6 変調可能な直交系列の変調方法の拡張

本節では変調可能な直交系列の変調方法に対する拡張法を提案し、拡張の結果得られた系列が多相直交系列であることを証明する。また、この拡張された変調可能な直交系列の分類法を提案し、その分類法に基づいて、拡張された変調可能な直交系列間の周期相互相関特性について検討する。さらに、拡張された変調可能な直交系列に含まれる周期 N^2 の N 相直交系列についても検討し、提案された拡張法によって得られる周期 N^2 の N 相直交系列の個数が $N^{N-2}(N-1)!$ であることを証明する。

6.1 変調方法の拡張法

本節では変調可能な直交系列の変調方法に対する拡張法について提案する。

D を $N \times N$ 置換行列とする。すなわち、全ての行において $N-1$ 個の要素は 0 で、一つの要素のみが 1 であり、かつ、全ての列においても $N-1$ 個の要素は 0 で、一つの要素のみが 1 である行列とする。また全単射 h を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} h &: X \to X, \\ X &= \{0,1,2,\cdots,N-1\} \end{aligned} \tag{105}$$

このとき、全単射 h を用いて、$N \times N$ 置換行列 D を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} D &= [d(i_0,i_1)], \\ d(i_0.i_1) &= \begin{cases} 1 & (i_0 = h(i_1)) \\ 0 & (i_0 \neq h(i_1)) \end{cases} \end{aligned} \tag{106}$$

このとき、第 5.1 節の式 (97) において定義した $\overline{F_{Nm}}$ 及び、式 (98) において定義した B を用いると、$N \times N$ 行列 $\sqrt{N} \cdot \overline{F_{Nm}} DB$ の (i_0,i_1) 要素は、

$$\begin{aligned} &\sqrt{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \overline{f_{Nm}(i_0,k)} \cdot d(k,l) \right) \cdot b(l,i_1) \\ &= \sqrt{N} \cdot \overline{f_{Nm}(i_0,h(i_1))} \cdot b(i_1,i_1) \\ &= b(i_1,i_1) \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} m i_0 h(i_1) \right) \end{aligned} \tag{107}$$

である。次に $N \times N$ 行列 $\sqrt{N} \cdot \overline{F_{Nm}} DB$ の N 個の行を結合して長さ N^2 の系列 G' を得る。ここで系列 G' の第 $(i_0 N + i_1)$ 番目の要素は、行列 $\sqrt{N} \cdot \overline{F_{Nm}} DB$ の (i_0, i_1) 要素である。得られた系列 G' は以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
G' &= \{g'(i)\}, \\
g'(i) &= b(i_1, i_1) \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} m i_0 h(i_1)\right)
\end{aligned}
\tag{108}
$$

ここで、$i = i_0 N + i_1, 0 \leq i \leq N^2 - 1$ である。長さ N^2 の系列 G' を周期的に繰り返して結合することにより得られる周期 N^2 の周期系列も多相直交系列である。

例 6.1　行列 D を

$$
D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

とする。このとき、$\overline{F_{41}}$, B,D を用いて、系列 G' を得る。ここで、$\overline{F_{41}}$,B は例 5.1 において定義されたものである。系列 G' は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
G' = \; & (b_0, b_1, b_2, b_3, jb_0, -b_1, b_2, -jb_3, \\
& -b_0, b_1, b_2, -b_3, -jb_0, -b_1, b_2, jb_3)
\end{aligned}
$$

周期系列 G' の周期自己相関関数は以下のようになり、直交系列であることが確かめられる。

$$
(16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
$$

もし D が単位行列であるならば、系列 G' は系列 G に一致する。

6.2　提案された系列の周期自己相関特性

本節では第 6.1 節において示した系列 G' を周期的に繰り返して結合した周期系列が多相直交系列であることを証明する。

N を自然数とする。このとき、$N^2 \times N^2$DFT 行列 F_{N^2} は以下のように定義される。

$$
\begin{aligned}
F_{N^2} &= [f_{N^2}(i, j)], \\
f_{N^2}(i, j) &= \frac{1}{N} \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} ij\right)
\end{aligned}
\tag{109}
$$

ここで、$0 \leq i \leq N^2-1, 0 \leq j \leq N^2-1$. である。さらに、$\Lambda$ を対角行列とし、Λ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Lambda &= [\lambda(i,j)], \\ \lambda(i,j) &= \begin{cases} g'(i) & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \tag{110}$$

ここで、$g'(i)$ は第6.1節の式(108)において定義されたものである。ここで、A を以下のように定義する。

$$A = F_{N^2}^{-1} \Lambda F_{N^2} \tag{111}$$

すると、

$$\begin{aligned} A &= [a(i,j)], \\ a(i,j) &= \sum_{k=0}^{N^2-1} \overline{f_{N^2}(i,k)} \lambda(k,k) f_{N^2}(k,j) \end{aligned} \tag{112}$$

である。さらに、$b(i_1,i_1)$ を以下のように定義する。

$$b(i_1,i_1) = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} c(i_1)\right) \tag{113}$$

