7 拡張された変調可能な直交系列より構成される周期完全相補系列

末広 [3][6] は N 差直交系列と呼ばれる系列によって構成される完全相補系列を提案した。さらに、末広は完全相補系列の概念を周期系列に拡張し、変調可能な直交系列より得られる周期完全相補系列を提案した。本節では、拡張された変調可能な直交系列によって構成される周期完全相補系列の構成法を提案し、その結果得られる系列が周期完全相補系列であることを証明する。また、これらの周期 N^2 の周期完全相補系列を用いて、周期 $2^k \cdot N^2$ の周期完全相補系列が構成可能であることを証明し、その構成法を提案する。

7.1 周期完全相補系列の構成法

本節では、拡張された変調可能な直交系列によって構成される周期完全相補系列の構成法について述べる。

第 5.1 節の式 (98) と同様に対角要素の絶対値が 1 である対角行列 B_{S0} を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} B_{S0} &= \left[b_S\left(i_0, i_1\right)\right] \\ b_S\left(i_0.i_1\right) &= \begin{cases} \exp\left(\sqrt{-1}\theta_S(i_0)\right) & (i_0 = i_1) \\ 0 & (i_0 \neq i_1) \end{cases} \end{aligned} \tag{191}$$

さらに、式 (191) の $b_S(i_0, i_1)$ を用いて、行列 B_{S1} を以下のように定義する。

$$B_{S1} = \left[(-1)^{i_0} b_S(i_0, i_1)\right] \tag{192}$$

また、対角要素の絶対値が 1 である対角行列の左右を反転させた行列 B_{T0} を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} B_{T0} &= \left[b_T\left(i_0, i_1\right)\right] \\ b_T\left(i_0.i_1\right) &= \begin{cases} \exp\left(\sqrt{-1}\theta_T(i_0)\right) \\ (i_0 = (N-1-i_1) \pmod{N}) \\ 0 \\ (i_0 \neq (N-1-i_1) \pmod{N}) \end{cases} \end{aligned} \tag{193}$$

さらに、式 (193) の $b_T(i_0, i_1)$ を用いて、行列 B_{T1} を以下のように定義する。

$$B_{T1} = \left[(-1)^{i_0+1} b_T(i_0, i_1)\right] \tag{194}$$

例 7.1-1　ここで、$N=4$ とし、行列 $B_{S0}, B_{S1}, B_{T0}, B_{T1}$ の具体例を示す。B_{S0} を

$$B_{S0} = \begin{bmatrix} b_{S0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{S1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{S2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{S3} \end{bmatrix}$$

と定義すると、B_{S1} は以下のように、B_{S0} の奇数行の要素を -1 倍した行列である。

$$B_{S1} = \begin{bmatrix} b_{S0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{S1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{S2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_{S3} \end{bmatrix}$$

また、B_{T0} は以下のように、対角行列の各行を左右反転させた行列である。

$$B_{T0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{T0} \\ 0 & 0 & b_{T1} & 0 \\ 0 & b_{T2} & 0 & 0 \\ b_{T3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

さらに、B_{T1} は以下のように、B_{T0} の偶数行の要素を -1 倍した行列である。

$$B_{T1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -b_{T0} \\ 0 & 0 & b_{T1} & 0 \\ 0 & -b_{T2} & 0 & 0 \\ b_{T3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

次に、F_{Nm} を第 5.1 節の式 (97) において定義された一般化された $N \times N$DFT 行列とする。また、第 6.1 節の式 (106) と同様に $N \times N$ 置換行列 D_S, D_T を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} D_S &= \left[d_S(i_0, i_1)\right], \\ d_S(i_0, i_1) &= \begin{cases} 1 & (i_0 = h_S(i_1)) \\ 0 & (i_0 \neq h_S(i_1)) \end{cases} \end{aligned} \tag{195}$$

$$\begin{aligned} D_T &= \left[d_T(i_0, i_1)\right], \\ d_T(i_0, i_1) &= \begin{cases} 1 & (i_0 = h_T(i_1)) \\ 0 & (i_0 \neq h_T(i_1)) \end{cases} \end{aligned} \tag{196}$$

ここで、h_S, h_T はともに以下のような全単射である。

$$\begin{aligned} h_S &: X \to X & (197)\\ h_T &: X \to X & (198) \end{aligned}$$

これらの行列を用いて、四つの $N \times N$ 行列 S_0, S_1, T_0, T_1 を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} S_0 &= \sqrt{N} \cdot \overline{F_{Nm}} B_{S0} D_S, & (199)\\ S_1 &= \sqrt{N} \cdot \overline{F_{Nm}} B_{S1} D_S, & (200)\\ T_0 &= \sqrt{N} \cdot \overline{F_{Nm}} B_{T0} D_T, & (201)\\ T_1 &= \sqrt{N} \cdot \overline{F_{Nm}} B_{T1} D_T & (202) \end{aligned}$$

すると、$N \times N$ 行列 S_0 の (i_0, i_1) 要素は、

$$\begin{aligned} & \sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \overline{f_{Nm}(i_0, k)} b_S(k, l) \right) d_S(l, i_1) \\ &= \sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{f_{Nm}(i_0, l)} b_S(l, l) d_S(l, i_1) \\ &= \sqrt{N} \cdot \overline{f_{Nm}(i_0, h_S(i_1))} b_S(h_S(i_1), h_S(i_1)) \\ &= b_S(h_S(i_1), h_S(i_1)) \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} m i_0 h_S(i_1) \right) \qquad (203) \end{aligned}$$

である。同様にして、$N \times N$ 行列 S_1 の (i_0, i_1) 要素は、

$$\begin{aligned} & \sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \overline{f_{Nm}(i_0, k)} (-1)^k b_S(k, l) \right) d_S(l, i_1) \\ &= \sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{f_{Nm}(i_0, l)} (-1)^l b_S(l, l) d_S(l, i_1) \\ &= \sqrt{N} (-1)^{h_S(i_1)} \overline{f_{Nm}(i_0, h_S(i_1))} b_S(h_S(i_1), h_S(i_1)) \\ &= (-1)^{h_S(i_1)} b_S(h_S(i_1), h_S(i_1)) \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} m i_0 h_S(i_1) \right) \qquad (204) \end{aligned}$$

