4 相補系列

二つの系列の非周期自己相関関数の和が0シフトを除く全てのシフトにおいて0であるとき、その二つの系列は相補系列と呼ばれる。相補系列はGolayによって提案された系列である。また、二組の相補系列において、一方の相補系列に属する一つの系列ともう一方の相補系列に属する一つの系列との非周期相互相関関数と一方の相補系列に属する他の系列ともう一方の相補系列に属する他の系列との非周期相互相関関数の和が全てのシフトにおいて0になるとき、それらの二組の相補系列は完全相補系列と呼ばれる。相補系列が提案されて以来、レーダ、SAW(Surface Acoustic Wave)デバイス、ナビゲーションシステム、スペクトラム拡散(Spread Spectrum)システム、CDMA(Code Division Multiple Access)など、様々な応用が提案されている。本節では、様々な相補系列及び、完全相補系列の構成法とその特性について述べる。さらに、相補系列、完全相補系列の概念を周期系列に拡張した周期相補系列と周期完全相補系列についても述べる。[13]

4.1 相補系列

本節では様々な相補系列の構成法及び、その特性について述べる。[13]

4.1.1 Golay Pairs

系列 $S_1 = \left\{\hat{s}_n^{(1)}\right\}$ と $S_2 = \left\{\hat{s}_n^{(2)}\right\}$ を同一の長さ N をもつ2相の相補系列(Golay Pairs)であるとする。すなわち、系列 S_1, S_2 は以下の条件を満たしているとする。

$$R_{S_1}(\tau) + R_{S_2}(\tau) = \sum_{n=0}^{N-\tau-1} \left(\hat{s}_n^{(1)}\hat{s}_{n+tau}^{(1)} + \hat{s}_n^{(2)}\hat{s}_{n+tau}^{(2)}\right) = 0, \tau \neq 0 \qquad (66)$$

系列 $\{S_1, S_2\}$ がGolay Pairsあるとき、以下の操作によって得られる系列も相補系列である。

1. S_1 と S_2 の交換:$\{S_2, S_1\}$
2. S_1 または/かつ S_2 の反転:$\{\overline{S_1}, S_2\}, \{S_1, \overline{S_2}\}, \{\overline{S_1}, \overline{S_2}\}$
3. S_1 または/かつ S_2 の -1 倍:$\{-S_1, S_2\}, \{S_1, -S_2\}, \{-S_1, -S_2\}$
4. S_1 と S_2 において、奇数または偶数番目の要素を -1 倍:

$\{(-\hat{s}_0^{(1)},\hat{s}_1^{(1)},-\hat{s}_2^{(1)},\hat{s}_3^{(1)},\cdots),(-\hat{s}_0^{(2)},\hat{s}_1^{(2)},-\hat{s}_2^{(2)},\hat{s}_3^{(2)},\cdots)\},$
$\{(\hat{s}_0^{(1)},-\hat{s}_1^{(1)},\hat{s}_2^{(1)},-\hat{s}_3^{(1)},\cdots),(\hat{s}_0^{(2)},-\hat{s}_1^{(2)},\hat{s}_2^{(2)},-\hat{s}_3^{(2)},\cdots)\}$

ここで、上記の $\overline{S_i}$ は系列 S_i の要素の順番を逆に並べた系列を表す。また、$-S_i$ は系列 S_i の各要素に -1 を乗じた系列を表す。

例 4.1.1-1　系列 $\{S_1, S_2\} = (--+-+++-,++-++++-)$ は Golay Pairs である。ここで、$+,-$ はそれぞれ $+1,-1$ を表している。上記の特性より、以下に示す系列のペアも全て Golay Pairs であることが確かめられる。

1. $(++-++++-,--+-+++-)$
2. $(++-+---+,++-++++-)$,
   $(++-+---+,--+-----+)$
3. $(-+++-+--,++-++++-)$,
   $(-+++-+--,-++++-++)$
4. $(+----+--,-+++-+--)$,
   $(-++++-++,+---+-++)$