ここで、$c(i_1)$ は $b(i_1,i_1)$ の位相を表しており、以下のような写像である。

$$c : X \to R \tag{114}$$

ここで $X = \{0,1,2,\cdot,N-1\}$ であり、R は実数全体の集合である。すると、行列 A の (i,j) 要素 $a(i,j)$ は

$$\begin{aligned} a(i,j) &= \sum_{k=0}^{N^2-1} \frac{1}{N} \left\{ \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} ik\right) \right\} \\ &\quad \cdot b(k_1,k_1) \cdot \left\{ \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} Nmk_0h(k_1)\right) \right\} \\ &\quad \cdot \frac{1}{N} \left\{ \exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} kj\right) \right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N^2-1} \exp\left\{ \frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} (k(i-j) + Nmk_0h(k_1) + c(k_1)) \right\} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \exp\left\{ \frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} (k_1(i-j) + c(k_1)) \right\} \\ &\quad \cdot \sum_{k_0=0}^{N-1} \exp\left\{ \frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} (k_0N(i-j) + Nmk_0h(k_1)) \right\} \end{aligned} \tag{115}$$

ここで、$k=k_0N+k_1,\ 0\le k_0\le N-1,\ 0\le k_1\le N-1$ である。ここで $P(i,j)$ を以下のように導入し、

$$a(i,j)=\frac{1}{N^2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}(k_1(i-j)+c(k_1))\right\}P(i,j) \tag{116}$$

と表すと、

$$\begin{aligned}P(i,j)&=\sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k_0(i-j+mh(k_1))\right\}\\&=\begin{cases}N & (i-j+mh(k_1)=0 \pmod N)\\ 0 & (i-j+mh(k_1)\neq 0 \pmod N)\end{cases}\end{aligned} \tag{117}$$

である。i,j は N^2 を法とする剰余類とみなせるので, $(j-i)$ は以下のように表される。

$$j-i=(j-i)_0N+(j-i)_1 \tag{118}$$

ここで、$0\le(j-i)_0\le N-1,\ 0\le(j-i)_1\le N-1$ である。m と N は互いに素であるので、$i-j+mh(k_1)=0 \pmod N$ となる $h(k_1)$ は一意に定まる。そのとき $h(k_1)$ は

$$h(k_1)=\frac{(j-i)_1}{m} \pmod N \tag{119}$$

である。h は全単射であるので、逆写像 h^{-1} が存在し、h^{-1} も以下のような全単射である。

$$h^{-1}:X\to X \tag{120}$$

したがって、$i-j+mh(k_1)=0 \pmod N$ であるとき、h^{-1} により、k_1 は一意に定まり、k_1 は以下のように表される。

$$k_1=h^{-1}\left(\frac{(j-i)_1}{m} \pmod N\right) \tag{121}$$

よって、

$$\begin{aligned}a(i,j)&=\frac{1}{N}\exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left(h^{-1}\left(\frac{(j-i)_1}{m} \pmod N\right)\right.\right.\\&\quad\left.\left.\cdot\left((i-j) \pmod{N^2}\right)+c\left(h^{-1}\left(\frac{(j-i)_1}{m} \pmod N\right)\right)\right)\right\}\\&=\frac{1}{N}\exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left(c\left(h^{-1}\left(\frac{(j-i)_1}{m} \pmod N\right)\right)\right.\right.\\&\quad\left.\left.-h^{-1}\left(\frac{(j-i)_1}{m} \pmod N\right)\cdot((j-i)_0N+(j-i)_1)\right)\right\}\end{aligned} \tag{122}$$

$a(i,j)$ は $(j-i) \pmod{N^2}$ のみに依存するので、式(122)は行列 A が巡回行列であることを意味している。さらに、A の定義式(111)にあるように、

$$A = F_{N^2}^{-1} \Lambda F_{N^2}$$

なので、A はユニタリ行列である。従って、巡回行列 A によって表される周期系列は直交系列である。また、A の全ての要素 $a(i,j)$ の絶対値が等しいので、巡回行列 A によって表される周期系列は多相周期系列である。以上より、巡回行列 A によって表される周期系列は多相直交系列である。

次に l と c'' を以下のように導入する。

$$l = j-i = (j-i)_0 N + (j-i)_1 = l_0 N + l_1 \tag{123}$$

$$c''(l_1) = c\left(h^{-1}\left(\frac{l_1}{m} \pmod{N}\right)\right) - h^{-1}\left(\frac{l_1}{m} \pmod{N}\right) \cdot l_1 \tag{124}$$

ここで、$0 \le l_0 \le N-1$, $0 \le l_1 \le N-1$ であり、c'' は以下のような写像になる。

$$c'' : X \to R \tag{125}$$

さらに、h'' を

$$h''(l_1) = \frac{-1}{m} \pmod{N} \cdot h^{-1}\left(\frac{l_1}{m} \pmod{N}\right) \tag{126}$$

を満たす写像と定義する。m と N が互いに素であるので、h'' も以下のような全単射となる。

$$h'' : X \to X \tag{127}$$

このとき、$a(i,j)$ は以下のように書き表せる。

$$g''(l) = a(i,j) = \frac{1}{N}\exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left(c''(l_1) + Nml_0 h''(l_1)\right)\right\} \tag{128}$$

式(108)、(113)より、

$$g'(i) = \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left(c(i_1) + Nmi_0 h(i_1)\right)\right\} \tag{129}$$