である。また、$N \times N$ 行列 T_0 の (i_0, i_1) 要素は、

$$\sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \overline{f_{Nm}(i_0, k)} b_T(k, l) \right) d_T(l, i_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{N}\sum_{l=0}^{N-1}\overline{f_{Nm}(i_0,(N-1-l) \pmod N)} \\
&\quad \cdot b_T((N-1-l) \pmod N, l)\, d_T(l,i_1) \\
&= \sqrt{N}\cdot\overline{f_{Nm}(i_0,(N-1-h_T(i_1)) \pmod N)} \\
&\quad \cdot b_T((N-1-h_T(i_1)) \pmod N, h_T(i_1)) \\
&= b_T((N-1-h_T(i_1)) \pmod N, h_T(i_1)) \\
&\quad \cdot\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}mi_0(N-1-h_T(i_1))\right)
\end{aligned}
\tag{205}
$$

である。さらに、$N\times N$ 行列 T_1 の (i_0,i_1) 要素は、

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{N}\sum_{l=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\overline{f_{Nm}(i_0,k)}(-1)^{k+1}b_T(k,l)\right)d_T(l,i_1) \\
&= \sqrt{N}\sum_{l=0}^{N-1}\overline{f_{Nm}(i_0,(N-1-l) \pmod N)}(-1)^{N-1-l+1} \\
&\quad \cdot b_T((N-1-l) \pmod N, l)\, d_T(l,i_1) \\
&= \sqrt{N}\cdot\overline{f_{Nm}(i_0,(N-1-h_T(i_1)) \pmod N)}(-1)^{N-h_T(i_1)} \\
&\quad \cdot b_T((N-1-h_T(i_1)) \pmod N, h_T(i_1)) \\
&= (-1)^{N-h_T(i_1)}b_T((N-1-h_T(i_1)) \pmod N, h_T(i_1)) \\
&\quad \cdot\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}mi_0(N-1-h_T(i_1))\right)
\end{aligned}
\tag{206}
$$

である。次に、$N\times N$ 行列 S_0,S_1,T_0,T_1 のそれぞれの N 個の行を結合して長さ N^2 の系列 $\{s_0(i)\},\{s_1(i)\},\{t_0(i)\},\{t_1(i)\}$ を得る。ここで、系列 $\{s_0(i)\},\{s_1(i)\},\{t_0(i)\},\{t_1(i)\}$ の第 (i_0N+i_1) 番目の要素はそれぞれ行列 S_0,S_1,T_0,T_1 の (i_0,i_1) 要素である。次に $b_S(i_0,i_1),b_T(i_0,i_1)$ を以下のように定義しなおす。

$$
b_S(i_0,i_1) = \begin{cases}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}c_S(i_0)\right) & (i_0=i_1)\\ 0 & (i_0\neq i_1)\end{cases} \tag{207}
$$

$$
b_T(i_0,i_1) = \begin{cases}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}c_T(i_0)\right) \\ (i_0=(N-1-i_1) \pmod N) \\ 0 \\ (i_0\neq(N-1-i_1) \pmod N)\end{cases} \tag{208}
$$

c_S,c_T はそれぞれ以下のような写像である。

$$
c_S : X\to R \tag{209}
$$

$$c_T \ : \ X \to R \tag{210}$$

$s_0(i), s_1(i), t_0(i), t_1(i)$ はそれぞれ以下のように表される。

$$s_0\left(i\right) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left\{c_S\left(h_S(i_1)\right) + mi_0 h_S(i_1)\right\}\right) \tag{211}$$

$$s_1\left(i\right) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left\{c_S\left(h_S(i_1)\right) + mi_0 h_S(i_1)\right\}\right) \cdot (-1)^{h_S(i_1)} \tag{212}$$

$$\begin{aligned} t_0\left(i\right) = \exp&\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left\{c_T\left((N-1-h_T(i_1)) \pmod N\right)\right.\right. \\ &\left.\left. +mi_0\left(N-1-h_T(i_1)\right)\right\}\right) \end{aligned} \tag{213}$$

$$\begin{aligned} t_1\left(i\right) = \exp&\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left\{c_T\left((N-1-h_T(i_1)) \pmod N\right)\right.\right. \\ &\left.\left. +mi_0\left(N-1-h_T(i_1)\right)\right\}\right) \cdot (-1)^{N-h_T(i_1)} \end{aligned} \tag{214}$$

ここで、$i = i_0 N + i_1, 0 \le i \le N^2-1, 0 \le i_0 \le N-1, 0 \le i_1 \le N-1$ である。ここで、同じ c_S, h_S から得られる二つの系列 $\{s_0(i)\}, \{s_1(i)\}$ はペアを構成していると見なす。同様に、同じ c_T, h_T から得られる二つの系列 $\{t_0(i)\}, \{t_1(i)\}$ はペアを構成していると見なす。$\{s_0(i)\}, \{s_1(i)\}$ を周期系列と見なすと、任意のペア $\{s_0(i), s_1(i)\}$ の周期自己相関関数の和は以下のようになる。

$$s_0 * \overline{s_0}(i) + s_1 * \overline{s_1}(i) = \left(2N^2, 0, 0, \cdots, 0\right) \tag{215}$$

よって、$\{s_0(i), s_1(i)\}$ は周期相補系列である。同様に、$\{t_0(i)\}, \{t_1(i)\}$ を周期系列と見なすと、任意のペア $\{t_0(i), t_1(i)\}$ の周期自己相関関数の和は以下のようになる。

$$t_0 * \overline{t_0}(i) + t_1 * \overline{t_1}(i) = \left(2N^2, 0, 0, \cdots, 0\right) \tag{216}$$

よって、$\{t_0(i), t_1(i)\}$ も周期相補系列である。さらに、任意のペア $\{s_0(i),$ $s_1(i)\}$ と任意のペア $\{t_0(i), t_1(i)\}$ のペア $\{\{s_0(i), s_1(i)\}, \{t_0(i), t_1(i)\}\}$ にお

いて、$\{s_0(i)\}$ と $\{t_0(i)\}$ の周期相互相関関数と $\{s_1(i)\}$ と $\{t_1(i)\}$ の周期相互相関関数の和は以下のようになる。

$$s_0 * \overline{t_0}(i) + s_1 * \overline{t_1}(i) = (0, 0, 0, \cdots, 0) \tag{217}$$

よって、$\{\{s_0(i), s_1(i)\}, \{t_0(i), t_1(i)\}\}$ は周期完全相補系列である。つまり、長さ N^2 の系列 $\{s_0(i)\}, \{s_1(i)\}, \{t_0(i)\}, \{t_1(i)\}$ をそれぞれ周期的に繰り返して結合することにより、周期 N^2 の周期完全相補系列 $\{\{s_0(i), s_1(i)\}, \{t_0(i), t_1(i)\}\}$ が得られる。

例 7.1-2 $N = 4$ とし、行列 $\overline{F_{41}}, B_{S0}, B_{S1}, B_{T0}, B_{T1}, D_S, D_T$ を以下のように定義する。

$$\overline{F_{41}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

$$B_{S0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_{S1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{T0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{T1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -j \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで、$j = \sqrt{-1}$ である。このとき、四つの $N \times N$ 行列 S_0, S_1, T_0, T_1 は以下のようになる。

