

第3章 剥離渦を伴う流れに関する数値解析と考察

3-1 序論

3-1-1 低レイノルズ数乱流域のタービン翼列特性

レイノルズ数が $10^4 - 10^6$ の領域では、境界層内で層流乱流遷移、剥離、最付着などの複雑な現象が発生し、その結果、翼背面の流れ場に著しい影響を及ぼし、揚抗比が低下する。このような低レイノルズ数域の翼型特性についての一般的な記述は、Lissaman⁽¹³⁾、GAD-EL HAK⁽¹⁴⁾の著書に簡潔にまとめられている。本研究でも、 $10^4 - 10^6$ のレイノルズ数域を低レイノルズ数乱流域と呼ぶことにする。

レイノルズ数が 10^6 までの領域では、ラジオコントロール模型飛行機、ハンググライダー、人力飛行機などが動作している。近年、開発が盛んな小型の風車の翼もこの領域に含まれる。軽飛行機やジェット輸送機は、レイノルズ数が 10^7 近くとそれ以上で動作する。

低レイノルズ数域では圧力の回復する領域の境界層は層流のままなので、大きな圧力勾配に耐えることができず、流れは剥離する。レイノルズ数が 10^6 以上では、普通、遷移は逆圧力勾配が最初に始まる最低圧力点で起こる。これより、乱流境界層は圧力回復する領域で発達することが保証され、剥離の発生を抑えることができる。しかし、初めの逆圧力勾配が極端に厳しい場合は層流剥離が発生し、剥離域で遷移が起きてしまう。高レイノルズ数域では剥離後に再付着が起こるが、翼の抗力が増大して揚力が減少する。この場合は、翼の最低圧力点の形状を調整することによって、剥離が発生することなく遷移させることができる。

剥離した流れが翼の後縁部に再び付着すると、翼面と付着する流れとの間に渦が形成される。この渦は剥離渦と呼ばれ、低レイノルズ数乱流域の翼の揚抗比を著しく減少させる作用を持つ。一方、再付着しない場合と剥離渦が形成される場合を比較すると、剥離渦の形成は翼面上の流れが回復することを意味しており、翼の揚抗比の減少を食い止める働きがある。

層流剥離渦の基本的な幾何学的構造を図3. 1に示す。層流剥離渦では、一般的に層流剥離の後に遷移が起きる。乱流が発達すると剥離した流れは翼背面に最付着して、層流剥離渦を形成する。

Chalmichael⁽¹⁵⁾は、大まかな基準として、剥離、再付着点間の距離を用いたレイノルズ数は約 5×10^4 になることを示した。この基準によると、翼弦長さをもとにしたレイノルズ数が 5×10^4 より小さい場合は、最付着が起きるためには翼弦長が短すぎるということがわかる。また、 5×10^4 より僅かに大きいレイノルズ数で

は、長い剥離渦が形成されることが予想される。

このように、遷移、剥離、再付着現象は翼の作動効率を支配する要素である。これらの現象を数値解析によって予測することができれば、そのときの翼面上の圧力分布から低レイノルズ数乱流域におけるタービン効率の低下を防ぐような翼の設計が可能となる。

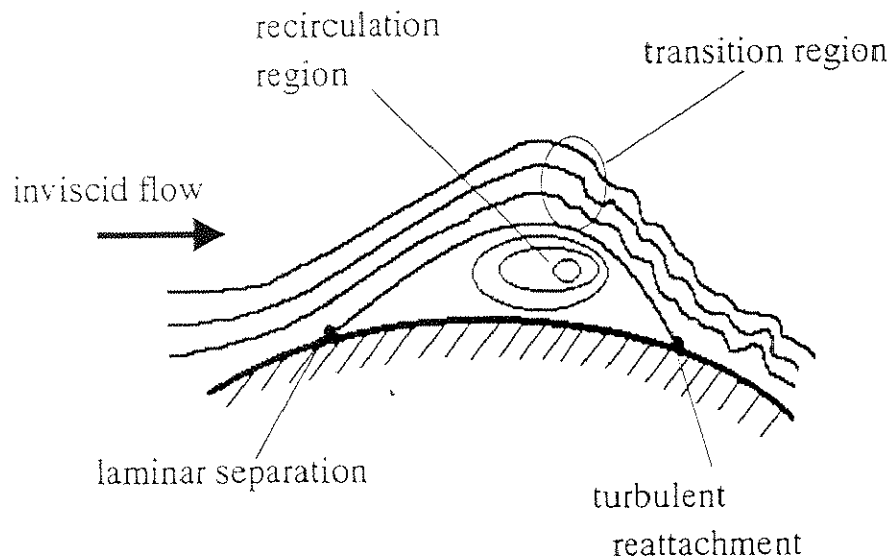


Fig.3-1 Structure of laminar separation vortex

3-1-2 本研究の意義と目的

通商産業省工業技術院ニューサンシャイン計画で開発中の 300kW 級のマイクロガスタービンは、高効率を得るためにタービン入り口温度を 1350°C まで上昇させて、熱効率を向上させている。入り口速度を基準としたマイクロガスタービンのレイノルズ数は 10^4 オーダであり、これは従来のガスタービンと比較して一桁以上小さい。このような低レイノルズ数乱流域では剥離の発生による翼列性能の低下が予測され、従来の高レイノルズ数域での経験則を用いて翼列を設計すると、必要なタービン効率が得られない可能性がある。

タービンは一般的に、レイノルズ数が 10^7 以上の高レイノルズ数域で作動する。このため、これまでに多くの高レイノルズ数域におけるタービン翼列特性に関する実験や数値解析が行われており、衝撃波と境界層の干渉等の複雑な現象が調べられてきたが、レイノルズ数の低下による流れの剥離については取り上げ

られなかった。近年、マイクロガスタービンのような低レイノルズ数乱流域で作動するタービンの翼列特性に関する実験が行われ始めたが、数値解析により調べられた例は少ない。

マイクロガスタービンでは、レイノルズ数の低下に伴い境界層の剥離や最付着などの予測が困難な現象が生じ、タービン効率が低下する。タービン翼負圧面上で流れの剥離が発生するとタービン効率が低下するが、一度剥離した流れが翼面上に最付着した場合はタービンの効率低下を防ぐことができる。マイクロガスタービンではレイノルズ数は約 $5 \cdot 10^4$ まで低下するが、このような低レイノルズ数乱流域では剥離は避けられないことが村田・阿部ら⁽¹⁶⁾の実験によって調べられている。これより、翼の効率低下を防ぐために、流れが剥離した後、翼面に最付着するようなタービン翼の設計が望まれる。低レイノルズ数乱流域における翼まわりの流れ場では、剥離現象や最付着が乱流場をさらに複雑なものにしており、その数値解析はまだあまり行われていない。そこで、翼列実験では得ることが困難な剥離領域の流れ場の詳細を、数値シミュレーションを用いて調べることが重要である。本研究では、スパン方向にねじれない、二次元断面をもつタービン翼周りの流れ場の数値解析を行う。実際のタービン翼の形状は、スパン方向にねじれを持つ3次元形状であり、さらに翼のハブの部分では二次流れが形成され現象がより複雑となる。翼背面のハブに発生する二次流れに関する近年行われた実験的研究は C.H.Sieverding⁽¹⁷⁾ の論文に簡潔にまとめられており、二次流れの渦構造が詳細に述べられている。本研究では、二次流れの影響を取り除くために、スパン方向に無限に長い二次元翼の直線翼列周りの流れについての乱流数値解析を行い、剥離渦を再現することを目的とする。また、タービン翼列の食い違い角をパラメータとして、これらのパラメータが翼列性能に及ぼす影響について、乱流解析の手法の一つである LES を用いて数値シミュレーションを行い、タービン翼列周りの流れ場の詳細を調べ、実験値と比較検討することを目的とする。

Table 3.1 Reynolds Number of CGT group

	High Pressure Stage or Gas Generator Turbine		Low Pressure Stage or Power Turbine	
	$R_{\theta Uin}$	$R_{\theta Uout}$	$R_{\theta Uin}$	$R_{\theta Uout}$
CGT301	8.9×10^4	14.6×10^4	4.1×10^4	6.4×10^4
CGT302	6.9×10^4	19.0×10^4	5.4×10^4	8.2×10^4
CGT303	radial turbine		4.1×10^4	7.7×10^4

3-2 直線タービン翼列周りの流れ場の乱流解析

乱流は大きな渦から散逸を支配する小規模の渦を含んでいるため、乱流の DNS (直接数値解析) を行う場合はこれらの大小様々なスケールの渦を捉えなくてはならない。三次元の流れ場の DNS を行う場合、必要とされる格子点数は $R_{\rho}^{\frac{3}{4}}$ のオーダーとなる。このため、数万のオーダーの低レイノルズ数領域の流れ場を解く場合でも莫大な格子点数が必要となってしまう、DNS を行うことが不可能となる。例えば、本研究で目標としているレイノルズ数 $8 \cdot 10^4$ の場合の必要格子点数は $8 \cdot 10^9$ となり、計算機の容量をはるかに越えるものとなる。このような困難を克服するために考案された数値解析の手法に、レイノルズ平均モデルと LES (Large Eddy Simulation) がある。レイノルズ平均モデルでは、速度及び圧力を平均部分と変動部分に分解して連続の式とナビエ・ストークス方程式に代入した後、アンサンブル平均を両者に施すことにより支配方程式を得る。平均化されたナビエ・ストークス方程式に現れるレイノルズ応力は、渦粘性モデルによってモデル化される。

LES (Large Eddy Simulation) では、計算格子の幅より小さいスケールの渦の影響を渦粘性モデルで記述し、計算格子の幅より大きいスケールの渦の運動のみを DNS より粗い計算格子を用いて直接計算する。ここで、計算格子よりも小さいスケールは SGS (sub grid scale)、大きいスケールは GS (grid scale) と呼ばれる。レイノルズ平均モデルと LES の違いを簡単に述べると、レイノルズ応力テンソルは乱流の全てのスケールが平均流に与える影響を記述するのに対し、LES における SGS 応力テンソルは SGS 乱流の GS 流れに対する影響のみを反映しているという点である。

代表的なレイノルズ平均モデルとして、広く用いられている一方程式モデルと二方程式モデルによる複雑形状周りの乱流数値解析の例を幾つか挙げる。

Hildebrandt and Fottner⁽¹⁸⁾ は、タービン出口速度を代表速度としたレイノルズ数が $5 \cdot 10^5$ における直線タービン翼列の乱流数値解析を行った。乱流モデルとしては、3種類の異なる二方程式モデルを用い、計算格子の粗さをパラメータとして、乱流モデルと格子粗さの組み合わせが流れ場に与える影響について調べた。その結果、測定値と計算結果は良く一致することが示され、格子粗さの影響に比べて乱流モデルの影響は小さいことがわかった。

Vasiliev ら⁽¹⁹⁾ は、タービン入り口速度を代表速度としたレイノルズ数が $3.3 \cdot 10^5$ の直線タービン翼列周りの流れを、一方程式モデルにより乱流数値解析を行った。一方程式モデルでは、乱流渦粘性の計算に乱れ度と乱流の特徴的長さスケールを表す混合距離の実測値を必要とする。乱流数値解析の結果、翼に

沿う方向の速度分布が実験値と良く一致することが示され、層流乱流遷移が確認された。また、表面摩擦の計算結果から剥離渦の形成が観察された。

F. Eulitz and K. Engel⁽²⁰⁾ らは、3枚の静翼と2枚の動翼からなる低圧タービン翼列内部の流れ場について、レイノルズ数 $1.08 \cdot 10^5$ のもとで一方程式モデルを用いて乱流数値解析を行った。その結果、剥離する流れとウェークによる遷移現象が捉えられた。

以上の乱流解析に用いられた一方程式モデルと二方程式モデルでは、乱流渦粘性が乱れの特性速度の平方根と乱れの特性長さの積に比例すると仮定する。乱れの特性速度を輸送方程式によって、特性長さを代数式で与えるものが一方程式モデル、特性速度と特性長さの両方を輸送方程式で与えるものが二方程式モデルである。一方程式モデルでは2個の経験定数を、二方程式モデルでは5個の経験定数を含んでいるため、これらのモデルを用いた計算では、実測値や広い範囲の実験データと合うように調整されたモデル定数の推奨値が使用されることになる(吉澤・村上 その他⁽²¹⁾)。

3-3 LES(Large Eddy Simulation) について

輸送方程式を解くことにより乱流渦粘性を求めるレイノルズ平均モデルでは、複数の経験定数が必要になる。これに対して、LES では分子粘性のように係数が唯一つとなり、より信頼性の高い数値解析が可能となる。但し、複雑形状周りの流れ場の LES による乱流数値解析の例は少ない。この理由としては、LES で用いられる渦粘性モデルの一般曲線座標系への拡張が困難であることが挙げられる。

LES の基礎の渦粘性モデルである Smagorinsky model は正の定数であり、常に運動エネルギーを散逸するため、GS 成分方程式を安定化させる効果を持つ。このようなエネルギーの輸送は、GS スケールから SGS スケールへの順輸送(forward scatter)と呼ばれる。Smagorinsky model を用いた一様等方性乱流の LES では、実験と良く一致する結果が得られる。しかし、Smagorinsky model は、実際の流れ計測や DNS によって示された SGS スケールから GS スケールへのエネルギーの逆輸送(backward scatter)の存在がモデル化されていないため、例えば遷移を含む流れの発達過程の予測には適用することができない。