である。式(128)と(129)は同じ構造をしているので、G' を繰り返し結合することによって得られる周期系列は多相直交系列である。また、第2.3節に示した式(23)の関係によれば、系列 $\{g'(l)\}$ は系列 $\{Ng''(l)\}$ を N 次の DFT によって変換したものである。

6.3 異なる集合に属する系列の周期相互相関特性

本節では、拡張された変調可能な直交系列の周期相互相関特性を明らかにするために、これらの系列を分類するための集合を定義し、異なる集合に属する系列間の周期相互相関特性について検討する。

第 6.2 節の式 (129) に従うと、拡張された変調可能な直交系列は以下のように表される。

$$g'(i) = \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}(c(i_1) + Nmi_0h(i_1))\right\} \tag{130}$$

ここで写像 c' を

$$c'(i_1) = \frac{c(i_1)}{N} \tag{131}$$

と定義すると、c' は以下のような写像になる。

$$c' : X \to R \tag{132}$$

さらに、h' を以下のような写像と定義する。

$$h'(i_1) = mh(i_1) \pmod N \tag{133}$$

m と N が互いに素であるので、h' は以下のような全単射である。

$$h' : X \to X \tag{134}$$

したがって、拡張された変調可能な直交系列は以下のように表される。

$$g'(i) = \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}(c'(i_1) + i_0h'(i_1))\right\} \tag{135}$$

ここで、$i = i_0N + i_1, 0 \le i \le N^2 - 1, 0 \le i_0 \le N-1, 0 \le i_1 \le N-1$ である。ここで、全単射 h' を用いて、式 (135) によって表される多相直交系列をいくつかの集合に分類する。すなわち、同じ全単射 h' を持つ系列は同じ集合に属し、異なる全単射 h'_1, h'_2 を持つ系列はそれぞれ異なる集合に属すると定義する。h' は全単射であるので、ある N に対して、明らかに上記の集合は $N!$ 個存在する。また、一つの集合には c' の個数に等しいだけの系列が含まれている。c' の個数は、明らかに無限に存在するので、一つの集合には無限個の多相直交系列が含まれている。

以下では、ある自然数 N に対して、異なる集合に属する系列間の周期相互相関特性について検討する。

式(135)によって表される多相直交系列において、異なる集合に属する周期 N^2 の二つの系列 G'_1, G'_2 を以下のように表す。

$$\begin{aligned}
G'_1 &= \{g'_1(i)\}, \\
G'_2 &= \{g'_2(i)\}, \\
g'_1(i) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}(c'_1(i_1) + i_0 h'_1(i_1))\right\} &\quad (136) \\
g'_2(i) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}(c'_2(i_1) + i_0 h'_2(i_1))\right\} &\quad (137)
\end{aligned}$$

ここで、$i = i_0 N + i_1, 0 \le i \le N^2 - 1, 0 \le i_0 \le N-1, 0 \le i_1 \le N-1$ である。次に、二つの対角行列 Λ'_1, Λ'_2 を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\Lambda'_1 &= [\lambda'_1(i,j)] \\
\Lambda'_2 &= [\lambda'_2(i,j)] \\
\lambda'_1(i,j) &= \begin{cases} g'_1(i) & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases} &\quad (138) \\
\lambda'_2(i,j) &= \begin{cases} g'_2(i) & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases} &\quad (139)
\end{aligned}$$

さらに、行列 A'_1, A'_2 を以下のように定義する。

$$A'_2 = F_{N^2}^{-1} \Lambda'_1 F_{N^2} \qquad (140)$$

$$A'_2 = F_{N^2}^{-1} \Lambda'_2 F_{N^2} \qquad (141)$$

第6.2節に述べた関係より、式(140),(141)で表される行列 A'_1, A'_2 は巡回行列であり、A'_1, A'_2 によって表される周期系列は多相直交系列である。ここで、行列 A'_{12} を以下のように定義する。

$$A'_{12} = [a'_{12}(i,j)] = A'_1 A'^*_2 \qquad (142)$$

行列 A'_{12} は行列 A'_1, A'_2 によって表される周期系列間の周期相互相関関数を表す行列である。

ここで、系列 $\{g'_1(i)\}, \{g'_2(i)\}$ をIDFTによって変換したものをそれぞれ系列 $\{g'''_1(l)\}, \{g'''_2(l)\}$ とすると、式(128),(129)の関係より、

$$\begin{aligned}
g'''_1(l) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}(c''_1(l_1) + Nml_0 h''_1(l_1))\right\} &\quad (143) \\
g'''_2(l) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}(c''_2(l_1) + Nml_0 h''_2(l_1))\right\} &\quad (144)
\end{aligned}$$

と表される。第6.2節の式(124),(126)及び、本節の式(131),(133)の関係により、c''', h''' を以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
c'''(l_1) &= \frac{c''(l_1)}{N} \\
&= \frac{1}{N}\left\{c\left(h^{-1}\left(\frac{l_1}{m} \pmod N\right)\right) - h^{-1}\left(\frac{l_1}{m} \pmod N\right)\cdot l_1\right\} \\
&= \frac{1}{N}c\left(h'^{-1}(l_1)\right) - \frac{1}{N}h'^{-1}(l_1)\cdot l_1 \\
&= c'\left(h'^{-1}(l_1)\right) - \frac{1}{N}h'^{-1}(l_1)\cdot l_1 \qquad (145) \\
h'''(l_1) &= mh''(l_1) \\
&= m\cdot\frac{-1}{m} \pmod N \cdot h^{-1}\left(\frac{l_1}{m} \pmod N\right) \\
&= (-1 \pmod N)\, h'^{-1}(l_1) \\
&= (N-1)\, h'^{-1}(l_1) \qquad (146)
\end{aligned}
$$

