付録 C

2 次元 7 速度モデルに関する理論的検討

（質量保存式ならびに運動量保存式の導出）

C.1. 概要

格子ガスオートマトン法では、離散化された空間・時間に対する粒子の発展方程式が解かれる。本解析手法では、占有状態が Bool 変数$n_i(\mathbf{x},t)\quad(i=1,\dots,M)$によって表された仮想的な粒子が以下の発展方程式にしたがって格子上を移動する。

$$n_i(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i,t+1)-n_i(\mathbf{x},t)=\Omega(n_i(\mathbf{x},t)) \tag{C.1.1}$$

また、Bool 変数にアンサンブル平均を施した粒子速度分布関数$f_i(\mathbf{x},t)=\langle n_i(\mathbf{x},t)\rangle$を用いた発展方程式は次式のようになる。

$$f_i(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i,t+1)-f_i(\mathbf{x},t)=\Omega(f_i(\mathbf{x},t)) \tag{C.1.2}$$

ここで、Ωは粒子の衝突を記述する衝突演算子であり、一般に以下の BGK 近似衝突演算子が用いられる。

$$\Omega(f_i(\mathbf{x},t))=\frac{f_i(\mathbf{x},t)-f_i^{(0)}(\mathbf{x},t)}{\tau} \tag{C.1.3}$$

$f_i^{(0)}(\mathbf{x},t)$は局所平衡分布関数、τは緩和時間を表す。局所平衡分布関数は Navier-Stokes 方程式が導出されるように設定される。以下に式(C.1.2), (C.1.3)からの質量保存式と Navier-Stokes 方程式の導出過程を示す。質量保存式と Navier-Stokes 方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \tag{C.1.4}$$

$$\frac{\partial\rho u_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_\alpha u_\beta}{\partial x_\beta}=-\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{\frac{\lambda}{\rho}\left(\frac{\partial\rho u_\gamma}{\partial x_\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\right\} \tag{C.1.5}$$

ここで、x_αはα方向位置、tは時間を示す。また、ρは密度、u_αは速度のα方向位置、μは第 1 粘性係数、λは第 2 粘性係数を示す。

C.2.　2次元7速度モデルにおけるテンソル

2次元7速度モデルに関する数学的考察を行う前に、このモデルが持つテンソルを算出する。これは、Navier-Stokes 方程式などを導出する際にテンソルを用いるからである。表 C.2.1 に、2次元7速度モデルにおける各方向速度とその成分を定義したものを示す。

No.	1	2	3	4	5	6	7
x-component of $\mathbf{e}_i$	1	1/2	−1/2	-1	−1/2	1/2	0
y-component of $\mathbf{e}_i$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0

Table C.2.1　Velocity No. and x- and y-component of velocity

ここで$\mathbf{e}_i$は、i方向における局所領域の速度を示している。以下、この定義した速度を用いて議論を進める。テンソルは1次から4次まで求める必要がある。

1次のテンソルは以下のように算出される。

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x = 1+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+0=0 \qquad (C.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_y = 0+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+0+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+0=0 \qquad (C.2.2)$$

同様にして、2次のテンソルは次式のように算出される。

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x^2 = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=3 \qquad (C.2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_y^2 = 0+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+0+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+0=3 \qquad (C.2.4)$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x(e_i)_y = 0+\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+0+\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+0=0 \qquad (C.2.5)$$

3次のテンソルは次式のよう算出される。

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x^3 = 1+\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{8}\right)+1+\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}+0=0 \qquad (C.2.6)$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_y^3 = 0+\frac{\sqrt{27}}{8}+\frac{\sqrt{27}}{8}+0+\left(-\frac{\sqrt{27}}{8}\right)+\left(-\frac{\sqrt{27}}{8}\right)+0=0 \qquad (C.2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x^2(e_i)_y = 0+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}+0+\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+0=0 \qquad (C.2.8)$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x(e_i)_y^2 = 0+\frac{3}{8}+\left(-\frac{3}{8}\right)+0+\left(-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{8}+0=0 \qquad (C.2.9)$$