上に述べた Smagorinsky model の問題点を解決し、様々な種類の乱流を含む複雑な流れ場を扱うことが可能な渦粘性モデルの開発が大きな課題となっている。Germano et al.⁽²²⁾ らによる dynamic SGS model では、LES の解自体から Smagorinsky 定数を計算することによって渦粘性係数が与えられる。このとき、

SGS 応力は GS 成分のうちの最小スケール付近の乱れに依存すると仮定して、直接計算されている GS 速度場の最小スケール成分から Smagorinsky 定数を計算する。しかし、dynamic SGS model はテンソルの式で表されるため、全ての Smagorinsky 定数を決定することができないという問題が残されている。

Jordan and Ragab⁽²³⁾ らは、レイノルズ数が $5.6 \cdot 10^3$ における円柱周りの LES を、dynamic SGS (subgrid-scale) model を用いて行った。その結果、垂直及びせん断レイノルズ応力の計算結果と過去に行われた実験値とが良く一致することがわかった。さらに、レイノルズ数が $3.0 \cdot 10^2$ から臨界レイノルズ数である $3.0 \cdot 10^3$ の範囲の実験値がレイノルズ数 $5.6 \cdot 10^3$ の場合の計算結果と一致することから、このレイノルズ数域では円柱後方の流れが同じ乱流構造を持つことが確かめられた。

同じ乱流モデルを用いて、Kaltenbach and Choi⁽²⁴⁾ らは、レイノルズ数が $1.64 \cdot 10^6$ における単独翼周りの流れ場の LES を行い、翼の後縁部で計算結果と実験値が一致することがわかった。しかし、比較的高いレイノルズ数流れに特有の、中心差分によって現れる数値振動の問題については更なる検討が必要であると結論している。

本研究では、乱流モデルとして、一般曲線座標系への適用が可能であり、層流乱流遷移現象を扱うことができる SF model (Structure Function Model) を用いて、乱流数値解析を行う。Metais and Lesieur ら⁽²⁵⁾ によって考案された SF model では、SGS 乱れはおおむね等方的であり、Kolmogorov のカスケード則に従うと仮定して、SGS 渦粘性係数が構造関数すなわち速度ベクトルの差の二乗平均の平方根で表されることを示した。このモデルでは流れが層流の場合は構造関数が零となるため渦粘性係数も零となり、層流乱流遷移問題へ適用することができる。

3-4 計算方法

3-4-1 直交格子における非圧縮性流れの支配方程式

無次元化された非圧縮粘性ナビエ・ストークス方程式と連続の式は以下のよう
に表される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2)$$

3-4-2 直交格子における LES の基礎方程式

乱流の速度分布 u_i を、フィルター関数を用いて格子スケール以上の直接計算
可能な成分 \bar{u}_i (GS 成分) とそれ以下の成分 u'_i (SGS 成分) に分離する。

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (3.3)$$

$$\bar{u}(x, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^3 G(x_i - x'_i) \right) u(x'_1, x'_2, x'_3, t) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (3.4)$$

LES では、次の 3 種類のフィルター関数がよく用いられる。 Δ_i はフィルター幅
を表す。

(a) ガウシアン・フィルター

$$G(x_i) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta_i^2}} \exp \left\{ -\frac{6x_i^2}{\Delta_i^2} \right\} \quad (3.5)$$

(b) スペクトル・カットオフ・フィルター

$$G(x_i) = 2 \frac{\sin \left\{ \frac{\pi x_i}{\Delta_i} \right\}}{\pi x_i} \quad (3.6)$$

(c) トップハット・フィルター

$$G(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_i} & (|x_i| \leq \frac{\Delta_i}{2}) \\ 0 & (|x_i| > \frac{\Delta_i}{2}) \end{cases} \quad (3.7)$$

なお、本計算では、後述する GS 成分の運動方程式に既にフィルターがかかっているものと考えて、これらのフィルターは使用しない。

フィルター関数 $G(x_i - x_j)$ を用いて NS 方程式と連続の式を粗視化することによって、GS 成分の運動方程式を得る。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.9)$$

ここで

$$q_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad (3.10)$$

$$\Phi = \bar{p} + \frac{1}{3} \tau_{kk} \quad (3.11)$$

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.12)$$

(3.8)、(3.9)式を閉じるために、SGS モデルを導入して q_{ij} または τ_{ij} をモデル化する。ここでは、LES の基礎 SGS 応力モデルとして最も広く用いられているスマゴリンスキー渦粘性モデルによりモデル化を行う。GS 成分の速度勾配 \bar{S}_{ij} が緩やかで、SGS 変動が局所平衡であると考え、SGS 成分の運動エネルギーに関する輸送方程式は簡単になり、粘性散逸が τ_{ij} と \bar{S}_{ij} の積で表される。この時、GS 方程式における SGS 応力 q_{ij} の効果は、分子粘性散逸と同じように作用していることから、 q_{ij} は \bar{S}_{ij} と比例すると仮定する。すなわち、

$$q_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} \quad (3.13)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.14)$$

$$\nu_t = C_s \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \quad (3.15)$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (3.16)$$

本論文では乱流渦粘性 ν_t に構造関数モデル（Structure Function Model: O. Metals and M. Lesieur⁽¹³⁾）を適用した。構造関数モデルに関する詳しい説明は3-5に後述する。渦粘性モデルによりモデル化した q_{ij} を粗視化されたNS方程式に代入すると、LESの支配方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \left\{ \frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \right\} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_{total} \left\{ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

3-4-3 支配方程式の座標変換

支配方程式を物理空間から計算空間に座標変換するには、物理空間での偏微分を計算空間の偏微分に変換すれば良い(越塚⁽²⁷⁾)。両空間における偏微分は、座標変換係数によって表される。3次元の場合は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

右下付きの添え字は微分を表す、これらの関係式は chain rule と呼ばれる。

流速ベクトルの変換では、2次元翼まわりの三次元の計算格子を考えると、例えばスパン方向を z 軸とした場合、計算空間座標はデカルト座標を用いて、 $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $z = z(\zeta)$ となることから、変換のマトリックスは次式で表される。

$$A_i^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & 0 \\ \eta_x & \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_z \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

物理空間における速度ベクトル成分 u_j と計算空間における速度ベクトル成分 U^i との関係は、

$$U^i = A_i^j u_j = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & 0 \\ \eta_x & \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

となる。物理空間におけるデカルト座標系の流速ベクトル成分 u_j は小文字で、計算空間における反変流速ベクトル成分 U^i は大文字で書かれる。

3-4-4 一般曲線座標系における非圧縮性流れの支配方程式

計算空間における非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を求めるために、物理空間のデカルト座標系におけるナビエ・ストークス方程式に、実際に変換のマトリックスを適用した場合、微分の中に多数の追加項が含まれているため、展開すると極めて複雑となる。そこで、流速ベクトル変数を、物理空間におけるデカルト座標成分 u_i としておく方程式が用いられる。(3.1), (3.2) 式の空間偏微分に、chain rule を適用すれば、計算空間における非圧縮性流れの支配方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (JU^k u_i) = & - \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\xi_{x_i}^k p) \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left\{ g^{kl} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_l} \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} (JU^k) = 0 \quad (3.23)$$

ここで

J : Jacobian

$\xi_{x_i}^k = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$: metric quantities

$g^{kl} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$: metric tensor

3-4-5 一般曲線座標系における LES の支配方程式

フィルター操作によって粗視化された一般座標系のナビエ・ストークス方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{\bar{J}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\bar{J} \bar{U}^k \bar{u}_i) = & - \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\bar{\xi}_{x_i}^k \bar{p}) \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left\{ \bar{g}^{kl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_l} \right\} \\ & + \frac{1}{\bar{J}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \sigma_i^k \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} (\bar{J} \bar{U}^k) = 0 \quad (3.25)$$

上付き添え字は反変ベクトル成分を、上下の添え字は反変応力テンソル成分を表す。 \bar{g}^{kl} は計量テンソルと呼ばれる。 σ_i^k は反変 SGS 応力テンソルと呼ばれ、次式で表される。

$$\sigma_i^k = \overline{JU^k \bar{u}_i} - \overline{JU^k u_i} \quad (3.26)$$

メトリックスが滑らかならば、

$$\begin{aligned} \sigma_i^k &= \overline{J \bar{\xi}_{x_i}^k u_j \bar{u}_i} - \overline{J \bar{\xi}_{x_i}^k u_j u_i} = \overline{J \bar{\xi}_{x_i}^k} \{ \bar{u}_j \bar{u}_i - \overline{u_j u_i} \} \\ &= \overline{J \bar{\xi}_{x_i}^k} \tau_{ij} \end{aligned} \quad (3.27)$$

カルテシアン座標系における SGS 応力テンソル τ_{ij} の非等方成分 q_{ij} を、一般曲線座標系において Q_i^k で表すと、

$$Q_i^k = \sigma_i^k + \frac{1}{3} \bar{\xi}_i^k \tau_{ll} = 2\nu_\epsilon \bar{S}_i^k \quad \text{ここで } \bar{\xi}_i^k = \overline{J \bar{\xi}_{x_i}^k} \delta_{ij} = \overline{J \bar{\xi}_{x_i}^k} \quad (3.28)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{\xi}_{x_i}^k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{\xi}_k} + \bar{\xi}_{x_i}^k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{\xi}_k} \right\} \quad (3.29)$$

反変応力テンソル (contra-variant form of the resolvable strain rate tensor) \bar{S}_i^k は

$$\begin{aligned} \bar{S}_i^k &= \overline{J \bar{\xi}_{x_i}^k} \bar{S}_{ij} = \overline{J \bar{\xi}_{x_i}^k} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \bar{\xi}_{x_i}^k \frac{\partial u_i}{\partial \bar{\xi}_k} + \bar{\xi}_{x_i}^k \frac{\partial u_j}{\partial \bar{\xi}_k} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \bar{J} \left\{ \bar{\xi}_{x_i}^k \bar{\xi}_{x_l}^l \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{\xi}_l} + \bar{\xi}_{x_i}^k \bar{\xi}_{x_l}^l \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{\xi}_l} \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

(3.28), (3.30) を (3.24) に代入して最終的な一般曲線座標系における LES の支配方程式を得る。(3.24) の右辺第2, 3項を計算すると

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left\{ \bar{g}^{kl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_l} \right\} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \sigma_i^k \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\frac{1}{J} \sigma_i^k + \frac{1}{\text{Re}} \bar{g}^{kl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_l} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\frac{1}{J} 2\nu_t \bar{S}_i^k + \frac{1}{\text{Re}} \bar{g}^{kl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_l} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\frac{1}{J} 2\nu_t \frac{J}{2} \left\{ \bar{g}^{kl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_l} + \frac{\bar{\xi}^k_{x_j} \bar{\xi}^l_{x_i}}{\bar{\xi}^k_{x_j} \bar{\xi}^l_{x_i}} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \xi_l} \right\} + \frac{1}{\text{Re}} \bar{g}^{kl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_l} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\left(\nu_t + \frac{1}{\text{Re}} \right) \bar{g}^{kl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_l} + \nu_t \frac{\bar{\xi}^k_{x_j} \bar{\xi}^l_{x_i}}{\bar{\xi}^k_{x_j} \bar{\xi}^l_{x_i}} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \xi_l} \right]
\end{aligned}$$

ここで 計量テンソルは $\bar{g}^{kl} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$ と表される。

よって、一般座標系における LES の支配方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (J \bar{U}^k \bar{u}_i) &= - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\bar{\xi}^k_{x_i}}{\bar{\xi}^k_{x_i}} \left(\bar{p} + \frac{1}{3} \tau_{ll} \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\left(\nu_t + \frac{1}{\text{Re}} \right) \bar{g}^{kl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \xi_l} + \nu_t \frac{\bar{\xi}^k_{x_j} \bar{\xi}^l_{x_i}}{\bar{\xi}^k_{x_j} \bar{\xi}^l_{x_i}} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \xi_l} \right]
\end{aligned}
\tag{3. 31}$$

3-5 構造関数モデル (Structure Function Model)

SGS 乱れがおおむね等方的であり、Kolmogorov のカスケード則に従うとき、SGS 渦粘性係数は

$$\nu_c = \frac{2}{3} C_k^{-1/2} \left[\frac{E_x(k_c)}{k_c} \right]^{1/2} \quad (3.32)$$

で表される(O.Metals and M.Lesieur⁽²⁵⁾)。 C_k は Kolmogorov 定数、 $k_c = \pi/\Delta$ はフィルター幅に当たる波数、 E_x は局所的なエネルギー Spektral を表す。波数 k_c における局所的な Spektral は、フィルターをかけた速度場を用いて次式のような構造関数で表される。

$$F_2(x, \Delta x) = \left\langle \|\bar{u}(x, t) - \bar{u}(x + r, t)\|^2 \right\rangle_{|r|=\Delta x} \quad (3.33)$$

乱流が三次元的に等方であるとき、 F_2 は Batchelor⁽²⁶⁾ の式より

$$F_2(x, \Delta x) = 4 \int_0^{k_c} E(k) \left[1 - \frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} \right] dk \quad (3.34)$$

式 (3.34) では中間値の定理より

$$E_x(k_v, t) = \frac{F_2(x, \Delta x, t)}{4 \int_0^{k_c} \left[1 - \frac{\sin k\Delta}{k\Delta} \right] dk} \quad (3.35)$$

