

## 付録 A

### 格子ガスオートマトン法の 3次元モデルの 等方性に関する検討

## A.1. 概要

従来の格子ガスオートマトン法では 2 次元の六角形の格子に基づいた FHP モデル、ならびに擬似 4 次元モデルである FCHC モデルが提唱されている。これらのモデルでは、粒子の衝突側を拡張して質量保存式ならびに Navier-Stokes 方程式を導出できることが示されている。また、どの方向に対しても流動場が同じである等方性が確保されていることが示されている。

本研究では、格子ガスオートマトン法の 3 次元モデルとして 3 次元 15 速度モデルを新たに提案した。この 3 次元モデルは方向によって流動場が異なる異方性を有していることが従来提案されている。しかしながらその数学的検討ならびに数値実験的検討は行われていない。

そこで、本節ではこの 3 次元モデルの異方性に関する数学的検討ならびに数値実験的検討を行い、FHP モデルや FCHC モデルと同様に質量保存式ならびに Navier-Stokes 方程式を導出できるかどうかの検討を行うとともに、仮に導出が出来ない場合にでも、3 次元モデルがどの程度異方性を有しているか評価を行うこととした。

## A.2. 3次元モデルの異方性に関する理論的検討

初めに、本研究で提案した3次元モデルの理論的検討を行うこととした。格子ガスオートマトン法において等方性を検討する場合には、①格子が有する幾何学的な等方性（対称性）ならびに②格子が有するテンソルの等方性について論ずる必要がある。まず初めに幾何学的な等方性について検討することとする。

図 A.2.1 は幾何学的に対称性を有する3次元格子を示した図である。3次元格子の軸回転対称性ならびに鏡面反射対称性を考えた場合、3種類の格子モデルを構築することができる。

I	各面の面心の点を対角的に結んだリンク
II	立方体が形成する角を対角的に結んだリンク
III	立方体が形成する各辺の中点を対角的に結んだリンク

図 A.2.2 は、考えることのできる3次元モデルを示している。図 A.2.2(a)に示すように、本研究で新たに開発した3次元15速度モデルはI、IIのリンクを組み合わせて作成したモデルであり、幾何学的に空間対称性を有している格子モデルである。また、I、IIIを組み合わせた場合にも新たなモデルを構築することができる。これに基づいて作成したモデルが図 A.2.2(b)に示す3次元19速度モデルである。このモデルも3次元15速度モデルと同様に幾何学的な空間対称性を有している。表 4.6.1 に3次元15速度モデルならびに3次元19速度モデルの速度の各成分の大きさを示す。

次に、格子が有するテンソルの等方性について検討を行うこととする。格子ガスオートマトン法では、格子における疎視化平均した粒子分布（平衡分布関数と呼ばれる）を用いて質量保存式ならびに Navier-Stokes 方程式の導出を行う（導出に関しては付録参照）。この質量保存式ならびに Navier-Stokes 方程式の導出に関する理論的検討は FHP モデルや FCHC モデルにて行われている。この導出を行う際において、速度ベクトルの直積の和として以下に示すテンソルが表れる。

$$T_{\alpha} = \sum_i (c_i)_{\alpha} \quad (\text{A.2.1})$$

$$T_{\alpha\beta} = \sum_i (c_i)_{\alpha} (c_i)_{\beta} \quad (\text{A.2.2})$$

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \sum_i (c_i)_{\alpha} (c_i)_{\beta} (c_i)_{\gamma} \quad (\text{A.2.3})$$

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_i (c_i)_{\alpha} (c_i)_{\beta} (c_i)_{\gamma} (c_i)_{\delta} \quad (\text{A.2.4})$$

ここで用いられている記号は以下に示す通りである。

$$\begin{aligned} T_{\alpha} \sim T_{\alpha\beta\gamma\delta} & : 1\sim 4\text{階のテンソル} \\ (c_i)_{\alpha} & : i\text{方向における速度 } c_i \text{ の } \alpha \text{ 成分} \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta & : \text{各成分}(x, y \text{ または } x, y, z) \end{aligned}$$

格子ガスオートマトン法における時間発展方程式(4.2.5)より望ましい形の Navier-Stokes 方程式を導出するためには、上記の1階から4階のテンソル(A.2.1)~(A.2.4)が等方的である必要がある。テンソルが等方的であるとは、テンソルの独立成分が1つであることを意味している。また、Navier-Stokes 方程式を導出するためには、各テンソルに対して以下の関係式が成立する必要がある（付録参照）。

1st-rank tensor	$T_{\alpha} = 0$	(A.2.5)
-----------------	------------------	---------

2nd-rank tensor	$T_{\alpha\beta} = 0$	(A.2.6)
3rd-rank tensor	$T_{\alpha\beta\gamma} = 0$	(A.2.7)
	$T_{\alpha\alpha\beta} = 0$	(A.2.8)
	$T_{\alpha\beta\gamma} = 0$	(A.2.9)
4th-rank tensor	$T_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = 3T_{\alpha\alpha\beta\beta}$	(A.2.10)
	$T_{\alpha\alpha\alpha\beta} = 0$	(A.2.11)
	$T_{\alpha\alpha\beta\gamma} = 0$	(A.2.12)

そこで、先に提案した3次元15速度モデルならびに3次元19速度モデルに対するテンソルを求め、これらのテンソルの条件と比較することで、格子が有する等方性の検討を行うこととする。表 A.2.2(a) は各モデルに対するテンソルを評価した結果である。この評価結果より、1、2、3階のテンソルに関しては上式が成立していることが示されたが、4階のテンソルに関しては式(A.2.10)が成立していないことが示され、3次元15速度モデルならびに3次元19速度モデルは理論的にテンソルに関する空間等方性を有していないことがわかる。

次に、4階のテンソルを式(A.2.10)に適合するように修正を加えて実際の値とのずれを評価することとした。その結果を表 A.2.2(b)に示す。ここでは、4階のテンソルを修正する際に、 $T_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$  を基準として  $T_{\alpha\alpha\beta\beta}$  を修正することとした。これは、4階のテンソル  $T_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$  は2階のテンソル  $T_{\alpha\alpha}$  と関連しており、 $T_{\alpha\alpha\alpha\alpha}$  を修正することで2次のテンソルで確保されていた等方性が崩れるのを避けるためである。また、理論値とのずれは以下の式で評価した。

$$\varepsilon = \frac{(\text{格子が有する値}) - (\text{理論的な値})}{(\text{格子が有する値})} \quad (\text{A.2.13})$$

理論的な値から格子固有の値のずれを見ると、3次元15速度モデルの大きくなることが示された。このことは、3次元19速度モデルのほうが比較的異方性の影響が少ないことを示しているものと考えられる。

No. i	$c_{ix}/c$	$c_{iy}/c$	$c_{iz}/c$	$ c_i /c$
1	1	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	1
4	-1	0	0	1
5	0	-1	0	1
6	0	0	-1	1
7	1	1	1	$\sqrt{3}$
8	1	1	-1	$\sqrt{3}$
9	-1	1	-1	$\sqrt{3}$
10	-1	1	1	$\sqrt{3}$
11	-1	-1	-1	$\sqrt{3}$
12	-1	-1	1	$\sqrt{3}$
13	1	-1	1	$\sqrt{3}$
14	1	-1	-1	$\sqrt{3}$
15	0	0	0	0

No. i	$c_{ix}/c$	$c_{iy}/c$	$c_{iz}/c$	$ c_i /c$
1	1	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	1
4	-1	0	0	1
5	0	-1	0	1
6	0	0	-1	1
7	-1	0	-1	$\sqrt{2}$
8	-1	0	1	$\sqrt{2}$
9	1	0	1	$\sqrt{2}$
10	1	0	-1	$\sqrt{2}$
11	-1	1	0	$\sqrt{2}$
12	1	1	0	$\sqrt{2}$
13	1	-1	0	$\sqrt{2}$
14	-1	-1	0	$\sqrt{2}$
15	0	1	-1	$\sqrt{2}$
16	0	1	1	$\sqrt{2}$
17	0	-1	1	$\sqrt{2}$
18	0	-1	-1	$\sqrt{2}$
19	0	0	0	0

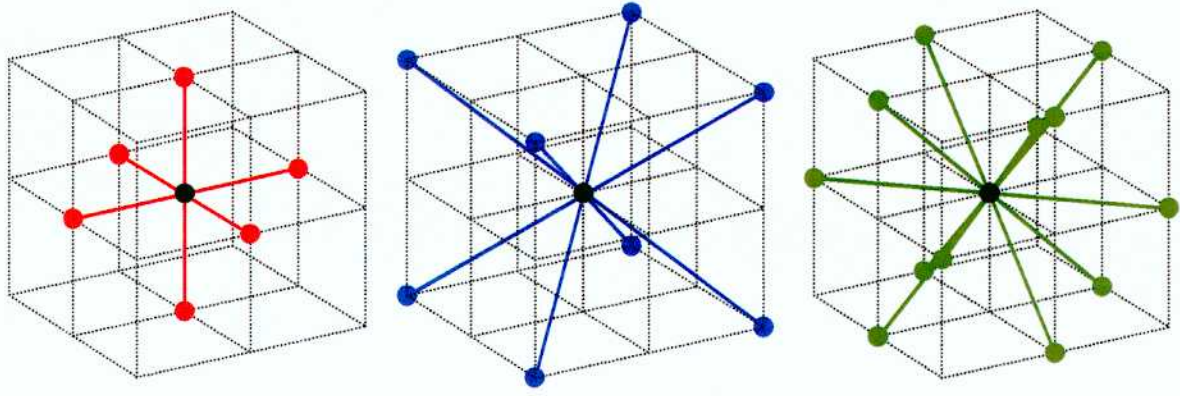
(a) 3-dimensional 15-velocity model

(b) 3-dimensional 19-velocity model

Table A.2.1 Component of velocity in x-, y- and z-direction and magnitude

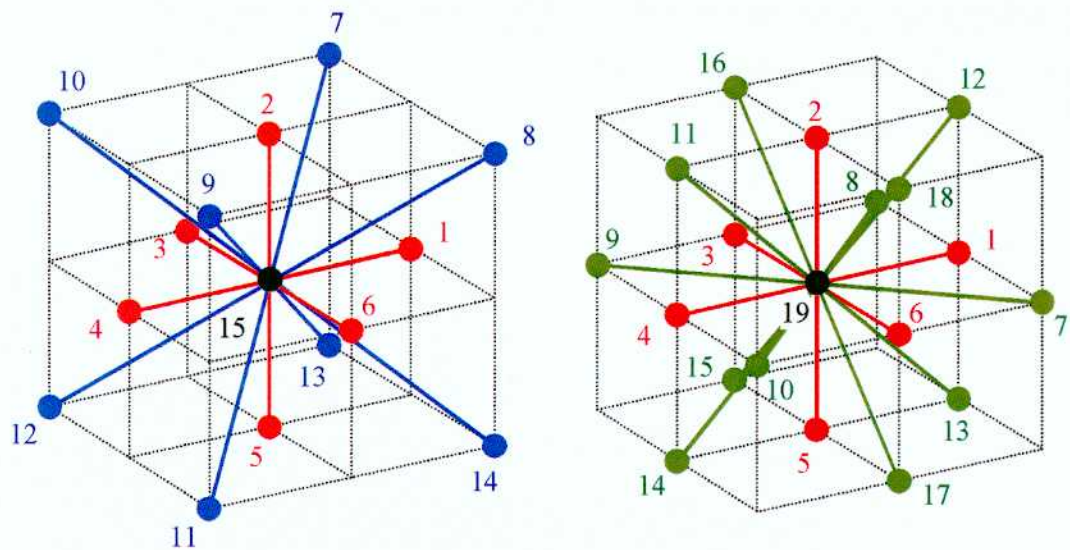
			3-dimensional 15-velocity	3-dimensional 19-velocity
(a) Tensors for 3-dimensional model	$T_\alpha$		0	0
	$T_{\alpha\beta}$	$\alpha\alpha$	10	10
		$\alpha\beta$	0	0
	$T_{\alpha\beta\gamma}$		0	0
	$T_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$\alpha\alpha\alpha\alpha$	10	10
		$\alpha\alpha\beta\beta$	8	4
$\alpha\alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\beta\gamma$		0	0	
(b) Modification and difference fit to theoretical equation (A.2.5)	Theoretical value of $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$\alpha\alpha\alpha\alpha$	10	10
		$\alpha\alpha\beta\beta$	10/3	10/3
		$\alpha\alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\beta\gamma$	0	0
	Difference of $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ from theoretical value $\varepsilon$		-58.333 [%]	-16.667 [%]