4次のテンソルは次式のように算出される。

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x^4 = 1+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+1+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+0=\frac{9}{4} \qquad (C.2.10)$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_y^4 = 0+\frac{9}{16}+\frac{9}{16}+0+\frac{9}{16}+\frac{9}{16}+0=\frac{9}{4} \qquad (C.2.11)$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x^3(e_i)_y = 0+\frac{\sqrt{3}}{16}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)+0+\frac{\sqrt{3}}{16}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)+0=0 \tag{C.2.12}$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x(e_i)_y^3 = 0+\frac{\sqrt{3}}{16}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)+0+\frac{\sqrt{3}}{16}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)+0=0 \tag{C.2.13}$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_x^2(e_i)_y^2 = 0+\frac{3}{16}+\left(-\frac{3}{16}\right)+0+\frac{3}{16}+\left(-\frac{3}{16}\right)+0=\frac{3}{4} \tag{C.2.14}$$

1 次から 4 次までのテンソルをまとめると、次式のように表される。

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_\alpha = 0 \qquad (\alpha = x, y, z) \tag{C.2.15}$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_\alpha(e_i)_\beta = \begin{cases} 3 & (\alpha=\beta) \\ 0 & (\alpha\neq\beta) \end{cases} \qquad (\alpha,\beta = x, y, z) \tag{C.2.16}$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_\alpha(e_i)_\beta(e_i)_\gamma = 0 \qquad (\alpha,\beta,\gamma = x, y, z) \tag{C.2.17}$$

$$\sum_{i=1}^{7}(e_i)_\alpha(e_i)_\beta(e_i)_\gamma(e_i)_\delta = \begin{cases} 9/4 & (\alpha=\beta=\gamma=\delta) \\ 3/4 & (\alpha=\beta, \gamma=\delta, \alpha\neq\gamma) \\ 0 & (\alpha\neq\beta) \end{cases} \qquad (\alpha,\beta,\gamma,\delta = x, y, z) \tag{C.2.18}$$

C.3.　平衡分布関数と密度、運動量

先に定義した粒子速度平衡分布関数を用いて、密度ならびに運動量を定義することができる。平衡分布をiについて総和をとると、次式のように平均化した場における密度を定義することができる。

$$\sum_i f_i^{(0)} = \rho \tag{C.3.1}$$

また、平衡分布関数に局所速度を掛けてiについて総和をとると、次式のように平均化した場における運動量を定義することができる。

$$\sum_i f_i^{(0)} (e_i)_\alpha = \rho u_\alpha \tag{C.3.2}$$

以下、これらの式を格子ガスオートマトン法における密度、運動量として用いる。

このように粒子の状態を記述している局所平衡分布関数は、$|\mathbf{u}| << 1$ と仮定した局所速度 $\mathbf{u}$ まわりに級数展開した丸めた Maxwell-Boltzmann 分布で与えられる。つまり、静止粒子に対する平衡分布関数は、

$$f_7^{(0)} = A_7 + D_7 u^2 \tag{C.3.3}$$

によって与えられ、運動粒子に対する平衡分布関数は

$$f_i^{(0)} = A_i + B e_i \cdot \mathbf{u} + C(e_i \cdot \mathbf{u})^2 + D u^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, 7) \tag{C.3.4}$$

となる。これらの係数を決定することで局所平衡分布関数が求められる。

C.4.　密度の定義

密度の定義式(C.3.1)から局所平衡分布関数の係数に対する条件を求めることができる。局所平衡分布関数(C.3.3), (C.3.4)をiについて総和をとると次式のようになる。

$$\sum_i f_i^{(0)} = \sum_i A_i + \sum_i B\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \sum_i C(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 + \sum_i D u^2 \tag{C.4.1}$$

テンソル(C.2.15)~(C.2.18)を用いて、式(C.4.1)の各項を計算すると、次式が得られる。

$$\sum_i A_i = A_7 + 6A \tag{C.4.2}$$

$$\sum_i B\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} = B\sum_i \left[(e_i)_x u_x + (e_i)_y u_y\right] = 0 \tag{C.4.3}$$

$$\sum_i C(e_i \cdot u)^2 = C\sum_i \left[(e_i)_x^2 u_x^2 + (e_i)_y^2 u_y^2 + 2(e_i)_x (e_i)_y u_x u_y\right] = C\left(3u_x^2 + 3u_y^2\right) = 3Cu^2 \tag{C.4.4}$$