となる k_v ($0 \leq k_v \leq k_c$) が存在する。ここで $k \leq k_c$ において局所的に Kolmogorov 則

$$E_x(k, t) = C_k \left[\varepsilon(t)^{2/3} k^{-5/3} \right] \quad (3.36)$$

が成立すると考えて、式 (3.34)、(3.36) を式 (3.35) に代入すると

$$k_v^{-5/3} = \frac{\int_0^{k_c} k^{-5/3} \left[1 - \frac{\sin k\Delta}{k\Delta} \right] dk}{\int_0^{k_c} \left[1 - \frac{\sin k\Delta}{k\Delta} \right] dk} \quad (3.37)$$

さらに、式(3.32)に式(3.35)を代入し、式(3.36)の関係を用いると

$$\nu_t(x, t) = \frac{2}{3} C_k^{-3/2} \left[\left(\frac{k_c}{k_v} \right)^{-5/3} \frac{F_2(x, \Delta, t)}{4 \int_0^{k_c} \left[1 - \frac{\sin k\Delta}{k\Delta} \right] dk} \frac{1}{k_c} \right] \quad (3.38)$$

となる。(3.37), (3.38)式から k_v を消去すると

$$\nu_t(x, t) = \frac{1}{3} C_k^{-3/2} \pi^{-1/2} C_0^{-1/2} \Delta [F_2(x, \Delta, t)]^{1/2} \quad (3.39)$$

となる。 C_0 は

$$C_0 = \int_0^\pi \xi^{-5/3} \left(1 - \frac{\sin \xi}{\xi} \right) d\xi \approx 0.478 \quad (3.40)$$

となるので、渦粘性係数は

$$\nu_t^{SF}(x, \Delta x) = 0.105 C_k^{-3/2} \Delta x [F_2(x, \Delta x)]^{1/2} \quad (3.41)$$

これが Structure Function Model による渦粘性係数である。

F_2 は x に近接している 6 点間での速度差の二乗平均の和で表されるが、壁近傍では壁に平行な面上の 4 点の平均をとれば良い。この Structure Function Model による SGS 渦粘性係数は、層流では $F_2 = 0$ となるので、層流乱流遷移問題へ適用することができる。また、壁関数のような壁面近傍での特別な扱いも必要ない。

3-6 数値解法

ここでは、コロケーション格子を用いた、MAC 法に基づく非圧縮性流れの数値計算の手順を示す。コロケーション格子では、物理速度ベクトル u と圧力 p をセル中心に、反変速度成分にヤコビアンを掛けた流束成分 JU をセル境界に配置する。コロケーション格子における物理量の配置を図 3. 2 に示す。計算格子は C 型格子を用いた。 ξ は主流方向、 η はピッチ方向、 ζ はスパン方向をそれぞれ表す。セル境界に配置された流束の反変成分 JU^i が質量保存式を満足するものとする。数値計算の手順は、まず、ナビエ・ストークス方程式の各項を計算して Adams-Bashforth 法により中間速度を計算する。それらを圧力の Poisson 方程式に代入して、 $n+1$ ステップ目で連続の式を満たすような圧力の時間増分 ϕ を求め、 ϕ を用いて予測速度と圧力の修正を行い、時間ステップを進める。以下に具体的な数値計算の方法と方程式の離散化について示す。

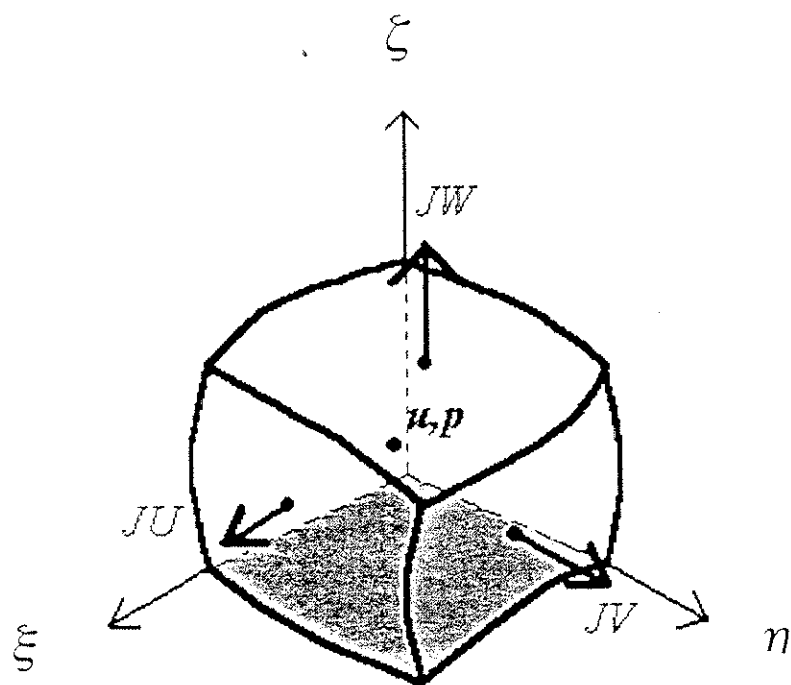


Fig. 3.2 Collocation Grid

3-6-1 空間差分

速度と圧力の時間ステップを進めるために、まず始めにセル中心での一般曲線座標系における非圧縮粘性ナビエ・ストークス方程式の圧力項、対流項、粘性項をそれぞれ計算し、中間速度場 u_i^o を予測する。圧力項の差分は4次精度の中心差分を、粘性項の差分は2次精度の中心差分を、対流項の差分には風上差分法と QUICK(quadratic upstream interpolation for convective kinematics)を用いた。QUICK は、セル境界の物理量 $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ の内挿法として、その境界の前後をはさんで

いる2つのセルの値に加えて、さらに風上側のセルの値を用いて2次の多項式による内挿を行う方法である。

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{8}(-\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}) & u \geq 0 \\ \frac{1}{8}(-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} + 3\phi_i) & u < 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

上式の精度は3次である。 $i=1$ の場合の対流項は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{J} \frac{\partial(JU^j u_i)}{\partial \xi_j} \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} (JUu) + \frac{\partial}{\partial \eta} (JVu) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (JWu) \end{aligned} \quad (3.43)$$

となる。(3.43)式の右辺第1項($i=1, j=1$)を QUICK によって差分化すると以下ようになる。

・ $JU^i \geq 0$ の場合

$$\left[JU^{i+\frac{1}{2},j,k} \left\{ \frac{-u_{i-1,j,k} + 6u_{i,j,k} + 3u_{i+1,j,k}}{8} \right\} - JU^{i-\frac{1}{2},j,k} \left\{ \frac{-u_{i-2,j,k} + 6u_{i-1,j,k} + 3u_{i,j,k}}{8} \right\} \right] / \Delta \xi \quad (3.44)$$

・ $JU^i < 0$ の場合

$$\left[JU^{i+\frac{1}{2},j,k} \left\{ \frac{-u_{i+2,j,k} + 6u_{i+1,j,k} + 3u_{i,j,k}}{8} \right\} - JU^{i-\frac{1}{2},j,k} \left\{ \frac{-u_{i+1,j,k} + 6u_{i,j,k} + 3u_{i-1,j,k}}{8} \right\} \right] / \Delta \xi \quad (3.45)$$

3-6-2 時間進行法

時間進行法には Adams-Bashforth 法を用いた。セル中心にて上述の方法で対流項、圧力勾配項、粘性項を求めて、中間速度場 u_i^p を予測する。ここで、上付き添え字 p は $n + \frac{1}{2}$ ステップ 目であることを表す。

$$u_i^p = u_i^{(n)} - \Delta t \xi_{x_i}' \frac{\delta' p^{(n)}}{\delta \xi_k} + \frac{\Delta t}{2} [3F_i^{(n)} - F_i^{(n-1)}] \quad (3.46)$$

但し、 F_i = 対流項 + 粘性項

時間刻みの決め方については、様々な方法が考えられるが、ここでは、計算領域内で速度ベクトルの値が比較的大きく、かつ計算格子幅が狭いと考えられる翼列入り口部において、クーラン数を 0.1 として、時間刻み幅を決定した。さらに厳しい条件でも計算が発散しないようにするため、時間刻み幅には安全係数 (=0.5) を掛けてある。

中間速度を反変成分に変換してヤコビアンをかけた後、セル境界に補完して $JU^{(p)}$ とする。 $\overline{\xi}_i$ は ξ_i 方向の補間を表す。

$$JU^{(p)} = \overline{J \xi_{x_i}^j u_i^p} \quad (3.47)$$

3-6-3 圧力の Poisson 方程式の差分化

中間速度から計算された流束 $JU^{(p)}$ を用いて、圧力の時間変化分 ϕ に関する Poisson 方程式を SOR 法によって解く。 ϕ に関する Poisson 方程式の差分式は、圧力勾配項の差分式を連続の式の差分式に代入して求めるのが原則である。このようにして求めた圧力の Poisson 方程式の差分解は、差分化した連続の式を満足している。連続の式を満たさないような圧力の Poisson 方程式の差分化を行った場合は、特に、不等間隔格子や一般曲線座標系などで違いが顕著に表れる。

コロケート格子では、セル境界に反変速度 JU を配置する。この理由を、簡単のために等間隔格子で x 方向についてのみ考えてみる。連続の式は $\frac{-u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2\Delta x}$ と差分化されるが、 $i \pm 1$ 点での圧力勾配をそれぞれ代入すると、

$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ の差分化は $\frac{p_{i-2,j} - 2p_{i,j} + p_{i+2,j}}{4\Delta x^2}$ となって、奇数番目と偶数番目が分離してしまう。すると、圧力場は1格子おきに滑らかであれば良いことになり、隣の格子点との間で振動する解を許す。スタガード格子ならば、このような解の振動を防ぐことができる。

MAC 法における、圧力の変動分による速度の修正は次式で表される。ここで、計量テンソルは、 $g^{jk} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_m}$ である。また、本研究では2次元翼周りの計算格子を $x-y$ 平面上に作成した後、 z 方向 (ξ 方向=スパン方向) に積み上げて3次元の計算格子としている。そのため、物理空間と計算空間の対応は、 $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y), \zeta = \zeta(z)$ と表され、その結果、計量テンソルのうち、 $g^{13}, g^{23}, g^{31}, g^{32} = 0$ となる。

$$JU_j^{(n+1)} = JU_j^p - \Delta t J g^{jk} \frac{\delta \phi}{\delta \xi_k} \quad (3.48)$$

上式の差分式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} JU^{(n+1)} &= JU^p - \Delta t J g^{11} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta \xi} - \Delta t J g^{12} \left\{ \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1}}{2} - \frac{\phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j-1}}{2} \right\} \frac{1}{2\Delta \eta} \\ JV^{(n+1)} &= JV^p - \Delta t J g^{21} \left\{ \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1}}{2} - \frac{\phi_{i-1,j} + \phi_{i-1,j+1}}{2} \right\} \frac{1}{2\Delta \xi} - \Delta t J g^{22} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta \eta} \\ JW^{(n+1)} &= JW^p - \Delta t J g^{33} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta \zeta} \end{aligned} \quad (3.49)$$

連続の式は

$$\frac{JU_{i+\frac{1}{2}} - JU_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} + \frac{JV_{j+\frac{1}{2}} - JV_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} + \frac{JW_{k+\frac{1}{2}} - JW_{k-\frac{1}{2}}}{\Delta \zeta} = 0 \quad (3.50)$$

速度の修正式を連続の式に代入すると

$$J g^{11} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta \xi} - J g^{11} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta \xi}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[Jg_{i+\frac{1}{2}}^{12} \left\{ \frac{\phi_{i+1,j+1} + \phi_{i,j+1}}{2} - \frac{\phi_{i+1,j-1} + \phi_{i,j-1}}{2} \right\} \frac{1}{2\Delta\eta} \right. \\
& - \left. Jg_{i-\frac{1}{2}}^{12} \left\{ \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j+1}}{2} - \frac{\phi_{i,j-1} + \phi_{i-1,j-1}}{2} \right\} \frac{1}{2\Delta\eta} \right] \frac{1}{\Delta\xi} \\
& + \left[Jg_{j+\frac{1}{2}}^{21} \left\{ \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j-1}}{2} - \frac{\phi_{i-1,j} + \phi_{i-1,j-1}}{2} \right\} \frac{1}{2\Delta\xi} \right. \\
& - \left. Jg_{j-\frac{1}{2}}^{21} \left\{ \frac{\phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j}}{2} - \frac{\phi_{i-1,j-1} + \phi_{i-1,j}}{2} \right\} \frac{1}{2\Delta\xi} \right] \frac{1}{\Delta\eta} \\
& + Jg_{k+\frac{1}{2}}^{33} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta\xi} - Jg_{k-\frac{1}{2}}^{33} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta\xi} \\
& = \frac{JU_{i+\frac{1}{2}}^p - JU_{i-\frac{1}{2}}^p}{\Delta\xi} + \frac{JV_{j+\frac{1}{2}}^p - JV_{j-\frac{1}{2}}^p}{\Delta\eta} + \frac{JW_{k+\frac{1}{2}}^p - JW_{k-\frac{1}{2}}^p}{\Delta\xi} \quad (3.51)
\end{aligned}$$

以上のように、反変速度の修正の差分式を連続の式に代入して、圧力の Poisson 方程式を求める。このように求めた Poisson 方程式は差分化した連続の方程式を満足している。