Table A.2.2 Estimation of tensors



(a) Type I (b) Type II (c) Type III

**Fig. A.2.1 Lattice geometry with cubic-symmetry**



(a) 3-dimensional 15-velocity model (b) 3-dimensional 19-velocity model

**Fig. A.2.2 Lattice geometry of 3-dimensional model**

### A.3. 数値実験を用いた 3 次元モデルの異方性に関する検討

先の章では 3 次元モデルの異方性に関する理論的検討を行った。この理論的に評価された異方性が流動にどのように影響するかを評価することとした。評価にはさまざまな手法があるが、本研究では軸方向 (x, y, z 方向) と斜め 45 度方向に流体を流した場合に評価される動粘性係数を比較することとした。

図 A.3.1 は軸方向の動粘性係数を測定する際に設定した計算体系を示す。解析領域の大きさは x, y, z 方向にそれぞれ 512 × 256 × 8 格子と設定し、境界は全て周期的境界条件とした。計算領域の左半分には上向きの流動を与え、右半分には下向きの流動を与える。そのようにすることによって領域内にせん断流が発生する。このときの流速の y 方向成分を、以下に示す Raileigh の問題より導出された式と比較することで動粘性係数を算出した。

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{vt}}\right) \quad (\text{A.3.1})$$

ここで用いられている記号は以下に示す通りである。

$u(x, t)$	: 流速の y 方向成分	$u_0$	: 初期速度
$t$	: 時間	$x$	: 位置
$v$	: 動粘性係数		

図 A.3.2 は斜め 45 度方向の流動に対する動粘性係数の測定の際に設定した計算体系を示す。解析領域の大きさは x, y, z 方向にそれぞれ 384 × 384 × 8 格子と設定し、境界は全て周期的境界条件とした。計算領域を右上がりの斜め方向に 4 つに分割し、それぞれ右上がり、左下がりの速度分布を与える。そのように設定することによって、領域内に対角方向のせん断流が発生する。このときの A-A 断面に垂直な方向の流速成分を Raileigh の問題より導出された式(A.3.1)と比較することで動粘性係数を算出した。

初めに、軸方向に対する動粘性係数の測定を行うこととした。図 A.3.3 は各時刻における y 方向速度成分の分布を示している。図 A.3.3(a)は 3 次元 15 速度モデルを用いて計算を行った結果を示し、図 A.3.3(b)は 3 次元 19 速度モデルを用いて計算を行った結果を示している。どちらの図においても、縦軸は速度を示しており、横軸は x 方向位置を示している。また、図中の各線は各サイクル数における速度分布を示している。本計算では初期平均数密度は 0.5、初期平均流速を 0.2 と設定し、計算は 500 サイクル行った。どちらの計算結果についても、計算を開始した時刻において、領域の左半分は上向きの速度、右半分は下向きの速度が与えられていることが確認できる。時間の経過とともに境界にせん断流が生じており、速度が境界側より下降してゆく様子が見られた。

図 A.3.4 は速度分布と Raileigh の問題より導出された式(A.3.1)の比較を行った結果を示している。図 A.3.4(a)は 3 次元 15 速度モデルに対する評価結果を示し、図 A.3.4(b)は 3 次元 19 速度モデルに対する評価結果を示している。どちらの図においても、縦軸は無次元化した速度を示しており、横軸は  $x/(2\sqrt{t})$  で正規化した値を示している。図中のプロット点は速度分布を示し、実線は式(A.3.1)を示している。どちらの評価結果に対しても数値実験の結果と理論式はよく一致していることが示された。また、このときの動粘性係数も(a)の場合は  $v=0.526$ 、(b)の場合は  $v=0.226$  と一意に決定できることが確認できた。

次に斜め 45 度方向に対する動粘性係数の測定を行った。図 A.3.5 はサイクル 0 とサイクル 500 における領域内の速度分布を示している。図 A.3.5(a)は 3 次元 15 速度モデルを用いて計算を行った結果を示し、図 A.3.5(b)は 3 次元 19 速度モデルを用いて計算を行った結果を示している。どちらの図においても、縦軸は y 方向位置を示し、横軸は x 方向位置を示している。また、図中の色は斜め方向の速度分布を示しており、右上方向に流れる流体の流速を正とした。本計算では初期平均数密度は 0.5、初期平均流速を

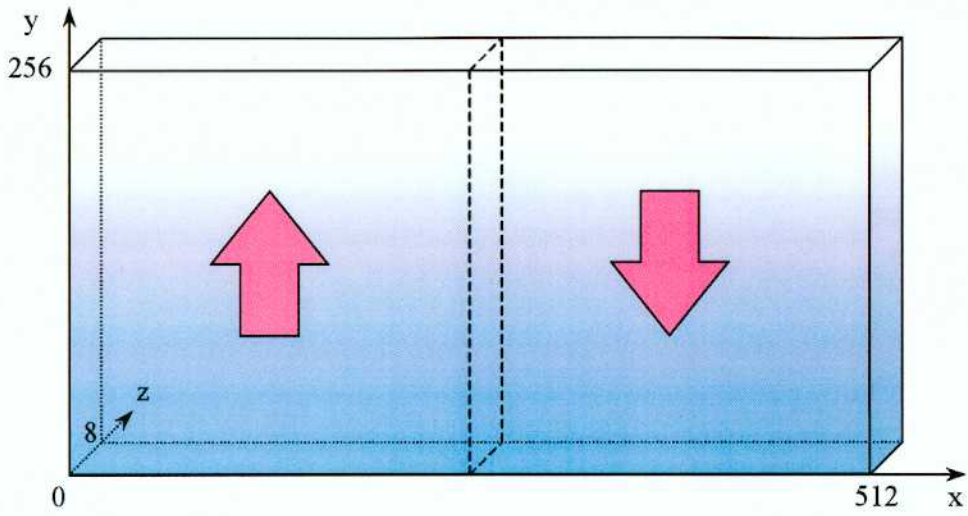
0.2 と設定し、計算は 500 サイクル行った。どちらのモデルを用いた場合でも、計算を開始した時刻において、図 A.3.2 に示すように斜め方向の速度分布が形成されている様子が示された。また、サイクル 500 においては速度の境界に幅が出来ており、領域内で生じたせん断流によって境界付近で速度が下降していることが示された。

図 A.3.6 は速度分布と Raileigh の問題より導出された式(A.3.1)の比較を行った結果を示している。図 A.3.6(a)は 3 次元 15 速度モデルに対する評価結果を示し、図 A.3.6(b)は 3 次元 19 速度モデルに対する評価結果を示している。どちらの図においても、縦軸は無次元化した速度を示しており、横軸は  $x/(2\sqrt{t})$  で正規化した値を示している。図中のプロット点は速度分布を示し、実線は式(A.3.1)を示している。この図より、軸方向の動粘性係数の場合と同様に数値実験の結果と理論式はよく一致していることが示された。また、このときの動粘性係数も(a)の場合は  $\nu=0.115$ 、(b)の場合は  $\nu=0.157$  と一意に決定できることが確認できた。

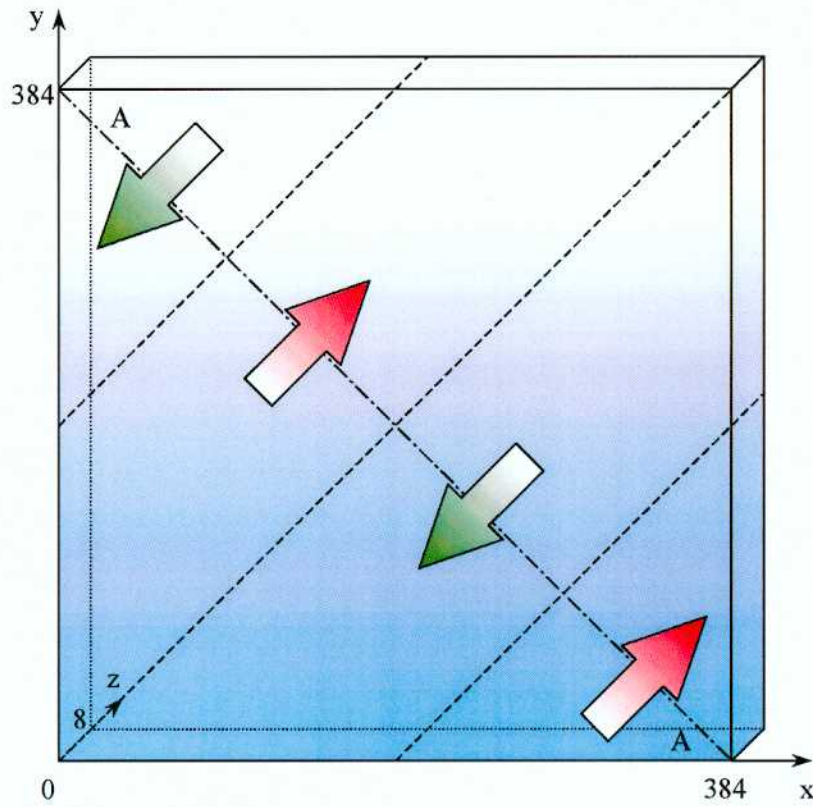
以上のようにして、領域内の粒子の初期平均数密度を変化させた場合の動粘性係数を軸方向ならびに斜め 45 度方向に関して調べることにした。その結果を図 A.3.7 に示す。図 A.3.7(a)は 3 次元 15 速度モデルに対する評価結果を示し、図 A.3.7(b)は 3 次元 19 速度モデルに対する評価結果を示している。縦軸は動粘性係数を示しており、横軸は粒子の初期平均数密度を示している。図中の赤印は軸方向に対する動粘性係数を示し、青印は斜め 45 度方向に対する動粘性係数を示している。本測定では、各時刻における動粘性係数を測定し、その平均値を動粘性係数とした。時刻に対する動粘性係数のずれはエラーバーで示してある。どちらのモデルの動粘性係数も、粒子の数密度の増加とともに動粘性係数が減少し、数密度 0.5 で最小値となった後に再び増加することが示された。また、どちらのモデルにおいても軸方向と斜め方向で粘性係数に差異が見られた。両モデルについて差異の度合いの比較を行うと、3 次元 19 速度モデルのほうが小さくなることが示された。