ここで、h' が全単射であること及び、$N-1$ が N と互いに素であることから、h''' も以下のような全単射になる。

$$h''' : X \to X \qquad (147)$$

また、明らかに c''' は以下のような写像である。

$$c''' : X \to R \qquad (148)$$

この c''', h''' を用いると、$g_1'''(l), g_2'''(l)$ はそれぞれ以下のように表せる。

$$
\begin{aligned}
g_1'''(l) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c_1'''(l_1) + l_0 h_1'''(l_1)\right)\right\} \qquad (149) \\
g_2'''(l) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c_2'''(l_1) + l_0 h_2'''(l_1)\right)\right\} \qquad (150)
\end{aligned}
$$

よって、式(135)から得られる拡張された変調可能な直交系列をIDFT(DFTについても同様。)することによって得られる系列も式(135)の形式で表記可能な拡張された変調可能な直交系列である。さらに、もとの全単射 h_1', h_2' が互いに異なる全単射であり、$N-1$ が N と互いに素であることから、全単射 h_1''', h_2''' は互いに異なる全単射である。よって、式(149),(150)で表される二つの系列 $\{g_1'''(l)\}, \{g_2'''(l)\}$ は異なる集合に属する系列である。

以上より、式(142)の行列 A'_{12} は、式(135)から得られる互いに異なる集合に属する二つの拡張された変調可能な直交系列間の周期相互相関関数を表す行列である。第2.3節の式(27)の関係より、行列 A'_{12} は、

$$A'_{12} = F_{N^2}^{-1}\Lambda'_1\Lambda'^{*}_2 F_{N^2} \tag{151}$$

と表される。したがって、

$$\begin{aligned}
a'_{12}(i,j) &= \sum_{k=0}^{N^2-1}\overline{f_{N^2}(i,k)}\left(\sum_{m=0}^{N^2-1}\left(\sum_{l=0}^{N^2-1}\lambda'_1(k,l)\overline{\lambda'_2(l,m)}\right)f_{N^2}(m,j)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N^2-1}\overline{f_{N^2}(i,k)}\left(\sum_{m=0}^{N^2-1}\lambda'_1(k,k)\overline{\lambda'_2(k,m)}f_{N^2}(m,j)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N^2-1}\overline{f_{N^2}(i,k)}\lambda'_1(k,k)\overline{\lambda'_2(k,k)}f_{N^2}(k,j)
\end{aligned} \tag{152}$$

である。ここで、k_0, k_1 を $k = k_0N + k_1, 0 \le k_0 \le N-1, 0 \le k_1 \le N-1$ と定義すると、

$$\begin{aligned}
&a'_{12}(i,j)\\
= &\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N^2-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}ik\right)\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c'_1(k_1)+k_0h'_1(k_1)\right)\right)\\
&\exp\left(\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c'_2(k_1)+k_0h'_2(k_1)\right)\right)\exp\left(\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{N^2}jk\right)\\
= &\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{N^2-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\{k(i-j)+Nk_0\left(h'_1(k_1)-h'_2(k_1)\right)\right.\\
&\left.+N\left(c'_1(k_1)-c'_2(k_1)\right)\}\right)\\
= &\frac{1}{N^2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\{k_1(i-j)+N\left(c'_1(k_1)-c'_2(k_1)\right)\}\right)\\
&\cdot\sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k_0\{(i-j)+\left(h'_1(k_1)-h'_2(k_1)\right)\}\right)
\end{aligned} \tag{153}$$

である。ここで、$c'_{12}(\cdot) = c'_1(\cdot) - c'_2(\cdot), h'_{12} = (h'_1(\cdot) - h'_2(\cdot)) \pmod N$ とする。さらに、$P'_{12}(i,j)$ を導入し、$a'_{12}(i,j)$ を以下のように表す。

$$a'_{12}(i,j) = \frac{1}{N^2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\{k_1(i-j)+Nc'_{12}(k_1)\}\right)P'_{12}(i,j) \tag{154}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
P'_{12}(i,j) &= \sum_{k_0=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} k_0 \left\{(i-j) + h'_{12}(k_1)\right\}\right) \\
&= \begin{cases} N & i-j+h'_{12}(k_1) = 0 \pmod N \\ 0 & i-j+h'_{12}(k_1) \neq 0 \pmod N \end{cases}
\end{aligned} \tag{155}
$$

である。もし、h'_{12} が

$$
h'_{12} : X \to X \tag{156}
$$

を満たす全単射であれば、逆写像 h'^{-1}_{12} が存在し、h'^{-1}_{12} も式 (156) を満たす全単射となる。よって、このとき、

$$
\begin{aligned}
a'_{12}(i,j) &= \frac{1}{N} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2} \left\{ h'^{-1}_{12}\left((j-i) \pmod N\right)(i-j)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + Nc'_{12}\left(h'^{-1}_{12}\left((j-i) \pmod N\right)\right)\right\}\right)
\end{aligned} \tag{157}
$$