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & -j & j & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -j & -j & -1 \\ 1 & j & 1 & j \end{bmatrix}, S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -j & -j & -1 \\ 1 & j & 1 & j \\ 1 & -j & j & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$T_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & j & 1 \\ -j & -j & j & -1 \\ 1 & -1 & j & 1 \\ j & j & j & -1 \end{bmatrix}, T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -j & -1 \\ -j & -j & -j & 1 \\ 1 & -1 & -j & -1 \\ j & j & -j & 1 \end{bmatrix}$$

この四つの行列より、四つの系列 $\{s_0(i)\}, \{s_1(i)\}, \{t_0(i)\}, \{t_1(i)\}$ を以下のように得る。

$$\begin{aligned}
\{s_0(i)\} &= (1, -j, j, 1, 1, j, -1, -j, 1, -j, -j, -1, 1, j, 1, j) \\
\{s_1(i)\} &= (1, -j, -j, -1, 1, j, 1, j, 1, -j, j, 1, 1, j, -1, -j) \\
\{t_0(i)\} &= (-1, 1, j, 1, -j, -j, j, -1, 1, -1, j, 1, j, j, j, -1) \\
\{t_1(i)\} &= (-1, 1, -j, -1, -j, -j, -j, 1, 1, -1, -j, -1, j, j, -j, 1)
\end{aligned}$$

系列 $\{s_0(i)\}, \{s_1(i)\}$ の周期自己相関関数の和は、

$$s_0 * \overline{s_0}(i) + s_1 * \overline{s_1}(i) = (32, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

となり、$\{s_0(i), s_1(i)\}$ は周期相補系列であることが確かめられる。また、系列 $\{t_0(i)\}, \{t_1(i)\}$ の周期自己相関関数の和は、

$$t_0 * \overline{t_0}(i) + t_1 * \overline{t_1}(i) = (32, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

となり、$\{t_0(i), t_1(i)\}$ も周期相補系列であることが確かめられる。一方、$\{s_0(i)\}, \{t_0(i)\}$ の周期相互相関関数と $\{s_1(i)\}, \{t_1(i)\}$ の周期相互相関関数の和は、

$$\begin{aligned}
& s_0 * \overline{t_0}(i) + s_1 * \overline{t_1}(i) \\
= \; & (0, 0, 4-4j, 0, 0, 0, 4-12j, 0, 0, 0, -4+4j, 0, 0, 0, -4-4j, 0) \\
& +(0, 0, -4+4j, 0, 0, 0, -4+12j, 0, 0, 0, 4-4j, 0, 0, 0, 4+4j, 0) \\
= \; & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

となり、$\{\{s_0(i), s_1(i)\}, \{t_0(i), t_1(i)\}\}$ は周期完全相補系列であることが確かめられる。

7.2 提案された系列の周期相関特性

本節では、第 7.1 節で提案された系列 $\{\{s_0(i), s_1(i)\}, \{t_0(i), t_1(i)\}\}$ が周期完全相補系列であることを証明する。

まず、$\{s_0(i), s_1(i)\}$, $\{t_0(i), t_1(i)\}$ がそれぞれ相補系列であることを証明する。第7.1節の式(211),(212)によれば、系列 $\{s_0(i)\}$, $\{s_1(i)\}$ はそれぞれ、

$$s_0(i) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c_S(h_S(i_1)) + mi_0 h_S(i_1)\}\right) \tag{218}$$

$$s_1(i) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c_S(h_S(i_1)) + mi_0 h_S(i_1)\}\right) \cdot (-1)^{h_S(i_1)} \tag{219}$$

と表される。式(218),(219)において、

$$h'_S(i_1) = mh_S(i_1) \tag{220}$$

とおくと、m が N と互いに素であるので、h'_S は以下のような全単射になる。

$$h'_S : X \to X \tag{221}$$

また、式(218)において、

$$c'_S(i_1) = c_S(h_S(i_1)) \tag{222}$$

とおくと、c'_S は以下のような写像である。

$$c'_S : X \to R \tag{223}$$

系列 $\{s_0(i)\}$ は以下のように表される。

$$s_0(i) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c'_S(i_1) + i_0 h'_S(i_1)\}\right) \tag{224}$$

式(224)は第6.3節の式(135)と同じ構造をしているので、系列 $\{s_0(i)\}$ は拡張された変調可能な直交系列である。また、式(219)より、

$$\begin{aligned} s_1(i) &= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c'_S(i_1) + i_0 h'_S(i_1)\}\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} \cdot \frac{N}{2} h_S(i_1)\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left\{c'_S(i_1) + \frac{N}{2} h_S(i_1) + i_0 h'_S(i_1)\right\}\right) \end{aligned} \tag{225}$$

と表される。ここで、式 (225) において、

$$c''_S(i_1) = c'_S(i_1) + \frac{N}{2} h_S(i_1) \tag{226}$$

とおくと、c''_S は以下のような写像になる。

$$c''_S : X \to R \tag{227}$$

系列 $\{s_1(i)\}$ は以下のように表される。

$$s_1(i) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c''_S(i_1) + i_0 h'_S(i_1)\}\right) \tag{228}$$

式 (228) は第 6.3 節の式 (135) と同じ構造をしているので、系列 $\{s_1(i)\}$ も拡張された変調可能な直交系列である。$\{s_0(i)\}, \{s_1(i)\}$ がともに拡張された変調可能な直交系列であるので、それぞれの周期自己相関関数の和は以下のようになる。

$$\begin{aligned} s_0 * \overline{s_0}(i) + s_1 * \overline{s_1}(i) &= (N^2, 0, 0, \cdots, 0) + (N^2, 0, 0, \cdots, 0) \\ &= (2N^2, 0, 0, \cdots, 0) \end{aligned} \tag{229}$$

よって、$\{s_0(i), s_1(i)\}$ は周期相補系列である。

また、第 7.1 節の式 (213),(214) によれば、系列 $\{t_0(i)\}, \{t_1(i)\}$ はそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned} t_0(i) = \exp\Bigg(&\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c_T((N-1-h_T(i_1)) \pmod N) \\ &+ m i_0 (N-1-h_T(i_1))\}\Bigg) \end{aligned} \tag{230}$$

$$\begin{aligned} t_1(i) = \exp\Bigg(&\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c_T((N-1-h_T(i_1)) \pmod N) \\ &+ m i_0 (N-1-h_T(i_1))\}\Bigg) \cdot (-1)^{N-h_T(i_1)} \end{aligned} \tag{231}$$

