5 変調可能な直交系列の構成法及び、その特性

本節では、末広 [4][5] によって提案された変調可能な直交系列の構成法及び、その特性について詳細に述べる。

5.1 変調可能な直交系列の構成法

先に末広はFrank Sequencesに対する変調を用いて、変調可能な直交系列と呼ばれる多相直交系列の集合を得ることに成功した。ここでは、その構成法について述べる。

N を自然数とし、m を $gcd(m,N)=1$ を満たす他の自然数とする。このとき、一般化された $N\times N$DFT 行列 F_{Nm} を以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
F_{Nm} &= \left[f_{Nm}(i_0,i_1)\right], \\
f_{Nm}(i_0,i_1) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}mi_0i_1\right)
\end{aligned}
\tag{97}
$$

ここで $0\le i_0\le N-1,\ 0\le i_1\le N-1$ である。次に $N\times N$ 対角行列 B を以下のように定義する。

$$
\begin{aligned}
B &= \left[b(i_0,i_1)\right] \\
b(i_0,i_1) &= \begin{cases} \exp\left(\sqrt{-1}\theta_{i_0}\right) & (i_0=i_1) \\ 0 & (i_0\ne i_1) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{98}
$$

ここで、行列 B の対角要素 $b(i_0,i_0)$ の絶対値は1であり、その他の要素は全て0である。このとき、$N\times N$ 行列 $\sqrt{N}\cdot\overline{F_{Nm}}B$ の (i_0,i_1) 要素は、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{f_{Nm}(i_0,k)}\cdot b(k,i_1) &= \sqrt{N}\cdot\overline{f_{Nm}(i_0,i_1)}\cdot b(i_1,i_1) \\
&= b(i_1,i_1)\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}mi_0i_1\right)
\end{aligned}
\tag{99}
$$

である。ここで、$\overline{F_{Nm}}$ は行列 F_{Nm} の共役行列を表し、同様に $\overline{f_{Nm}(i_0,i_1)}$ は $f_{Nm}(i_0,i_1)$ の複素共役を表す。次に、$N\times N$ 行列 $\sqrt{N}\cdot\overline{F_{Nm}}B$ の N 個の行を結合して長さ N^2 の系列 G を得る。ここで、系列 G の第 (i_0N+i_1) 番目の要素は行列 $\sqrt{N}\cdot\overline{F_{Nm}}B$ の (i_0,i_1) 要素であり、G は以下のように表される。

$$
G = \{g(i)\},
$$

$$g(i) \;=\; b(i_1, i_1)\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} m i_0 i_1\right) \tag{100}$$

ここで、$i = i_0 N + i_1, 0 \leq i \leq N^2 - 1$ である。長さ N^2 の系列 G を周期的に繰り返して結合することにより、周期 N^2 の多相直交系列が得られる。

例 5.1　$N = 4, m = 1$ とすると、

$$\overline{F_{41}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \tag{101}$$

である。ここで、$j = \sqrt{-1}$ である。さらに B を

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

とする。ここで $|b_i| = 1, i = 0, 1, 2, 3$ である。このとき、系列 G は以下のように表される。

$$\begin{aligned} G \;=\; & (b_0, b_1, b_2, b_3, b_0, jb_1, -b_2, -jb_3, \\ & b_0, -b_1, b_2, -b_3, b_0, -jb_1, -b_2, jb_3) \end{aligned}$$

周期系列 G の周期自己相関関数は以下のようになり、直交系列であることが確かめられる。

$$(16, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

5.2　変調可能な直交系列の相互相関特性

本節では第 5.1 節で述べた変調可能な直交系列の相互相関特性についてまとめる。

第 5.1 節の式 (100) によれば、周期 N^2 の変調可能な直交系列 $\{g(i)\}$ は以下のように表される。

$$g(i) \;=\; b(i_1, i_1)\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} m i_0 i_1\right) \tag{102}$$