一般曲線座標系における圧力の時間変化 ϕ の Poisson 方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(Jg^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) = \frac{1}{dt} \frac{\partial (JU^i)^p}{\partial \xi_j} \quad (3.52)$$

$$p^{n+1} = p + \phi \quad (3.53)$$

上付き添え字の p は予測子であることを意味する。上式の左辺は 2 次精度の中心差分により、右辺も同様に 2 次精度の中心差分を用いて、差分化する。

左辺の差分化したものを $i = 1, j = 1, 2, 3$ について書き下すと次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(Jg^{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Jg^{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(Jg^{13} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow J_{i+\frac{1}{2},j,k} g_{i+\frac{1}{2},j,k}^{11} \left(\frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{\Delta \xi} \right) - J_{i-\frac{1}{2},j,k} g_{i-\frac{1}{2},j,k}^{11} \left(\frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{\Delta \xi} \right) \\
&+ \left[J_{i+\frac{1}{2},j,k} g_{i+\frac{1}{2},j,k}^{12} \left(\frac{\phi_{i,j+1,k} + \phi_{i-1,j+1,k}}{2} - \frac{\phi_{i,j-1,k} + \phi_{i+1,j-1,k}}{2} \right) / \frac{1}{2\Delta \eta} \right. \\
&- J_{i-\frac{1}{2},j,k} g_{i-\frac{1}{2},j,k}^{12} \left(\frac{\phi_{i-1,j+1,k} + \phi_{i,j+1,k}}{2} - \frac{\phi_{i-1,j-1,k} + \phi_{i,j-1,k}}{2} \right) / \frac{1}{2\Delta \eta} \left. \right] / \Delta \xi \\
&+ \left[J_{i+\frac{1}{2},j,k} g_{i+\frac{1}{2},j,k}^{13} \left(\frac{\phi_{i,j,k+1} + \phi_{i+1,j,k+1}}{2} - \frac{\phi_{i,j,k-1} + \phi_{i+1,j,k-1}}{2} \right) / \frac{1}{2\Delta \zeta} \right. \\
&- J_{i-\frac{1}{2},j,k} g_{i-\frac{1}{2},j,k}^{13} \left(\frac{\phi_{i-1,j,k+1} + \phi_{i,j,k+1}}{2} - \frac{\phi_{i-1,j,k-1} + \phi_{i,j,k-1}}{2} \right) / \frac{1}{2\Delta \zeta} \left. \right] / \Delta \xi
\end{aligned} \tag{3.54}$$

同様にして Poisson 方程式の右辺の差分化は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial (JU^j)^p}{\partial \xi^j} = \frac{\partial (JU)^p}{\partial \xi} + \frac{\partial (JV)^p}{\partial \eta} + \frac{\partial (JW)^p}{\partial \zeta} \\
&\Rightarrow \frac{(JU^{i,j,k} - JU^{i-1,j,k})}{\Delta \xi} + \frac{(JV^{i,j,k} - JV^{i,j,k-1})}{\Delta \eta} + \frac{(JW^{i,j,k} - JW^{i,j,k-1})}{\Delta \zeta}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

3-6-4 圧力の時間変動分に対する制約条件

圧力の時間変動分の Poisson 方程式を SOR 法により解く際、一度吹き出しや吸い込みが出現すると、それらは消滅することなく時間的に増大して計算が発散してしまう可能性がある。そこで、本研究では、このような吹き出しや吸い込みを防いで計算を安定に進めるために、圧力の時間変動分に対する物理的な制約条件を用いて、圧力の Poisson 方程式を解いた。その方法は、主流に沿う方向へ総圧が必ず減少する性質を利用し、さらに各格子点上の総圧がタービン入り口総圧からタービン出口総圧の範囲内に収まると仮定する。プログラム上の具体的な処理方法としては、総圧による制約条件を付加する領域の格子点上において、主流方向の総圧の一階微分がゼロ以下となるようにし、次に、その総圧が入り口総圧より小さく、かつ入り口総圧から圧力損失を差し引いたものよりも大きくなるように設定する。

また、タービン入り口からタービン翼前縁の淀み点へ向かう方向も総圧が減少するので、この方向にも総圧による制約条件を課している。

翼背面側では加速と減速による逆圧力勾配の存在により流れが剥離する。このような剥離が発生する可能性のある領域では、総圧による制約条件をはずす必要がある。本研究では、剥離は翼の背面側で発生すると考えて、翼背面上でピッチ幅の 50% 以下の領域を、また腹面側では壁近傍について、総圧による制約条件をはずした。ただし、食い違い角が 30 度の場合は、後流域の幅が広がって主流流れが不安定になることを考慮して、翼の背面側だけでなく、腹面側でも剥離が発生する可能性があると考えて、ピッチ幅の 12% の領域で制約条件をはずした。

3-6-5 時間刻みと最小格子幅

境界層厚さは、実験により 1.03~2.76 mm と計測されている。この値を用いて最小格子幅を計算する。境界層内に発生する剥離現象を捉えるためには、最低 3 点の格子点が必要と考えられる。よって、最小格子幅 $\Delta\eta_{\min}$ は、境界層厚さ（実測値） $\Delta\eta_{bl}$ を必要格子点数に 1 を加えた値で割って、翼弦長で無次元化することによって得られる。境界層厚さ $\Delta\eta_{bl}$ については、より小さい方を選ぶ。翼弦長 L は 152.0mm であるから、

$$\Delta\eta_{bl} / L = 1.03 / 152.0 = 0.0067 \quad (3.56)$$

$$\Delta\eta_{\min} = \frac{1}{(3+1)} \times (\Delta\eta_{bl} / L) = 0.0022 \quad (3.57)$$

クーラン数は次式で表される無次元数である。

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x} u \quad (3.58)$$

その物理的な意味は、 $\Delta t u$ は時間刻み幅の間に移動する距離である。これを格子幅 Δx で割ると、 Δt の間に何個分の格子間を移動したかがわかる。これがクーラン数の意味である。

時間刻みは、計算時間を節約するために、できるだけ大きな時間刻み幅を用いることが望ましい。一般曲座標系の計算格子の場合は格子が不等間隔なので、最も格子幅が狭いところで時間刻みの値を決めなければならない。

空間の次元数が増える場合には、各方向のクーラン数を加えて、それが 1.0 を超えないことが制約条件になる。

$$C_x + C_y + C_z < 1.0 \quad (3.59)$$

$$C_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} u, \quad C_y = \frac{\Delta t}{\Delta y} v, \quad C_z = \frac{\Delta t}{\Delta z} w \quad (3.60)$$

3-7 境界条件.

3-7-1 壁面境界条件

翼表面での境界条件は固着 (no-slip) とする。ここでコロケート配置における速度の境界条件を示す。計算領域の境界の外側には、さらにもう一列仮想セルを設ける。仮想セルは計算領域をぐるりと囲むように配置されている。図 3.3 に一般曲線座標系における固体壁を挟む実セルと仮想セルの速度の境界条件を示す。添え字 $j = j - \frac{1}{2}$ の位置を壁面とすると、実セルと仮想セルにおいてそれぞれ、連続の式が満たされなければならないから、
(実セル)

$$Cont.eq = \frac{\left(JU_{i+\frac{1}{2},j,k} - JU_{i-\frac{1}{2}} \right)}{\Delta \xi} + \frac{\left(JV_{i,j+\frac{1}{2},k} - 0 \right)}{\Delta \eta} + \frac{\left(JW_{i,j,k+\frac{1}{2}} - JW_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right)}{\Delta \zeta} = 0 \quad (3.61)$$

(仮想セル)

$$Cont.eq = \frac{\left(JU_{i+\frac{1}{2},j-1,k} - JU_{i-\frac{1}{2},j-1,k} \right)}{\Delta \xi} + \frac{\left(0 - JV_{i,j-\frac{2}{3},k} \right)}{\Delta \eta} + \frac{\left(JW_{i,j-1,k+\frac{1}{2}} - JW_{i,j-1,k-\frac{1}{2}} \right)}{\Delta \zeta} = 0 \quad (3.62)$$

固着の場合、壁面に平行な流束成分は壁面境界上でゼロとなるように設定する。
図 3.3 より

$$JU_{i+\frac{1}{2},j-1,k} = -JU_{i-\frac{1}{2},j,k} \quad JW_{i,j-1,k+\frac{1}{2}} = -JW_{i,j,k-\frac{1}{2}} \quad (3.63)$$

上式を実セルと仮想セルにおける連続式に代入して足し合わせると、以下のような流束の境界条件を得る。

$$JV_{i,j-\frac{3}{2},k} = JV_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (3.64)$$

セル中心に配置されている速度 u は、壁面境界上でゼロとなるように決める。

$$\begin{aligned} u_{i,j,\min,k} &= -u_{i,j,\min-L,k} & v_{i,j,\min,k} &= -v_{i,j,\min-L,k} \\ w_{i,j,\min,k} &= -w_{i,j,\min-L,k} \end{aligned} \quad (3.65)$$

本論文では、上で述べた固着条件よりさらに厳しい条件を壁面に課しており、壁面に垂直な方向の反変速度ベクトル成分 JV を壁面上と仮想セルの境界面上でゼロとしている。 JV をゼロとすることにより、メトリックスを用いてカルテシアン座標系速度ベクトル成分 v の境界値を求めることができる。圧力の壁面境界条件は、壁面に垂直な方向の圧力の一階微分をゼロとする。

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad (3.66)$$

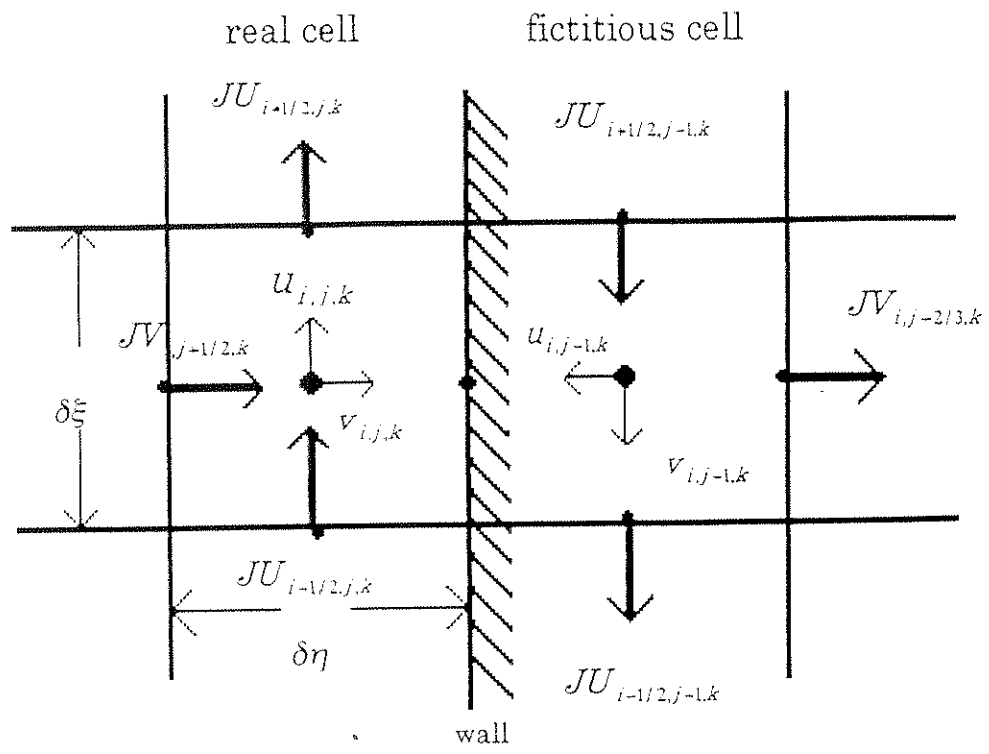


Fig. 3. 3 Boundary Condition of Solid Surface

3-7-2 流入・流出境界条件

流入境界では、速度と圧力の両方を仮想セルで実験値に固定する。このとき、流入面に垂直な方向の連続の式を満足するように速度と流束を決めることが重要である。流出境界では、速度と圧力の境界値を以下に示す smooth condition により求めた。ここで、 n は境界に垂直な方向を、 f は速度を表す。

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial n^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial n^2} = 0 \quad (3.67)$$

壁面及び流入流出境界を除く残りの境界全てについては、周期境界条件を課した。図3.4に計算領域と境界条件を示す。

境界条件

inlet	: uniform flow	$JU = 0, JV, p = \text{fixed}, \frac{\partial(JW)}{\partial\eta} = 0$
outlet	: smooth condition	$\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} = 0, f = u, p, JU$
airfoil surface	: no slip	
side wall	: periodic	$\overline{a1a2}, \overline{c1c2}, \overline{a3a4}, \overline{c3c4}$
wake	: periodic	$\overline{b4b3}, \overline{b3b4},$