式 (230),(231) において、

$$h'_T(i_1) = m(N-1-h_T(i_1)) \tag{232}$$

とおく。h_T が式 (221) を満たす全単射であるので $N-1-h_T(i_1)$ も式 (221) を満たす全単射となる。さらに、m が N と互いに素であるので、h'_T は式 (221) を満たす全単射になる。また、式 (230) において、

$$c'_T(i_1) = c_T\left((N-1-h_T(i_1)) \pmod N\right) \tag{233}$$

とおくと、c'_T は式 (223) を満たす写像となる。このとき、系列 $\{t_0(i)\}$ は以下のように表される。

$$t_0(i) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c'_T(i_1) + i_0 h'_T(i_1)\}\right) \tag{234}$$

式 (234) は第 6.3 節の式 (135) と同じ構造をしているので、系列 $\{t_0(i)\}$ は拡張された変調可能な直交系列である。また、式 (231) より、

$$\begin{aligned} t_1(i) &= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c'_T(i_1) + i_0 h'_T(i_1)\}\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\cdot\frac{N}{2}(N-h_T(i_1))\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left\{c'_T(i_1) + \frac{N}{2}(N-h_T(i_1)) + i_0 h'_T(i_1)\right\}\right) \end{aligned} \tag{235}$$

と表される。ここで、式 (235) において、

$$c''_T(i_1) = c'_T(i_1) + \frac{N}{2}(N-h_T(i_1)) \tag{236}$$

とおくと、c''_T は式 (223) を満たす写像となる。このとき、系列 $\{t_1(i)\}$ は以下のように表される。

$$t_1(i) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\{c''_T(i_1) + i_0 h'_T(i_1)\}\right) \tag{237}$$

式 (237) は第 6.3 節の式 (135) と同じ構造をしているので、系列 $\{t_1(i)\}$ も拡張された変調可能な直交系列である。$\{t_0(i)\}, \{t_1(i)\}$ がともに拡張された変調可能な直交系列であるので、それぞれの周期自己相関関数の和は以下のようになる。

$$\begin{aligned} t_0 * \overline{t_0}(i) + t_1 * \overline{t_1}(i) &= (N^2, 0, 0, \cdots, 0) + (N^2, 0, 0, \cdots, 0) \\ &= (2N^2, 0, 0, \cdots, 0) \end{aligned} \tag{238}$$

よって、$\{t_0(i), t_1(i)\}$ も周期相補系列である。以上より、$\{s_0(i), s_1(i)\}$, $\{t_0(i), t_1(i)\}$ はそれぞれ周期相補系列である。

次に、$\{\{s_0(i), s_1(i)\}, \{s_0(i), s_1(i)\}\}$ が周期完全相補系列であることを証明する。ここでは第2.2節で述べた周期系列の相関関数の計算法にしたがって証明する。

系列 $\{s_0(i)\}$ に DFT を施したものを系列 $\{S0(i)\}$ とする。式(224)より、

$$\begin{aligned} S0(i) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N^2-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}ik\right)s_0(k) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N^2-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}ik\right)\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}N\left\{c'_S(k_1)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+k_0h'_S(k_1)\right\}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}i(k_0N+k_1)\right) \\ &\quad \cdot\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}N\left\{c'_S(k_1)+k_0h_{S'}(k_1)\right\}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{ik_1+N\left(ik_0-c'_S(k_1)\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.-k_0h'_S(k_1)\right)\right\}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left(ik_1-Nc'_S(k_1)\right)\right) \\ &\quad \cdot\sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k_0\left(-i+h'_S(k_1)\right)\right) \end{aligned} \tag{239}$$

である。ただし、$k = k_0N + k_1, 0 \le k_0 \le N-1, 0 \le k_1 \le N-1$ とした。ここで、k_0 に関する和は、

$$\begin{aligned} &\sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k_0\left(-i+h'_S(k_1)\right)\right) \\ &= \begin{cases} N & -i+h'_S(k_1)=0 \pmod N \\ 0 & -i+h'_S(k_1)\neq 0 \pmod N \end{cases} \end{aligned} \tag{240}$$

であり、$i = i_0N + i_1, 0 \le i_0 \le N-1, 0 \le i_1 \le N-1$ と表すと、

$$-(i_0N+i_1)+h'_S(k_1)=0 \pmod N \tag{241}$$

である。さらに、h'_S は全単射であるので、逆写像 h'^{-1}_S が存在し、

$$k_1 = h'^{-1}_S(i_1) \tag{242}$$

である。h'^{-1}_S も式 (221) を満たす全単射である。ここで、h'''_S, c'''_S を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} h'''_S(i_1) &= h'^{-1}_S(i_1) \quad (243) \\ c'''_S(i_1) &= c'_S\left(h'^{-1}_S(i_1)\right) \quad (244) \end{aligned}$$

すると、

$$\begin{aligned} S0(i) &= \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{-Nc'_S\left(h'^{-1}_S(i_1)\right) + ih'^{-1}_S(i_1)\right\}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{-Nc'''_S(i_1) + ih'''_S(i_1)\right\}\right) \quad (245) \end{aligned}$$

また、系列 $\{s_1(i)\}$ に DFT を施したものを系列 $\{S1(i)\}$ とする。式 (225) より、

$$\begin{aligned} S1(i) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N^2-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}ik\right)s_1(k) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N^2-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}ik\right)\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}N\left\{c'_S(k_1)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+\frac{N}{2}h_S(k_1) + k_0h'_S(k_1)\right\}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}i(k_0N + k_1)\right) \\ &\quad \cdot\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}N\left\{c'_S(k_1) + \frac{N}{2}h_S(k_1) + k_0h_S\prime(k_1)\right\}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{ik_1 + N\left(ik_0 - c'_S(k_1)\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.-\frac{N}{2}h_S(k_1) - k_0h'_S(k_1)\right)\right\}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left(ik_1 - Nc'_S(k_1) - \frac{N^2}{2}h_S(k_1)\right)\right) \\ &\quad \cdot\sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k_0\left(-i + h'_S(k_1)\right)\right) \quad (246) \end{aligned}$$

である。ただし、$k = k_0 N + k_1, 0 \leq k_0 \leq N-1, 0 \leq k_1 \leq N-1$ とした。ここで、式 (243),(244) で定義した $h'''_S(i_1), c'''_S(i_1)$ を用いると、

$$
\begin{aligned}
S1(i) &= \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{-Nc'_S\left(h'^{-1}_S(i_1)\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.-\frac{N^2}{2}h_S\left(h'^{-1}_S(i_1)\right) + ih'^{-1}_S(i_1)\right\}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{-Nc'''_S(i_1)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.-\frac{N^2}{2}h_S\left(h'''_S(i_1)\right) + ih'''_S(i_1)\right\}\right) \qquad (247)
\end{aligned}
$$

