

非線形計画問題の双対性を用いた CT 画像 再構成に関する研究

1 はじめに

CT (Computed Tomography) 装置が開発されてから約 30 年、今や世界中に普及し、画像診断に大きく貢献している。特に、この CT 技術は、臨床医療分野において、必要不可欠な診断手法として広く利用されており、種々の改良が加えられてきた。近年、CT 装置は高い空間的な分解能や高い時間的な分解能などを目指して発展を続けている。例えば、放射線医学総合研究所で開発されている 4 次元 CT などがある。この研究がうまく進めば病気の初期発見や治療に大きな役割を果たすと考えられる。

CT とは、X 線や γ 線などを用いて対象物の断面像を撮影する装置のことで、透過型 CT (Transmission CT, TCT) と放射型 CT (Emission CT, ECT) とに大別される。X 線 CT などの透過型 CT は、対象物の外部から放射線を照射し、対象物を透過してくる放射線強度を測定することにより、対象物内部の放射線吸収率分布を画像化する技術である。SPECT (Single Photon ECT) や PET (Positron Emission Tomography) などの放射型 CT は、患者に放射線核種を投与することにより体内から放出される γ 線光子を測定し、その測定値から放射線核種の体内分布を画像化する技術である。X 線 CT などの透過型 CT では、対象物の形態や構造などを表すことができる。また、放射線 CT では、臓器や組織における血流や代謝などの機能を画像として表すことができる。

CT 装置の設計には、大まかに hardware の設計と software の設計の 2 つが含まれている。hardware の設計には X 線の発生器や検出器などの設計が含まれ、software の設計には画像再構成や画像表示などが含まれる。高い空間分解能や高い時間分解能などを有する高性能の CT 装置の開発には、検出器の感度の向上などの hardware の設計も必要であるが、他にもより正確な画像再構成法などの software の開発も必要であ

る。本研究では、CT 画像再構成について研究を行った。特に、投影データ方向数が少ない場合や投影データに雑音が含まれている場合に対して、非線形計画問題の双対性を用いて画像再構成を行った。

CT 画像再構成法には、主に解析的手法と逐次近似法がある。解析的手法では、投影データの方向数が十分で雑音が少ない通常の X 線 CT の場合、より正確な画像を再構成することができるが、造影血管の少数方向投影データや雑音が含まれている PET の投影データなどに対しては、十分な画質の画像を再構成することが困難である。そのため、近年では、これらの問題を解決する様々な逐次近似法が研究されている。

逐次近似法において、一番重要なのは解を求める評価関数の設定である。この評価関数は、放射線の性質や対象物体の属性などを用いることによって設定することができる。たとえば、放射型 CT の場合、投影データがポアソン分布に従って揺らぐ性質を用いて評価関数を設定する。このことによって、雑音が含まれている投影データに対して、高画質の画像を得ることができる。また、少数方向投影データからの血管の画像再構成には、疎な解を正確に求めることができる L_1 ノルムを用いる。このことによって、従来の手法と比較して細かい血管をより正確に再構成することができる。したがって、逐次近似法を用いた CT 画像再構成問題は、この評価関数がある制約条件のもとで最小化する問題に定式化される。

逐次近似法において、二番目に重要なのはこの最小化問題の解を求める反復法の構成である。反復法には、何十回で収束する方法もあれば、わずか十回以内で収束する方法もある。また、真の解へ収束する方法もあれば、真の解と異なるリミットサイクル (limit cycle) へ収束する方法もある。したがって、逐次近似法において、望ましい反復法の条件として、(1) 最適解を選び出す評価関数を正確に最小化すること、(2) 真の解

へ速く収束する反復法を構成すること, (3) 非負条件の取り扱いが容易であること, などが挙げられる.

本研究では, CT 画像再構成の中で, 特に重要だと考えられる次の2つの問題で CT 画像再構成を定式化し, それを非線形計画問題の双対性を用いて解を求めた.

(1) 少数方向投影データからの3次元血管画像再構成

血管の3次元映像は血管病変の診断や治療において有用な情報を与える. この臨床における重要性から様々な方法が提案されている [1][2] が, いまだに優れた画像再構成法は存在しない. 3次元映像化法として代表的なパイプライン法 [1] では, 血管造影により2方向から撮影を行い, それぞれの画像上での血管の位置座標から3次元の位置座標を推定する. しかし, この方法では画像と直交する平面上に血管が存在する場合, 血管の3次元的位置を推定できないという問題が生じる. また, 造影剤を投与できる間隔には制限があるため, 多方向から撮影を行うことができず血管の重複部分や細かい血管の誤配置や誤接続の可能があり, 正確な血管の3次元形状の抽出は困難である. CT 装置を用いて十分な投影データから再構成を行えば, 空間分解能の高い画像を得ることは可能であるが, 時間的な幅を持たせた撮影を行うことが難しくなり, 時間的な分解能の高い画像を得ることができない. そこで, 本研究では, 少数方向から撮影された血管投影画像から3次元血管画像再構成を行うことを考えた. この問題を解決するため, 本研究では, 造影血管の疎な性質や連続性などの性質を評価関数に入れて画像再構成を行った. 提案手法の一番目の特徴は, 3次元血管画像再構成に評価関数として L_1 ノルムと Gibbs Smoothing Prior を用いたペナルティ関数を用いることである. 提案手法の二番目の特徴は, 非線形計画問題の双対性を用いて解を求める反復法を構成したことである. このことによって, 制約条件付きの高次元最小化問題の解を制約条件なしの低次元最大化問題の解を求めることによって容易に求めることができる. 実験の結果, 提案手法では $256 \times 256 \times 256$ 画素の3次元血管画像を4方向や8方向の投影データから正確に再構成することができた.