以上の結果より、3 次元 15 速度モデルならびに 3 次元 19 速度モデルは異方性を有していることが数値実験的に示された。しかしながら両モデルの結果を比較すると、3 次元 19 速度モデルに対する動粘性係数は異方性の度合いが少ないことが示された。

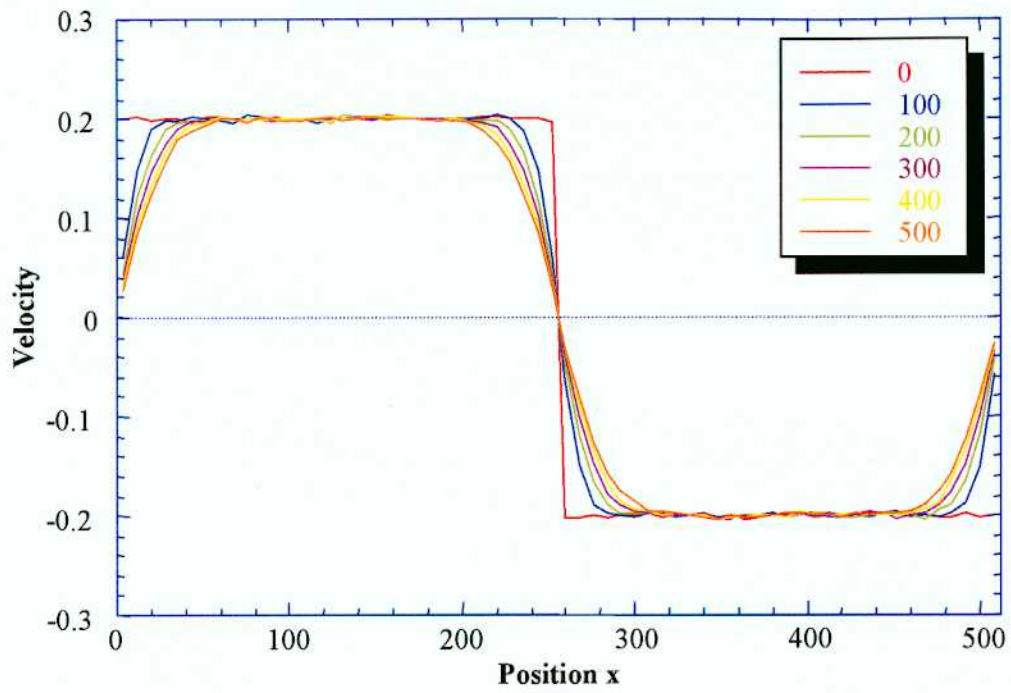




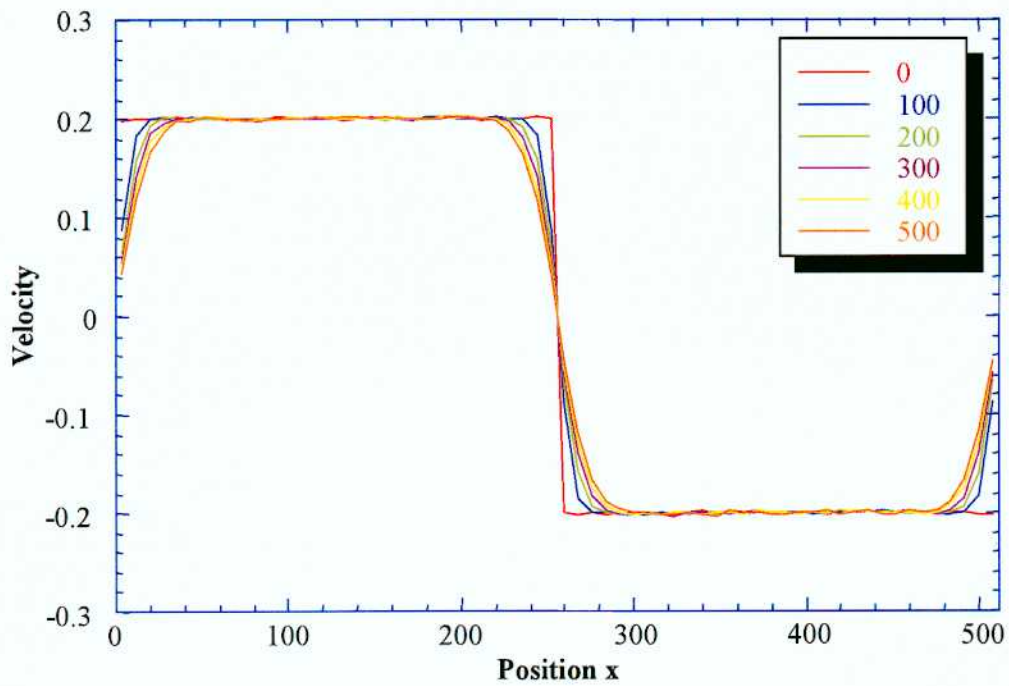
**Fig. A.3.1** Computational domain for measurement of kinematic viscosity in axis direction



**Fig. A.3.2** Computational domain for measurement of kinematic viscosity in diagonal direction

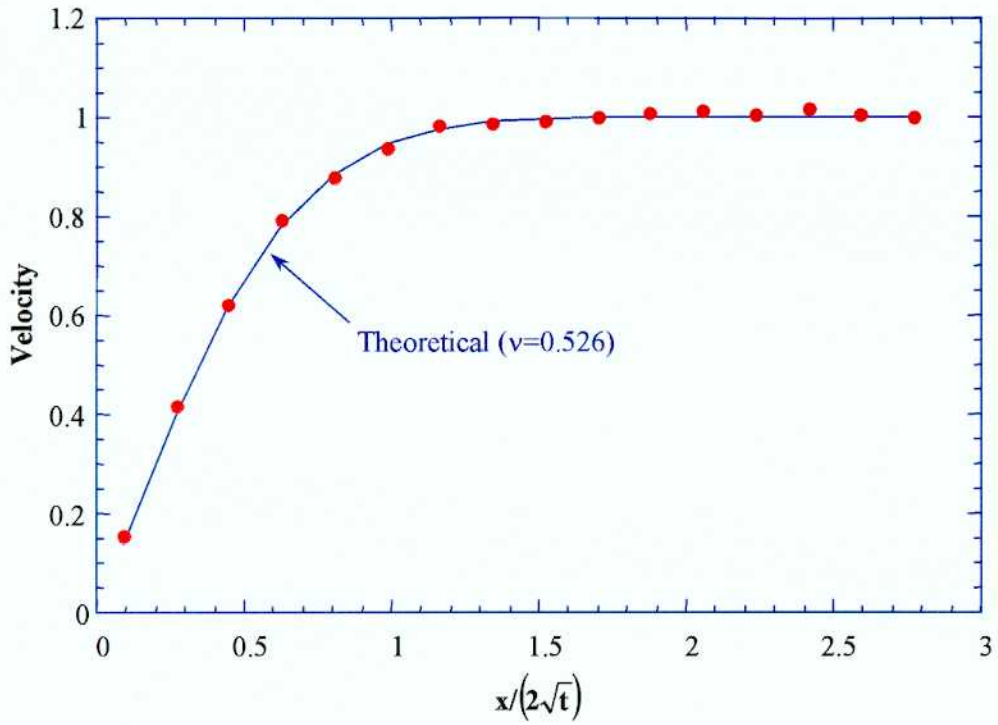


(a) 3-dimensional 15-velocity model

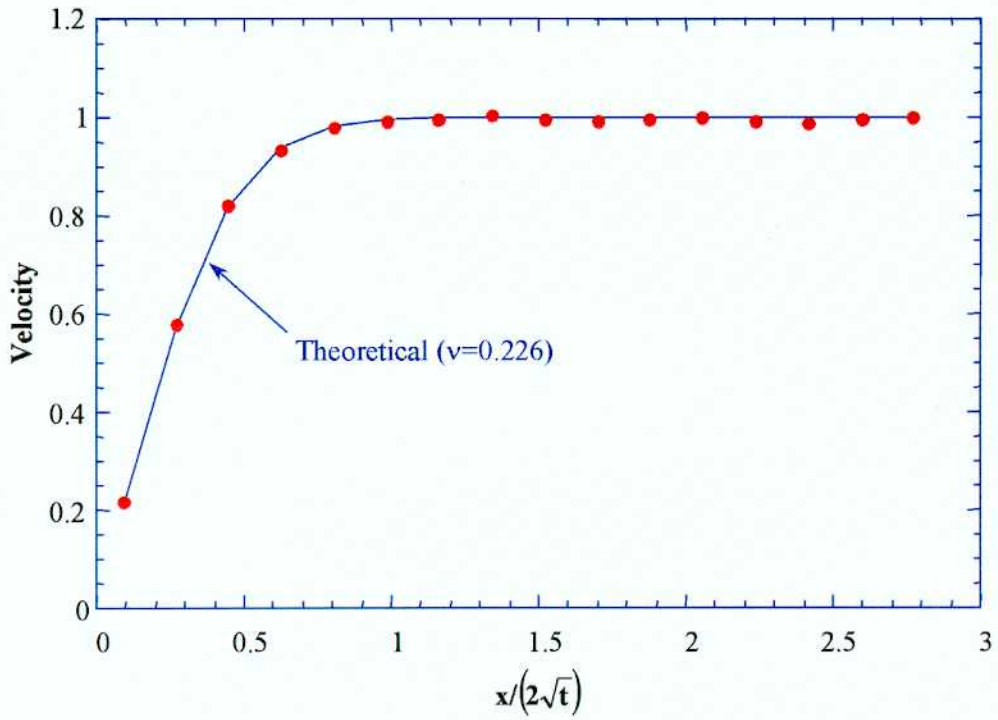


(a) 3-dimensional 19-velocity model

Fig. A.3.3 Time variation of velocity distribution (axis direction)