である。ただし、$i = i_0 N + i_1, 0 \leq i_1 \leq N-1, 0 \leq i_1 \leq N-1$ とした。

同様に、系列 $\{t_0(i)\}, \{t_1(i)\}$ に DFT を施した系列をそれぞれ $\{T0(i)\}$, $\{T1(i)\}$ とすると、式 (234),(235) より、

$$
T0(i) = \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{-Nc'''_T(i_1) + ih'''_T(i_1)\right\}\right) \qquad (248)
$$

$$
\begin{aligned}
T1(i) &= \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{-Nc'''_T(i_1)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.-\frac{N^2}{2}\left(N - h_T\left(h'''_T(i_1)\right)\right) + ih'''_T(i_1)\right\}\right) \qquad (249)
\end{aligned}
$$

である。ただし、$i = i_0 N + i_1, 0 \leq i_0 \leq N-1, 0 \leq i_1 \leq N-1$ とし、h'''_T, c'''_T を以下のように定義した。

$$
h'''_T(i_1) = h'^{-1}_T(i_1) \qquad (250)
$$

$$
c'''_T(i_1) = c'_T\left(h'^{-1}_T(i_1)\right) \qquad (251)
$$

ここで、$\{S0(i)\}$ と $\{T0(i)\}$ の複素共役 $\left\{\overline{T0(i)}\right\}$ の要素ごとの積をとったものを $\left\{S\overline{T}0(i)\right\}$ と表す。すなわち、$\left\{S\overline{T}0(i)\right\}$ は以下のような系列である。

$$
\begin{aligned}
S\overline{T}0(0) &= S0(0) \cdot \overline{T0(0)} \\
S\overline{T}0(1) &= S0(1) \cdot \overline{T0(1)} \\
S\overline{T}0(2) &= S0(2) \cdot \overline{T0(2)} \\
&\vdots \\
S\overline{T}0(N^2-1) &= S0(N^2-1) \cdot \overline{T0(N^2-1)} \qquad (252)
\end{aligned}
$$

すると、系列 $\{s_0(i)\}$ と系列 $\{t_0(i)\}$ との周期相互相関関数 $s_0 * \overline{t_0}(i)$ は系列 $\left\{\sqrt{N^2}S\overline{T}0(i)\right\}$ に IDFT を施すことによって得られる。式 (245),(248) より、

$$\begin{aligned} s_0 * \overline{t_0}(i) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N^2-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}ik\right)\cdot N \\ &\quad \cdot\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\{-Nc_S'''(k_1)+kh_S'''(k_1)\}\right) \\ &\quad \overline{\cdot\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\{-Nc_T'''(k_1)+kh_T'''(k_1)\}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{N^2-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\{ik-k\left(h_S'''(k_1)-h_T'''(k_1)\right)\right. \\ &\quad \left.+N\left(c_S'''(k_1)-c_T'''(k_1)\right)\}\right) \end{aligned} \tag{253}$$

である。同様に、$\{S1(i)\}$ と $\{T1(i)\}$ の複素共役 $\left\{\overline{T_1(i)}\right\}$ の要素ごとの積をとったものを $\left\{S\overline{T}1(i)\right\}$ と表す。すなわち、$\left\{S\overline{T}1(i)\right\}$ は以下のような系列である。

$$\begin{aligned} S\overline{T}1(0) &= S1(0)\cdot\overline{T1(0)} \\ S\overline{T}1(1) &= S1(1)\cdot\overline{T1(1)} \\ S\overline{T}1(2) &= S1(2)\cdot\overline{T1(2)} \\ &\vdots \\ S\overline{T}1(N^2-1) &= S1(N^2-1)\cdot\overline{T1(N^2-1)} \end{aligned} \tag{254}$$

すると、系列 $\{s_1(i)\}$ と系列 $\{t_1(i)\}$ との周期相互相関関数 $s_1 * \overline{t_1}(i)$ は系列 $\left\{\sqrt{N^2}S\overline{T}1(i)\right\}$ に IDFT を施すことによって得られる。式 (247),(249) より、

$$\begin{aligned} & s_1 * \overline{t_1}(i) \\ = & \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N^2-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}ik\right)\cdot N \\ & \cdot\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{-Nc_S'''(k_1)-\frac{N^2}{2}h_S\left(h_S'''(k_1)\right)+kh_S'''(k_1)\right\}\right) \\ & \overline{\cdot\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{-Nc_T'''(k_1)-\frac{N^2}{2}\left(N-h_T\left(h_T'''(k_1)\right)\right)+kh_T'''(k_1)\right\}\right)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \sum_{k=0}^{N^2-1} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{ik - k\left(h'''_S(k_1) - h'''_T(k_1)\right) - \frac{N^3}{2}\right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{N^2}{2}\left(h_S\left(h'''_S(k_1)\right) + h_T\left(h'''_T(k_1)\right)\right) + N\left(c'''_S(k_1) - c'''_T(k_1)\right)\right\}\right) \qquad (255)
\end{aligned}
$$

である。ここで、式(220),(243),(232),(250)より、

$$
\begin{aligned}
h_S\left(h'''_S(k_1)\right) &= h_S\left(h'^{-1}_S(k_1)\right) \\
&= h_S\left(h_S^{-1}\left(\frac{k_1}{m} \pmod N\right)\right) \\
&= \frac{k_1}{m} \pmod N \qquad (256) \\
h_T\left(h'''_T(k_1)\right) &= h_T\left(h'^{-1}_T(k_1)\right) \\
&= h_T\left(h_T^{-1}\left(\left(N-1-\frac{k_1}{m}\right) \pmod N\right)\right) \\
&= \left(N-1-\frac{k_1}{m}\right) \pmod N \qquad (257)
\end{aligned}
$$

であるので、

$$
\begin{aligned}
s_1 * \overline{t_1}(i) &= \sum_{k=0}^{N^2-1} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{ik - k\left(h'''_S(k_1) - h'''_T(k_1)\right)\right.\right. \\
& \qquad \left.\left. + N\left(c'''_S(k_1) - c'''_T(k_1)\right)\right\}\right) \\
& \qquad \cdot \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} \cdot \frac{N^2}{2}\left\{\frac{k_1}{m} + N - 1 - \frac{k_1}{m} - N\right\}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N^2-1} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{ik - k\left(h'''_S(k_1) - h'''_T(k_1)\right)\right.\right. \\
& \qquad \left.\left. + N\left(c'''_S(k_1) - c'''_T(k_1)\right)\right\}\right) \exp\left(-\pi\sqrt{-1}\right) \\
&= -\sum_{k=0}^{N^2-1} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{ik - k\left(h'''_S(k_1) - h'''_T(k_1)\right)\right.\right. \\
& \qquad \left.\left. + N\left(c'''_S(k_1) - c'''_T(k_1)\right)\right\}\right) \\
&= -s_0 * \overline{t_0}(i) \qquad (258)
\end{aligned}
$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned} s_0 * \overline{t_0}(i) + s_1 * \overline{t_1}(i) &= s_0 * \overline{t_0}(i) - s_0 * \overline{t_0}(i) \\ &= (0,0,0,\cdots,0) \end{aligned} \tag{259}$$