(2) 統計的手法による PET 画像再構成

PET の画像再構成は X 線 CT と比較して, 統計雑音・ γ 線吸収・散乱線・検出器のぼけ特性などの画質劣化要因があるため著しく難しい. そこで, これらの

影響を考慮することが容易な統計的手法を用いた反復法による画像再構成が研究されている. 反復法はフィルタ補正逆投影法に代表される解析的手法と比較して膨大な計算量を必要とするため, 長年実用化が困難であると考えられてきた. たとえば, ML-EM 法など既存の反復法で画像再構成を行うと, 大まかに見積もって収束するのに数十回程度の反復が必要である. しかし, 1990 年以降のこの分野における研究の進歩は目覚しく, 十回以内の反復でほぼ収束するブロック反復 (block iterative) [3]-[6] 法などの高速な反復法が出現してきた. ブロック反復法は, 雑音を含まない矛盾がない投影データに対しては, 一般にその真の解への収束性が保証されるが, 雑音を含む矛盾がある投影データに対しては, 真の解と異なるリミットサイクルと呼ばれる周期解に収束する問題点がある. そこで, リミットサイクルを回避し, 真の解へ高速に収束する反復法の開発が重要な研究課題とされている [7][8]. 本研究では, リミットサイクルを回避する反復法を開発するため, まず新しいスラック (slack) 変数を導入して PET 画像再構成問題を再定式化した. 次に, 非線形計画問題の双対性を用いて反復法を構成した. 実験の結果, 提案手法が従来の手法と比較して高画質の再構成画像を得ることができた.

2 非線形計画問題の双対性の理論

本論文において, CT 画像再構成問題は非負条件と線形等式の制約条件のもとで狭義凸関数を最小化する非線形計画問題に定式化される. そのため, まず次式の非線形計画問題を考える.

$$\text{minimize } F(\vec{x}) \text{ subject to } \vec{x} \geq 0, A\vec{x} = \vec{p} \quad (1)$$

ここで, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in R^n$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)^\top \in R^m$, $m \times n$ 係数行列 $A = \{a_{ij}\}$ は \vec{x} と \vec{p} を関係づける線形投影演算で, $m \leq n$ とする. また, $F(\vec{x})$ は各変数において分離可能で, 非負空間 $\{\vec{x} \in R^n | \vec{x} \geq 0\}$ において微分可能な狭義凸関数とする. 式 (1) において, 非負条件を関数 $F(\vec{x})$ の定義域に入れると, 関数 $F(\vec{x})$ の定義域は次式のようになる.

$$\text{dom}F = \{\vec{x} \in R^n | \vec{x} \geq 0\}$$

したがって, 式 (1) の計画問題は次式のようになる.

$$\min_{\vec{x} \in \text{dom}F} F(\vec{x}) \text{ subject to } A\vec{x} = \vec{p} \quad (2)$$

式 (2) の解は、非線形計画問題の双対性を用いることによって、容易に求められる。ここでは、その手順について簡単に述べる。非線形計画法では、式 (2) の制約条件付き最小化問題を、ラグランジュ双対性を用いることによって、次式の制約条件なしの最大化問題に関係付けることができる [9].

$$\text{maximize } D(\vec{\lambda}) \quad \text{subject to } \vec{\lambda} \in \text{dom}D \quad (3)$$

式 (3) の最大化問題を式 (2) の双対問題と呼ぶ。式 (3) において、 $\vec{\lambda}$ はラグランジュ変数、 $D(\vec{\lambda})$ は双対関数、 $\text{dom}D$ は双対関数の定義域で、次式のように定義される [9].

$$D(\vec{\lambda}) = \min_{\vec{x} \in \text{dom}F} F_L(\vec{x}, \vec{\lambda}) \quad (4)$$

$$\text{dom}D = \{\vec{\lambda} \mid \min_{\vec{x} \in \text{dom}F} F_L(\vec{x}, \vec{\lambda}) > -\infty\} \quad (5)$$

ただし、ラグランジュ関数 $F_L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ は次のように定義される。

$$F_L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = F(\vec{x}) - \vec{\lambda}^\top (A\vec{x} - \vec{p}) \quad (6)$$

また、式 (3) の双対問題の解 $\vec{\lambda}^*$ と式 (2) の主問題の解 \vec{x}^* は、関数 $F(\vec{x})$ が狭義凸関数の場合、次の関係がある。

$$\vec{x}^* = \arg \min_{\vec{x} \in \text{dom}F} F_L(\vec{x}, \vec{\lambda}^*) \quad (7)$$

ただし、 \arg は argument の意味で、 $\min_{\vec{x} \in \text{dom}F} F_L(\vec{x}, \vec{\lambda}^*)$ を満足する \vec{x} の値を求めることである。したがって、式 (1) の主問題の解 \vec{x}^* を求めるアルゴリズムは以下のようなになる。