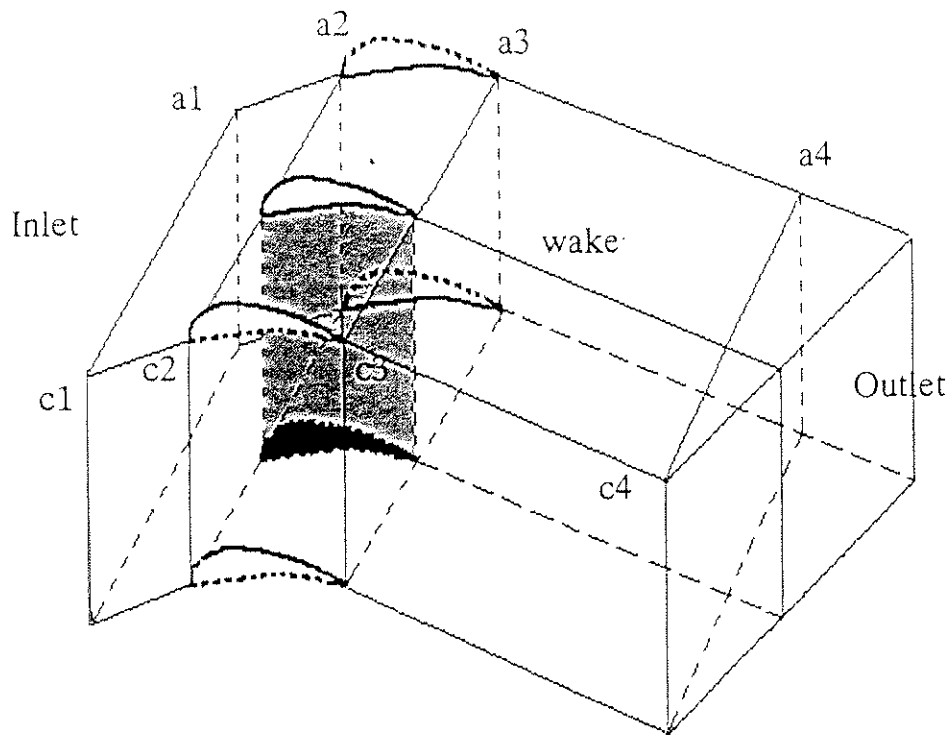


Fig. 3.4 Computational Domain

3-8 格子生成

3-8-1 境界適合格子

物体周りの流れ場の数値解析を行う際、一般的に、物体境界に沿った境界適合格子が用いられている(中橋・藤井⁽²³⁾)。楕円型微分方程式を用いた境界適合格子形成法は、Thompson et al.⁽²⁹⁾によって開発され、Steger ら⁽³⁰⁾によって境界適合格子上での陰的差分法が提案されて以来、近年広く用いられるようになった。格子生成に楕円型微分方程式を用いる場合、解析空間の境界を全て決めればその内部を決定することができ、さらに物理面と写像面の一对一の対応が保証される。また、他の方法に比べて、物体境界に沿う滑らかな格子を作ることができる利点がある。

二次元物理空間 (x, y) から計算空間 (ξ, η) への写像関係は、境界での格子点分布が与えられているとき、内部点の写像関係は楕円型偏微分方程式を満足することにより得られる。楕円型微分方程式としては、格子点分布を制御するために Poisson 方程式が用いられる。この Poisson 方程式を、緩和法を用いて繰り返し計算を行うことにより境界内部の格子点分布を求める。

3-8-2 格子のトポロジー

複雑な物体形状周りの流れを計算する場合、座標変換によって物理空間を計算空間に写像して計算を行うが、このとき、計算に適した格子トポロジーを選ぶことが重要である。構造格子の代表的な格子トポロジーには、C 型、O 型、H 型がある。翼周りの格子を例に挙げると、例えば、O 型格子は、翼型後縁部分の格子直交性を維持することが困難である。H 型格子は、前縁が特異点となるため、その付近の取り扱いが難しい。C 型格子は、格子の生成が比較的容易で、格子の直交性を維持することができる。これより、本研究では、C 型格子を二次元翼周りに生成した。格子点数は、計算空間で ξ 、 η 、 ζ 方向にそれぞれ $259 \times 30 \times 30 = 233100$ 点とした。 ξ は主流に沿う方向を、 η は翼面に垂直な方向を、 ζ はスパン方向を表す。

3-8-3 後流境界の形状

物理空間は座標変換係数を用いて図 3. 5 (b)に示すような計算空間へと変換される。図 3. 5 (a)の物理空間において中心部の翼は、翼正圧面と翼負圧面によって上下に挟まれるようにして配置されている。翼前縁及び翼後縁から等距離の直線上は、圧力一定であり、タービン入り口圧力（固定）とベルヌーイの定理から求めたタービン出口圧力が配置される。流入部分には、鋭角の流入境界が存在するために、格子の直交性が悪くなるが、これは、翼面上の格子点数の配置を工夫すれば、直交性を維持することができる。後流境界は、翼後縁から等距離の直線上でカットした場合、後流境界に鋭角の部分ができるために、直交性の良い格子の生成は不可能である。そこで、本研究では、いったん、流れに直交するような後流境界形状を用いて格子を生成した後、翼後縁から等距離の直線を通るセルを選んで、これを後流境界セルとした。これらのセルに、後流境界条件を適用する。この格子の利点は、直交性に優れ、かつ、後流領域の無駄な格子点を無くすることができることである。また、この計算領域の全ての境界条件は、壁面境界条件、周期境界条件、流入・流出境界条件で記述することができる。図 3. 6 に各食い違い角における計算格子を示す。この図から、食い違い角が大きいほど後流域の幅が狭くなることがわかる。

3-9 翼型

翼型の形状は、翼弦長 152mm 、翼幅 500mm 、反り角 107° の二次元翼で、翼列の節弦比は 0.7 である。翼列の配置を図 3. 7 に、翼型の座標を表 3. 2 に示す。

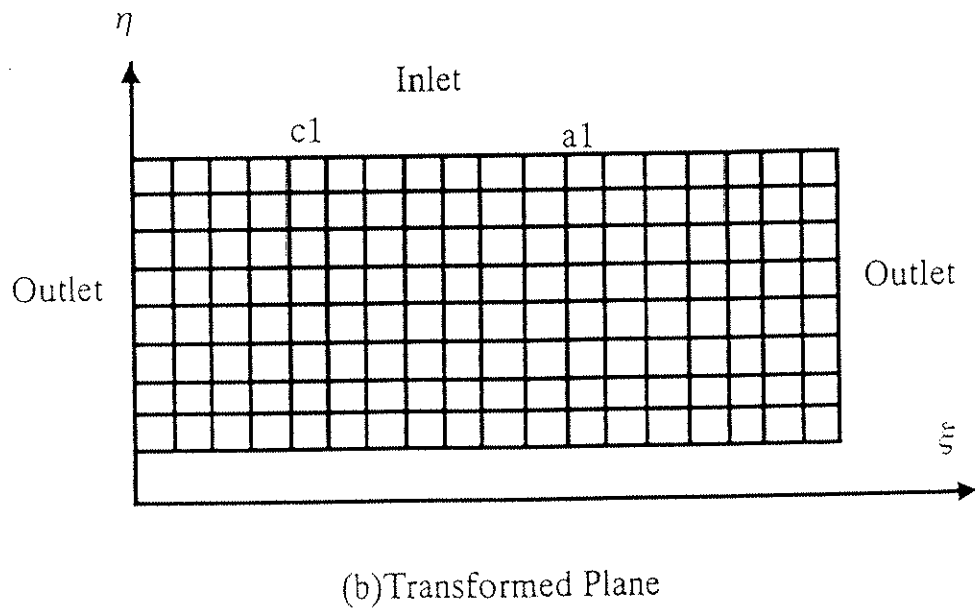
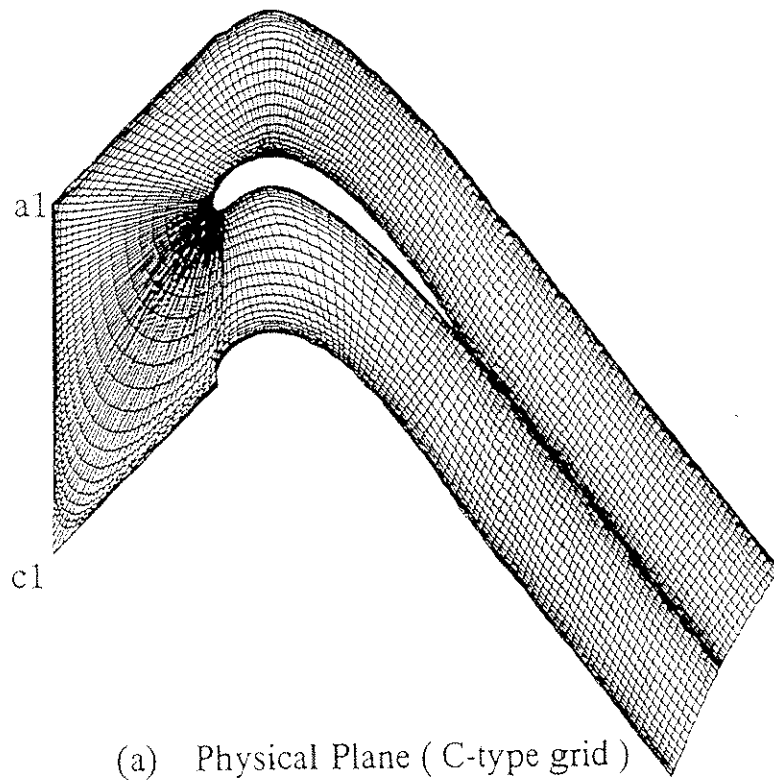
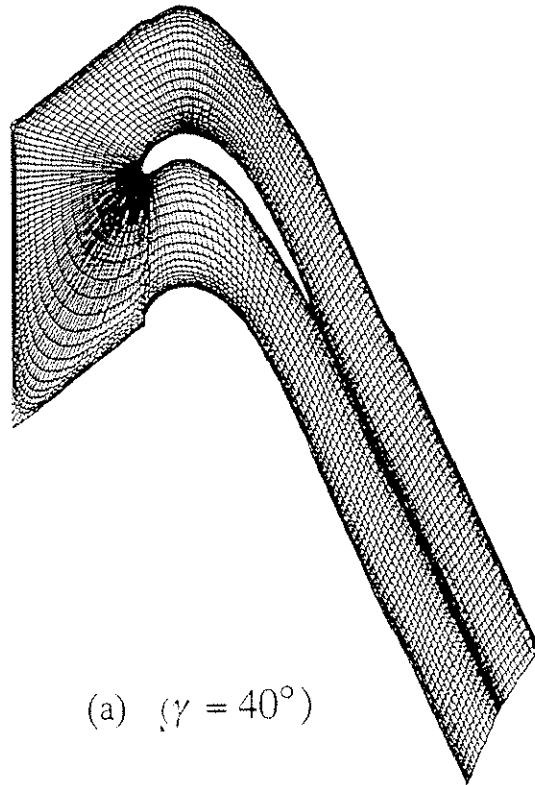
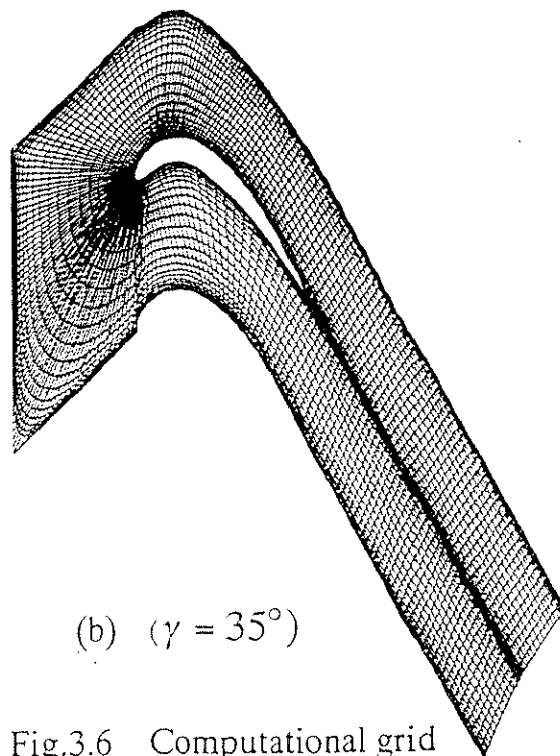


Fig. 3.5 Field transformation



(a) ($\gamma = 40^\circ$)



(b) ($\gamma = 35^\circ$)

