付録 B

テンソルの等方性に関する理論

（蔦原ら、「格子気体法・格子ボルツマン法の」（コロナ社）の付録より抜粋）

B.1. 直角座標でのテンソル

一般相対性理論においては、一般の曲線座標でのテンソルが基本的な役割を果たす。また、最近の数値流体力学においても、境界形状に適合した曲線座標を使用することが多く、ここでも曲線座標のテンソルが重要となってきている。

格子気体法あるいは格子 Boltzmann 法においては、現在のところ直角座標での定式化のみであるので、ここでは直角座標でのテンソルのみを考える。

いま、右手系の座標の直角座標 x_i $(i=1,2,3)$ とこれを回転して得られる座標 x'_i $(i=1,2,3)$ を考える。x_i 軸および x'_i 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}'_i$ $(i=1,2,3)$ とおくと、

$$\mathbf{e}_i = \alpha_{im}\mathbf{e}'_m \tag{B.1.1a}$$

および

$$\mathbf{e}'_m = \alpha_{im}\mathbf{e}_i \tag{B.1.1b}$$

と書くことができる。繰り返しの添え字については 1 から 3 まで加えることを意味する。式(B.1.1a)、(B.1.1b)より容易に

$$\alpha_{im} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_m \tag{B.1.2}$$

であることがわかる。ここで·はベクトルの内積を表している。いま

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \left(\alpha_{im}\mathbf{e}'_m\right)\cdot\left(\alpha_{jn}\mathbf{e}'_n\right) = \alpha_{im}\alpha_{jn}\mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}'_n \tag{B.1.3.a}$$

また

$$\mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}'_n = \left(\alpha_{im}\mathbf{e}_i\right)\cdot\left(\alpha_{jn}\mathbf{e}_j\right) = \alpha_{im}\alpha_{jn}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \tag{B.1.3.b}$$

とかける。当然

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}'_n = \delta_{mn} \tag{B.1.4}$$

であるから、式(B.1.3.a)に代入することにより

$$\alpha_{im}\alpha_{in}\delta_{mn} = \alpha_{in}\alpha_{jn} = \delta_{ij} \tag{B.1.5.a}$$

同様に、式(B.1.3.b)より

$$\alpha_{im}\alpha_{in} = \delta_{mn} \tag{B.1.5.b}$$

となる。

任意のベクトル $\mathbf{v}$ は $\mathbf{e}_i$ あるいは $\mathbf{e}'_m$ を用いて

$$\mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i = v'_m\mathbf{e}'_m \tag{B.1.6}$$

と表せる。ここで、v_i $(i=1,2,3)$ および v'_m $(m=1,2,3)$ はそれぞれ x_i、x'_i 座標での $\mathbf{v}$ の成分である。式(B.1.1.a)、(B.1.1.b)を式(B.1.6)に代入すると

$$v_i = \alpha_{im}v'_m$$

および

$$v'_m = \alpha_{im}v_i \tag{B.1.7}$$

が。得られる。式(b.1.7)はベクトルの成分の変換則である。

いま、2 階のテンソル $\mathbf{T}$ を二つのベクトルのディアド積(dyadic product)で定義する。

$$\mathbf{T} = t_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \qquad (i, j\text{について和をとらない}) \tag{B.1.8.a}$$

ここで、$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ はベクトルを並べて書いたものと解釈すればよい。**T** が座標軸のとり方によらない物理量であれば x'_i 座標において

$$\mathbf{T} = t'_{mn}\mathbf{e}'_m\mathbf{e}'_n \tag{B.1.8.b}$$

と表せる。式(B.1.1.a)、(B.1.1.b) を代入すると

$$\mathbf{T} = t_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = t'_{mn}\mathbf{e}'_m\mathbf{e}'_n = t_{ij}\alpha_{im}\alpha_{jm}\mathbf{e}'_m\mathbf{e}'_n = t'_{mn}\alpha_{im}\alpha_{jn}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \tag{B.1.9}$$

となり、各辺の項を比較することにより

$$t_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jm}t'_{mn}$$

および

$$t'_{mn} = \alpha_{im}\alpha_{jm}t_{ij} \tag{B.1.10}$$

が。得られる。式(B.1.10)は 2 階テンソル **T** の成分の変換則である。

1 階のテンソルはベクトルであり、0 階のテンソルはスカラーである。一般に、n 階のテンソルも

$$\mathbf{T} = A_iB_j\cdots H_p\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdots\mathbf{e}_p \tag{B.1.11}$$