[Step 1] 式 (3) の双対問題の解 $\vec{\lambda}^*$ を座標降下法を用いて求める。

[Step 2] 式 (7) の解の関係を用いて $\vec{\lambda}^*$ から \vec{x}^* を求める。

[Step 1] において、座標降下法を用いて解を求めるということは、変数 $\vec{\lambda}$ の各成分を評価関数 $D(\vec{\lambda})$ が最大になるように一つずつ更新することである。

3 少数方向投影データからの3次元血管画像再構成

近年、少数方向投影データからの3次元血管映像法には、主にパイプレン法や MAP-EM(Maximum A Posteriori) などを用いた逐次近似法などが研究されて

いる [1][2]. パイプレン法では、血管造影により2方向から撮影を行い、それぞれの画像上での血管の位置座標から3次元の位置座標を推定する。しかし、この方法では、画像と直交する平面上に血管が存在する場合、血管の3次元的位置を推定できないという問題が生じる。また、MAP-EMを用いた逐次近似法では、血管を5方向などで再構成することができるが、収束が遅い問題点がある。また、MAP-EMに新たな情報を組み込んだ MAP-EM 高速化法では、収束は速くなるが、造影血管の性質などを評価関数に組み込んでいない。造影血管が持つ一番重要な性質は、対象物体が疎物体であることである。ここで、疎物体とは、物体のほとんどの部分の画素値がゼロで、他の少ない部分のみで画素値がゼロでないものを指す。

逐次近似法で少数方向投影データから3次元血管画像の再構成を行う場合、望ましい反復法の条件として、(1) 造影血管の疎な性質や連続性などの事前情報を評価関数に取り込むこと、(2) 高速な反復法を構成すること、(3) 非負条件の取り扱いが容易であること、(4) 実装が容易であること、などが挙げられる。

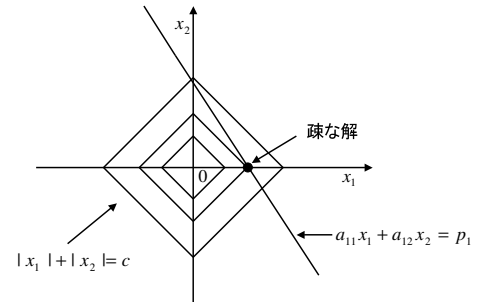


図 3.1 L_1 ノルムと疎な解

本研究では、上述の望ましい条件をすべて満足する新しい血管画像再構成法を提案する。提案手法では、まず解を求める評価関数として L_1 ノルムを用いる。その理由は、図 3.1 に示したように、 L_1 ノルムの等値線は同心状の四角形になるため、疎な解を正確に選び出すことができるからである。したがって、画像再構成問題は次式のように定式化できる。

$$\text{minimize } \|\vec{x}\|_1 \quad \text{subject to } \vec{x} \geq 0, A\vec{x} = \vec{p} \quad (8)$$

ここで、 $\vec{x} \in R^n$ は対象画像、 $\vec{p} \in R^m$ は投影データ、 $m \times n$ 係数行列 $A = \{a_{ij}\}$ は対象画像と投影データに関係づける線形投影演算、 $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ は L_1 ノルムである。本研究では、少数方向投影データから画

像再構成を行うため $m \ll n$ と仮定し、 \vec{a}_i と \vec{c}_j で行列 A を構成する i 番目の行ベクトルと j 番目の列ベクトルを表す。

式 (8) の最小化問題において、 L_1 ノルムは狭義凸関数でないため、非線形計画問題の双対性を用いて解を容易に求めることが困難である。そこで、評価関数が狭義凸関数である次の2つの方法（提案手法1と提案手法2）を考えた。また、血管の連続性を考慮して、提案手法3ではGibbs Smoothing Priorを用いたペナルティ関数と L_1 ノルムを用いて画像再構成を行った。

3.1 提案手法1

非線形計画問題の双対性を用いて式 (8) の問題の解を求めるため、本手法では評価関数として、まず狭義凸関数で等値線が L_1 ノルムの等値線に近づく $\rho \approx 1$ の L_ρ ノルムを用いた次式の最小化問題を考える。

$$\text{minimize } F(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_\rho^\rho / \rho \quad \text{subject to } A\vec{x} = \vec{p} \quad (9)$$

ただし、 $\|\vec{x}\|_\rho^\rho / \rho = \sum_{j=1}^n (|x_j|^\rho / \rho)$ である。

式 (4) の双対関数の定義によって、式 (9) の双対問題は次式のようにになる。

$$\text{maximize } D(\vec{\lambda}) = \vec{p}^\top \vec{\lambda} - \|A^\top \vec{\lambda}\|_\eta^\eta / \eta \quad (10)$$

ただし、 $\eta = \rho / (\rho - 1)$ である。また、式 (9) の主問題の解 \vec{x}^* と式 (10) 双対問題の解 $\vec{\lambda}^*$ の関係は、式 (7) によって次のようになる。

$$\vec{x}^* = (g'(\vec{c}_1^\top \lambda^*), \dots, g'(\vec{c}_n^\top \lambda^*))^\top \quad (11)$$

ここで、 $g'(t) = \text{sign}(t) |t|^{\eta-1}$ である。

本手法では、座標降下法で式 (10) の双対問題の解 $\vec{\lambda}^*$ を求めた後、それを式 (11) に代入することによって、式 (9) の主問題の解 \vec{x}^* を求めた。この手法は、主問題の空間で Row-Action 型反復法になる。