Fig.3.6 Computational grid

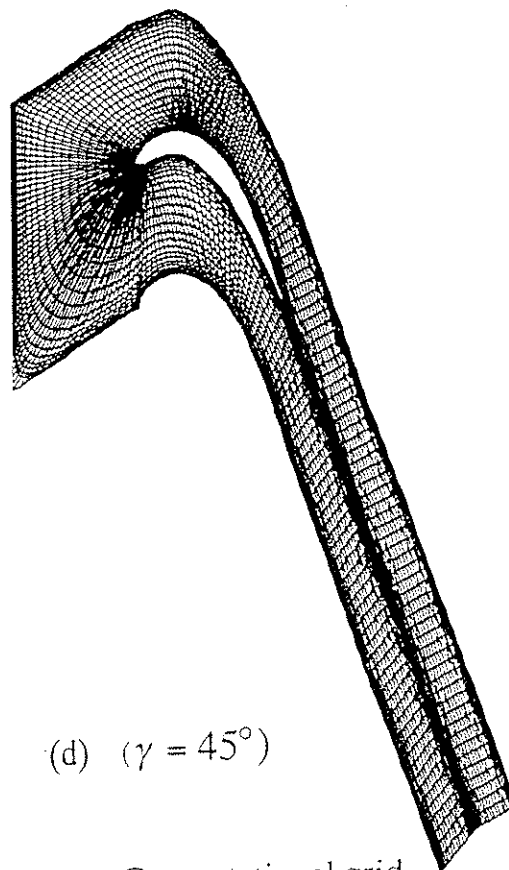
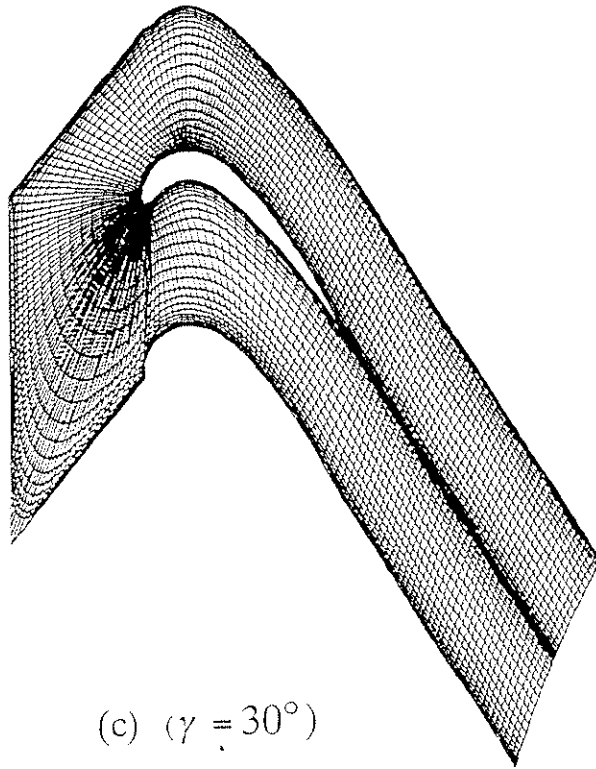


Fig.3.6 Computational grid

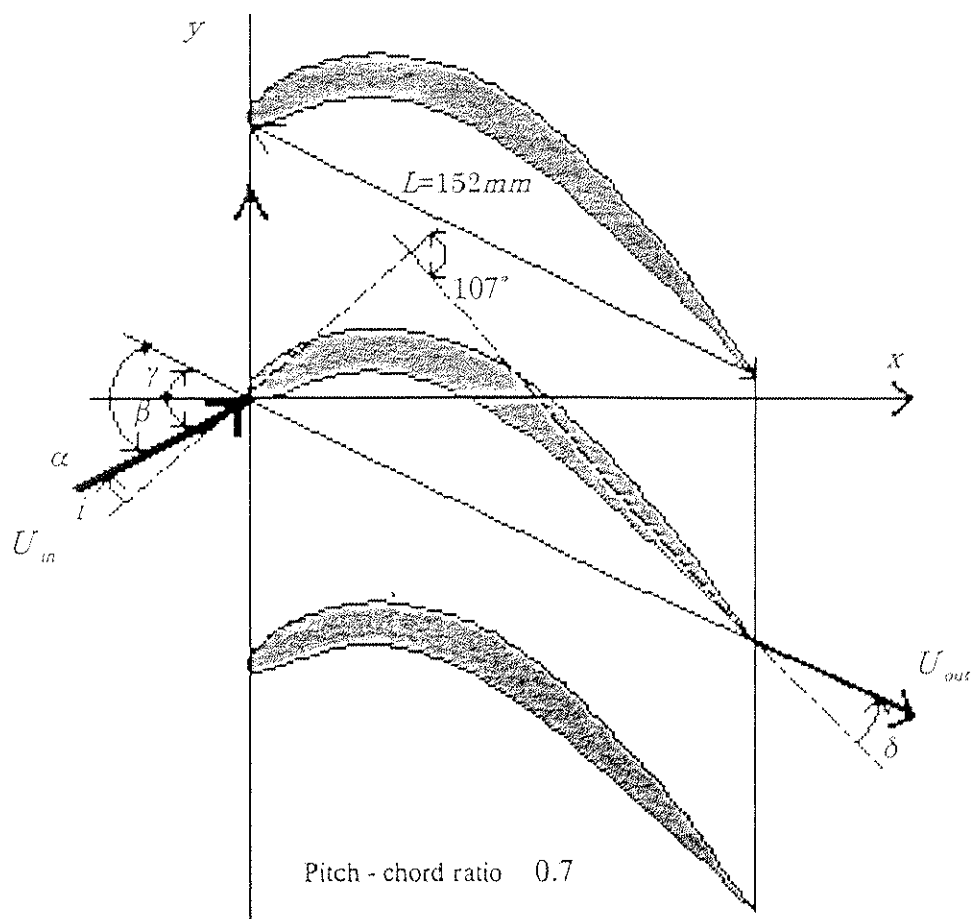


Fig.3. 7 Cascade geometry

Table 3-2 Coordinate of the turbine airfoil section

x / Chold length	y / Chold length
0.94284160E+00	0.02070000E+00
0.88560560E+00	0.04240000E+00
0.79388570E+00	0.07610000E+00
0.70177050E+00	0.10826000E+00
0.60933050E+00	0.13823880E+00
0.51640050E+00	0.16487330E+00
0.42313010E+00	0.18699910E+00
0.36499470E+00	0.19755720E+00
0.30710390E+00	0.20473330E+00
0.25045250E+00	0.20742310E+00
0.19648990E+00	0.20413120E+00
0.14824370E+00	0.19338260E+00
0.10937260E+00	0.17467190E+00
0.07920000E+00	0.14740150E+00
0.05480000E+00	0.10856950E+00
0.04230000E+00	0.07960000E+00
0.03050000E+00	0.04757030E+00
0.02160000E+00	0.02470000E+00
0.01550000E+00	0.01280000E+00
0.01060000E+00	0.00608000E+00
0.00720000E+00	0.00289000E+00
0.00459000E+00	0.00123000E+00
0.00000000E+00	0.00000000E+00
-0.00475000E+00	0.00072100E+00
-0.00753000E+00	0.00202000E+00
-0.01120000E+00	0.00490000E+00
-0.01670000E+00	0.01160000E+00
-0.02330000E+00	0.02410000E+00
-0.03170000E+00	0.05010000E+00
-0.03680000E+00	0.09100000E+00
-0.03430000E+00	0.13368650E+00
-0.00910000E+00	0.20600740E+00
0.04540000E+00	0.26574530E+00
0.11654330E+00	0.29909130E+00
0.18826570E+00	0.30987890E+00
0.25634820E+00	0.30738220E+00
0.32113070E+00	0.29711010E+00
0.38334040E+00	0.28191890E+00
0.44379520E+00	0.26334580E+00
0.53762960E+00	0.22882120E+00
0.62888040E+00	0.19016810E+00
0.71823750E+00	0.14850870E+00
0.80627670E+00	0.10476120E+00
0.89328060E+00	0.05940000E+00
0.94724130E+00	0.03040000E+00
1.00050400E+00	-0.00000596E-02

3-10 初期条件

本計算では、スパン方向に無限に長い、二次元断面を持つ直線翼列周りを計算の対象としているので、圧力と速度の初期値は、二次元平面（ $\xi-\eta$ 平面）上で計算したのち、スパン方向（ ζ 方向）に積み重ねれば良い。

次に、圧力の初期値の計算の手順を示す。実験により求められた翼面上の静圧と翼列入り口の静圧、及び、ベルヌーイの定理より求めた翼列出口の静圧を用いて、計算領域のすべての境界での圧力を線形補間によって計算する。圧力の境界値が決められると、楕円型の方程式を解いて、境界の内部の圧力を求めることができる。ここで、翼列出口の流速は、入り口と出口で連続の式を満たすように決める。次に、2次元のラプラス方程式を解いて、境界内部の圧力を計算する。

速度の初期値は、まず、速度のノルム $|u|$ を圧力の初期値から、ベルヌーイの定理を用いて計算される。その後、計算格子の傾きにしがたって、 u, v 成分に分解すれば良い。

タービン入り口では、既に乱流が発達しているとみなして、LES の計算を開始する。その方法としては、実験により求められたタービン入り口での乱流強度を翼列入り口の速度成分に反映させる。具体的な方法としては、翼列入り口境界上のセルで、0 から 1 までの乱数を発生させて、これを速度の SGS 成分とする。さらに、その二乗平均値が、乱流強度 Tu_{in} と流入速度 U_{in} の積の二乗に等しくなるように SGS 速度成分を修正し、入り口速度成分に足し合わせたものを、初期条件とした。

3-11 計算条件

計算条件を以下に示す。各食い違い角における流入速度と翼列入り口静圧、大気圧及びレイノルズ数は表 3. 3 に示す。

翼弦長	$L = 152\text{mm}$
節弦比	$\frac{s}{L} = 0.7$
翼列入り口の乱流強度	$Tu_{in} = 1.33\%$
迎え角	$\alpha = 78^\circ \quad \alpha + \beta = \gamma$
食い違い角	$\gamma = 45^\circ, 40^\circ, 35^\circ, 30^\circ$
動粘性係数	$\nu = 15.12 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$
空気の密度	$\rho = 1.205 \text{kg}/\text{m}^3$

Table 3-3 Numerical condition

γ	$U_{in}(m/s)$	$P_{Tin}(Pa)$	$P_{\infty}(Pa)$	R_s
30.0	8.42	100048	100148	$8.46 \cdot 10^4$
35.0	8.47	100358	100461	$8.51 \cdot 10^4$
40.0	8.44	99663	99791	$8.48 \cdot 10^4$
45.0	8.44	99663	99791	$8.48 \cdot 10^4$

3-1-2 結果

3-1-2-1 収束履歴

図 3.7(a)-(d)に収束状況を示す。縦軸は Poisson 方程式を SOR 法で解く際の残差を、横軸はタイムステップを表している。ここで食違い角が 40 度と 45 度の場合は、1000 ステップまで対流項の差分に風上差分法を用いて計算し、1000 ステップより後では QUICK を用いている。食違い角が 35 度と 30 度の場合については、400 ステップより後で対流項の差分を風上差分法から QUICK へ変更している。風上差分法は 1 次精度であり、この 1 次の誤差項は物理量の空間 2 階微分になっている。これは物理的には拡散を意味しており、この拡散は人工拡散と呼ばれ、ナビエ・ストークス方程式の拡散項よりもさらに拡散を過大に計算することになる。人工拡散がある場合、実際のレイノルズ数よりも小さいレイノルズ数の流れの計算を行うことになるが、剥離を伴う流れ場の解析においては数値不安定性が発生しやすいため、風上差分法を用いて或る程度、解を収束させてから対流項の差分法を QUICK へと変更することは、計算の発散を防ぐ有効な方法と考えられる。

図 3.7(a)の食違い角が 40 度における収束状況を見ると、いったん残差が増大した後減少して、200 ステップ以降では残差がほとんど変化しないことがわかる。また、対流項の差分を風上差分から QUICK へと変更する 1000 ステップ以降でも残差はあまり変わらない。これより、食違い角が 40 度の場合は、1200 ステップ目($t = 0.012$)についての流れ場について調べることにする。

図 3.7(b)の食違い角が 35 度の場合の収束状況は、100 ステップ以降で残差がほとんど変化しないことがわかる。よって、食違い角が 35 度については 800 ステップ目($t = 0.008$)の流れ場を調べる。

図 3.7(c)及び(d)の食違い角が 30 度と 45 度の場合については、200 ステップ以降で残差の変化がほとんど見られなくなる。よって、食違い角 30 度においては、対流項の差分法を変更する 400 ステップ目よりも後の 800 ステップ目($t = 0.008$)での、食違い角 45 度においては 1200 ステップ目($t = 0.012$)での流れ場の詳細を調べることにする。