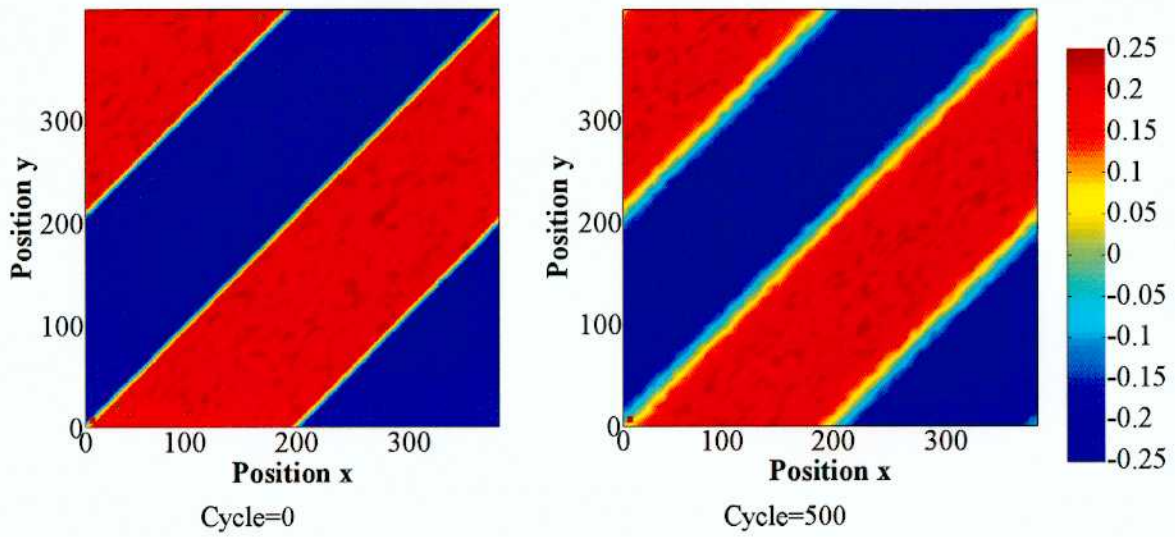


(a) 3-dimensional 15-velocity model

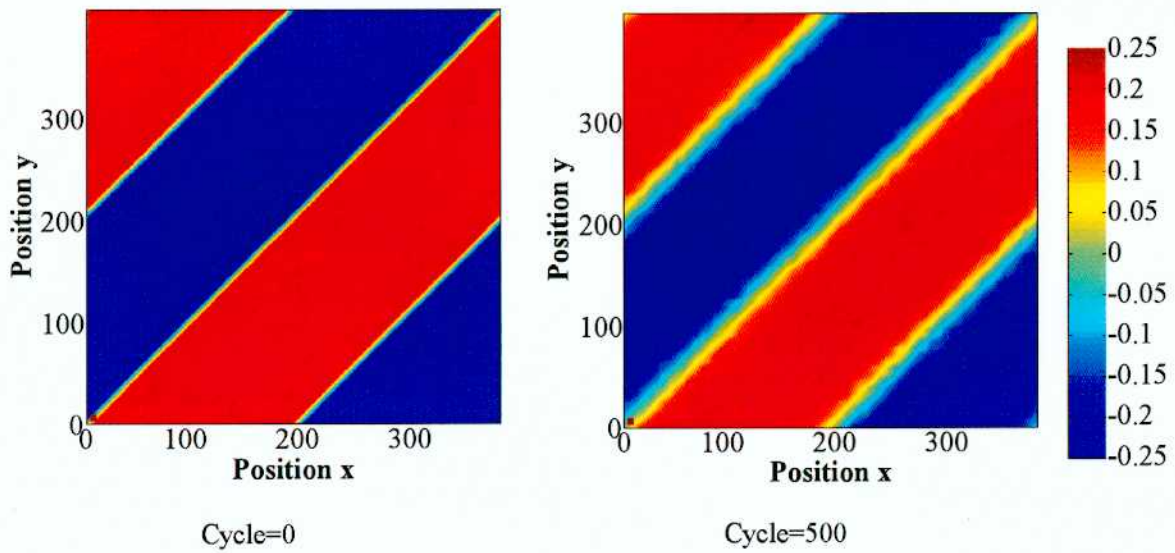


(a) 3-dimensional 19-velocity model

Fig. A.3.4 Comparison of computational result with theoretical result (axis direction)

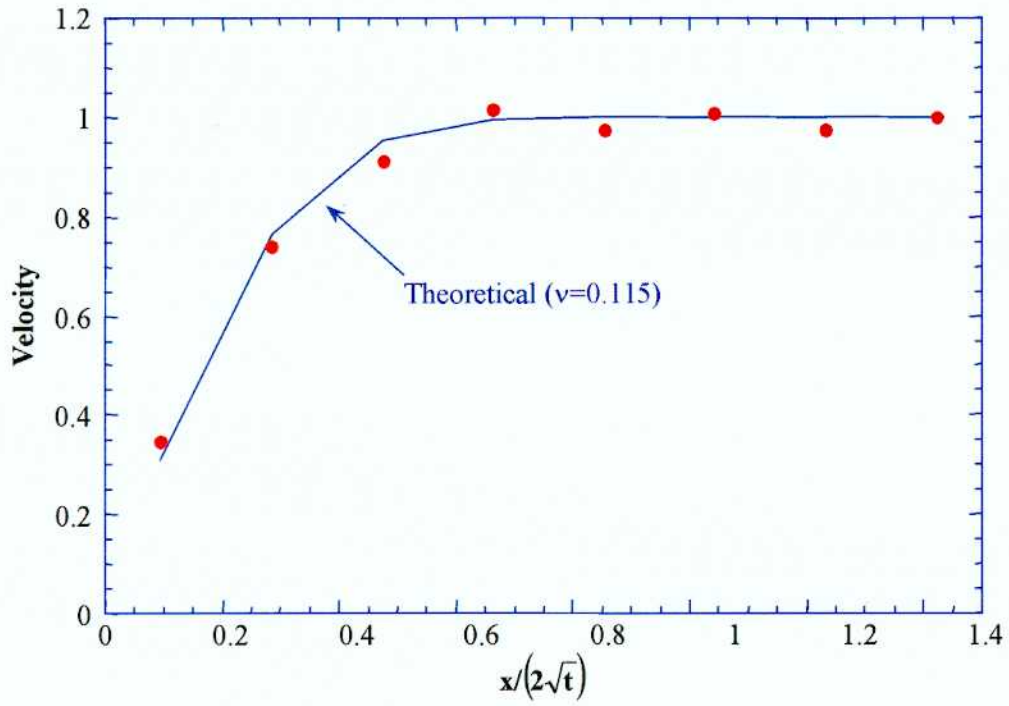


(a) 3-dimensional 15-velocity model

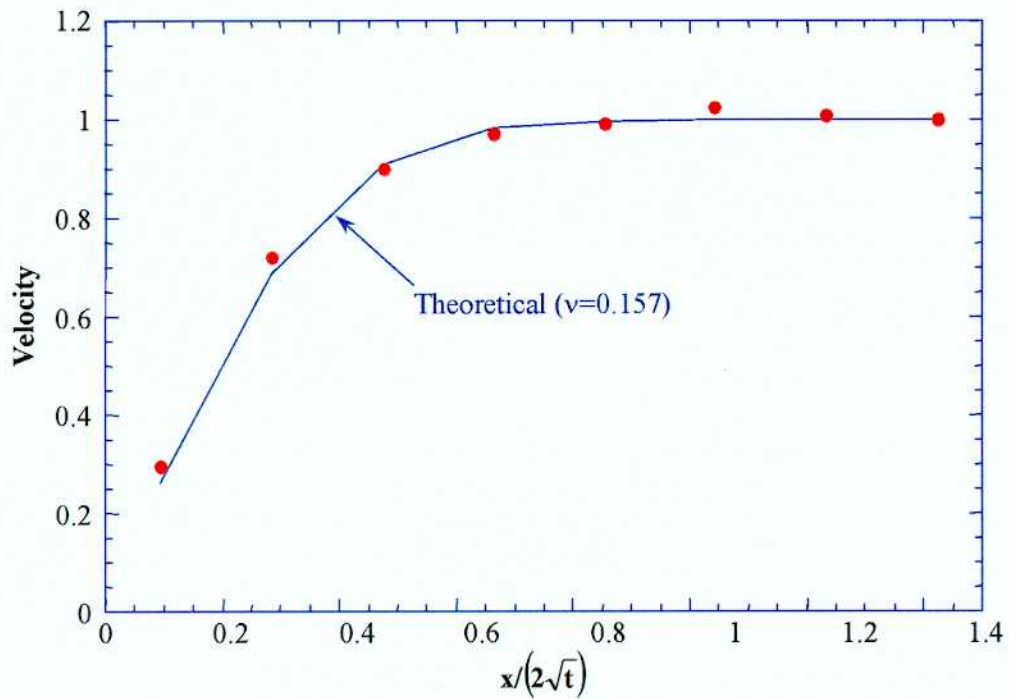


(b) 3-dimensional 19-velocity model

Fig. A.3.5 Time variation of velocity distribution (diagonal direction)

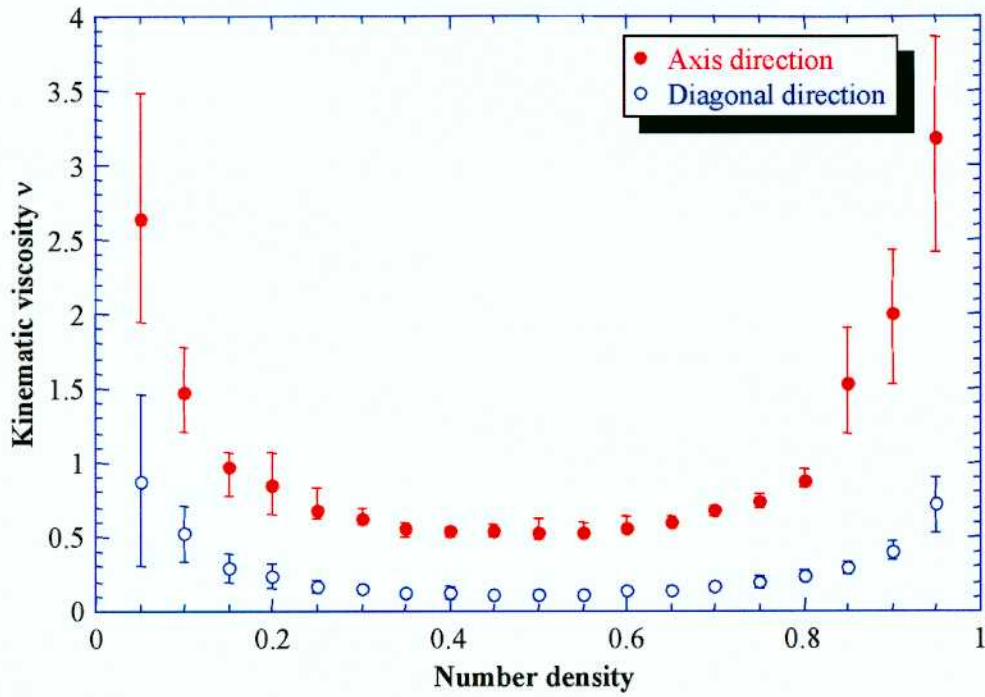


(a) 3-dimensional 15-velocity model

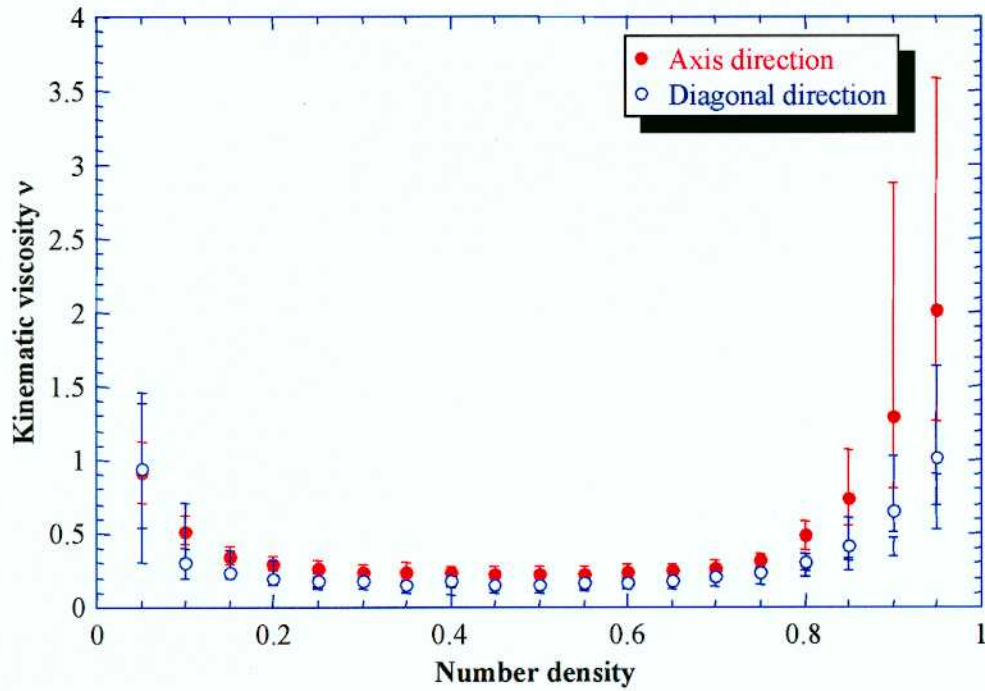


(a) 3-dimensional 19-velocity model

Fig. A.3.6 Comparison of computational result with theoretical result (diagonal direction)