であるので、$\{\{s_0(i), s_1(i)\}, \{t_0(i), t_1(i)\}\}$ は周期完全相補系列である。

7.3 周期 $2^k \cdot N^2$ の周期完全相補系列の構成法

本節では、第7.1節において提案された周期 N^2 の周期完全相補系列 $\{\{s_0(i), s_1(i)\}, \{t_0(i), t_1(i)\}\}$ によって構成される周期 $2^k \cdot N^2$ の周期完全相補系列 $\left\{\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}, \left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}\right\}$ の構成法を提案する。さらに、提案された系列 $\left\{\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}, \left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}\right\}$ が周期完全相補系列であることを証明する。

第7.1節において提案された周期 N^2 の周期完全相補系列 $\{\{s_0(i), s_1(i)\}$ $, \{t_0(i), t_1(i)\}\}$ を $\{\{s_0^0(i), s_1^0(i)\}, \{t_0^0(i), t_1^0(i)\}\}$ と表記する。このとき、以下の漸化式によって、周期 $2^k \cdot N^2$ の周期系列 $\left\{s_0^k(i)\right\}$ 及び、$\left\{s_1^k(i)\right\}$ を得る。

$$s_0^{k+1}(i) = \left\{\frac{1+(-1)^i}{2}\right\} s_0^k\left(\left[\frac{i}{2}\right]\right) + \left\{\frac{1-(-1)^i}{2}\right\} s_1^k\left(\left[\frac{i}{2}\right]\right) \tag{260}$$

$$s_1^{k+1}(i) = \left\{\frac{1+(-1)^i}{2}\right\} s_0^k\left(\left[\frac{i}{2}\right]\right) - \left\{\frac{1-(-1)^i}{2}\right\} s_1^k\left(\left[\frac{i}{2}\right]\right) \tag{261}$$

または、

$$\begin{aligned} \left\{s_0^{k+1}(i)\right\} &= \Big(s_0^k(0), s_1^k(0), s_0^k(1), s_1^k(1), s_0^k(2), s_1^k(2), \cdots, \\ &\qquad s_0^k(2^k \cdot N^2 - 1), s_1^k(2^k \cdot N^2 - 1)\Big) \end{aligned} \tag{262}$$

$$\begin{aligned} \left\{s_1^{k+1}(i)\right\} &= \Big(s_0^k(0), -s_1^k(0), s_0^k(1), -s_1^k(1), s_0^k(2), -s_1^k(2), \cdots, \\ &\qquad s_0^k(2^k \cdot N^2 - 1), -s_1^k(2^k \cdot N^2 - 1)\Big) \end{aligned} \tag{263}$$

ここで、$0 \le i \le 2^{k+1} \cdot N^2 - 1, k \ge 0$ である。また、$\left[\frac{i}{2}\right]$ は $\frac{i}{2}$ を超えない最大の整数を表す。このとき、周期系列のペア $\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}$ は周期相補系列である。

同様に、以下の漸化式によって、周期 $2^k \cdot N^2$ の周期系列 $\left\{t_0^k(i)\right\}$ 及び、$\left\{t_1^k(i)\right\}$ を得る。

$$t_0^{k+1}(i) = \left\{\frac{1+(-1)^i}{2}\right\} t_0^k\left(\left[\frac{i}{2}\right]\right) + \left\{\frac{1-(-1)^i}{2}\right\} t_1^k\left(\left[\frac{i}{2}\right]\right) \tag{264}$$

$$t_1^{k+1}(i) = \left\{\frac{1+(-1)^i}{2}\right\} t_0^k\left(\left[\frac{i}{2}\right]\right) - \left\{\frac{1-(-1)^i}{2}\right\} t_1^k\left(\left[\frac{i}{2}\right]\right) \quad (265)$$

または、

$$\left\{t_0^{k+1}(i)\right\} = \Big(t_0^k(0), t_1^k(0), t_0^k(1), t_1^k(1), t_0^k(2), t_1^k(2), \cdots, t_0^k(2^k \cdot N^2 - 1), t_1^k(2^k \cdot N^2 - 1)\Big) \quad (266)$$

$$\left\{t_1^{k+1}(i)\right\} = \Big(t_0^k(0), -t_1^k(0), t_0^k(1), -t_1^k(1), t_0^k(2), -t_1^k(2), \cdots, t_0^k(2^k \cdot N^2 - 1), -t_1^k(2^k \cdot N^2 - 1)\Big) \quad (267)$$

このとき、周期系列のペア $\left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}$ は周期相補系列である。

さらに、周期 $2^k \cdot N^2$ の任意の周期相補系列 $\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}$ と周期 $2^k \cdot N^2$ の任意の周期相補系列 $\left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}$ のペア $\left\{\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}, \left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}\right\}$ は周期完全相補系列である。

ここで、$\left\{\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}, \left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}\right\}$ が周期完全相補系列であることを証明する。はじめに $\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}$ 及び、$\left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}$ が周期相補系列であることを証明する。

1. $k = 0$ の場合、

$$\left\{s_0^0(i), s_1^0(i)\right\} = \{s_0(i), s_1(i)\} \quad (268)$$

なので、明らかに $\{s_0^0(i), s_1^0(i)\}$ は周期 N^2 の周期相補系列である。

2. $\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}$ が周期 $2^k \cdot N^2$ の周期相補系列であると仮定すると、

$$\begin{aligned} & s_0^k * \overline{s_0^k}(i) + s_1^k * \overline{s_1^k}(i) \\ = & \sum_{j=0}^{2^k \cdot N^2 - 1} \Big(s_0^{k*}(j) \cdot s_0^k(j+i) + s_1^{k*}(j) \cdot s_1^k(j+i)\Big) \\ = & \begin{cases} 2^{k+1} \cdot N^2 & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (269)$$