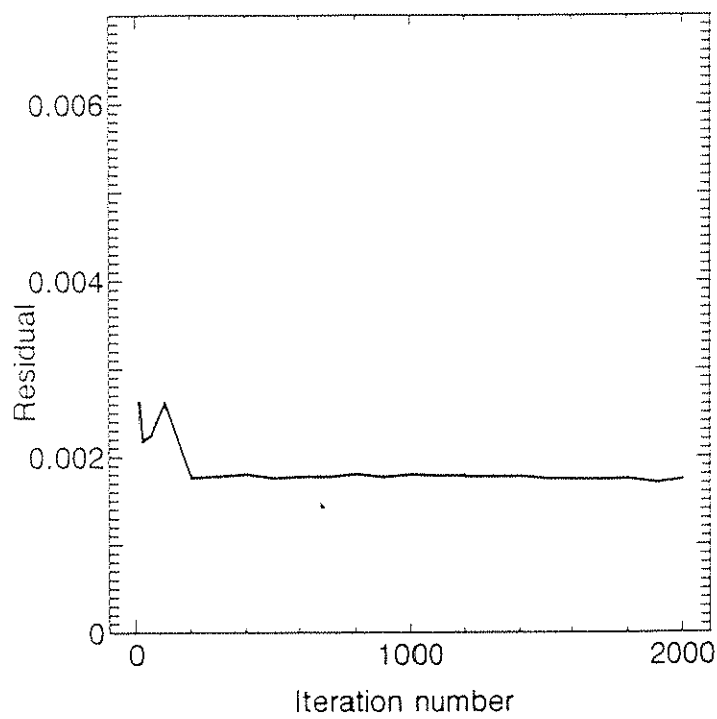


Fig.3.8(a) Convergence history

$$\gamma = 40^\circ$$

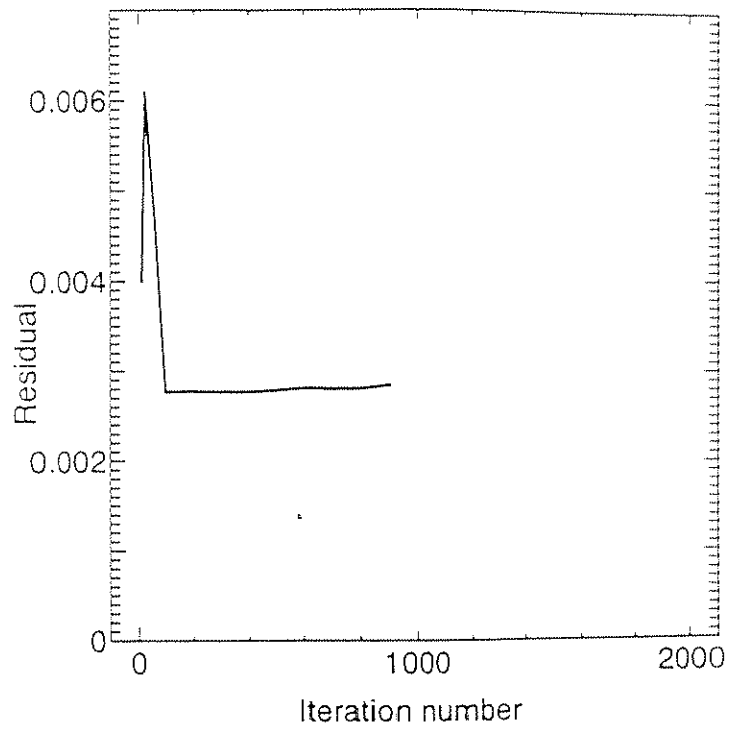


Fig.3.8(b) Convergence history

$$\gamma = 35^\circ$$

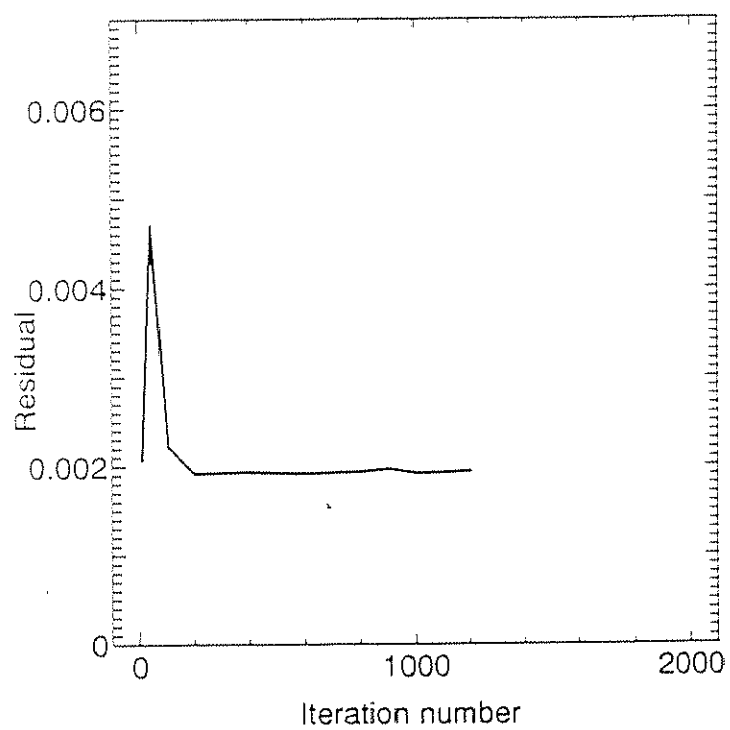


Fig.3.8(c) Convergence history

$$\gamma = 30^{\circ}$$

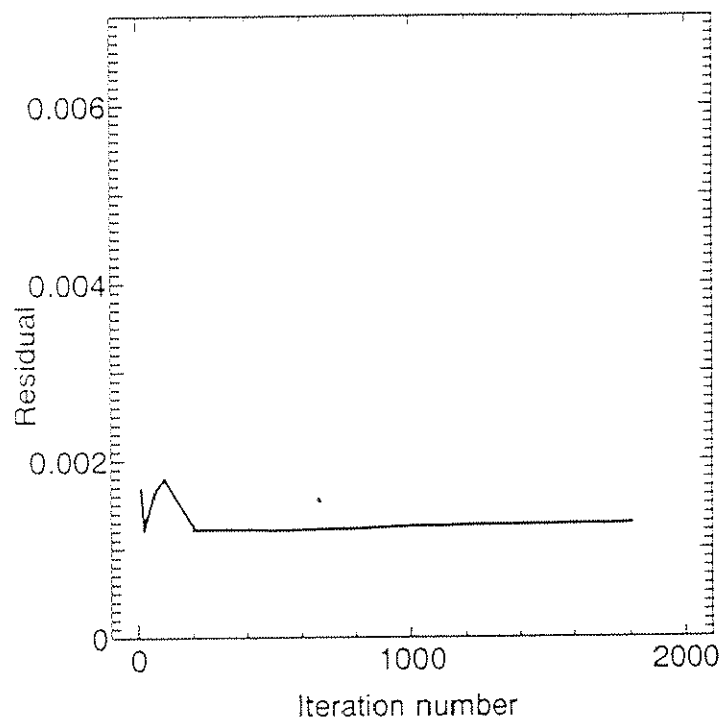


Fig.3.8(d) Convergence history

$$\gamma = 45^\circ$$

3-12-2 翼面圧力分布図

翼型の性能を評価するために、食いだい角と翼面圧力分布の関係について調べる。ここで、食いだい角が40度においては、翼の背面側の制約条件をはずす幅の広さをピッチの5分の1としている。翼後縁の後流域でも背面側と同様にピッチの5分の1幅の領域で制約条件をはずしている。翼の腹面側とその後流域では、境界近傍のみ制約条件をはずしている。

図3.9(a)は食いだい角が40度、 $t = 0.012$ の場合の翼面圧力分布を示す。縦軸は翼面上の静圧を入口静圧を用いて無次元化したものをスパン方向に空間平均した値を、横軸は翼先端から水平方向の距離を表す。また、実線は腹側（正圧面側）の静圧を、点線は背側（負圧面側）の静圧を表す。丸印は実験値（村田・阿部ら⁽¹⁶⁾）を表す。これを見ると、 $x=0.20$ で背面側静圧が上昇しており、この位置で剥離が生じていることが予測される。腹面側の静圧は翼先端部でわずかに変化するが、翼の後縁部ではほぼ一定の高い静圧を示している。これは、腹面側の壁近傍で流れがあまり乱れずに壁面に沿って流れていくためと考えられる。

食いだい角が35度の場合は、40度の場合に比べて後流域のピッチ方向幅が広くなるために、より不安定な流れとなる。そこで、翼背面側とその後流域では2分の1ピッチ幅分について総圧による制約条件をはずしている。翼腹面側とその後流域では、境界近傍で制約条件をはずしている。

食いだい角が30度の場合は、35度の場合に比べてより後流域のピッチ方向の幅が広がるために、さらに不安定な流れ場となる。このとき、翼背面側だけでなく翼腹面側で流れがはがれる可能性があると考えられる。そこで、背面側とその後流域では、ピッチ方向幅の2分の1の領域について制約条件をはずし、さらに腹面側でもピッチ方向の8分の1幅分について制約条件をはずしている。

食いだい角が45度の場合の制約条件をはずす領域については、40度の場合と同様とした。

図3.9(b)は $\gamma = 35^\circ$ 、 $t = 0.008$ における翼面圧力分布図を示す。翼背面側の圧力分布を見ると、 $x = 0.13$ で翼背面側の静圧が上昇し始めているが、この位置で剥離が生じていることが予想される。これは $\gamma = 40^\circ$ の場合に比べて、翼先端に近い位置であり、食いだい角が小さくなるにつれて、剥離の生じる位置が上流へ移動する傾向があることがわかる。腹面側の静圧は、翼先端に近い部分では、計算結果は実測値より低い値を示している。この理由としては、食いだい角が小さくなることによって後流域が広がったことにより主流流れの不安定さが増して、その影響が背側だけでなく腹面側にも現れたと考えられる。また、翼後縁部では、食いだい角が40度の場合と同様に、静圧が高い値を保って一定となっ

ているが、これは腹面近傍で流れがはがれることなく壁面に沿ってほぼ一定の流速で流れていることを表している。

図 3.9(c)は $\gamma = 30^\circ$ 、 $t = 0.008$ における翼面圧力分布図を示す。この図から、 $x = 0.14$ で背面側静圧が上昇しており、この部分で剥離が生じていることが予測される。これより、 $\gamma = 30^\circ$ では、 $\gamma = 35^\circ$ の場合よりも僅かに下流側で剥離が生じているが、 $\gamma = 40^\circ$ の場合に比べて、両者はより上流側で剥離が生じており、食い違い角が小さくなるに従い剥離が発生しやすくなる傾向があることがわかる。

図 3.9(d)は $\gamma = 45^\circ$ 、 $t = 0.012$ の翼面圧力分布であるが、これより $x = 0.17$ で背面側の静圧が上昇し始めている。よって、この位置で剥離の発生が予測される。これは食い違い角が40度の場合よりも上流側となっている。この理由としては、食い違い角が45度の場合、40度の場合に比べてさらに後流域が狭くなるために、かえって流出部が不安定な流れになっていると考えられ、剥離が40度の場合よりも上流側で出現したことが考えられる。

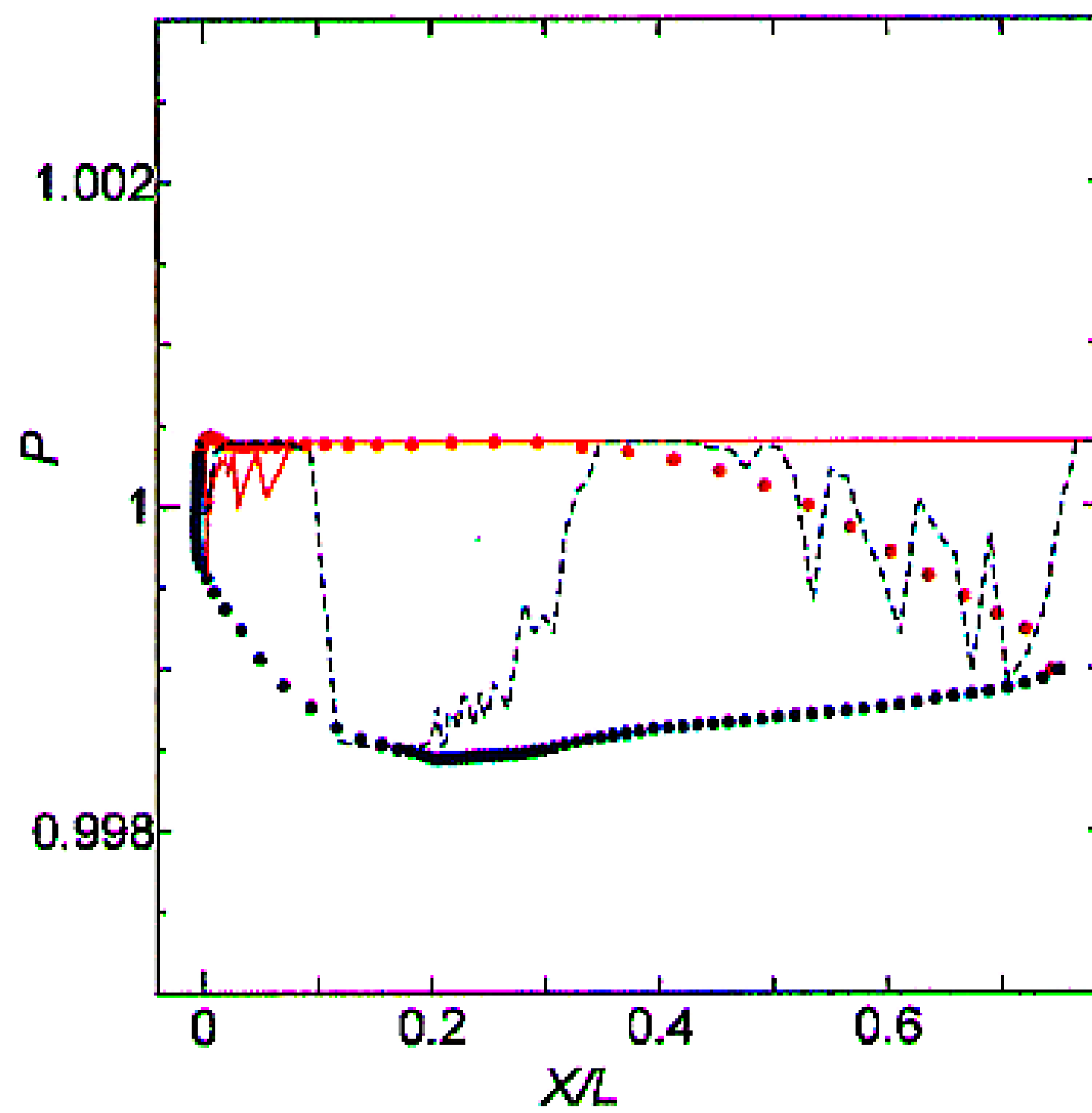


Fig.3.9 (a) Pressure Distribution on Airfoil Surface
 at $\gamma = 40.0^\circ$, $t = 0.012$ and $Re = 8.5 \times 10^4$
 - - - : upper surface ; — : lower surface ;
 •••• : Exp. (upper) ; •••• : Exp. (lower) .