(a) 3-dimensional 15-velocity model



(a) 3-dimensional 19-velocity model

Fig. A.3.7 Measured kinematic viscosity for different particle number density

#### A.4. FHP モデルならびに FCHC モデルとの比較

次に、等方的なモデルとして従来提唱されている FHP モデルならびに FCHC モデルに関して理論的ならびに数値実験的な等方性の検討を行い、3 次元 15 速度モデルならびに 3 次元 19 速度モデルの場合と比較することとした。

図 A.4.1 は FHP モデルならびに FCHC モデルの格子の形状を示している。図 A.4.1(a)は FHP モデルの格子の形状を示している。FHP モデルは Erisch, Hasslacher ならびに Pomeau が導入したモデルであり開発者の頭文字をとり FHP モデルと名づけられた。このモデルは六角格子をもとに構築された 2 次元モデルであり、周囲 6 方向に向かう速度と静止粒子を含めた 7 速度を有しているモデルである。この 6 速度は全て同じ大きさであり、この格子は  $x, y$  軸ならびに対角線上に結んだ軸に関して幾何学的に対称性を有している。表 A.4.1(a)に FHP モデルの速度の各成分の大きさを示す。

図 A.4.1(b)は FCHC モデルの格子の形状を示している。FCHC モデルは 4 次元で表現される格子モデルとして提唱されており、用いている格子が Hyper Cubic と呼ばれることから FCHC (Face Centered Hyper Cubic) モデルと呼ばれている。3 次元モデルと同様に  $x, y, z$  軸はそのまま格子の各軸を示しているが、4 番目の次元  $w$  に座標系の種類を表現させている。 $w = \pm 1$  は速度 1 を持つリンクが記述されており、 $w = 0$  は速度  $\sqrt{2}$  を持つリンクが記述されている。これら 3 種類の座標系を組み合わせると 3 次元に射影することにより擬似 3 次元を表現している。この射影された立方格子はしばしばハイパーキュービックと呼ばれる。組み合わせた 3 つの座標系で表現される格子はそれぞれ 3 次元格子の軸回転対称性ならびに鏡面反射対称性を有しており、それを組み合わせた FCHC モデルも幾何学な対称性を有している。表 A.4.1(b)に FCHC モデルの速度の各成分の大きさを示す。

以上より FHP モデルならびに FCHC モデルは幾何学的に等方性を有していることを確認した。

次に、格子が有するテンソルの等方性について検討を行うこととする。テンソルは式(A.2.1)~(A.2.4)より求めた。各モデルに対するテンソルの評価結果を表 4.6.4 に示す。左側の列は FHP モデルに対する評価結果であり、右側の列は FCHC モデルに対する評価結果である。これらの評価結果を見ると、式(A.2.5)~(A.2.12)を全て満足していることが確認できる。よって、これらのモデルは理論的に等方性を有していることが確認できた。

さらに、A.3 節の場合と同様に、流動の方向を変化させて動粘性係数を測定し、その異方性を評価することとした。動粘性係数は A.3 節の方法と同じ方法で異なる数密度に対して評価を行った。その評価結果を図 A.4.2 に示す。図 A.4.2(a)は FHP モデルに対する動粘性係数を示しており、図 A.4.3(b)は FCHC モデルに対する動粘性係数を示している。どちらの図においても、縦軸は動粘性係数を示しており、横軸は領域内の初期平均数密度を示している。また、図中の赤印は軸方向に対する動粘性係数、青印は斜め 45 度方向に対する動粘性係数をそれぞれ示しており、緑線は理論値を示している。動粘性係数の理論値は以下の式で与えられる。

$$v = v_0 + \frac{2c^2}{D+2}d(1-d)(1-2d)\left[1 + \frac{1}{\lambda}\right] \quad (\text{A.4.1})$$

$$v_0 = -\frac{1}{D+2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (\text{A.4.2})$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{D}{7(D-1)c^4} \sum_s \sum_{s'} A(s; s') d^{p-1} (1-d)^{7-p-1} \sum_\alpha \sum_\beta (Y_{\alpha\beta} - Y'_{\alpha\beta}) Y_{\alpha\beta} \quad (\text{A.4.3})$$

$$Y_{\alpha\beta} = \sum_i s_i Q_{i\alpha\beta}, \quad Y'_{\alpha\beta} = \sum_i s'_i Q_{i\alpha\beta} \quad (\text{A.4.4}), (\text{A.4.5})$$

$$Q_{i\alpha\beta} = c_{i\alpha} c_{i\beta} - \frac{c^2}{D} \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{A.4.6})$$

ここで用いられている記号は以下の通りである。

$A(s; s')$	:	粒子配置が $s$ から $s'$ へ遷移する確率
$c$	:	速度
$D$	:	次元
$\delta_{\alpha\beta}$	:	Kronecker のデルタ
$c_{i\alpha}$	:	速度の $\alpha$ 成分
$s$	:	粒子配置の状態
$\nu$	:	動粘性係数

特に、FHP モデルの動粘性係数については導出されており、以下の式で表される。

$$\nu_{\text{FHP}} = \frac{1}{g(\rho)} \left[ \frac{1}{28} \cdot \frac{1}{d(1-d)} \cdot \frac{1}{1 - [8d(1-d)/7]} - \frac{1}{8} \right] \quad (\text{A.4.7})$$

$$g(\rho) = \frac{7}{12} \frac{1-2d}{1-d} \quad (\text{A.4.8})$$

これらの図より、両モデルとも、軸方向の動粘性係数と斜め 45 度方向の動粘性係数はほぼ等しいことが示された。また、理論値ともほぼ一致していることが示された。また、先ほどの 3 次元モデルに対する粘性係数の評価結果と比較すると、3 次元モデルは異方性を有していることが明瞭となった。



No. i	$c_{ix}/c$	$c_{iy}/c$	$ c_i /c$
1	1	0	1
2	1/2	$\sqrt{3}/2$	1
3	-1/2	$\sqrt{3}/2$	1
4	-1	0	1
5	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	1
6	1/2	$-\sqrt{3}/2$	1
7	0	0	0

(a) FTP model

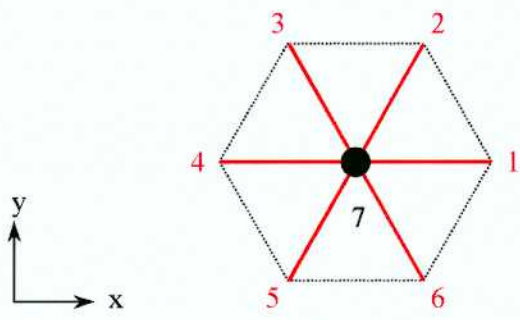
No. i	$c_{ix}/c$	$c_{iy}/c$	$c_{iz}/c$	$c_{iw}/c$	$ c_i /c$
1	1	0	0	1	$\sqrt{2}$
2	0	1	0	1	$\sqrt{2}$
3	0	0	1	1	$\sqrt{2}$
4	1	0	0	-1	$\sqrt{2}$
5	0	1	0	-1	$\sqrt{2}$
6	0	0	1	-1	$\sqrt{2}$
7	-1	0	0	-1	$\sqrt{2}$
8	0	-1	0	-1	$\sqrt{2}$
9	0	0	-1	-1	$\sqrt{2}$
10	-1	0	0	1	$\sqrt{2}$
11	0	-1	0	1	$\sqrt{2}$
12	0	0	-1	1	$\sqrt{2}$
13	1	1	0	0	$\sqrt{2}$
14	0	1	1	0	$\sqrt{2}$
15	1	0	1	0	$\sqrt{2}$
16	1	-1	0	0	$\sqrt{2}$
17	0	1	-1	0	$\sqrt{2}$
18	-1	0	1	0	$\sqrt{2}$
19	-1	-1	0	0	$\sqrt{2}$
20	0	-1	-1	0	$\sqrt{2}$
21	-1	0	-1	0	$\sqrt{2}$
22	-1	1	0	0	$\sqrt{2}$
23	0	-1	1	0	$\sqrt{2}$
24	1	0	-1	0	$\sqrt{2}$
25	0	0	0	0	0

(b) FCHC model

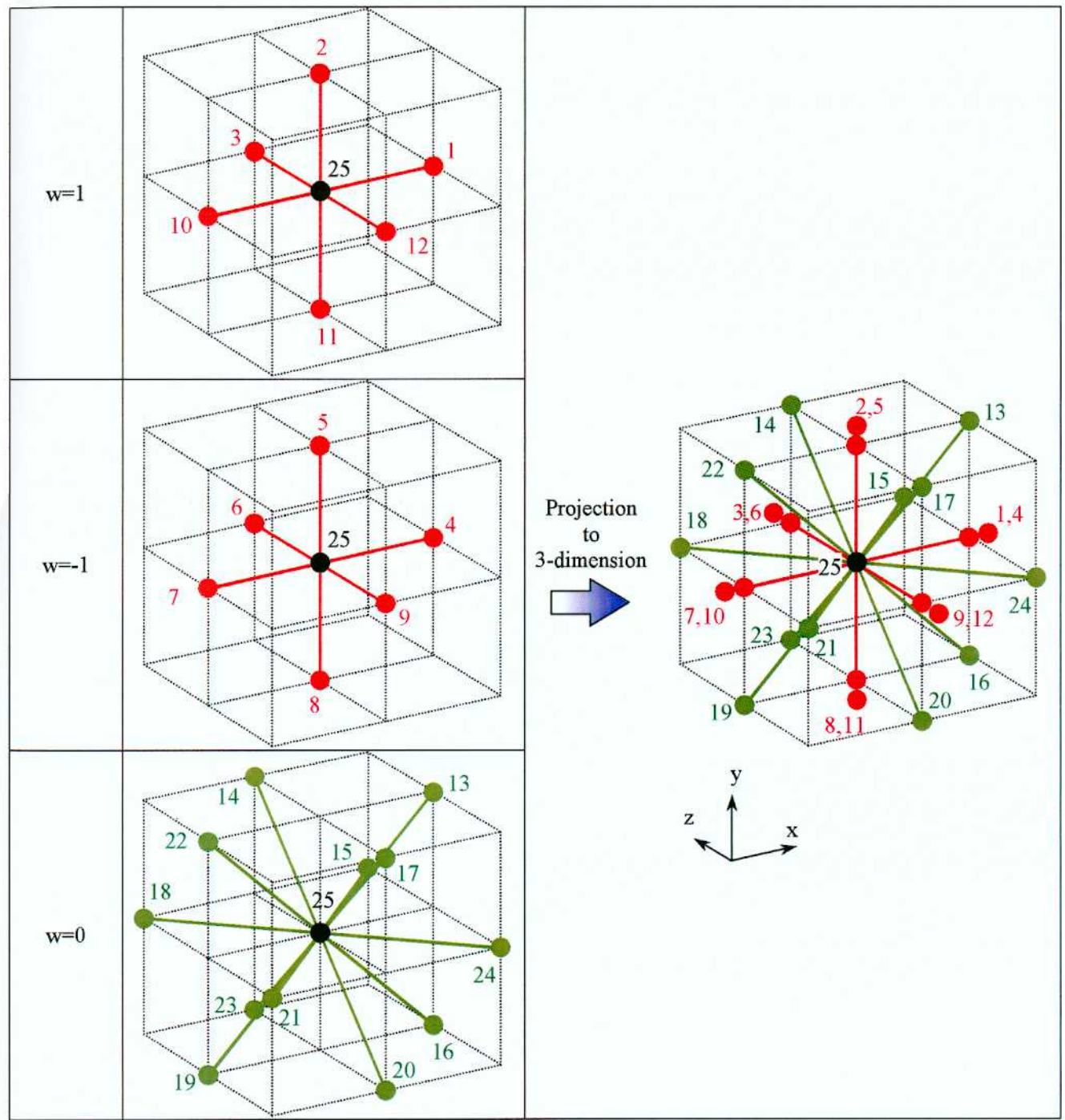
Table A.4.1 Component of velocity in x-, y- and z-direction and magnitude