とおき、**T** の成分 $t_{ij\cdots p}$ は $A_iB_j\cdots H_p$ と同じ変換則に従うので

$$t_{ij\cdots p} = \alpha_{ia}\alpha_{jb}\cdots\alpha_{ph}t'_{ab\cdots h}$$

および

$$t'_{ab\cdots h} = \alpha_{ia}\alpha_{jb}\cdots\alpha_{ph}t_{ij\cdots p} \tag{B.1.12}$$

となる。

B.2. 等方性テンソル

テンソル T の座標成分が、座標軸の選び方によらず一定値を持つ場合、つまり直角座標軸の任意の回転に対して不変であるようなテンソルを等方性テンソルという。

[0 階の等方性テンソル]

0 階の等方性テンソルはスカラーであり、これは座標の回転に対して不変である。例えば、ベクトルの内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は式(B.1.7)から

$$a_ib_i = a'_mb'_m = \alpha_{im}a_i\beta_{jm}b_j = \alpha_{im}\beta_{jm}a_ib_j = \delta_{ij}a_ib_j = a_ib_j \tag{B.2.1}$$

となり変化しないことがわかる。つまり，スカラーは等方的である。

[1 階の等方性テンソル]

1 階のテンソルはベクトルであり、式(B.1.6)と式(B.1.7)より、$\mathbf{e}_i$ として $\mathbf{e}_1$ を入れ x_2 軸あるいは x_3 軸周りに 180° 回転させる。すると、$\alpha_{1m} = -\delta_{1m}$ となるから

$$v_1 = \alpha_{1m}v'_m = -v'_1$$

が得られるが、等方性の条件より $v_1 = v'_1$ でなければならない。これより $v_1 = 0$ でなければならない。同様にして $v_2 = v_3 = 0$ が得られ、1 階の等方性テンソル（ベクトル）は 0 ベクトルであることがわかる。

[2 階の等方性テンソル]

2 階の等方性テンソルの成分は、任意の座標軸の回転に対して

$$t_{ij} = t'_{ij} \tag{B.2.2}$$
が成り立たなければならない。式(B.1.8a)の$\mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}_j$それぞれに$\mathbf{e}_1$を入れ、x_3軸の周りに 90° 回転し$\mathbf{e}'_1 \to \mathbf{e}_2$とする。つまり、$x_3$軸の正方向に向かって時計回りに 90° 座標軸を回転させると式(A.1.10)におけるα_{1m}、α_{1n}はそれぞれ$-\delta_{m2}$、$-\delta_{n2}$となるので、
$$t_{11} = \alpha_{1m}\alpha_{1n}t'_{mn} = t'_{22} \tag{B.2.3}$$
を得る。式(B.2.2)から$t_{22} = t'_{22}$でなければならない。従って、
$$t_{11} = t_{22} \tag{B.2.4}$$
を得る。同様に、
$$t_{11} = t_{22} = t_{33} \tag{B.2.5}$$
が得られる。

つぎに、$\mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}_j$に$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_1$を入れ、x_1軸周りに 180° 回転し$\mathbf{e}'_1 \to \mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}'_2 \to \mathbf{e}_2$とすると、$\alpha_{1m}$、$\alpha_{2n}$はそれぞれ$\delta_{m1}$、$-\delta_{n2}$となるので
$$t_{12} = \alpha_{1m}\alpha_{2n}t'_{mn} = -t'_{12}$$
が得られるが、等方性の条件(B.2.2)から$t_{12} = 0$でなければならない。同様にして
$$t_{ij}(i \neq j) = 0 \tag{B.2.6}$$
が示せる。これらのことから等方性テンソル$\mathbf{t}_{ij}$は
$$t_{ij} = c\delta_{ij} \qquad (c：定数) \tag{B.2.7}$$
でなければならない。逆にt_{ij}は任意の回転に対し、式(B.1.10)、(B.1.5b)より
$$t'_{mn} = c\alpha_{im}\alpha_{jn}\delta_{ij} = c\alpha_{im}\alpha_{in} = c\delta_{mn} \tag{B.2.8}$$
となり等方性の条件(B.2.2)を満たしている。(i,j,m,n はダミーの添え字である。)

[3 階の等方性テンソル]