である。ただし、$0 \leq i \leq 2^k \cdot N^2 - 1$ であり、$*$ は複素共役を表す。このとき、系列 $\left\{s_0^{k+1}(i')\right\}$ と系列 $\left\{s_1^{k+1}(i')\right\}$ の周期自己相関関数の和

$$s_0^{k+1} * \overline{s_0^{k+1}}(i') + s_1^{k+1} * \overline{s_1^{k+1}}(i') = \sum_{j=0}^{2^{k+1} \cdot N^2 - 1} \Big(s_0^{k+1*}(j) \cdot s_0^{k+1}(j+i') + s_1^{k+1*}(j) \cdot s_1^{k+1}(j+i')\Big) \quad (270)$$

について考える。ただし、$0 \leq i' \leq 2^{k+1} \cdot N^2 - 1$ である。

(a) $i' = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}
& s_0^{k+1} * \overline{s_0^{k+1}}(0) + s_1^{k+1} * \overline{s_1^{k+1}}(0) \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k+1}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k+1*}(j) \cdot s_0^{k+1}(j) + s_1^{k+1*}(j) \cdot s_1^{k+1}(j) \right) \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k+1}\cdot N^2-1} \left(\left| s_0^{k+1}(j) \right|^2 + \left| s_1^{k+1}(j) \right|^2 \right) \\
= & \ 2 \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(\left| s_0^{k}(j) \right|^2 + \left| s_1^{k}(j) \right|^2 \right) \\
= & \ 2 \left(s_0^k * \overline{s_0^k}(0) + s_1^k * \overline{s_1^k}(0) \right) = 2^{k+2} \cdot N^2
\end{aligned} \tag{271}$$

(b) i' が偶数 $(\neq 0)$ のとき、

$$\begin{aligned}
& s_0^{k+1} * \overline{s_0^{k+1}}(i') + s_1^{k+1} * \overline{s_1^{k+1}}(i') \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k+1}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k+1*}(j) \cdot s_0^{k+1}(j+i') + s_1^{k+1*}(j) \cdot s_1^{k+1}(j+i') \right) \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot s_0^{k} \left(j + \frac{i'}{2} \right) + s_1^{k*}(j) \cdot s_1^{k} \left(j + \frac{i'}{2} \right) \right) \\
+ & \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot s_0^{k} \left(j + \frac{i'}{2} \right) + \left(-s_1^{k*}(j) \right) \cdot \left(-s_1^{k} \left(j + \frac{i'}{2} \right) \right) \right) \\
= & \ 2 \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot s_0^{k}(j+i) + s_1^{k*}(j) \cdot s_1^{k}(j+i) \right) \\
= & \ 2 \left(s_0^k * \overline{s_0^k}(i) + s_1^k * \overline{s_1^k}(i) \right) = 0
\end{aligned} \tag{272}$$

(c) i' が奇数のとき、

$$\begin{aligned}
& s_0^{k+1} * \overline{s_0^{k+1}}(i') + s_1^{k+1} * \overline{s_1^{k+1}}(i') \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k+1}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k+1*}(j) \cdot s_0^{k+1}(j+i') + s_1^{k+1*}(j) \cdot s_1^{k+1}(j+i') \right) \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot s_1^{k} \left(j + \frac{i'-1}{2} \right) + s_1^{k*}(j) \cdot s_0^{k} \left(j + \frac{i'+1}{2} \right) \right) \\
+ & \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot \left(-s_1^{k} \left(j + \frac{i'-1}{2} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \left(-s_1^{k*}(j)\right) \cdot s_0^k\left(j+\frac{i'+1}{2}\right)\Bigg) \\
= & \sum_{j=0}^{2^k \cdot N^2-1}\left(s_0^{k*}(j) \cdot s_1^k\left(j+\frac{i'-1}{2}\right)+s_1^{k*}(j) \cdot s_0^k\left(j+\frac{i'+1}{2}\right)\right) \\
- & \sum_{j=0}^{2^k \cdot N^2-1}\left(s_0^{k*}(j) \cdot s_1^k\left(j+\frac{i'-1}{2}\right)+s_1^{k*}(j) \cdot s_0^k\left(j+\frac{i'+1}{2}\right)\right) \\
= & \; 0
\end{aligned} \tag{273}
$$

以上、$(a),(b),(c)$ より、

$$
s_0^{k+1} * \overline{s_0^{k+1}}(i') + s_1^{k+1} * \overline{s_1^{k+1}}(i') = \begin{cases} 2^{k+2} \cdot N^2 & (i'=0) \\ 0 & (i' \neq 0) \end{cases} \tag{274}
$$

であるので、$\left\{s_0^{k+1}(i'), s_1^{k+1}(i')\right\}$ は周期 $2^{k+1} \cdot N^2$ の周期相補系列である。

以上、1,2 より、$k \geq 0$ を満たす全ての整数 k に関して、$\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}$ は周期 $2^k \cdot N^2$ の周期相補系列である。同様の議論によって、$\left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}$ も明らかに周期 $2^k \cdot N^2$ の周期相補系列である

次に、$\left\{\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}, \left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}\right\}$ が周期完全相補系列であることを証明する。

1. $k=0$ の場合、

$$
\left\{\left\{s_0^0(i), s_1^0(i)\right\}, \left\{t_0^0(i), t_1^0(i)\right\}\right\} = \left\{\left\{s_0(i), s_1(i)\right\}, \left\{t_0(i), t_1(i)\right\}\right\} \tag{275}
$$

なので、明らかに $\{\{s_0^0(i), s_1^0(i)\}, \{t_0^0(i), t_1^0(i)\}\}$ は周期 N^2 の周期完全相補系列である。

2. $\left\{\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}, \left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}\right\}$ が周期 $2^k \cdot N^2$ の周期完全相補系列であると仮定すると、

$$
\begin{aligned}
& s_0^k * \overline{t_0^k}(i) + s_1^k * \overline{t_1^k}(i) \\
= & \sum_{j=0}^{2^k \cdot N^2-1}\left(s_0^{k*}(j) \cdot t_0^k(j+i) + s_1^{k*}(j) \cdot t_1^k(j+i)\right) \\
= & \; 0
\end{aligned} \tag{276}
$$

である。ただし、$0 \leq i \leq 2^k \cdot N^2 - 1$ であり、$*$ は複素共役を表す。このとき、系列 $\left\{s_0^{k+1}(i')\right\}$ と系列 $\left\{t_0^{k+1}(i')\right\}$ の周期相互相関関数と系

列 $\left\{s_1^{k+1}(i')\right\}$ と系列 $\left\{t_1^{k+1}(i')\right\}$ の周期相互相関関数の和

$$s_0^{k+1} * \overline{t_0^{k+1}}(i') + s_1^{k+1} * \overline{t_1^{k+1}}(i') = \sum_{j=0}^{2^{k+1}\cdot N^2-1} \Big(s_0^{k+1*}(j) \cdot t_0^{k+1}(j+i') + s_1^{k+1*}(j) \cdot t_1^{k+1}(j+i')\Big) \quad (277)$$