		FTP model	FCHC model
$T_a$		0	0
$T_{\alpha\beta}$	$\alpha\alpha$	3	12
	$\alpha\beta$	0	0
$T_{\alpha\beta\gamma}$		0	0
$T_{\alpha\beta\gamma\delta}$	$\alpha\alpha\alpha\alpha$	9/4	12
	$\alpha\alpha\beta\beta$	3/4	4
	$\alpha\alpha\alpha\beta$	0	0
	$\alpha\alpha\beta\gamma$	—	0
	$\alpha\beta\gamma\delta$	—	0

Table A.4.2 Estimation of tensors

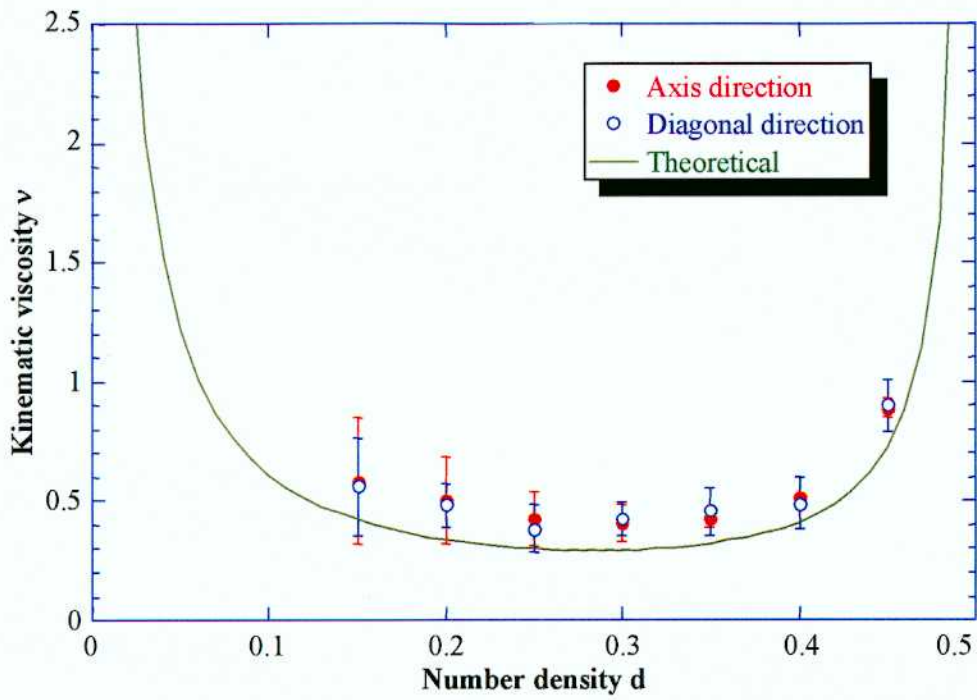


(a) FTP model

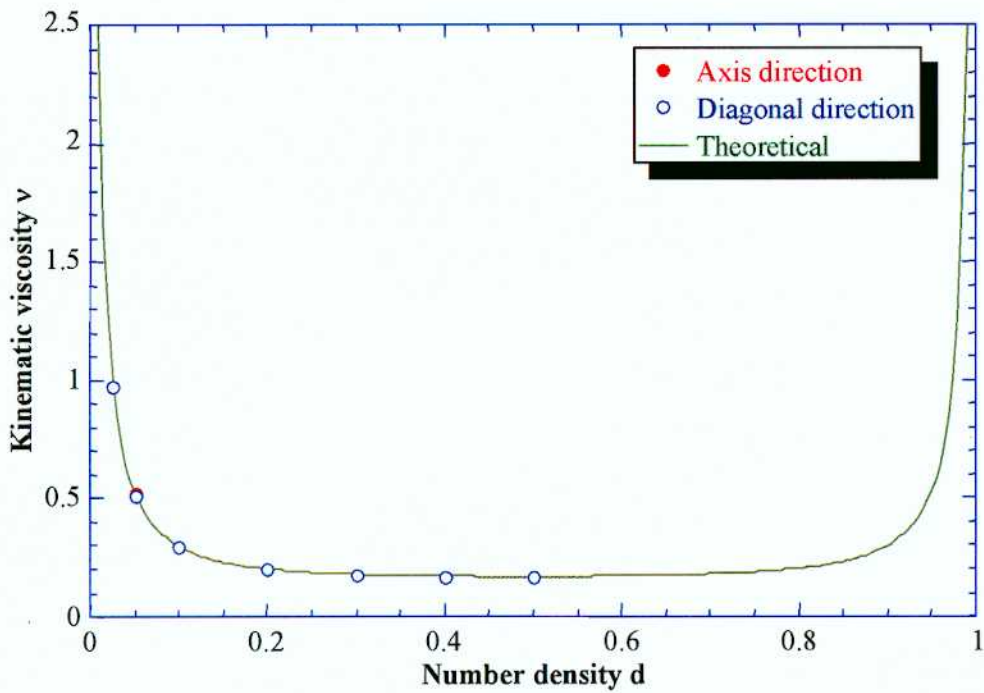


(b) FCHC model

Fig. A.4.1 Lattice geometry of FHP model and FCHC model



(a) FHP model



(a) FCHC model

Fig. A.4.2 Measured kinematic viscosity for different particle number density

### A.5. 3次元モデルの適用範囲

次に、異方性を有する3次元モデルが、どの流動条件に対して最も異方性が少ない状態で適用可能か検討を行うこととした。

まず初めに、モデルによって軸方向と斜め45度方向の粘性係数にどの程度の差異があるか定量的に評価することとした。図A.5.1はモデルの違いによる粘性係数の差異を評価した結果である。図A.5.1(a)は粒子の初期平均数密度  $d=0.5$  での、各モデルにおける軸方向と斜め方向の動粘性係数を示している。Axisは軸方向の粘性係数、Diagは斜め45度方向の動粘性係数、Theoは理論値を示している。また、図A.5.1(b)は各モデルにおける軸方向の動粘性係数と斜め45度方向の動粘性係数の差異を示している。差異は以下の式で算出した。

$$\text{軸方向-斜め45度方向} : \varepsilon = \frac{(\text{斜め45度方向動粘性係数}) - (\text{軸方向動粘性係数})}{(\text{軸方向動粘性係数})} \times 100 [\%] \quad (\text{A.5.1})$$

$$\text{軸方向-理論値} : \varepsilon = \frac{(\text{軸方向動粘性係数}) - (\text{理論的動粘性係数})}{(\text{理論的動粘性係数})} \times 100 [\%] \quad (\text{A.5.2})$$

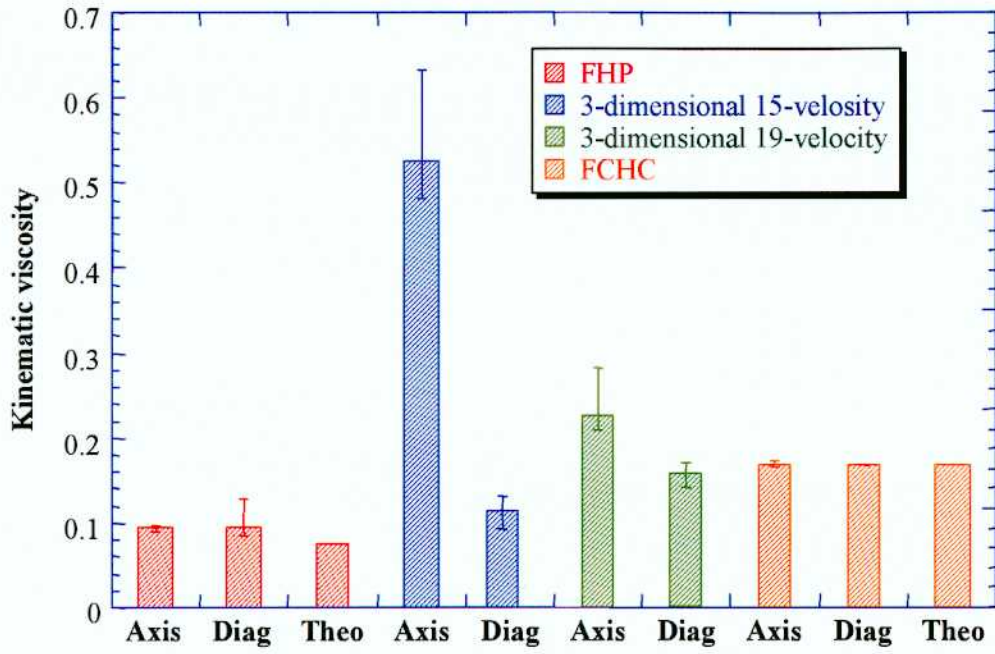
$$\text{斜め45度方向-理論値} : \varepsilon = \frac{(\text{軸方向動粘性係数}) - (\text{理論的動粘性係数})}{(\text{理論的動粘性係数})} \times 100 [\%] \quad (\text{A.5.3})$$

この結果より、軸方向と斜め45度方向の粘性係数で最も違いが大きいモデルは3次元15速度モデルであり、次いで3次元19速度モデルであることが示された。また、理論的に等方的とされているFHPモデルにも多少の差異があることが示された。