3.2 提案手法2

提案手法1は、最適解を選び出す評価関数として ρ が1に近づく L_ρ ノルムを用いるため、次のような問題点がある。(1) 疎な解を近似的にしか求められない。(2) 反復式が複雑で、計算時間が従来の Row-Action 型反復法である ART 法の2倍程度かかる。これらの

問題点を解決するため、まず次のような最小化問題を考える。

$$\text{minimize } \frac{\epsilon}{2} \|\vec{x}\|_2^2 + \|\vec{x}\|_1 \quad \text{subject to } \vec{x} \geq 0, A\vec{x} = \vec{p} \quad (12)$$

参考文献 [10] では、式 (12) に最適解がある場合、ある $\bar{\epsilon}$ が存在し $\epsilon \in [0, \bar{\epsilon}]$ に対して、式 (12) と式 (8) は同じ解を持つことを示した。

式 (4) の双対関数の定義によって、式 (12) の双対問題は次のようになる。

$$\text{maximize } D(\vec{\lambda}) = \vec{p}^\top \vec{\lambda} - G(A^\top \vec{\lambda}) \quad (13)$$

ただし、 $G(\vec{x})$ は次のように定義される。

$$G(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n g(x_j), \quad g(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{2\epsilon} & t \geq 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases} \quad (14)$$

また、式 (12) の主問題の解 \vec{x}^* と式 (13) 双対問題の解 $\vec{\lambda}^*$ の関係は、式 (7) によって、次のようになる。

$$\vec{x}^* = (g'(\vec{c}_1^\top \lambda^*), \dots, g'(\vec{c}_n^\top \lambda^*))^\top \quad (15)$$

ここで、 $g'(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{\epsilon} & t \geq 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$ である。

この手法において、解を求める手順は提案手法1と同じである。ただし、反復式が ART 法のように簡単になるため、1回反復あたりの計算時間が提案手法1より短くなる。

3.3 提案手法3

式 (8) の最小化問題に基づいて画像再構成を行う提案手法1と2では、造影血管の疎な性質を考慮して画像再構成を行うため、疎な解を選び出すことができた。しかし、これらの手法では、血液が血管の中を連続的に流れている血管の連続性を考慮していない。そこで、本研究では、血管の連続性を評価することができる Gibbs Smoothing Prior を用いたペナルティ関数 $U(\vec{x})$ を L_1 ノルムに加えることによって、画像再構成を行う。

$$\text{minimize } \|\vec{x}\|_1 + \beta U(\vec{x}) \quad (16)$$

$$\text{subject to } \vec{x} \geq 0, A\vec{x} = \vec{p}$$

ここで、 β はペナルティ関数 $U(\vec{x})$ の重みであり、 $U(\vec{x})$ は次式のように定義される [11]。

$$U(\vec{x}) = \sum_{l=1}^3 \sum_{(j,j') \in C_l} \omega_{(j,j')} v(x_j - x_{j'}) \quad (17)$$

ただし、 $v(\cdot)$ はクリークポテンシャル (clique potential), $\omega_{(j,j')}$ は隣接画素 (j, j') における重みである。また、 $C_l (l = 1, 2, 3)$ はそれぞれ、 l 次近傍クリークの集合である。実験では、次式のクリークポテンシャルを用いる。

$$v(r) = \delta^2 (|r/\delta| - \log(1 + |r/\delta|)) \quad (18)$$

このクリークポテンシャルは、隣接画素 $(x_j, x_{j'})$ 間の平滑化を行うか行わないかの決定を濃度差のしきい値 δ を導入して行い、エッジを保存しながら濃度が平坦な部分のみを平滑化する効果があるため、血管の連続性を表現することができる。

提案手法 2 と同じように、非線形計画問題の双対性を用いて式 (16) の解を求めるため、まず評価関数に 2 次摂動関数を加える。次に、双対問題を簡単に求めるため、新しいスラック変数 \vec{z} を導入する。したがって、画像再構成問題は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize } F(\vec{x}, \vec{z}) \\ & \text{subject to } \vec{x} \geq 0, A\vec{x} = \vec{p}, B\vec{x} = \vec{z} \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、 $\vec{z} = (z_1, \dots, z_M)^\top$ は式 (18) における隣接画素間の差 $x_j - x_{j'}$ を表す $M \times n$ 行列を $B = \{b_{lj}\}$ として $B\vec{x} = \vec{z}$ を満足するスラック変数であり、評価関数 $F(\vec{x}, \vec{z})$ は次のように定義される。

$$F(\vec{x}, \vec{z}) = \sum_{j=1}^n q(x_j) + \sum_{l=1}^M \beta_l v(z_l) \quad (20)$$

ここで、 $q(t) = \frac{\epsilon}{2}t^2 + t$ であり、 $\beta_l = \beta\omega_{(j,j')}$ である。

式 (4) の双対関数の定義によって、式 (19) の双対問題は次のようになる。

$$\text{maximize } D(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \vec{p}^\top \vec{\lambda} - G(A^\top \vec{\lambda} + B^\top \vec{\mu}) + J(\vec{\mu}) \quad (21)$$