について考える。ただし、$0 \le i' \le 2^{k+1} \cdot N^2 - 1$ である。

(a) i' が偶数のとき、

$$\begin{aligned}
& s_0^{k+1} * \overline{t_0^{k+1}}(i') + s_1^{k+1} * \overline{t_1^{k+1}}(i') \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k+1}\cdot N^2-1} \Big(s_0^{k+1*}(j) \cdot t_0^{k+1}(j+i') + s_1^{k+1*}(j) \cdot t_1^{k+1}(j+i')\Big) \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot t_0^{k}\left(j+\frac{i'}{2}\right) + s_1^{k*}(j) \cdot t_1^{k}\left(j+\frac{i'}{2}\right)\right) \\
+ & \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot t_0^{k}\left(j+\frac{i'}{2}\right) + \left(-s_1^{k*}(j)\right) \cdot \left(-t_1^{k}\left(j+\frac{i'}{2}\right)\right)\right) \\
= & 2\sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \Big(s_0^{k*}(j) \cdot t_0^{k}(j+i) + s_1^{k*}(j) \cdot t_1^{k}(j+i)\Big) \\
= & 2\left(s_0^{k} * \overline{t_0^{k}}(i) + s_1^{k} * \overline{t_1^{k}}(i)\right) = 0
\end{aligned} \quad (278)$$

(b) i' が奇数のとき、

$$\begin{aligned}
& s_0^{k+1} * \overline{t_0^{k+1}}(i') + s_1^{k+1} * \overline{t_1^{k+1}}(i') \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k+1}\cdot N^2-1} \Big(s_0^{k+1*}(j) \cdot t_0^{k+1}(j+i') + s_1^{k+1*}(j) \cdot t_1^{k+1}(j+i')\Big) \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot t_1^{k}\left(j+\frac{i'-1}{2}\right) + s_1^{k*}(j) \cdot t_0^{k}\left(j+\frac{i'+1}{2}\right)\right) \\
+ & \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot \left(-t_1^{k}\left(j+\frac{i'-1}{2}\right)\right)\right. \\
& \left. + \left(-s_1^{k*}(j)\right) \cdot t_0^{k}\left(j+\frac{i'+1}{2}\right)\right) \\
= & \sum_{j=0}^{2^{k}\cdot N^2-1} \left(s_0^{k*}(j) \cdot t_1^{k}\left(j+\frac{i'-1}{2}\right) + s_1^{k*}(j) \cdot t_0^{k}\left(j+\frac{i'+1}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{j=0}^{2^k\cdot N^2-1}\left(s_0^{k*}(j)\cdot t_1^k\left(j+\frac{i'-1}{2}\right)+s_1^{k*}(j)\cdot t_0^k\left(j+\frac{i'+1}{2}\right)\right)\\
&= 0 \qquad (279)
\end{aligned}
$$

以上、$(a),(b)$ より、

$$
s_0^{k+1} * \overline{t_0^{k+1}}(i') + s_1^{k+1} * \overline{t_1^{k+1}}(i') = 0 \qquad (280)
$$

であるので、$\left\{\left\{s_0^{k+1}(i'), s_1^{k+1}(i')\right\}, \left\{t_0^{k+1}(i'), t_1^{k+1}(i')\right\}\right\}$ は周期 $2^{k+1}\cdot N^2$ の周期完全相補系列である。

以上、1,2 より、$k \geq 0$ を満たす全ての整数 k に関して、$\left\{\left\{s_0^k(i), s_1^k(i)\right\}, \left\{t_0^k(i), t_1^k(i)\right\}\right\}$ は周期 $2^k \cdot N^2$ の周期完全相補系列である。

例 7.3　第 7.1 節の**例** 7.1-2 に示した周期 16 の周期完全相補系列 $\{\{s_0(i), s_1(i)\}, \{t_0(i), t_1(i)\}\}$ はそれぞれ以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
\{s_0(i)\} &= (1,-j,j,1,1,j,-1,-j,1,-j,-j,-1,1,j,1,j)\\
\{s_1(i)\} &= (1,-j,-j,-1,1,j,1,j,1,-j,j,1,1,j,-1,-j)\\
\{t_0(i)\} &= (-1,1,j,1,-j,-j,j,-1,1,-1,j,1,j,j,j,-1)\\
\{t_1(i)\} &= (-1,1,-j,-1,-j,-j,-j,1,1,-1,-j,-1,j,j,-j,1)
\end{aligned}
$$

これらの四つの系列を用いて、周期 32 の周期完全相補系列 $\{\{s_0^1(i), s_1^1(i)\}, \{t_0^1(i), t_1^1(i)\}\}$ を構成すると、

$$
\begin{aligned}
\{s_0^1(i)\} &= (1,1,-j,-j,j,-j,1,-1,1,1,j,j,-1,1,-j,j,\\
&\qquad 1,1,-j,-j,-j,j,-1,1,1,1,j,j,1,-1,j,-j)\\
\{s_1^1(i)\} &= (1,-1,-j,j,j,j,1,1,1,-1,j,-j,-1,-1,-j,-j,\\
&\qquad 1,-1,-j,j,-j,-j,-1,-1,1,-1,j,-j,1,1,j,j)\\
\{t_0^1(i)\} &= (-1,-1,1,1,j,-j,1,-1,-j,-j,-j,-j,j,-j,-1,1,\\
&\qquad 1,1,-1,-1,j,-j,1,-1,j,j,j,j,j,-j,-1,1)\\
\{t_1^1(i)\} &= (-1,1,1,-1,j,j,1,1,-j,j,-j,j,j,j,-1,-1,\\
&\qquad 1,-1,-1,1,j,j,1,1,j,-j,j,-j,j,j,-1,-1)
\end{aligned}
$$

である。このとき、

$$
s_0^1 * \overline{s_0^1}(i) + s_1^1 * \overline{s_1^1}(i) = (64,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
$$

$$
\begin{aligned}
& 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) \\
t_0^1 * \overline{t_0^1}(i) + t_1^1 * \overline{t_1^1}(i) &= (64,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, \\
& 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) \\
s_0^1 * \overline{t_0^1}(i) + s_1^1 * \overline{t_1^1}(i) &= (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0, \\
& 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
\end{aligned}
$$

であり、$\{\{s_0^1(i), s_1^1(i)\}, \{t_0^1(i), t_1^1(i)\}\}$が周期完全相補系列であることが確かめられる。