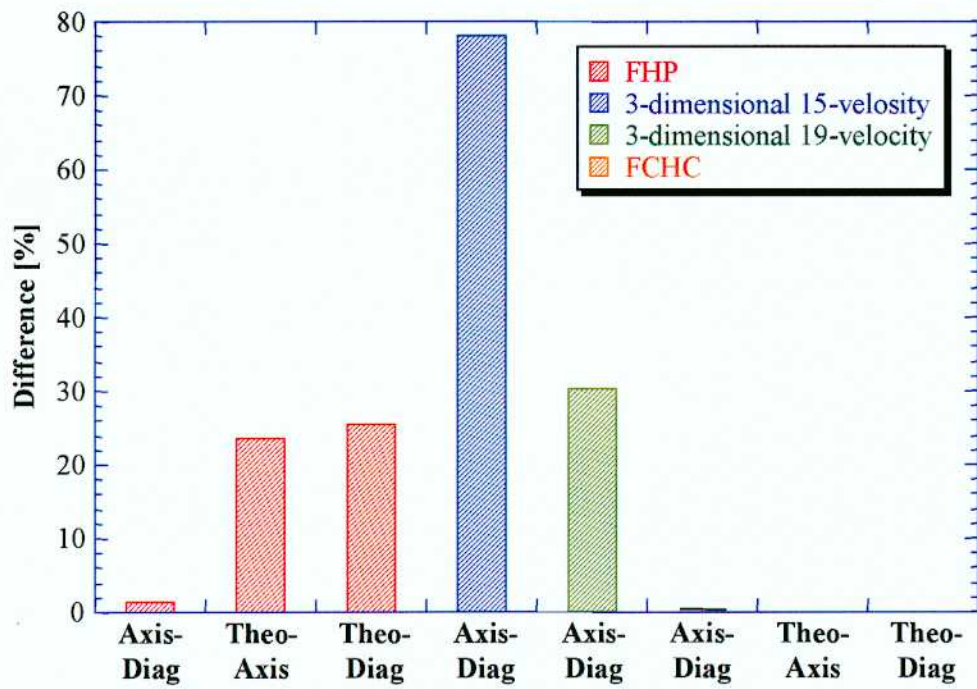
次に、3次元モデルにおいて、軸方向と斜め45度方向の動粘性係数の差異が数密度によってどのように変化するかを調べることにした。その結果を図A.5.2に示す。図A.5.2(a)は3次元15速度モデルに対する評価結果を示しており、図A.5.2(b)は3次元19速度モデルに対する評価結果を示している。どちらの図も、縦軸は動粘性係数の差異を示しており、横軸は粒子の初期平均数密度を示している。これらの図より、どちらのモデルに対しても数密度の増加とともに動粘性係数の差異が大きくなる傾向が示された。また、3次元15速度モデルでは差異の割合が60~80%の間で変化し、3次元19速度モデルでは10~50%の間で変化することも示された。

さらに、速度に対して動粘性係数がどのように変化するかを調べることにした。その結果を図A.5.3に示す。図A.5.3(a)は3次元15速度モデルに対する評価結果を示しており、図A.5.3(b)は3次元19速度モデルに対する評価結果を示している。どちらの図も、縦軸は動粘性係数の差異を示しており、横軸は初期速度を示している。どちらのモデルに対しても、わずかながらではあるが速度が大きくなるとともに動粘性係数の差異の割合が大きくなることが示された。

以上の結果より、3次元15速度モデルならびに3次元19速度モデルは、等方性が確保されているFHPモデルやFCHCモデルと比べると異方性を有していることが明らかとなった。しかしながら、数密度を小さくすることや速度を小さくすることで異方性は多少回避されることが示された。

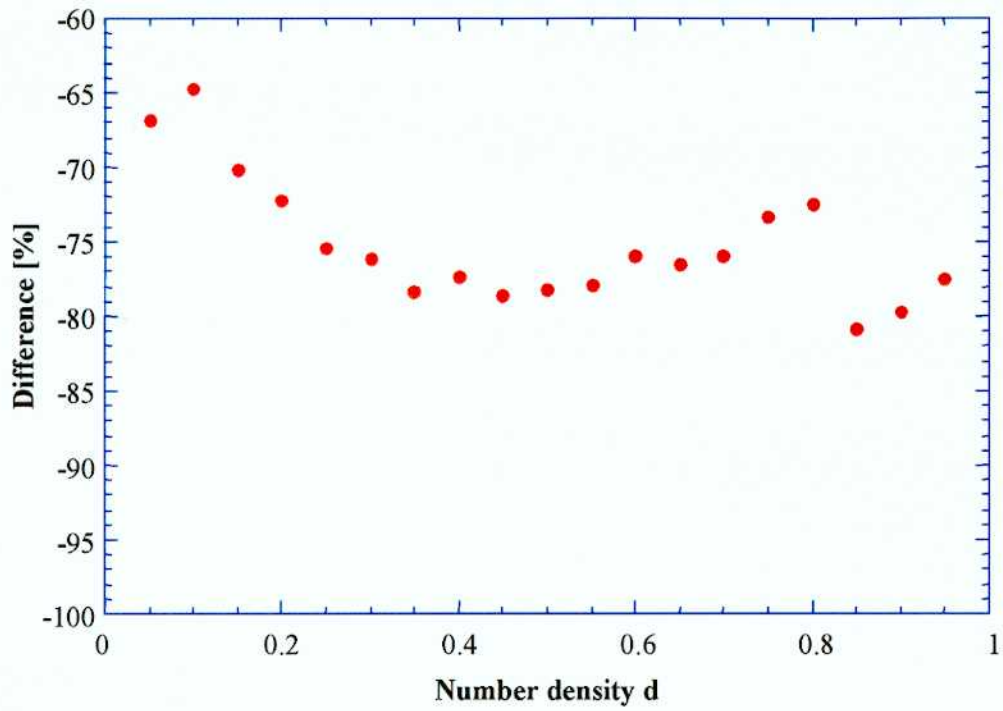


(a) Kinematic viscosity

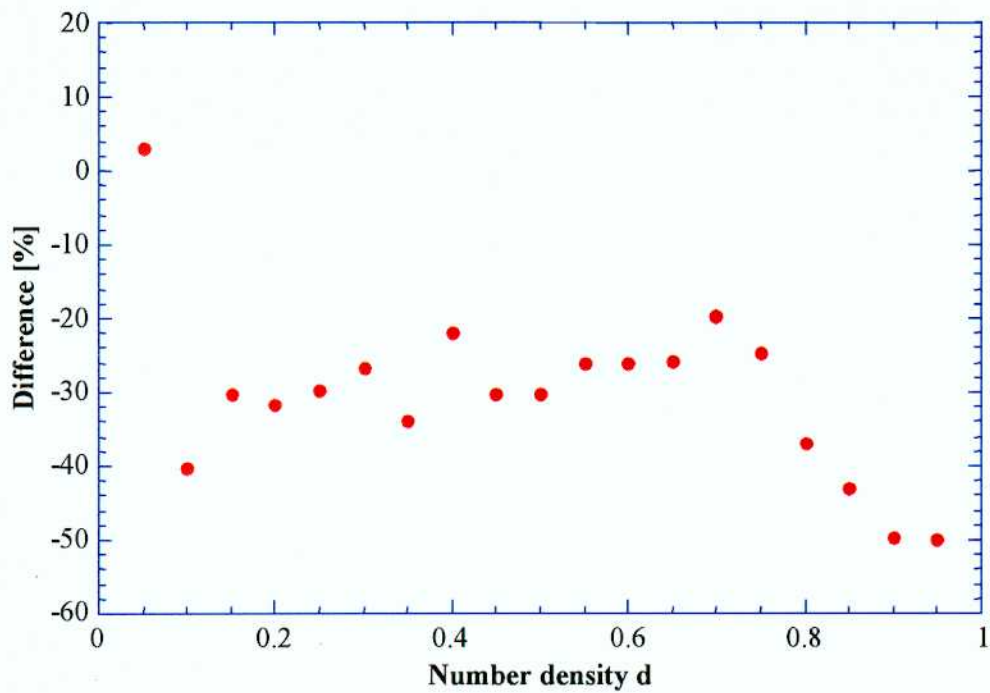


(b) Difference of kinematic viscosity in axis- and diagonal-direction, and theoretical value