$$\sum_i Du^2 = \left(D_7 + \sum_i D\right)u^2 = (D_7 + 6D)u^2 \tag{C.4.5}$$

ここで、式(C.4.2),(C.4.5)においてA, Dなる係数が出てきているが、これは速度$i = 1,\ldots,6$に関して等方的であるのでこのように記述することができる。以上をまとめると次式のようになる。

$$\sum_i f_i^{(0)} = A_i + 6A + (3C + D_7 + 6D)\mathbf{u}^2 \tag{C.4.6}$$

式(C.3.1)と式(C.4.6)を比較することによって、以下の条件が得られる。

$$A_7 + 6A = \rho \tag{C.4.7}$$

$$3C + D_7 + 6D = 0 \tag{C.4.8}$$

C.5. 運動量の定義

運動量の定義式(C.3.2)から局所平衡分布関数の係数に対する条件を求めることができる。局所平衡分布関数(C.3.4)の両辺に$(e_i)_\alpha$を掛けてiについて総和をとると次式のようになる。

$$\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_\alpha = \sum_i A_i(e_i)_\alpha + \sum_i B(e_i)_\alpha \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \sum_i C(e_i)_\alpha (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 + \sum_i D(e_i)_\alpha \mathbf{u}^2 \qquad \text{(C.5.1)}$$

$\alpha = x$の場合には次式のようになる。

$$\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x = \sum_i A_i(e_i)_x + \sum_i B(e_i)_x \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \sum_i C(e_i)_x (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 + \sum_i D(e_i)_x \mathbf{u}^2 \qquad \text{(C.5.2)}$$

テンソル(C.2.15)~(C.2.18)を用いて式(C.5.2)の各項を計算すると、次式のようになる。

$$\sum_i A_i(e_i)_x = 0 \qquad \text{(C.5.3)}$$

$$\sum_i B(e_i)_x \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} = B\sum_i \left[(e_i)_x^2 u_x + (e_i)_x (e_i)_y u_y\right] = 3Bu_x \qquad \text{(C.5.4)}$$

$$\sum_i C(e_i)_x (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 = C\sum_i \left[(e_i)_x^3 u_x^2 + (e_i)_x (e_i)_y^2 u_y^2 + (e_i)_x^2 (e_i)_y u_x u_y\right] = 0 \qquad \text{(C.5.5)}$$

$$\sum_i D(e_i)_x \mathbf{u}^2 = 0 \qquad \text{(C.5.6)}$$

各項をまとめると次式のようになる。

$$\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x = 3Bu_x \qquad \text{(C.5.7)}$$

この式と式(C.3.2)を比較することによって、以下の条件が得られる。

$$3B = \rho \qquad \text{(C.5.8)}$$

よって、係数Bに対する値が求められる。

$$B = \frac{\rho}{3} \qquad \text{(C.5.9)}$$

C.6. 動力学方程式の導出

Mesoscopic な式(C.1.2)に Chpman-Enskog 展開を適用する。そのような操作を行うことにより(C.1.4), (C.1.5)に示される Macroscopic な式が導出される。まず初めに、以下のマルチスケール変数を用いて、時間についての偏差を

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} \tag{C.6.1}$$

のように記述する。ここで、t_0 と t_1 はそれぞれ速い時間スケールと遅い時間スケールを意味している。つまり式(C.6.1)は、伝播や拡散などの様々な現象が異なる時間スケールで生じることを意味している。次に、局所平衡分布関数からの小さな乱れを考慮し、分布関数 f_i を $f_i^{(0)}$ まわりに次式のように展開する。

$$f_i(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n f_i^{(n)}=f_i^{(0)}+\varepsilon f_i^{(1)}+\varepsilon^2 f_i^{(2)}+\cdots \tag{C.6.2}$$

ここで、拘束条件として次式に示す条件を用いる。

$$\sum_i f_i^{(n)}\begin{pmatrix}1\\ e_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad(n\geq 1) \tag{C.6.3}$$

分布関数の高次の乱れは $f_i^{(n)}$ $(n\geq 1)$ 密度、運動量などの物理量には影響せず、粘性のみに影響する。式(C.1.2)を Taylor 展開すると次式のようになる。

$$f_i(x+e_i,t+1)-f_i(x,t)=\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]f_i+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]^2 f_i+O(\varepsilon^3) \tag{C.6.4}$$