である。よって、巡回ユニタリ行列 A'_{12} の各要素の絶対値は全て等しくなる。したがって、h'_{12} が式 (156) を満たす全単射であるとき、行列 A'_1, A'_2 によって表される異なる集合に属する二つの多相直交系列の周期相互相関関数の絶対値は全てのシフトで一定になり、第 2.3 節で示した数学的下界を実現する。

例 6.3 $\overline{F_{31}}, B_1, B_2, D_1, D_2$ をそれぞれ以下のような行列であるとする。

$$
\begin{aligned}
\overline{F_{31}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_3 & W_3^2 \\ 1 & W_3^2 & W_3 \end{bmatrix} \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} W_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix} \\
D_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで、$W_3 = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$ である。このとき、h'_1, h'_2 はそれぞれ、

$$
\begin{aligned}
h'_1(0) = 0, h'_1(1) = 2, h'_1(2) = 1 \\
h'_2(0) = 2, h'_2(1) = 0, h'_2(2) = 1
\end{aligned}
$$

であるので、$h'_{12}(\cdot) = (h'_1(\cdot) - h'_2(\cdot)) \pmod 3$ は以下のようになり、h'_{12} は全単射であることが確かめられる。

$$h'_{12}(0) = 1, h'_{12}(1) = 2, h'_{12}(2) = 0$$

このとき、二つの行列 $\sqrt{3} \cdot \overline{F_{31}} D_1 B_1, \sqrt{3} \cdot \overline{F_{31}} D_2 B_2$ の各行を順番に結合することによって得られる系列 G'_1, G'_2 は以下のようになる。

$$\begin{aligned} G'_1 &= \left(1, W_3, 1, 1, 1, W_3, 1, W_3^2, W_3^2\right) \\ G'_2 &= \left(W_3^2, 1, W_3, W_3, 1, W_3^2, 1, 1, 1\right) \end{aligned}$$

この二つの系列 G'_1, G'_2 の周期相互相関関数の絶対値は以下のように全てのシフトで一定値 3 になる。

$$(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$$

6.4 同じ集合に属する系列の周期相互相関特性

本節では、第 6.3 節において定義された集合を用いた分類において、同じ集合に属する拡張された変調可能な直交系列間の周期相互相関特性について検討する。

第 6.3 節の式 (135) によって表される多相直交系列において、同じ集合に属する周期 N^2 の二つの系列 G'_1, G'_2 を以下のように表す。

$$\begin{aligned} G'_1 &= \{g'_1(i)\}, \\ G'_2 &= \{g'_2(i)\}, \\ g'_1(i) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c'_1(i_1) + i_0 h'(i_1)\right)\right\} && (158) \\ g'_2(i) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c'_2(i_1) + i_0 h'(i_1)\right)\right\} && (159) \end{aligned}$$

ここで、$i = i_0 N + i_1, 0 \le i \le N^2 - 1, 0 \le i_0 \le N - 1, 0 \le i_1 \le N - 1$ である。次に、二つの対角行列 Λ'_1, Λ'_2 を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \Lambda'_1 &= [\lambda'_1(i,j)] \\ \Lambda'_2 &= [\lambda'_2(i,j)] \\ \lambda'_1(i,j) &= \begin{cases} g'_1(i) & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases} && (160) \\ \lambda'_2(i,j) &= \begin{cases} g'_2(i) & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases} && (161) \end{aligned}$$

さらに、行列 A'_1, A'_2 を以下のように定義する。

$$A'_2 \quad = \quad F_{N^2}^{-1}\Lambda'_1 F_{N^2} \tag{162}$$

$$A'_2 \quad = \quad F_{N^2}^{-1}\Lambda'_2 F_{N^2} \tag{163}$$

第 6.2 節に述べた関係より、式 (162),(163) で表される行列 A'_1, A'_2 は巡回行列であり、A'_1, A'_2 によって表される周期系列は多相直交系列である。行列 A'_{12} を以下のように定義する。

$$A'_{12} = [a'_{12}(i,j)] = A'_1 A'^{*}_2 \tag{164}$$

行列 A'_{12} は行列 A'_1, A'_2 によって表される周期系列間の周期相互相関関数を表す行列である。第 6.3 節に述べたように、式 (135) から得られる拡張された変調可能な直交系列を IDFT(DFT) することによって得られる系列も式 (135) の形式で表記可能な拡張された変調可能な直交系列である。さらに、もとの全単射 h' が $g'_1(i), g'_2(i)$ において等しいので、行列 A'_1, A'_2 によって表される周期系列は式 (135) から得られる同じ集合に属する拡張された変調可能な直交系列である。従って、式 (164) の行列 A'_{12} は、式 (135) から得られる同じ集合に属する二つの拡張された変調可能な直交系列間の周期相互相関関数を表す行列である。第 2.3 節の式 (27) の関係より、行列 A'_{12} は、

$$A'_{12} = F_{N^2}^{-1}\Lambda'_1\Lambda'^{*}_2 F_{N^2} \tag{165}$$

と表される。したがって、

$$a'_{12}(i,j) = \sum_{k=0}^{N^2-1} \overline{f_{N^2}(i,k)}\lambda'_1(k,k)\overline{\lambda'_2(k,k)} f_{N^2}(k,j) \tag{166}$$