ただし、 $G(\vec{x})$ と $J(\vec{\mu})$ は次のように定義される。

$$G(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n g(x_j), \quad g(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{2\epsilon} & t \geq 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases} \quad (22)$$

$$J(\vec{\mu}) = \sum_{l=1}^M \delta^2 \left[\left| \frac{\mu_l}{\delta} \right| + \beta_l \ln(\beta_l - \left| \frac{\mu_l}{\delta} \right|) \right] \quad (23)$$

また、式 (19) の主問題の解 (\vec{x}^*, \vec{z}^*) と式 (21) の双対問題の解 $(\vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)$ の関係は、式 (7) によって、次のよう

になる。

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} g'(\vec{c}_1^\top \vec{\lambda}^* + \vec{d}_1^\top \vec{\mu}^*) \\ \vdots \\ g'(\vec{c}_n^\top \vec{\lambda}^* + \vec{d}_n^\top \vec{\mu}^*) \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\vec{z}^* = \left(\frac{-\mu_1^*}{\beta_1 + \left| \frac{\mu_1^*}{\delta} \right|}, \dots, \frac{-\mu_M^*}{\beta_M + \left| \frac{\mu_M^*}{\delta} \right|} \right)^\top \quad (25)$$

ここで、 \vec{d}_j は行列 B を構成する j 番目の列ベクトルで、 $g'(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{\epsilon} & t \geq 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$ である。

この手法において、パラメータ β と δ の値は経験的に設定する。また、解を求める手順は提案手法 1 と同じ手順で行う。

3.4 実験

3.4.1 シミュレーション実験

まず、提案手法の有効性を検証するため、図 3.2 に示す 3 次元血管ファントムに対してシミュレーション実験を行った。三次元血管画像のサイズは $256 \times 256 \times 256$ 画素である。

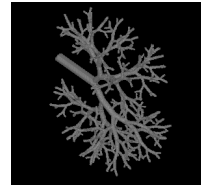


図 3.2 実験に用いた 3 次元血管ファントム

この実験において、まず ART 法および提案手法 1 と提案手法 2 で再構成した画像を比較するとともに、各手法の 1 回反復当たりの計算時間を比較する。次に、提案手法 2 と提案手法 3 で再構成した画像を比較する。

ART法	提案手法1	提案手法2
90s	200s	96s

表 3.1 各手法の 1 回反復あたりの計算時間

表 3.1 に、各手法における 1 回反復当たりの計算時間を示す。図 3.3 に、投影データ方向数が 8 の場合の場合、ART 法および提案手法 1 と提案手法 2 で再構成



図 3.3 8 方向の投影データからの再構成画像

した画像を示す。提案手法 2 が短時間で、提案手法 1 と同じ高画質の画像を再構成できることが分かる。図 3.4 に、投影データ方向数が 4 の場合、提案手法 2 と提案手法 3 で再構成した画像を示す。投影データの方向数が少ない場合、提案手法 3 が提案手法 2 より正確に造影血管を再構成できることが分かる。

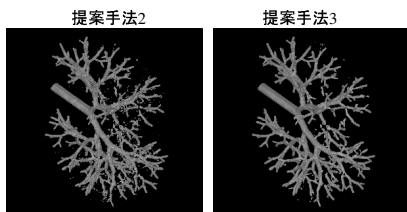


図 3.4 4 方向の投影データからの再構成画像

3.4.2 Rat-Lung 実データへの適用

次に、Marquette 大学で開発されたマイクロ CT 装置で撮影した Rat-Lung 投影データに対して、画像再構成を行った。再構成画像のサイズは $479 \times 479 \times 479$ 画素で、一画素のサイズは $0.097(\text{mm}) \times 0.097(\text{mm}) \times 0.097(\text{mm})$ である。また、1 方向のデータ収集時間は 1s である。提案手法 1 と提案手法 2 で再構成した画像はほぼ同じであるため、図 3.5 に ART 法および提案手法 2 と提案手法 3 で再構成した画像を示す。

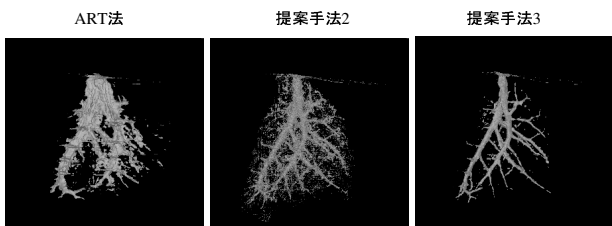


図 3.5 9 方向の投影データからの再構成画像

4 統計的手法による高速な PET 画像再構成

近年、PET の画像再構成に最ゆう (Maximum Likelihood, ML) 推定や事後確率最大 (Maximum A Posteriori, MAP) 推定などの統計的手法を導入し、再構成画像の品質を改善する技術が実用化されている。一般に、統計的手法に基づく再構成は、ML 推定や MAP 推定の枠組みに基づき、再構成画像の良さを評価する凸評価関数を構成し、それを非負条件のもとで最小化することにより行われる。この凸評価関数の最小化には様々な反復法が用いられる。

解析的手法と比較して、統計的手法は雑音の統計的性質や対象画像に関する事前情報を用いることで、統計雑音をより軽減した再構成画像を得ることができる。また、体内における γ 線の吸収や散乱線の補正を再構成過程に組み込むことが容易である。しかし、統計的手法は、反復法に基づく凸評価関数の最小化を必要とするため、解析的手法と比較して計算量が多い問題点があり、長年実用化が困難であると考えられてきた。そこで、反復法の高速化が主要な研究課題とされている。望ましい反復法の条件としては、(1) 評価関数を最小にする真の解への収束性が保証されること、(2) 一反復あたりの計算量が少ないこと、(3) 非負条件の取り扱いが容易であること、(4) 経験的に設定するパラメータの数が少なく実装が容易であること、などがあげられ、これらの条件をすべて満たす反復法の開発が重要である。