式(C.6.1), (C.6.2), (C.6.4)を平衡分布関数の発展方程式(C.1.2)に代入すると、以下に示す動力学方程式が得られる。

$$\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]\left(f_i^{(0)}+\varepsilon f_i^{(1)}+\cdots\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]^2\left(f_i^{(0)}+\varepsilon f_i^{(1)}+\cdots\right)=-\frac{1}{\tau}\left(\varepsilon f_i^{(1)}+\varepsilon^2 f_i^{(2)}+\cdots\right) \tag{C.6.5}$$

式(C.6.5)から、次式のような ε の 1 次のオーダーの動力学方程式が得られる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_0}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]f_i^{(0)}=-\frac{f_i^{(1)}}{\tau} \tag{C.6.6}$$

同様に、次式のような ε の 2 次のオーダーの動力学方程式が得られる。

$$\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_1}+\left[\frac{\partial}{\partial t_0}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]f_i^{(1)}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t_0}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]^2 f_i^{(0)}=0 \tag{C.6.7}$$

が得られる。ここで、式(C.6.6)の両辺に次のような項を掛け合わせる。

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t_0}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right] \tag{C.6.8}$$

すると、次式のようになる。

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]^2 f_i^{(0)}=-\frac{1}{2\tau}\left[\frac{\partial}{\partial t}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]f_i^{(1)} \tag{C.6.9}$$

となり、式(C.6.9)を式(C.6.7)に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_1}+\left(1-\frac{1}{2\tau}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t_0}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right]f_i^{(0)}=0 \tag{C.6.10}$$

以下、式(C.6.10)を 2 次のオーダーの動力学方程式として用いる。

C.7. 巨視的な質量保存式の導出

3.6 節で得られた 1 次のオーダーの動力学方程式(C.6.6)と 2 次のオーダーの動力学方程式(C.6.10)から、1 次と 2 次のオーダーの質量保存式を導出する。

式(C.6.6)を i について総和をとると次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(0)}\right\}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\sum_i f_i^{(0)}\right\}=-\frac{1}{\tau}\left\{\sum_i f_i^{(1)}\right\} \tag{C.7.1}$$

密度の定義式(C.3.1)を用いると、式(C.7.1)の左辺第 1 項は次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(0)}\right\}=\frac{\partial\rho}{\partial t_0} \tag{C.7.2}$$

運動量の定義式(C.3.2)を用いると、式(C.7.1)の左辺第 2 項は次式のようになる。

$$(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\sum_i f_i^{(0)}\right\}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\sum_i\left\{(e_i)_\alpha f_i^{(0)}\right\}\right]=\frac{\partial\rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} \tag{C.7.3}$$

右辺は、式(C.6.3)に示されている拘束条件から次式のようになる。

$$\frac{1}{\tau}\left\{\sum_i f_i^{(1)}\right\}=0 \tag{C.7.4}$$

式(C.7.2)～(C.7.4)の全ての項をまとめると、次に示される 1 次のオーダーの質量保存式が得られる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \tag{C.7.5}$$

式(C.6.10)に対して同様の操作を行う。式(C.6.10)を i について総和をとると次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\sum_i f_i^{(0)}\right\}+\left(1-\frac{1}{2\tau}\right)\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(1)}\right\}+(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\sum_i f_i^{(1)}\right\}=0 \tag{C.7.6}$$

密度の定義式(C.3.1)を代入すると、式(C.7.6)の左辺第 1 項は次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\sum_i f_i^{(0)}\right\}=\frac{\partial\rho}{\partial t_1} \tag{C.7.7}$$

式(C.6.3)に示されている拘束条件を式(C.7.6)の左辺第 2 項、第 3 項に代入すると、次式が得られる。

$$\left(1-\frac{1}{2\tau}\right)\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(1)}\right\}=0 \tag{C.7.8}$$

$$(e_i)_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\sum_i f_i^{(1)}\right\}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\sum_i (e_i)_\alpha f_i^{(1)}\right\}=0 \tag{C.7.9}$$

式(C.7.7)～(C.7.9)の全ての項をまとめると、次に示される 2 次のオーダーの質量保存式が得られる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t_1}=0 \tag{C.7.10}$$