である。ここで、k_0, k_1 を $k = k_0 N + k_1, 0 \le k_0 \le N-1, 0 \le k_1 \le N-1$ と定義すると、

$$\begin{aligned} a'_{12}(i,j) \quad = \quad & \frac{1}{N^2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\left\{k_1(i-j) + N\left(c'_1(k_1) - c'_2(k_1)\right)\right\}\right) \\ & \cdot \sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k_0\left\{(i-j) + (h'(k_1) - h'(k_1))\right\}\right) \end{aligned} \tag{167}$$

である。ここで、$c'_{12}(\cdot) = c'_1(\cdot) - c'_2(\cdot)$ とする。また、$h'(\cdot) - h'(\cdot) = 0 \pmod N$ である。ここで、$P'_{12}(i,j)$ を導入し、$a'_{12}(i,j)$ を以下のように表す。

$$a'_{12}(i,j) = \frac{1}{N^2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\{k_1(i-j)+Nc'_{12}(k_1)\}\right)P'_{12}(i,j) \quad (168)$$

ここで、

$$\begin{aligned} P'_{12}(i,j) &= \sum_{k_0=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}k_0(i-j)\right) \\ &= \begin{cases} N & i-j=0 \pmod N \\ 0 & i-j\neq 0 \pmod N \end{cases} \end{aligned} \quad (169)$$

である。$i-j\neq 0 \pmod N$ のとき、

$$a'_{12}(i,j) = 0 \quad (170)$$

であり、$i-j=0 \pmod N$ のとき、

$$a'_{12}(i,j) = \frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1}\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N^2}\{k_1(i-j)+Nc'_{12}(k_1)\}\right) \quad (171)$$

である。よって、同じ集合に属する二つの拡張された変調可能な直交系列間の周期相互相関関数は N の倍数に一致するシフトを除いて、全てのシフトにおいて 0 である。

例 6.4 $\overline{F_{31}}, D, B_1, B_2$ をそれぞれ以下のような行列であるとする。

$$\begin{aligned} \overline{F_{31}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_3 & W_3^2 \\ 1 & W_3^2 & W_3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} W_3 & 0 & 0 \\ 0 & W_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、$W_3 = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$ である。このとき、二つの行列 $\sqrt{3}\cdot\overline{F_{31}}DB_1$, $\sqrt{3}\cdot\overline{F_{31}}DB_2$ の各行を順番に結合することによって得られる系列 G'_1, G'_2 は以下のようになる。

$$\begin{aligned} G'_1 &= \left(1, W_3, W_3, 1, 1, W_3^2, 1, W_3^2, 1\right) \\ G'_2 &= \left(W_3, W_3^2, 1, W_3, W_3, W_3, W_3, 1, W_3^2\right) \end{aligned}$$

この二つの系列 G'_1, G'_2 の周期相互相関関数は以下のように、3 の倍数に一致するシフトを除く全てのシフトで 0 になる。

$$\left(-\frac{9}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, 0, -\frac{9}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \frac{9}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$$

6.5 周期 N^2 の N 相直交系列の個数

本節では、拡張された変調可能な直交系列に含まれる周期 N^2 の N 相直交系列の構造について検討し、拡張された変調可能な直交系列に含まれる周期 N^2 の N 相直交系列の個数が $N^{N-2}(N-1)!$ であることを証明する。

始めに周期 N^2 の N 相直交系列の構造について述べる。第 6.3 節の式 (135) において、c' を以下のような任意の写像であるとする。

$$c' : X \to X \tag{172}$$

このとき、系列の全ての要素は 1 の N 乗根になるので、第 6.3 節の式 (135) によって表される系列は周期 N^2 の N 相直交系列となる。

例 6.5 $N = 4$ とし、

$$\begin{aligned} c(0) &= 0, \\ c(1) &= 0, \\ c(2) &= 4, \\ c(3) &= 12 \end{aligned}$$

とすると、第 6.3 節の式 (131) により、

$$\begin{aligned} c'(0) &= 0, \\ c'(1) &= 0, \\ c'(2) &= 1, \\ c'(3) &= 3 \end{aligned}$$

であり、B は以下のように表される。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{bmatrix}$$

このとき、$\overline{F_{41}}, B, D$ を用いて系列 G' を得る。ここで、$\overline{F_{41}}$ は例 5.1 において,D は例 6.1 において定義されたものである。系列 G' は以下のようになる。

$$G' = (1, 1, j, -j, j, -1, j, -1, -1, 1, j, j, -j, -1, j, 1)$$

この系列 G' は周期 16 の 4 相直交系列である。

式 (135) によって表される系列が周期 N^2 の N 相直交系列であるとき、h' は任意の全単射であるので h' として可能なものは $N!$ 個存在し、c' は任意の写像であるので c' として可能なものは N^N 個存在する。したがって、式 (135) より得られる周期 N^2 の N 相直交系列は $N^N N!$ 個存在する。しかし、系列 $\hat{a} = (\alpha a_0, \alpha a_1, \cdots, \alpha a_{N-1})$ は系列 $a = (a_0, a_1, \cdots, a_{N-1})$ と同じ系列と見なすことができる。ここで、α は複素数の定数であり、α の絶対値は 1 である。さらに、系列 $\tilde{a} = (a_q, a_{q+1}, \cdots, a_{N-1}, a_0, \cdots, a_{q-1})$ も系列 $a = (a_0, a_1, \cdots, a_{N-1})$ と同じ系列と見なすことができる。ここで $0 \leq q \leq N-1$ である。したがって式 (135) より得られる異なる周期 N^2 の N 相直交系列の個数は $N^N N!$ よりも少ない。