3 階のテンソル$\mathbf{T}$を
$$\mathbf{T} = t_{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k = t'_{mnp}\mathbf{e}'_m\mathbf{e}'_n\mathbf{e}'_p \tag{B.2.9}$$
と表す。$\mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}_j$、$\mathbf{e}_k$のそれぞれに$\mathbf{e}_1$を入れ、x_3軸あるいはx_2軸周りに 180° 回転させ、$\mathbf{e}'_1 \to -\mathbf{e}_1$とすると、$\alpha_{1m}$、$\alpha_{1n}$、$\alpha_{1p}$はぞれぞれ$-\delta_{m1}$、$-\delta_{n1}$、$-\delta_{p1}$となり
$$t_{111} = \alpha_{1m}\alpha_{1n}\alpha_{1p}t'_{mnp} = -t'_{111}$$
となり、$t_{111} = -t'_{111}$が得られる(偶数階のテンソルでは右辺の負号は現れない)。等方性の条件$t_{111} = t'_{111}$から$t_{111} = 0$となる。同様にして
$$t_{111} = t_{222} = t_{333} = 0 \tag{B.2.10}$$
が得られる。

また、同様にして$\mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}_j$、$\mathbf{e}_k$にそれぞれに$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}_3$を入れ、x_2軸の周りにx_2軸の正方向に向かって、反時計回りに 90° 回転させると$\mathbf{e}'_1 \to -\mathbf{e}_3$、$\mathbf{e}'_2 \to -\mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}'_3 \to -\mathbf{e}_1$となり
$$t_{123} = -t'_{321}$$
が得られるが、等方性の条件から$t_{123} = -t_{321}$でなければならない。同様にして
$$t_{132} = -t_{312}$$
$$t_{213} = -t_{231}$$
が得られる。

上記の回転をx_2軸周りに 90° 、そのあとx'_3軸の周りに 90° 回転させ、$\mathbf{e}'_1 \to \mathbf{e}_2$、$\mathbf{e}'_2 \to \mathbf{e}_3$、$\mathbf{e}'_3 \to \mathbf{e}_1$とすると、$t_{123} = t_{231}$となり、同様に

$$t_{123} = t_{231} = t_{312}$$
を得る。

一方、$\mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}_j$、$\mathbf{e}_k$ にそれぞれに $\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_1$、$\mathbf{e}_2$ を入れ、x3 軸の周りに 180° 回転させると
$$t_{112} = -t'_{112}$$
となるが、等方性の条件から $t_{112} = 0$ を得る。同様に $t_{121} = t_{211} = 0$ である。同様にして、t_{ijk} の添え字のうち二つが同じ場合は、その成分は 0 でなければならないことが導かれる。これらのことから、3 階の等方性テンソルは
$$t_{ijk} = c\varepsilon_{ijk} \qquad (c：定数) \tag{B.2.11}$$
ただし
$$\varepsilon_{ijk} \text{ は} \begin{cases} (i,j,k)\text{が}(1,2,3)\text{の偶置換なら} & 1 \\ (i,j,k)\text{が}(1,2,3)\text{の奇置換なら} & -1 \\ \text{それ以外なら} & 0 \end{cases}$$
でなければならない。

逆に、t_{ijk} は任意の回転に対し
$$t'_{mnp} = c\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kp}\varepsilon_{ijk} = c\varepsilon_{mnp}$$
となる。この式は次のようにして確かめられる。

まず α_{ij} からなる 3×3 の行列式を考える。
$$\det(\alpha_{ij}) = \alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}\varepsilon_{ijk} \tag{B.2.12}$$
である。一方、式(B.1.5)を用いると
$$\det(\alpha_{ij})\det(\alpha_{ij})^T = 1$$
であることが確かめられる。また、定義から $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ であるから
$$(\alpha_{ij})^T = (\alpha_{ji})$$
$$\det(\alpha_{ij}) = \pm 1 \tag{B.2.13}$$
となる。行列式の性質から一つの行の成分を他の行の成分で入れ換えると 0 になる。例えば、
$$\alpha_{1i}\alpha_{1j}\alpha_{3k}\varepsilon_{ijk} = 0$$
また、任意の二つの行の成分を互いに入れ換えると符号が変わる。例えば、
$$\alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}\varepsilon_{ijk} = -\alpha_{2i}\alpha_{1j}\alpha_{3k}\varepsilon_{ijk}$$
であり、2 回入れ換えると同符号であるから、例えば
$$\alpha_{1i}\alpha_{2j}\alpha_{3k}\varepsilon_{ijk} = \alpha_{3i}\alpha_{1j}\alpha_{2k}\varepsilon_{ijk}$$
これらの性質から
$$\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kp}\varepsilon_{ijk} = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{pk}\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{mnp} \tag{B.2.14}$$
であることがわかる。符合は i=m=1、j=n=2、k=p=3 として定めている。

[4 階の等方性テンソル]