C.8.　1 次のオーダーの運動量保存式

1 次のオーダーの動力学方程式(C.6.6)から 1 次のオーダーの運動量保存式を導出する。式(C.6.6)の両辺にe_iを掛けて、i について総和をとると次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_\alpha\right\}+\frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial x_\beta}=-\frac{1}{\tau}\sum_i f_i^{(1)}(e_i)_\alpha \tag{C.8.1}$$

ここで、$\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}$は運動量流束テンソルを表しており、次式で記述される。

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(l)}=\sum_i f_i^{(l)}(e_i)_\alpha(e_i)_\beta \quad (l=0,1) \tag{C.8.2}$$

$\alpha=x$として式(C.8.1)を陽的に記述すると、次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x\right\}+\frac{\partial \Pi_{xx}^{(0)}}{\partial x_x}+\frac{\partial \Pi_{xy}^{(0)}}{\partial x_y}=-\frac{1}{\tau}\sum_i f_i^{(1)}(e_i)_x \tag{C.8.3}$$

運動量の定義式(C.3.2)を用いると、式(C.8.3)の左辺第 1 項は次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x\right\}=\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_0} \tag{C.8.4}$$

平衡分布関数(C.3.3), (C.3.4)を用いると、運動量流束テンソル$\Pi_{xx}^{(0)}$, $\Pi_{xy}^{(0)}$は次式のように表される。

$$\begin{aligned}\Pi_{xx}^{(0)}&=\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x(e_i)_x\\&=\sum_i\Big[A_i(e_i)_x^2+B\left\{(e_i)_x^3u_x+(e_i)_x^2(e_i)_y u_y\right\}+\\&\qquad C\left\{(e_i)_x^4u_x^2+(e_i)_x^2(e_i)_y^2u_y^2+2(e_i)_x^3(e_i)_y u_x u_y\right\}+Du^2(e_i)_x^2\Big]\\&=3A+\frac{9}{4}Cu_x^2+\frac{3}{4}Cu_y^2+3Du^2\\&=3A+\left(\frac{3}{4}C+3D\right)u^2+\frac{6}{4}Cu_x^2\end{aligned} \tag{C.8.5}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{xy}^{(0)}&=\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x(e_i)_y\\&=\sum_i\Big[A_i(e_i)_x(e_i)_y+B\left\{(e_i)_x^2(e_i)_y u_x+(e_i)_x(e_i)_y^2u_y\right\}+\\&\qquad C\left\{(e_i)_x^3(e_i)_y u_x^2+(e_i)_x(e_i)_y^3u_y^2+2(e_i)_x^2(e_i)_y^2u_x u_y\right\}+Du^2(e_i)_x(e_i)_y\Big]\\&=\frac{6}{4}Cu_x u_y\end{aligned} \tag{C.8.6}$$

ここで式(C.6.3)の拘束条件を用いると、式(C.8.3)の右辺第 1 項は消去される。

$$\frac{1}{\tau}\sum_i f_i^{(1)}(e_i)_x=0 \tag{C.8.7}$$

運動量保存式(C.1.5)と式(C.8.3)を比較することによって、1 次のオーダーの運動量流束テンソルに関して次式で示される関係が得られる。

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(0)}=p\delta_{\alpha\beta}+\rho u_\alpha u_\beta \tag{C.8.8}$$

よって、式(C.8.5), (C.8.6)より以下の条件式が得られる。

$$3A+\left(\frac{3}{4}C+3D\right)u^2+\frac{6}{4}Cu_x^2=p+\rho u_x^2 \tag{C.8.9}$$

$$\frac{6}{4}Cu_x u_y = \rho u_x u_y \tag{C.8.10}$$

故に、

$$3A = p \tag{C.8.11}$$

$$\frac{3}{4}C + 3D = 0 \tag{C.8.12}$$

$$\frac{6}{4}C = \rho \tag{C.8.13}$$

よって、係数は次式のように与えられる。

$$A = \frac{p}{3} \tag{C.8.14}$$

$$C = \frac{2}{3}\rho \tag{C.8.15}$$

$$D = -\frac{\rho}{6} \tag{C.8.16}$$

さらに式(C.8.14)を式(C.4.7)に、式(C.8.15),(C.8.16)を式(C.4.8)に代入すると次式が与えられる。

$$A_7 = \rho - 2p \tag{C.8.17}$$

$$D_7 = -\rho \tag{C.8.18}$$

以上より、1 次のオーダーの運動量保存式

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_x u_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{C.8.19}$$