本論文では、非線形計画問題の双対性を用いて、上述の望ましい反復法の条件をすべて満足する新しい画像再構成法を提案する。提案手法では、解を求める評価関数としてペナルティ最ゆう関数 (Penalized ML, PML) を用いる [12]。したがって、画像再構成問題は次のように定式化できる。

$$\text{minimize } f(\vec{x}) = L(\vec{x}) + \beta U(\vec{x}) \text{ subject to } \vec{x} \geq 0 \quad (26)$$

ただし、 $\vec{x} \in R^n$ は対象画像、 $L(\vec{x})$ は対数ゆう度関数、 $U(\vec{x})$ はペナルティ関数である。ペナルティ関数 $U(\vec{x})$ は 3.3 節で説明した関数と同じで、対数ゆう度関

数 $L(\vec{x})$ は次式のように定義される.

$$\begin{aligned} L(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^m u_i(\vec{a}_i^\top \vec{x}) \\ &= \sum_{i=1}^m (\vec{a}_i^\top \vec{x} - p_i \log(\vec{a}_i^\top \vec{x})) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m) \in R^m$ は投影データ, \vec{a}_i は \vec{x} と \vec{p} を関係付ける $m \times n$ 行列 $A = \{a_{ij}\}$ を構成する i 番目の行ベクトルである. 本研究では, \vec{c}_j で行列 A を構成する j 番目の列ベクトルを表す.

非線形計画問題の双対性を用いて式 (26) の解を高速に求めるため, 本研究では式 (26) の再構成問題を再定式化し, 解を求める反復法は前節の血管画像再構成で述べた方法と同じ手順で構成した.

4.1 提案手法

まず, 初期画像 $\vec{x}^{(0)}$ を与え, 式 (26) の評価関数に 2 次摂動関数 $Q_{\vec{x}^{(0)}}(\vec{x}) = \epsilon \|\vec{x} - \vec{x}^{(0)}\|^2/2$ を加えたものを評価関数とする次式の非線形計画問題を考える.

$$\text{minimize } Q_{\vec{x}^{(0)}}(\vec{x}) + f(\vec{x}) \text{ subject to } \vec{x} \geq 0 \quad (28)$$

ただし, $\epsilon > 0$ は小さな定数である. 式 (28) の問題の解は, ϵ がゼロに近づくとき式 (26) の問題と同じ解になる. ラグランジュ双対性を用いて式 (28) の問題の解を求めるため, 式 (26) と同じ解を持つ次式の非線形計画問題を考える.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \\ &\text{subject to } A\vec{x} = \vec{y}, \quad B\vec{x} = \vec{z}, \quad \vec{x} \geq 0, \quad \vec{y} \geq 0 \end{aligned} \quad (29)$$

ただし, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)^\top$ は $A\vec{x} = \vec{y}$ を満足するスラック変数, $\vec{z} = (z_1, \dots, z_M)^\top$ は式 (17) における隣接画素間の差 $x_j - x_{j'}$ を表す $M \times n$ 行列を $B = \{b_{lj}\}$ として $B\vec{x} = \vec{z}$ を満足するスラック変数であり, 評価関数 $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ は次のように定義される.

$$F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \sum_{j=1}^n q_{x_j^{(0)}}(x_j) + \sum_{i=1}^m u_i(y_i) + \sum_{l=1}^M \beta_l v(z_l) \quad (30)$$

ただし, $q_{t_0}(t) = \epsilon(t - t_0)^2/2$ であり, β_l はスラック変数 \vec{z} の成分 z_l と関係がある隣接画素組を $(x_j, x_{j'})$ とするとき $\beta_l = \beta_{\omega(j, j')}$ で定義される.

式 (4) の双対関数の定義によって, 式 (29) の双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} D(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) &= \sum_{i=1}^m p_i \log(1 + \lambda_i) \\ &\quad - G(A^\top \vec{\lambda} + B^\top \vec{\mu} + \epsilon \vec{x}^{(0)}) + J(\vec{\mu}) \end{aligned} \quad (31)$$

ただし, $G(\vec{x})$ と $J(\vec{\mu})$ は次のように定義される.

$$G(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n g(x_i), \quad g(t) = \begin{cases} t^2/2\epsilon & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (32)$$

$$J(\vec{\mu}) = \sum_{l=1}^M \delta^2 \left[\left| \frac{\mu_l}{\delta} \right| + \beta_l \ln(\beta_l - \left| \frac{\mu_l}{\delta} \right|) \right] \quad (33)$$

また, 式 (29) の主問題の解 (\vec{x}^*, \vec{z}^*) と式 (31) の双対問題の解 $(\vec{\lambda}^*, \vec{\mu}^*)$ の関係は, 式 (7) によって, 次のようになる.