ここで、自然数 m を用いて、変調可能な直交系列 $\{g(i)\}$ をいくつかの集合に分類する。すなわち、同じ自然数 m より得られる変調可能な直交系列は同じ集合に属し、異なる自然数 m_1, m_2 より得られる変調可能な直交系列はそれぞれ異なる集合に属すると定義する。ある N に対して、上記の集合は $\phi(N)$ 個存在する。ここで、$\phi(N)$ は Euler's function と呼ばれ、$0, 1, \cdots, N-1$ に含まれる整数のうち、N と互いに素であるものの個数を表す。また、一つの集合には $b\,(i_1, i_1)$ の個数に等しいだけの系列が含まれている。$b\,(i_1, i_1)$ の個数は、明らかに無限に存在するので、一つの集合には無限個の変調可能な直交系列が含まれている。

次に、異なる集合に属する二つの変調可能な直交系列間の周期相互相関特性について述べる。式 (102) によって表される変調可能な直交系列において、異なる集合に属する周期 N^2 の二つの系列 $\{g_1(i)\}, \{g_2(i)\}$ を以下のように表す。

$$g_1(i) = b_1\,(i_1, i_1) \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} m_1 i_0 i_1\right) \tag{103}$$

$$g_2(i) = b_2\,(i_1, i_1) \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N} m_2 i_0 i_1\right) \tag{104}$$

ここで、$i = i_0 N + i_1, 0 \le i \le N^2 - 1, 0 \le i_0 \le N-1, 0 \le i_1 \le N-1$ である。ここで、もし、$gcd(m_1 - m_2, N) = 1$ であるならば、二つの変調可能な直交系列 $\{g_1(i)\}, \{g_2(i)\}$ 間の周期相互相関関数の絶対値は全てのシフトにおいて一定値 N となり、第 2.3 節において述べた数学的下界を実現することが証明されている。

例 5.2-1　$\overline{F_{31}}, \overline{F_{32}}, B_1, B_2$ をそれぞれ以下のような行列であるとする。

$$\overline{F_{31}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_3 & W_3^2 \\ 1 & W_3^2 & W_3 \end{bmatrix}, \overline{F_{32}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_3^2 & W_3 \\ 1 & W_3 & W_3^2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} W_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix}$$

ここで、$W_3 = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$ である。このとき、$m_1 = 1, m_2 = 2$ であり、$gcd(m_1 - m_2, N) = gcd(1-2, 3) = gcd(2, 3) = 1$ である。このとき、二つの行列 $\sqrt{3} \cdot \overline{F_{31}} B_1, \sqrt{3} \cdot \overline{F_{32}} B_2$ の各行を順番に結合することによって得られる系列 $\{g_1(i)\}, \{g_2(i)\}$ は以下のようになる。

$$\{g_1(i)\} = \left(1, W_3, 1, 1, W_3^2, W_3^2, 1, 1, W_3\right)$$

$$\{g_2(i)\} = \left(W_3^2, 1, W_3, W_3^2, W_3^2, W_3^2, W_3^2, W_3, 1\right)$$

この二つの系列 $\{g_1(i)\}, \{g_2(i)\}$ の周期相互相関関数の絶対値は以下のように全てのシフトで一定値3になる。

$$(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$$

一方、式(102)によって表される変調可能な直交系列において、同じ集合に属する周期 N^2 の二つの系列 $\{g_1(i)\}, \{g_2(i)\}$ 間の周期相互相関関数は、N の倍数に一致するシフトを除く、全てのシフトにおいて0となることが証明されている。

例 5.2-2 $\overline{F_{31}}, B_1, B_2$ をそれぞれ以下のような行列であるとする。

$$\overline{F_{31}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_3 & W_3^2 \\ 1 & W_3^2 & W_3 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} W_3 & 0 & 0 \\ 0 & W_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、$W_3 = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$ である。このとき、二つの行列 $\sqrt{3}\cdot\overline{F_{31}}B_1, \sqrt{3}\cdot\overline{F_{31}}B_2$ の各行を順番に結合することによって得られる系列 $\{g_1(i)\}, \{g_2(i)\}$ は以下のようになる。

$$\{g_1(i)\} = \left(1, W_3, W_3, 1, W_3^2, 1, 1, 1, W_3^2\right)$$
$$\{g_2(i)\} = \left(W_3, W_3^2, 1, W_3, 1, W_3^2, W_3, W_3, W_3\right)$$

この二つの系列 $\{g_1(i)\}, \{g_2(i)\}$ の周期相互相関関数は以下のように、3の倍数に一致するシフトを除く全てのシフトで0になる。

$$\left(-\frac{9}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \frac{9}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, 0, -\frac{9}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$$