が得られる。Mesoscopic な動力学方程式(C.6.6)から Eular レベルの Macroscopic な方程式系が正しく導出されることが示された。

C.9.　2 次のオーダーの運動量保存式

2 次のオーダーの動力学方程式(C.6.10)から 2 次のオーダーの運動量保存式を導出する。式(C.6.10)の両辺に $\mathbf{e}_i$ を掛けて、i について総和をとると次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_\alpha\right\}+\left(1-\frac{1}{2\tau}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(1)}(e_i)_\alpha\right\}+\frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial x_\alpha}\right]=0 \tag{C.9.1}$$

$\alpha = x$ として、式(C.9.1)を陽的に記述すると次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x\right\}+\left(1-\frac{1}{2\tau}\right)\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(1)}(e_i)_x\right\}+\left(1-\frac{1}{2\tau}\right)\left(\frac{\partial \Pi_{xx}^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial \Pi_{xy}^{(1)}}{\partial y}\right)=0 \tag{C.9.2}$$

運動量の定義式(C.3.2)を用いると、式(C.9.2)の左辺第 1 項は次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x\right\}=\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_1} \tag{C.9.3}$$

ここで、式(C.6.3)の拘束条件を用いると、式(C.9.2)の右辺第 2 項は消去される。

$$\frac{1}{\tau}\sum_i f_i^{(1)}(e_i)_x = 0 \tag{C.9.4}$$

1 次のオーダーの動力学方程式(C.6.6)を以下のように変形する。

$$f_i^{(1)} = -\tau\left[\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_0}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_\alpha\right\}\right] \tag{C.9.5}$$

この式を式(C.9.2)の左辺第 3 項の運動量流束テンソルに代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}\Pi_{xx}^{(1)} &= \sum_i f_i^{(1)}(e_i)_x(e_i)_x\\ &= -\tau\sum_i\left[(e_i)_x^2\left(\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_0}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{f_i^{(0)}(e_i)_x\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{f_i^{(0)}(e_i)_y\right\}\right)\right]\\ &= -\tau\left[\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x^2\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x^3\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x^2(e_i)_y\right\}\right]\\ &= -\tau\left[\frac{\partial \Pi_{xx}^{(0)}}{\partial t_0}+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x^3\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x^2(e_i)_y\right\}\right]\end{aligned} \tag{C.9.6}$$

ここで、1 次のオーダーの運動量流束テンソル(C.8.2)と 1 次のオーダーの運動量保存式(C.8.19)を用いると、次式のように表される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_{xx}^{(0)}}{\partial t_0} &= \frac{\partial}{\partial t_0}(p+\rho u_x u_x)\\ &= \frac{\partial p}{\partial t_0}+u_x\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_0}+\rho u_x\frac{\partial u_x}{\partial t_0}\\ &= \frac{\partial p}{\partial t_0}+2u_x\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_0}-u_x\left(\rho\frac{\partial u_x}{\partial t_0}+u_x\frac{\partial \rho}{\partial t_0}\right)+\rho u_x\frac{\partial u_x}{\partial t_0}\end{aligned} \tag{C.9.7}$$

よって、次式のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_{xx}^{(0)}}{\partial t_0} &= \frac{\partial p}{\partial t_0} + 2u_x \frac{\partial \rho u_x}{\partial t_0} - \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial t_0} - u_x^2 \frac{\partial \rho}{\partial t_0} + \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial t_0} \\ &= \frac{\partial p}{\partial t_0} + 2u_x \frac{\partial \rho u_x}{\partial t_0} - u_x^2 \frac{\partial \rho}{\partial t_0}\end{aligned} \tag{C.9.8}$$

ここで、$p = c_s^2 \rho$ という関係を用いると、式(C.9.8)は次式のように表すことができる。

$$\frac{\partial \Pi_{xx}^{(0)}}{\partial t_0} = c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial t_0} + 2u_x \frac{\partial \rho u_x}{\partial t_0} - u_x^2 \frac{\partial \rho}{\partial t_0} \tag{C.9.9}$$