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} g'(\vec{c}_1^\top \vec{\lambda}^* + \vec{d}_1^\top \vec{\mu}^* + \epsilon x_1^{(0)}) \\ \vdots \\ g'(\vec{c}_n^\top \vec{\lambda}^* + \vec{d}_n^\top \vec{\mu}^* + \epsilon x_n^{(0)}) \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\vec{y}^* = \left(\frac{p_1}{1 + \lambda_1^*}, \frac{p_2}{1 + \lambda_2^*}, \dots, \frac{p_m}{1 + \lambda_m^*} \right)^\top \quad (35)$$

$$\vec{z}^* = \left(\frac{-\mu_1^*}{\beta_1 + \left| \frac{\mu_1^*}{\delta} \right|}, \frac{-\mu_2^*}{\beta_2 + \left| \frac{\mu_2^*}{\delta} \right|}, \dots, \frac{-\mu_M^*}{\beta_M + \left| \frac{\mu_M^*}{\delta} \right|} \right)^\top \quad (36)$$

ただし, \vec{d}_j は行列 B を構成する j 番目の列ベクトルで, $g'(t) = \begin{cases} t/\epsilon & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ である.

この手法において, 解を求める反復法は, 前節の血管画像再構成で述べた方法と同じ手順で構成する.

4.2 実験

4.2.1 シミュレーション実験

まず, 提案手法の有効性を検証するため, 図 4.1 に示す数値ファントムに対してシミュレーション実験を行った. 画像のサイズは 128×128 画素である.

この実験において, 従来の代表的手法である OSL-EM (One Step Late EM) 法および OS-OSL-EM 法と提案手法を比較した. 図 4.2 に, 各アルゴリズムの反復による評価関数 $f(\vec{x})$ の変化を示す. 提案手法では, $f(\vec{x})$ を 1 回の反復で, OSL-EM 法の 20 回の反復とほ



図 4.1 実験に用いた数値ファントム

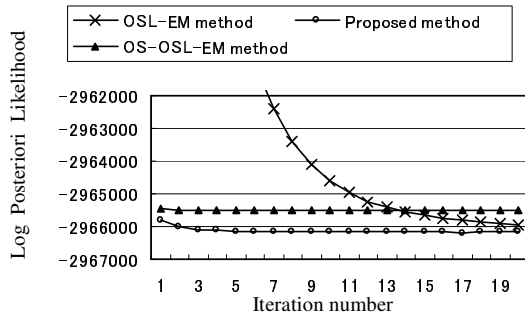


図 4.2 各画像再構成法の収束性

ほぼ同じ値にしていることが分かる。また、提案手法と OS-OSL-EM 法の収束の速度はほぼ同等である。反復 1 回、2 回、20 回後の再構成画像を図 4.3 に示す。これらの画像から、提案手法では、1 回の反復で、OSL-EM 法の 20 回とほぼ同等の画像が得られることが分かる。また、OS-OSL-EM 法は速く収束するが、真の解と異なるリミットサイクルに収束して、再構成画像にアーティファクトが生じている。

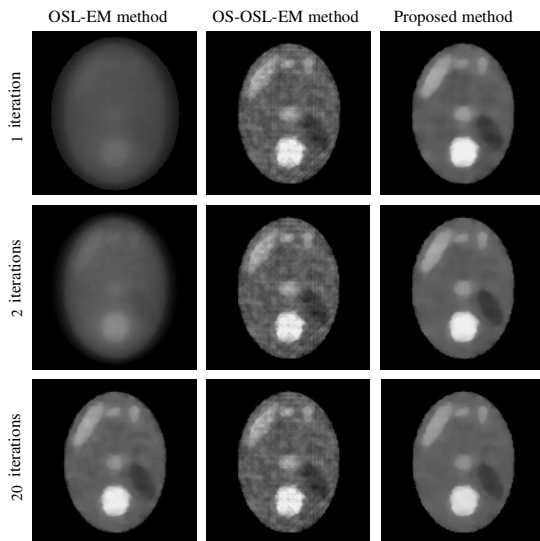


図 4.3 シミュレーション実験における再構成画像

4.2.2 臨床 PET データへの適用

次に、CTI社製 ECAT EXACT-HR スキャナで計測した全身 FDG 検査臨床データに対して画像再構成を行った。放射型のデータ収集時間は 300(s) である。投影データは正規化と散乱補正を行った後に 98 (方向) \times 128 (点) に再サンプリングして画像再構成を行った。また、 γ 線の吸収補正は、投影行列 A に吸収の影響を組み込んで提案手法を適用することで行った。ペナルティ関数として、最も単純な $v(r) = r^2$ を用いて画像再構成を行った。また、OS-OSL-EM 法で画像再構成を行う場合、ブロック数は 14(各ブロック内の投影データ方向数 7) に設定し、データアクセス順序は文献 [13] で示されている高速に収束する方法を用いた。提案手法でも同じデータアクセス順序を用いて画像再構成を行い、7 方向の投影データを処理する度にペナルティ関数の処理を行った。図 4.4 に、各手法の反復 1 回、2 回、20 回後の心臓部の横断面を示す。