Fig. A.5.1 Comparison of kinematic viscosity for different model

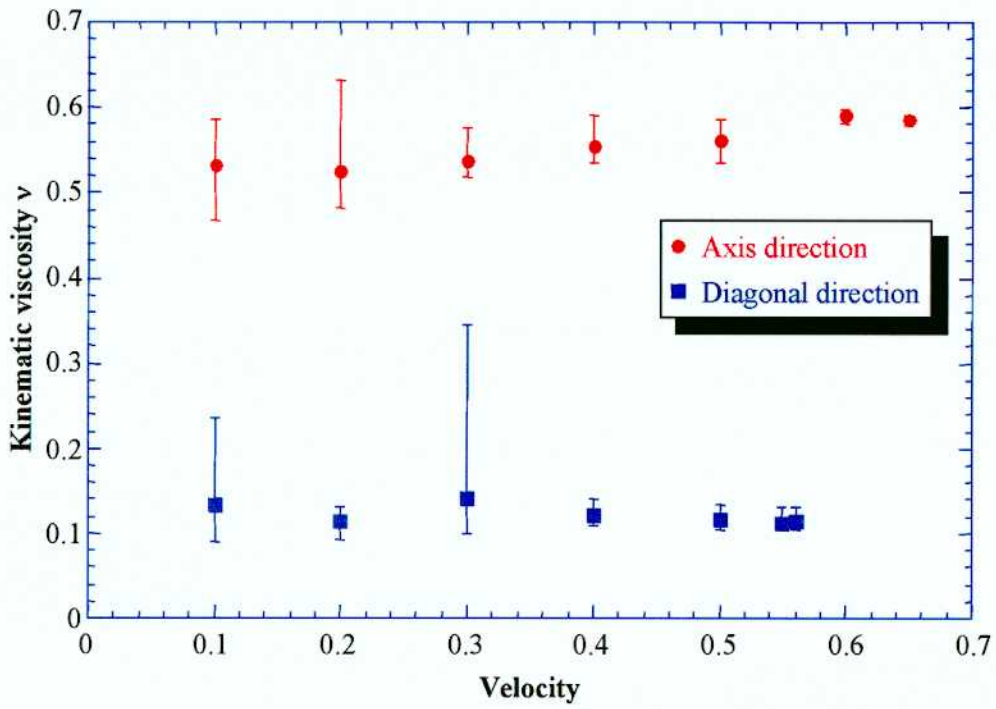


(a) 3-dimensional 15-velocity model

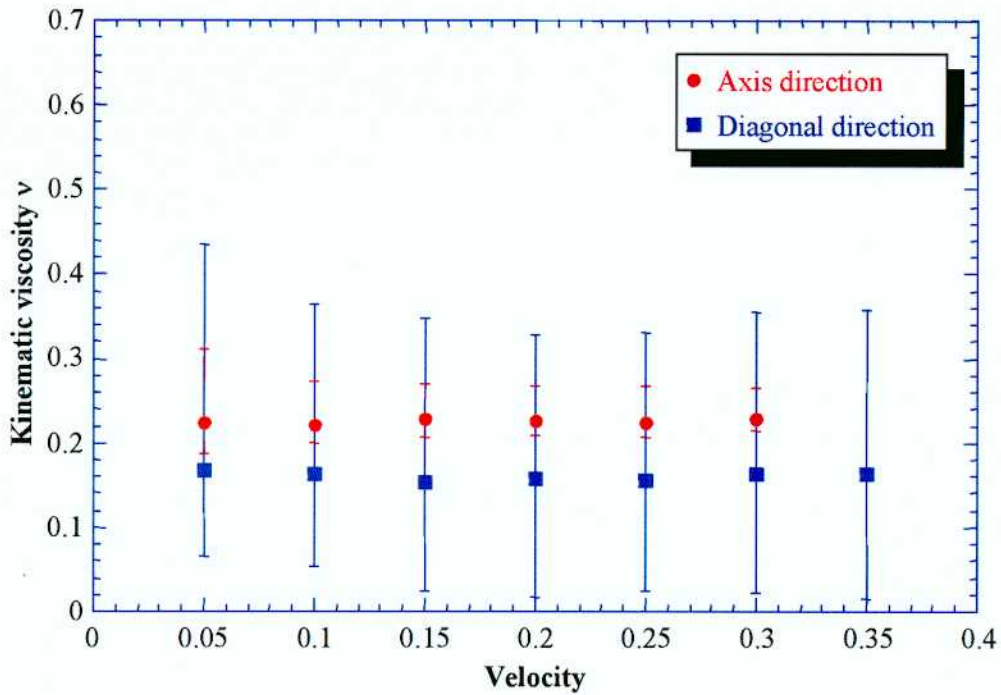


(b) 3-dimensional 19-velocity model

**Fig. A.5.2** Difference of kinematic viscosity in axis- and diagonal-direction for different particle number density



(a) 3-dimensional 15-velocity model



(b) 3-dimensional 19-velocity model

**Fig. A.5.3** Difference of kinematic viscosity in axis- and diagonal-direction for different initial velocity



## A.6. 各モデルに対する動粘性係数の値

### A.6.1. 2次元7速度モデル

Number density	Kinematic viscosity						
	Axis	Axis (max)	Axis (min)	Diagonal	Diagonal (max)	Diagonal (min)	Theoretical
0.05	0.790501199	2.232663334	0.34278694	-	-	-	-
0.1	0.697582789	1.538712596	0.343671707	-	-	-	-
0.15	0.585572648	1.086313822	0.32184235	0.560392007	0.89488629	0.35325625	0.422343185
0.2	0.50487034	0.804648266	0.320713303	0.483871169	0.575140376	0.395156232	0.338661339
0.25	0.426283345	0.604857621	0.317147148	0.386554089	0.524263653	0.287287266	0.301948052
0.3	0.405313934	0.507952089	0.325971564	0.426750496	0.525099769	0.354139732	0.29632116
0.35	0.421630798	0.462455493	0.388679175	0.456374747	0.619415827	0.358092415	0.323674257
0.4	0.509732656	0.521164751	0.497263161	0.489769585	0.742522658	0.378418726	0.411698538
0.45	0.888405152	0.917133637	0.85165168	0.901943763	1.206575725	0.794071248	0.718601783

### A.6.2. 3次元15速度モデル

Number density	Kinematic viscosity					
	Axis	Axis (max)	Axis (min)	Diagonal	Diagonal (max)	Diagonal (min)
0.05	2.636736757	3.493493712	1.938963663	0.877339583	2.281420295	0.300441466
0.1	1.47913544	1.773991245	1.21288252	0.522029169	0.883483376	0.330142816
0.15	0.967257717	1.072542428	0.777631583	0.289597389	0.465616492	0.193706911
0.2	0.841420304	1.063404117	0.660230524	0.234149079	0.332584353	0.154988106
0.25	0.683283292	0.836147695	0.625604299	0.168252729	0.189992934	0.128319784
0.3	0.623574887	0.695719345	0.582449823	0.149333674	0.174949822	0.128374962
0.35	0.555312443	0.59749303	0.501142917	0.120453164	0.154246377	0.104671896
0.4	0.547727032	0.574878761	0.504781225	0.124289268	0.15410109	0.086180441
0.45	0.537473297	0.582894594	0.500575772	0.114984935	0.151449887	0.101256238
0.5	0.525622076	0.631383983	0.481049711	0.114932462	0.131465403	0.092470735
0.55	0.533893225	0.59262736	0.507084351	0.118086652	0.140991339	0.105004559
0.6	0.561210131	0.632589777	0.52938753	0.134675268	0.160757882	0.121888573
0.65	0.601509565	0.643702387	0.565408103	0.141047295	0.166474921	0.119482179
0.7	0.679239191	0.713099097	0.645150885	0.163028559	0.189431045	0.142743962
0.75	0.738265292	0.78858059	0.693981713	0.197249695	0.224570529	0.156946804
0.8	0.880044152	0.963434352	0.834468147	0.241559819	0.288182458	0.208502742
0.85	1.53191893	1.902024771	1.197141874	0.293215625	0.372756508	0.253613711
0.9	1.994270287	2.432276662	1.528910815	0.404490139	0.569597722	0.342867232
0.95	3.180240505	3.861920887	2.414995887	0.716601809	0.922958094	0.524871539

A.6.3. 3次元19速度モデル

Number density	Kinematic viscosity					
	Axis	Axis (max)	Axis (min)	Diagonal	Diagonal (max)	Diagonal (min)
0.05	0.911732143	1.120358478	0.714184254	0.938902909	1.384734608	0.541055201
0.1	0.508695739	0.619026012	0.436608856	0.303824931	0.398858378	0.194476488
0.15	0.343740117	0.412128226	0.29912835	0.239795768	0.338610895	0.193111506
0.2	0.294362271	0.351624245	0.251809767	0.200890321	0.271521853	0.156748027
0.25	0.264428456	0.323197744	0.23430492	0.185907283	0.241902189	0.133246985
0.3	0.2424138	0.29472756	0.215170666	0.177897615	0.225210422	0.14680886
0.35	0.231247052	0.300211047	0.205135678	0.152791342	0.175698615	0.135652668
0.4	0.230807108	0.27938536	0.209630738	0.180330169	0.212853986	0.140843222
0.45	0.224016354	0.278619033	0.202031016	0.156119655	0.18852737	0.130131434
0.5	0.226189114	0.282692813	0.208636095	0.157446223	0.171149182	0.140684785
0.55	0.228415658	0.277154162	0.211369122	0.16877132	0.190324625	0.152029146
0.6	0.235037708	0.285570384	0.213464151	0.173626514	0.19030802	0.156897074
0.65	0.246480668	0.294343925	0.225402923	0.183086802	0.203749099	0.159501966
0.7	0.26852615	0.315156206	0.244928489	0.215388464	0.236958487	0.199440902
0.75	0.320269722	0.356426821	0.277241728	0.241249171	0.26941197	0.208502742
0.8	0.480397079	0.578029974	0.396002151	0.303122563	0.366287581	0.254381771
0.85	0.736471481	1.067098284	0.563034756	0.419675918	0.614280494	0.316612014
0.9	1.289112808	2.87079109	0.80972467	0.649163467	1.031819783	0.510641681
0.95	2.014852906	3.590133515	1.267275088	1.008020508	1.64492057	0.691444937

A.6.4. FCHC モデル

本データは、日本原子力研究所 計算科学技術推進センター 数値実験技術開発グループの海老原健一氏が測定・評価した結果であり、氏のご好意によるものである。

Number density	Kinematic viscosity						Theoretical
	Axis	Axis (max)	Axis (min)	Diagonal	Diagonal (max)	Diagonal (min)	
0.005							4.96256
0.01							2.48941
0.015							1.66641
0.02							1.25595
0.025				0.971575	0.972797	0.970357	1.01049
0.03							0.847519
0.035							0.731682
0.04							0.645296
0.045							0.578536
0.05	0.51687	0.509331	0.524635	0.516732	0.517349	0.516117	0.525508
0.055							0.48246
0.06							0.446892
0.065							0.417071

0.07							0.39176
0.075							0.370051
0.08							0.351264
0.085							0.334878
0.09							0.320487
0.095							0.307773
0.1	0.299456	0.29645	0.302523	0.296859	0.297051	0.296668	0.296478
0.105							0.286396
0.11							0.277357
0.115							0.269222
0.12							0.261872
0.125							0.255211
0.13							0.249156
0.135							0.243635
0.14							0.238588
0.145							0.233964
0.15							0.229717
0.155							0.225809
0.16							0.222204
0.165							0.218872
0.17							0.215789
0.175							0.212929
0.18							0.210273
0.185							0.207801
0.19							0.205499
0.195							0.20335
0.2	0.200345	0.196757	0.204066	0.196258	0.196249	0.196267	0.201343
0.205							0.199464
0.21							0.197705
0.215							0.196054
0.22							0.194504
0.225							0.193047
0.23							0.191675
0.235							0.190383
0.24							0.189165
0.245							0.188015
0.25							0.186928
0.255							0.1859
0.26							0.184928
0.265							0.184007
0.27							0.183134
0.275							0.182306
0.28							0.18152
0.285							0.180774
0.29							0.180065
0.295							0.179391
0.3	0.175706	0.173323	0.178156	0.178055	0.178017	0.178093	0.178751
0.305							0.178141
0.31							0.177561

0.315							0.177009
0.32							0.176484
0.325							0.175983
0.33							0.175507
0.335							0.175053
0.34							0.174621
0.345							0.17421
0.35							0.173819
0.355							0.173447
0.36							0.173093
0.365							0.172756
0.37							0.172436
0.375							0.172133
0.38							0.171845
0.385							0.171573
0.39							0.171315
0.395							0.171071
0.4	0.165347	0.162704	0.168076	0.16497	0.164823	0.165118	0.170841
0.405							0.170624
0.41							0.170421
0.415							0.17023
0.42							0.170051
0.425							0.169885
0.43							0.169731
0.435							0.169588
0.44							0.169456
0.445							0.169336
0.45							0.169227
0.455							0.169128
0.46							0.16904
0.465							0.168963
0.47							0.168897
0.475							0.168841
0.48							0.168795
0.485							0.168759
0.49							0.168734
0.495							0.168718
0.5	0.168881	0.166167	0.171685	0.168517	0.168627	0.168408	0.168713
0.505							0.168718
0.51							0.168734
0.515							0.168759
0.52							0.168795
0.525							0.168841
0.53							0.168897
0.535							0.168963
0.54							0.16904
0.545							0.169128
0.55							0.169227
0.555							0.169336

0.56							0.169456
0.565							0.169588
0.57							0.169731
0.575							0.169885
0.58							0.170051
0.585							0.17023
0.59							0.170421
0.595							0.170624
0.6							0.170841
0.605							0.171071
0.61							0.171315
0.615							0.171573
0.62							0.171845
0.625							0.172133
0.63							0.172436
0.635							0.172756
0.64							0.173093
0.645							0.173447
0.65							0.173819
0.655							0.17421
0.66							0.174621
0.665							0.175053
0.67							0.175507
0.675							0.175983
0.68							0.176484
0.685							0.177009
0.69							0.177561
0.695							0.178141
0.7							0.178751
0.705							0.179391
0.71							0.180065
0.715							0.180774
0.72							0.18152
0.725							0.182306
0.73							0.183134
0.735							0.184007
0.74							0.184928
0.745							0.1859
0.75							0.186928
0.755							0.188015
0.76							0.189165
0.765							0.190383
0.77							0.191675
0.775							0.193047
0.78							0.194504
0.785							0.196054
0.79							0.197705
0.795							0.199464
0.8							0.201343

0.805						0.20335
0.81						0.205499
0.815						0.207801
0.82						0.210273
0.825						0.212929
0.83						0.215789
0.835						0.218872
0.84						0.222204
0.845						0.225809
0.85						0.229717
0.855						0.233964
0.86						0.238588
0.865						0.243635
0.87						0.249156
0.875						0.255211
0.88						0.261872
0.885						0.269222
0.89						0.277357
0.895						0.286396
0.9						0.296478
0.905						0.307773
0.91						0.320487
0.915						0.334878
0.92						0.351264
0.925						0.370051
0.93						0.39176
0.935						0.417071
0.94						0.446892
0.945						0.48246
0.95						0.525508
0.955						0.578536
0.96						0.645296
0.965						0.731682
0.97						0.847519
0.975						1.01049
0.98						1.25595
0.985						1.66641
0.99						2.48941
0.995						4.96256