質量保存式(C.7.5)と運動量保存式(C.8.19)を用いると、式(C.9.9)は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_{xx}^{(0)}}{\partial t_0} &= -c_s^2\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\right) - 2u_x\left(\frac{\partial \rho u_x u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_x u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\right) + u_x^2\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\right) \\ &= -c_s^2\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\right) - 2u_x \frac{\partial p}{\partial x} + O(u^3) \\ &= -c_s^2\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\right) - 2c_s^2 u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + O(u^3)\end{aligned} \tag{C.9.10}$$

また、平衡分布関数の式(C.3.3), (C.3.4)を用いると、式(C.9.6)の第 2 項、第 3 項は次式のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_i f_i^{(0)} (e_i)_x^3\right\} &= \frac{\partial}{\partial y}\sum_i \left[A_i (e_i)_x^3 + B\left\{(e_i)_x^4 u_x + (e_i)_x^3 (e_i)_y u_y\right\}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{9}{4} B u_x\right)\end{aligned} \tag{C.9.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_i f_i^{(0)} (e_i)_x^2 (e_i)_y\right\} &= \frac{\partial}{\partial y}\sum_i \left[A_i (e_i)_x^2 (e_i)_y + B\left\{(e_i)_x^3 (e_i)_y u_x + (e_i)_x^2 (e_i)_y^2 u_y\right\}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{4} B u_y\right)\end{aligned} \tag{C.9.12}$$

となる。式(C.9.10)~(C.9.12)をまとめると、式(C.9.6)は次式のように変形することができる。

$$\Pi_{xx}^{(1)} = -\tau\left[-c_s^2\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\right) - 2c_s^2 u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{9}{4} B u_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{4} B u_y\right) + \right] \tag{C.9.13}$$

式(C.9.13)に式(C.5.9)を代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}\Pi_{xx}^{(1)} &= -\tau\left[-c_s^2\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\right) - 2c_s^2 u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{\rho}{3} u_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{\rho}{3} u_y\right)\right] \\ &= -\tau\left[\left(\frac{3}{4} - c_s^2\right)\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \left(\frac{1}{4} - c_s^2\right)\frac{\partial \rho u_y}{\partial y} - 2c_s^2 u_x \frac{\partial \rho}{\partial x}\right]\end{aligned} \tag{C.9.14}$$

式(C.9.2)の左辺第 4 項の運動量流束テンソルに式(C.9.5)を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}\Pi_{xy}^{(1)} &= -\tau \sum_i f_i^{(1)} (e_i)_x (e_i)_y \\ &= -\tau (e_i)_x (e_i)_y \sum_i \left[\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{f_i^{(0)} (e_i)_x\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{f_i^{(0)} (e_i)_y\right\}\right] \\ &= -\tau\left[\frac{\partial}{\partial t_0}\left\{\sum_i f_i^{(0)} (e_i)_x (e_i)_y\right\} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_i f_i^{(0)} (e_i)_x^2 (e_i)_y\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_i f_i^{(0)} (e_i)_x (e_i)_y^2\right\}\right] \\ &= -\tau\left[\frac{\partial \Pi_{xy}^{(0)}}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_i f_i^{(0)} (e_i)_x^2 (e_i)_y\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_i f_i^{(0)} (e_i)_x (e_i)_y^2\right\}\right]\end{aligned} \tag{C.9.15}$$

ここで1次のオーダーの運動量流束テンソルを用いると、式(C.9.15)の第1項は次式のように変形できる。

$$\frac{\partial \Pi_{xy}^{(0)}}{\partial t_0}=\frac{\partial \rho u_x u_y}{\partial t_0}=u_x\frac{\partial \rho u_y}{\partial t_0}+u_y\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_0}-u_x u_y\frac{\partial \rho}{\partial t_0} \tag{C.9.16}$$

質量保存式(C.7.5)と運動量保存式(C.8.19)を用いると、式(C.9.16)は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_{xy}^{(0)}}{\partial t_0}&=-u_x\left(\frac{\partial \rho u_y u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)-u_y\left(\frac{\partial \rho u_x u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_x u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}\right)+u_x u_y\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\right)\\&=-u_x\frac{\partial p}{\partial y}-u_y\frac{\partial p}{\partial x}+O(u^3)\end{aligned} \tag{C.9.17}$$