4 階のテンソル $\mathbf{T}$ を
$$\mathbf{T} = t_{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l = t'_{mnpq}\mathbf{e}'_m\mathbf{e}'_n\mathbf{e}'_p\mathbf{e}'_q \tag{B.2.15}$$
と表す。これまでと同様の手順であるが $\mathbf{e}_i$、$\mathbf{e}_j$、$\mathbf{e}_k$、$\mathbf{e}_l$ に $\mathbf{e}_1$ を入れて x_3 軸周りに 90° 回転し $\mathbf{e}'_1 \to \mathbf{e}_2$ とすると、α_{1m}、α_{1n}、α_{1p}、α_{1q} は、それぞれ $-\delta_{m2}$、$-\delta_{n2}$、δ_{p2}、δ_{q2} となり

$$t_{1111}=\alpha_{1m}\alpha_{1n}\alpha_{1p}\alpha_{1q}t_{mnpq}=t_{2222} \tag{B.2.16}$$

から$t_{1111}=t_{2222}$が得られ、同様にして

$$t_{1111}=t_{2222}=t_{3333} \tag{B.2.17}$$

となる。また、e_i、e_j、e_k、e_lにe_1、e_1、e_2、e_2を入れ、x_3軸周りの90° 回転により$e'_1\to e_2$、$e'_2\to e_1$とすることにより、α_{1m}、α_{1n}、α_{2p}、α_{2q}は、それぞれ$-\delta_{m2}$、$-\delta_{n2}$、δ_{p1}、δ_{q1}となり

$$t_{1122}=t_{2211} \tag{B.2.18}$$

となる。同様にしてt_{ijkl}の成分のうち i=j、k=l、すなわちt_{iikk}については全て等しい値となることが示せる。また i=k、j=l、すなわちt_{ijij}についてもすべて等しい値を持つ。同様に i=l、j=k、すなわちt_{ijji}についても同じ事が示せる。しかし、一般的に$t_{iijj}\neq t_{ijji}\neq t_{ijij}$である。

一方、上記以外の成分はすべて 0 でなければならない。これは例えば、e_1、e_1、e_1、e_2をとり、式(B.2.16)を求めたときと同じ回転を行うと

$$t_{1112}=-t'_{2221}$$

となり、さらに x1 軸周りに 180° 回転すると

$$t_{1112}=t'_{2221}$$

となる。これより$t_{1112}=0$であり、その他の成分も同様にして確かめることができる。

ここで 4 階テンソルt_{ijkl}の 0 でない成分のうち、i、j、k、l がすべて等しいものと、2 つずつ方向が等しいものとの大きさを比較する。式(A.2.16)を導く手順で、ここでは x_3 軸の正方向に向かって時計回りに 45° 回転すると$\alpha_{11}=1/\sqrt{2}$、$\alpha_{12}=-1/\sqrt{2}$、$\alpha_{13}=0$であるので

$$\begin{aligned}t_{1111}&=\alpha_{1m}\alpha_{1n}\alpha_{1p}\alpha_{1q}t'_{mnpq}\\&=\frac{1}{4}\left(t'_{1111}+t'_{2222}+t'_{1122}+t'_{1212}+t'_{1221}+t'_{2211}+t'_{2121}+t'_{2112}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(t'_{1111}+t'_{1122}+t'_{1212}+t'_{1221}\right)\end{aligned} \tag{B.2.18}$$

となる。ここで、2 番目の統合を導く際、右辺に現れる成分のうち 0 のものは省いている。また 3 番目の等号では

$$t'_{1111}=t'_{2222}、\ t'_{1122}=t'_{2211}、\ t'_{1212}=t'_{2121}、\ t'_{1221}=t'_{2112}$$

を使った。等方性の条件から

$$t'_{1111}=\frac{1}{2}\left(t'_{1111}+t'_{1122}+t'_{1212}+t'_{1221}\right)$$

となり、

$$t'_{1111}=t'_{1111}+t'_{1122}+t'_{1212}+t'_{1221}$$

を得る。

これらのことから、4 階の等方性テンソルは

$$t_{ijkl}=a\delta_{ij}\delta_{kl}+b\delta_{ik}\delta_{jl}+c\delta_{il}\delta_{jk}\qquad (a、b、c：定数) \tag{B.2.19}$$

と表せる。

任意の回転に対し$a\delta_{ij}\delta_{kl}$は式(B.1.10)より

$$a\delta'_{mn}\delta'_{pq}=a\alpha_{im}\alpha_{jn}\delta'_{ij}\alpha_{kp}\alpha_{lq}\delta'_{kl}=a\alpha_{im}\alpha_{in}\alpha_{kp}\alpha_{kq}=a\delta_{mn}\delta_{pq}$$

となり、等方的であることが分かる。