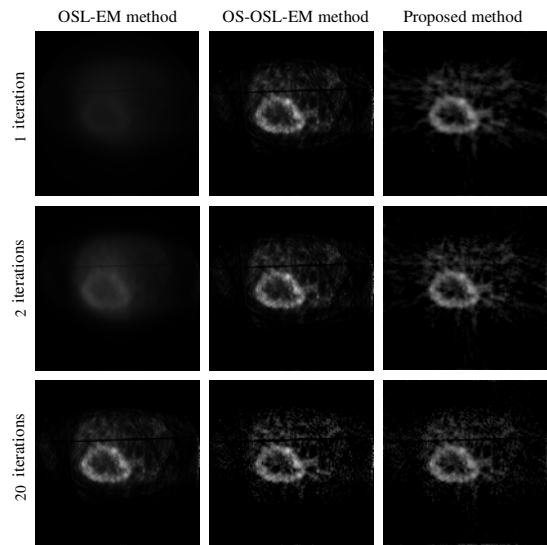


図 4.4 実 PET データの再構成画像

5 まとめ

本論文では、非線形計画問題の双対性を用いた CT 画像再構成法に関して研究を行った。本研究では、投影データ方向数が少ない場合や投影データに雑音が含まれている場合などに対して有効な画像再構成を行うため、画像再構成法として問題の性質を考慮した逐次近似法を考えた。逐次近似法による CT 画像再構成問

題は制約条件付きの最小化問題に定式化できる。

本研究では、CT 画像再構成の問題の中で、特に重要だと考えられる次の2つの分野でCT 画像再構成問題を定式化し、それを非線形計画問題の双対性を用いて解を求めた。

(1) 少数方向投影データからの3次元血管画像再構成法

本研究では、少数方向投影データからの3次元血管画像再構成に、評価関数として L_1 ノルムと Gibbs Smoothing Prior を用いたペナルティ関数を用いることによって、造影血管の疎な性質と連続性を表現することができ、少数方向投影データから造影血管画像を正確に再構成することができた。また、解を求める反復法は非線形計画問題の双対性を用いて構成した。その結果、反復法は投影データを一標本値ずつ使って解の更新を行う Row-Action 型反復法となり、非負条件の取り扱いや実装が容易に実現できた。実験の結果、提案手法では、4方向や8方向の投影データから十分な画質の画像を再構成することができるようになった。

(2) 統計的手法による高速なPET 画像再構成法

本研究では、PET の画像再構成に解を求める評価関数としてペナルティ最ゆる関数を用いた。画像再構成問題はこのペナルティ最ゆる関数を非負条件のもとで最小化する問題に定式化できるが、非線形計画問題の双対性を用いてこの最小化問題の解を求めるため、まず2次摂動関数を評価関数に加えた。次に新しいスラック変数を導入することによって、リミットサイクルを回避して高速に真の解へ収束する反復法を構成した。実験の結果、提案手法では、2, 3回の反復で十分な画質の画像を再構成することができた。

今後の課題は、統計的手法による透過型CT データに、非線形計画問題の双対性を用いた手法を適用することである。

参考文献

- [1] E.Bullitt, M.Soltys, J.Chen, J.Roseman and S.M.Pizer, "Three-dimensional reconstruction of intracranial vessels from biplance projection views," *Journal of Neuroscience Methods*, Vol.66, pp.13-22, 1996.
- [2] N.Ohura, K.Ogawa and E.Knieda, "Fast vascular reconstruction with MAP-EM method from few pro-

jections," *IEEE Nucl. Sci. Symp. and Med. Imag. Conf.*, Vol.3, pp.1168-1172, 1999.

- [3] H.M.Hudson and R.S.Larkin, "Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data," *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol.13, No.4, pp.601-609, 1994.
- [4] C.L.Byrne, "Convergent block-iterative algorithms for image reconstruction from inconsistent data," *IEEE Trans. Image Process.*, Vol.6, pp.1296-1304, 1997.
- [5] J.A.Browne and A.R.De Pierro, "A row-action alternative to the EM algorithm for maximizing likelihoods in emission tomography," *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol.15, No.5, pp.687-699, 1996.
- [6] 工藤博幸, 中澤宏昭, 齊藤恒雄, "エミッションCT 画像再構成のブロック勾配法," *電子情報通信学会論文誌 (D-II)*, Vol.83, No.1, pp.63-73, 2000.
- [7] E.Tanaka and H.Kudo, "Subset-dependent relaxation in block-iterative algorithms for image reconstruction in emission tomography," *Phy. Med. Biol.*, Vol.148, No.10, pp.1405-1422, 2003.
- [8] I-T.Hsiao, P.Khurd, A.Rangarajan and G.Gindi, "An accelerated convergent ordered subset algorithm for 3D emission tomography," *Proceedings of the Seventh International Meeting on Fully 3-D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, 2003.
- [9] 福島雅夫, "非線形最適化の理論," 産業図書, 東京, 1980.
- [10] O.L.Mangasarian and R.R.Meyer, "Nonlinear perturbation of linear programs," *SIAM J. Control Optim.*, Vol.17, pp.745-752, 1979.
- [11] K.Lange, "Convergence of EM image reconstruction algorithms with Gibbs smoothing," *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol.9, No.4, pp.439-446, 1990.
- [12] J.A.Fessler and A.O.Hero, "Penalized maximum-likelihood image reconstruction using space-alternating generalized EM algorithms," *IEEE Trans. Image Process.*, Vol.4, No.10, pp.1417-1429, 1995.
- [13] G.T.Herman and L.B.Meyer, "Algebraic reconstruction techniques can be made computationally efficient," *IEEE Trans. Med. Imaging*, Vol.12, No.3, pp.600-609, 1993.