次に、以下の三つの定理を証明する。

定理 1 式 (135) より得られる系列 G' を以下のように表す。

$$G' = \Big(g'(0), g'(1), \cdots, g'(N^2-1)\Big)$$

さらに、系列 $\hat{G}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
\hat{G} &= \Big(\hat{g}(0), \hat{g}(1), \cdots, \hat{g}(N^2-1)\Big) \\
&= \Big(\alpha g'(0), \alpha g'(1), \cdots, \alpha g'(N^2-1)\Big) \\
&= \Big(e^{j\frac{2\pi}{N}p} g'(0), e^{j\frac{2\pi}{N}p} g'(1), \cdots, e^{j\frac{2\pi}{N}p} g'(N^2-1)\Big)
\end{aligned}$$

ここで、$0 \leq p \leq N-1$, $j = \sqrt{-1}$ である。このとき、系列 $\hat{G}$ も式 (135) より得ることが可能である。

証明 $\hat{g}(i)$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\hat{g}(i) &= e^{j\frac{2\pi}{N}p} \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c'(i_1) + i_0 h'(i_1)\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c'(i_1) + p + i_0 h'(i_1)\right)\right\} \qquad (173)
\end{aligned}$$

$\hat{c}$ を

$$\hat{c}(i_1) = (c'(i_1) + p) \pmod N \tag{174}$$

と定義すると、$\hat{c}$ は明らかに以下のような写像である。

$$\hat{c} : X \to X \tag{175}$$

このとき、$\hat{g}(i)$ は以下のように表される。

$$\hat{g}(i) = \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\Big(\hat{c}(i_1) + i_0 h'(i_1)\Big)\right\} \tag{176}$$

したがって、系列 $\hat{G}$ も式 (135) より得ることが可能である。

(Q.E.D.)

定理 2 式 (135) より得られる系列 G' を以下のように表す。

$$G' = \Big(g'(0), g'(1), \cdots, g'(N^2-1)\Big)$$

さらに、系列 $\tilde{G}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= \Big(\tilde{g}(0), \tilde{g}(1), \cdots, \tilde{g}(N^2-1)\Big) \\ &= \Big(g'(q), g'(q+1), \cdots, g'(N^2-1), g'(0), \cdots, g'(q-1)\Big)\end{aligned}$$

ここで、$0 \le q \le N^2 - 1$ である。このとき、系列 $\tilde{G}$ も式 (135) より得ることが可能である。

証明 $\tilde{g}(i)$ を以下のように表す。

$$\tilde{g}(i) = g'\Big((i+q) \pmod{N^2}\Big) \tag{177}$$

ここで、$i,\ q,\ i+q$ は N^2 を法とする剰余類と見なすことができるので、$i,\ q,\ i+q$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}i &= i_0 N + i_1, \\ q &= q_0 N + q_1, \\ i + q &= (i+q)_0 N + (i+q)_1\end{aligned} \tag{178}$$

ここで、$0 \le i_0 \le N-1, 0 \le i_1 \le N-1, 0 \le q_0 \le N-1, 0 \le q_1 \le N-1, 0 \le (i+q)_0 \le N-1, 0 \le (i+q)_1 \le N-1$ である。このとき、$(i+q)_0$ 及び $(i+q)_1$ は以下のように表すことが可能である。

$$\begin{aligned}(i+q)_0 &= \left(i_0 + q_0 + \left[\frac{i_1+q_1}{N}\right]\right) \pmod N, \\ (i+q)_1 &= (i_1+q_1) \pmod N\end{aligned} \tag{179}$$

ここで、$\left[\frac{i_1+q_1}{N}\right]$ は $\frac{i_1+q_1}{N}$ を超えない最大の整数を意味する。従って、

$$\begin{aligned}\tilde{g}(i) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c'\left((i+q)_1\right) + (i+q)_0 h'\left((i+q)_1\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(c'\left((i_1+q_1) \pmod N\right)\right.\right. \\ &\quad + \left(\left(i_0+q_0+\left[\frac{i_1+q_1}{N}\right]\right) \pmod N\right) \\ &\quad \left.\left.\cdot h'\left((i_1+q_1) \pmod N\right)\right)\right\}\end{aligned} \tag{180}$$

である。ここで、$\tilde{c}$ と $\tilde{h}$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{c}(i_1) &= \left\{c'\left((i_1+q_1) \pmod N\right) + \left(q_0 + \left[\frac{i_1+q_1}{N}\right]\right)\right. \\ &\quad \left.\cdot h'\left((i_1+q_1) \pmod N\right)\right\} \pmod N\end{aligned} \tag{181}$$

$$\tilde{h}(i_1) = h'\left((i_1+q_1) \pmod N\right) \tag{182}$$

このとき、$\tilde{c}$ は明らかに以下のような写像である。

$$\tilde{c} : X \to X \tag{183}$$

また、$\tilde{h}$ は以下のような全単射である。

$$\tilde{h} : X \to X \tag{184}$$

このとき、$\tilde{g}(i)$ は以下のように表される。

$$\tilde{g}(i) = \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\left(\tilde{c}(i_1) + i_0\tilde{h}(i_1)\right)\right\} \tag{185}$$

従って、系列 $\tilde{G}$ も式 (135) より得ることが可能である。

(Q.E.D.)