ここで、$p=c_s^2\rho$ という関係を用いると、式(C.9.17)は次式のような形となる。

$$\frac{\partial \Pi_{xy}^{(0)}}{\partial t_0}=-c_s^2 u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}-c_s^2 u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}+O(u^3) \tag{C.9.18}$$

また、平衡分布関数の式(C.3.3), (C.3.4)を用いると、式(C.9.15)の第 2 項、第 3 項は以下のように算出できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x^2(e_i)_y\right\}&=\frac{\partial}{\partial x}\sum_i\left[A_i(e_i)_x^2(e_i)_y+B\left\{(e_i)_x^3(e_i)_y u_x+(e_i)_x^2(e_i)_y^2 u_y\right\}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4}Bu_y\right)\end{aligned} \tag{C.9.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\sum_i f_i^{(0)}(e_i)_x(e_i)_y^2\right\}&=\frac{\partial}{\partial x}\sum_i\left[A_i(e_i)_x(e_i)_y^2+B\left\{(e_i)_x^2(e_i)_y^2 u_x+(e_i)_x(e_i)_y^3 u_y\right\}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4}Bu_x\right)\end{aligned} \tag{C.9.20}$$

式(C.9.18)~(C.9.20)をまとめると、式(C.9.15)は以下の形で整理できる。

$$\Pi_{xy}^{(1)}=-\tau\left[-c_s^2 u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}-c_s^2 u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4}Bu_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{4}\mathbf{B}\mathbf{u}_x\right)\right] \tag{C.9.21}$$

式(C.9.21)に式(C.5.9)を代入すると次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}\Pi_{xy}^{(1)}&=-\tau\left[-c_s^2 u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}-c_s^2 u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{\rho}{3}u_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{\rho}{3}u_x\right)\right]\\&=-\tau\left[-c_s^2 u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}-c_s^2 u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho}{4}u_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho}{4}u_x\right)\right]\end{aligned} \tag{C.9.22}$$

式(C.9.3), (C.9.14), (C.9.22)を式(C.9.2)に代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_1}+\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{3}{4}-c_s^2\right)\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\left(\frac{1}{4}-c_s^2\right)\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}+-2c_s^2 u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left\{-c_s^2 u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}-c_s^2 u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho}{4}u_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho}{4}\mathbf{u}_x\right)\right\}\right]\\&=0\end{aligned} \tag{C.9.23}$$

式(C.9.23)を変形すると次式のようになる。

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_1}=\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{3}{4}-c_s^2\right)\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}-2c_s^2 u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}\right]$$
$$+\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[-c_s^2 u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}-c_s^2 u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{1}{4}\left(\rho\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+\frac{1}{4}\left(\rho\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)\right] \quad (C.9.24)$$

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_1}=\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{4}-c_s^2\right)\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\rho\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)-2c_s^2 u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}\right]$$
$$+\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{4}-c_s^2\right)\left(u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}+u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+\frac{\rho}{4}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] \quad (C.9.25)$$

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_1}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-c_s^2\right)\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}+2u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{4}\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\rho\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-c_s^2\right)\left(u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}+u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\rho}{4}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] \quad (C.9.26)$$

ここで、以下に示すような変数の置換を行う。

$$\mu=\frac{\rho}{4}\left(\tau-\frac{1}{2}\right)=\frac{\rho(2\tau-1)}{8} \quad (C.9.27)$$

$$\lambda=\rho\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-c_s^2\right)=\frac{\rho(2\tau-1)(1-4c_s^2)}{4} \quad (C.9.28)$$

すると式(C.9.26)は次式のように整理できる。

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_1}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\lambda}{\rho}\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}+2u_x\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\lambda}{\rho}\left(u_x\frac{\partial \rho}{\partial y}+u_y\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] \quad (C.9.29)$$

密度勾配が十分小さいと仮定すると密度勾配の項がなくなり、式(C.9.29)は次式のように変形できる。

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t_1}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\lambda}{\rho}\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial \rho u_y}{\partial y}+\frac{\partial \rho u_z}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] \quad (C.9.30)$$

式(C.9.30)中のμを粘性係数、λを第2粘性係数とみなすと、式(C.9.30)は非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を示していることがわかる。