の変動成分が混入しただけでも大きく値が変動してしまうことがわかる。このように、被写体やそのFourier変換関数が解析的であるとする条件は数学的には強力なものではあるが、混入する変動成分にきわめて大きく影響され、このため実用的には使用が困難な条件と考えることが妥当であると思われる。しかしながら、ＭＲＩの場合を考えると、画像のFourier変換がフィルタリングされて得られるため、解析性の条件がより有効になるものと考えられる。

そこで、２次元で考えて、画像分布を$f(x,y)$とし、そのFourier変換$F(\xi,\eta)$が計測されるものとする。この$F(\xi,\eta)$が変数ξ、ηに関して解析的であるとし、実空間で行なったことと同じことを行なった。但し、この場合はFourier空間で階差式を用いて導関数の値を導き、Taylor展開の式から$F(\xi,\eta)$を求め、Fourier逆変換をして再構成を行なう。結果は、予想されたごとくデータに含まれる雑音、および計算精度に極めて敏感ではあるが、通常用いられるＭＲＩの撮像条件のもとでもデータ量の削減が可能であることが示された。

解析的であるとすることは、局所的な情報が大域的な情報の全てを決定することを意味し、その意味ではきわめて拘束力の強い条件であると云うことが出来る。純粋な数学的議論では、このような条件は比較的当然のごとく成立しているものとして用いられることが多い。しかしながら、このような条件は同時に用いられている他の条件と比較して実用的にはきわめて問題があることが認められるのである。この問題は、具体的には実際の測定データの精度、再構成画像の空間及び濃度分解能などと関連しているのみならず、さらには医用画像においては、臨床上の診断能と関係して論じられねばならない性質のものである。