定理 3 系列 $\{g'_1(i)\}$, $\{g'_2(i)\}$ をそれぞれ以下のように定義する。

$$\begin{aligned} g'_1(i) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}(c'_1(i_1)+i_0h'_1(i_1))\right\}, \\ g'_2(i) &= \exp\left\{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}(c'_2(i_1)+i_0h'_2(i_1))\right\} \end{aligned}$$

このとき、もし全ての i に対して

$$g'_1(i) = g'_2(i)$$

であるならば、全ての i_1 に対して

$$c'_1(i_1) = c'_2(i_1)$$

かつ

$$h'_1(i_1) = h'_2(i_1)$$

である。

証明 $i_0 = 0$ のとき、

$$c'_1(i_1) + 0 \cdot h'_1(i_1) = c'_2(i_1) + 0 \cdot h'_2(i_1) \tag{186}$$

であるので、全ての i_1 に対して、

$$c'_1(i_1) = c'_2(i_1) \tag{187}$$

である。さらに、$i_0 = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} c'_1(i_1) + 1 \cdot h'_1(i_1) &= c'_2(i_1) + 1 \cdot h'_2(i_1) \\ &= c'_1(i_1) + 1 \cdot h'_2(i_1) \end{aligned} \tag{188}$$

であるので、全ての i_1 に対して、

$$h'_1(i_1) = h'_2(i_1) \tag{189}$$

である。

(Q.E.D.)

N	$\phi(N)N^{N-2}$	$N^{N-2}(N-1)!$
2	1	1
3	6	6
4	32	96
5	500	3000
6	2592	155520
7	100842	12101040
8	1048576	1321205760

表 4: 周期 N^2 の N 相直交系列の個数

定理 1 における p として可能なものは N 個、**定理** 2 における q として可能なものは N^2 個存在するので、式 (135) より得られる周期 N^2 の N 相直交系列の個数は以下のように計算される。

$$\frac{N^N N!}{N \cdot N^2} = N^{N-2}(N-1)! \tag{190}$$

さらに、**定理** 3 の対偶を考えることにより、これらの系列は全て互いに異なる系列であることがわかる。したがって、提案された拡張方法により得られる異なる周期 N^2 の N 相直交系列の個数は $N^{N-2}(N-1)!$ である。

一方、参考文献 [4],[5] において提案された変調可能な直交系列のうち異なる周期 N^2 の N 相直交系列の個数は $\phi(N)N^{N-2}$ である。ここで、$\phi(N)$ は Euler's function と呼ばれ、$0, 1, \cdots, N-1$ に含まれる整数のうち、N と互いに素であるものの個数を表す。

表 4 は変調可能な直交系列及び、拡張された変調可能な直交系列に含まれる異なる周期 N^2 の N 相直交系列の個数を、いくつかの N について比較したものである。$N = 4$ であるとき、提案された拡張法によって得られる周期 16 の 4 相直交系列の個数は 96 個である。一方、計算機を用いた検索により、周期 16 の 4 相直交系列はこれらの 96 個以外に存在しないことが確認されている。表 5 に周期 16 の 4 相直交系列を全て示す。ただし、表 5 において、$0, 1, 2, 3$ はそれぞれ $1, j, -1, -j$ を表す。ここで、$j = \sqrt{-1}$ である。

0000012302020321	0001012002030322	0002012102000323	0003012202010320
0010013302120331	0011013002130332	0012013102100333	0013013202110330
0020010302220301	0021010002230302	0022010102200303	0023010202210300
0030011302320311	0031011002330312	0032011102300313	0033011202310310
0000013202200312	0010010202300322	0020011202000332	0030012202100302
0001013302210313	0011010302310323	0021011302010333	0031012302110303
0002013002220310	0012010002320320	0022011002020330	0032012002120300
0003013102230311	0013010102330321	0023011102030331	0033012102130301
0000021300220231	0001021000230232	0002021100200233	0003021200210230
0100031301220331	0101031001230332	0102031101200333	0103031201210330
0200001302220031	0201001002230032	0202001102200033	0203001202210030
0300011303220131	0301011003230132	0302011103200133	0303011203210130
0000031202200132	0100001203200232	0200011200200332	0300021201200032
0001031302210133	0101001303210233	0201011300210333	0301021301210033
0002031002220130	0102001003220230	0202011000220330	0302021001220030
0003031102230131	0103001103230231	0203011100230331	0303021101230031
0000023100220213	0010020100320223	0020021100020233	0030022100120203
0100033101220313	0110030101320323	0120031101020333	0130032101120303
0200003102220013	0210000102320023	0220001102020033	0230002102120003
0300013103220113	0310010103320123	0320011103020133	0330012103120103
0000032102020123	0100002103020223	0200012100020323	0300022101020023
0010033102120133	0110003103120233	0210013100120333	0310023101120033
0020030102220103	0120000103220203	0220010100220303	0320020101220003
0030031102320113	0130001103320213	0230011100320313	0330021101320013

表 5: 周期 16 の 4 相直交系列