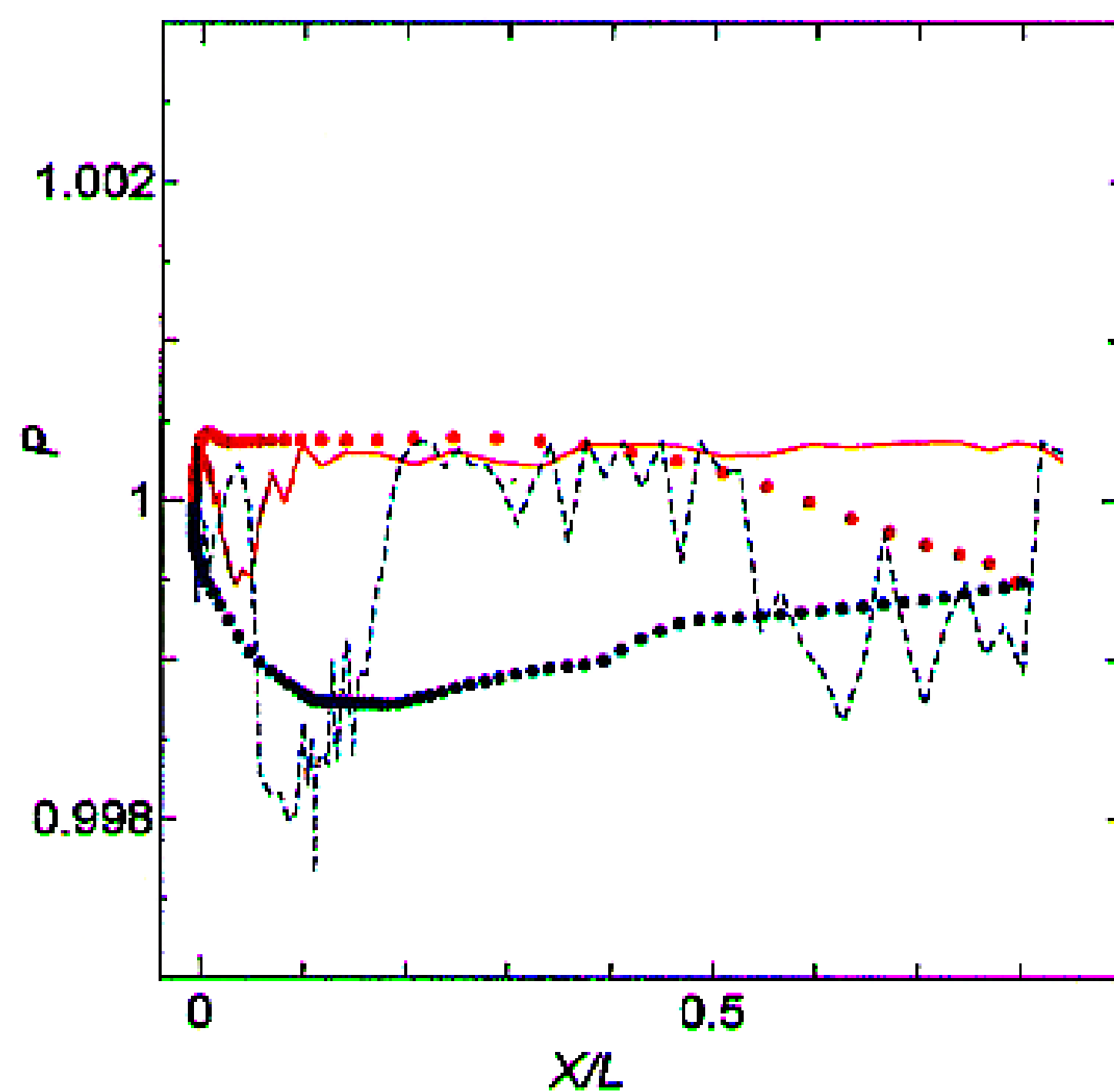


Fig.3.9(b) Pressure Distribution on Airfoil Surface

at $\gamma = 35.0^\circ$, $t = 0.008$ and $\text{Re} = 8.5 \times 10^4$

---:upper surface ; —:lower surface ;
:Exp. (upper) ;:Exp. (lower)

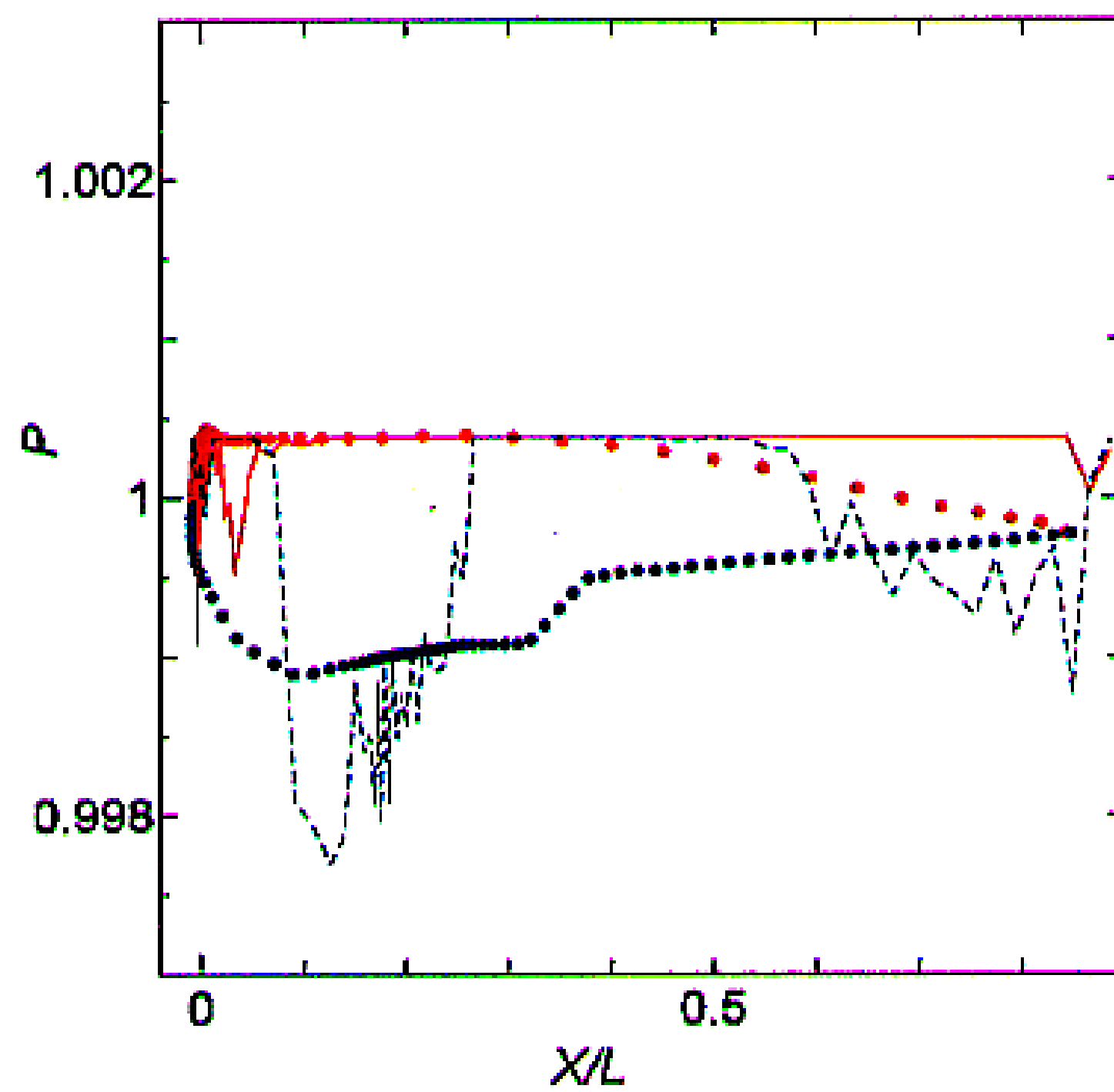


Fig.3.9(c) Pressure Distribution on Airfoil Surface

at $\gamma = 30.0^\circ$, $t = 0.008$ and $Re = 8.5 \times 10^4$

--- : upper surface ; — : lower surface ;
 ••••• : Exp. (upper) ; ••••• : Exp. (lower)

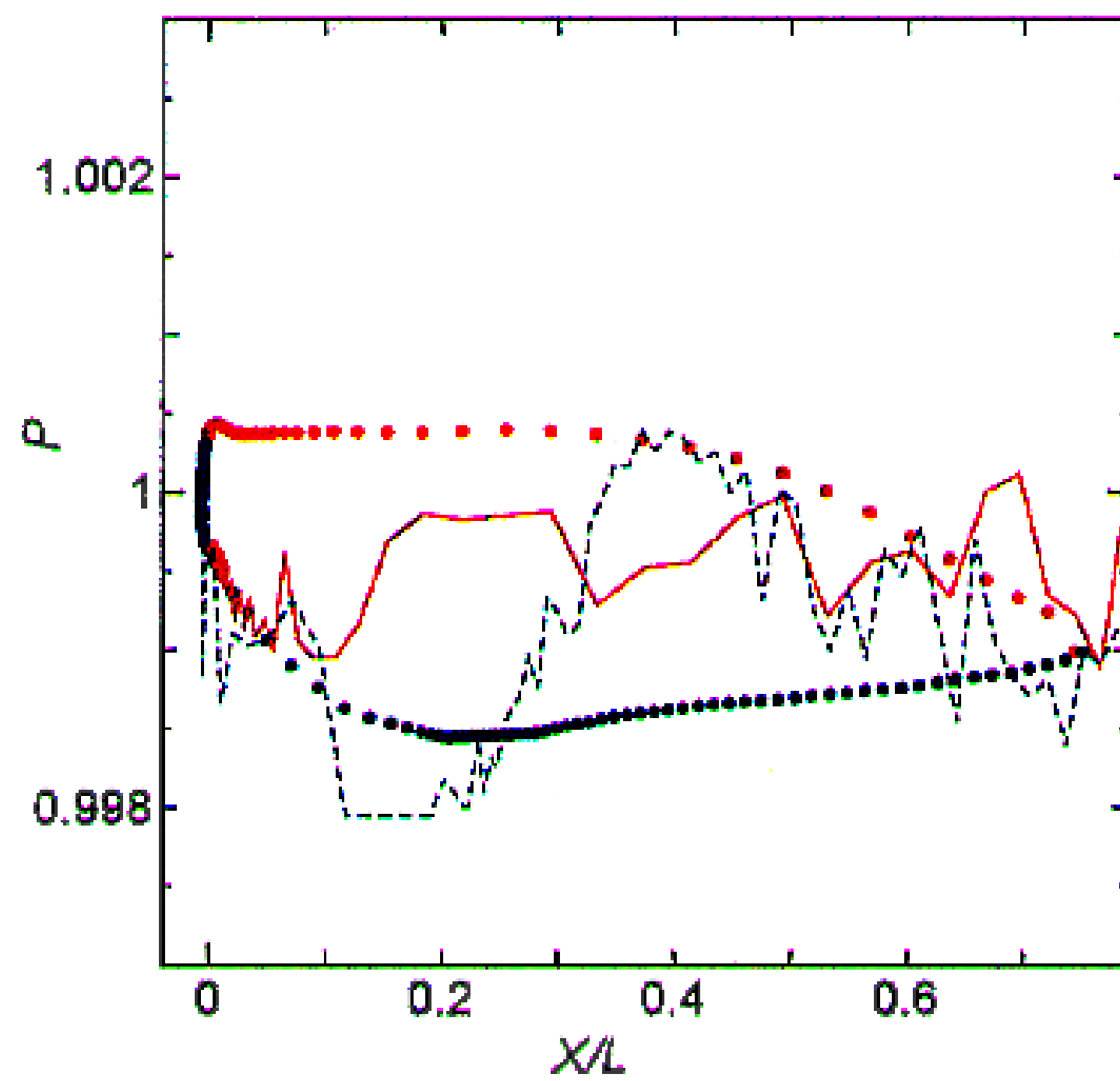


Fig.3.9(d) Pressure Distribution on Airfoil Surface

at $\gamma = 45.0^\circ$, $t = 0.012$ and $\text{Re} = 8.5 \times 10^4$

- - - : upper surface ; — : lower surface ;
 . . . : Exp. (upper) ; . . . : Exp. (lower)

3-1-3 第3章のまとめ

剥離渦を伴う流れに関する数値解析を行い、得られた翼面圧力分布と実験結果の比較検討を行い、以下の結論を得た。

- ・ 低レイノルズ数乱流域で作動するタービン翼列では、食い違い角の大きさによって剥離が生じる位置が変化し、翼特性に大きな影響を及ぼすことがわかった。
- ・ 食い違い角が小さくなるにつれて後流域のピッチ方向幅が広がり、主流の不安定性が増大することによって、剥離が生じる位置が上流側に移動する様子を捉えることができた。
- ・ 以上の結果から、実験によって得られた剥離特性の傾向と一致することが示された。