また、Golay Pairs $\{S_1, S_2\}$ は以下の関係を満足することが証明されている。

$$\hat{s}_n^{(1)}\hat{s}_{N-1-n}^{(1)}\hat{s}_n^{(2)}\hat{s}_{N-1-n}^{(2)} = -1 \tag{67}$$

この要素に関する特性から、対称に配置された四つの要素のうち三つの要素は同じ符号でなければならないことがわかる。この結果より、内積について $S_1 \cdot S_2 = 0$ であるとこが直ちにわかる。Golay によれば、2 相系列のペアが相補系列となるための必要条件は、系列の長さ N が偶数であること及び、以下のように多くとも二つの数の二乗で表現できることである。

$$N = 2(U^2 + V^2) = (U+V)^2 + (U-V)^2 \tag{68}$$

従って、Golay Pairs となりうる系列の長さとして可能なものは、2,4,8,10,16,18,20,26,32,34,36,40,50,52,58,64,68,72,74,80,82,90,98,100 のみである。ただし、$N \leq 100$ を満たす N についてのみ記述した。しかしながら、現在見つかっている Golay Pairs は、長さが 2,4,8,10,16,20,26,32,40,52,64,80,100 の系列で構成されるペアのみである。

あるGolay Pairsが、長さのより短い他のGolay Pairsから得ることが不可能であり、さらに、同一の長さの他のGolay Pairsの変換によって得ることも不可能であるとき、このGolay Pairsはカーネルと呼ばれる。計算機を用いた検索により、カーネルとしては長さ $N = 2, 10, 26$ のものが存在することが確かめられている。それらのカーネルを以下に示す。

$$
\begin{aligned}
N = 2 &\;:\; (++,+-) \\
N = 10 &\;:\; (+--+-+---+,+------++-) \\
N = 26 &\;:\; (+++--+++-+-----+-++--+----, \\
&\quad\;\; ---++---+-++-+-+-++--+----)
\end{aligned}
$$

ここで、系列のペア $\{S_1, S_2\}$ を長さ N のGolay Pairsとする。このとき、以下の関係のいずれかによって与えられる長さ $2N$ の系列のペア $\{R_1, R_2\}$ もGolay Pairsである。

$$\{R_1, R_2\} = \{S_1S_2, \overline{S_2}(-\overline{S_1})\} \tag{69}$$

$$\{R_1, R_2\} = \{S_1S_2, (-\overline{S_2})\overline{S_1}\} \tag{70}$$

$$\{R_1, R_2\} = \{S_1S_2, (-S_1)S_2\} \tag{71}$$

$$\{R_1, R_2\} = \{S_1S_2, S_1(-S_2)\} \tag{72}$$

$$\{R_1, R_2\} = \{S_1\overline{S_2}, S_2(-\overline{S_1})\} \tag{73}$$

ここで、S_1S_2 は系列 S_1 と S_2 の結合を表しており、$S_1S_2 = (\hat{s}_0^{(1)}, \hat{s}_1^{(1)}, \cdots, \hat{s}_{N-1}^{(1)}, \hat{s}_0^{(2)}, \hat{s}_1^{(2)}, \cdots, \hat{s}_{N-1}^{(2)})$ である。

さらに、長さ N_1 のGolay Pairs $\{S_1, S_2\}$ と長さ N_2 のGolay Pairs $\{R_1, R_2\}$ が与えられたとき、長さ N_1N_2 のGolay Pairs $\{T_1, T_2\}$ は以下の方法で構成可能である。

$$
\begin{aligned}
\{T_1, T_2\} = \Bigg\{ & R_1 \otimes \frac{S_1 + S_2}{2} + R_2 \otimes \frac{S_1 - S_2}{2}, \\
& R_1 \otimes \frac{\overline{S_1} - \overline{S_2}}{2} - R_2 \otimes \frac{\overline{S_1} + \overline{S_2}}{2} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{74}
$$

ここで、$\otimes$ はクロネッカー積を表す。例えば、系列 $\{R_1 \otimes S_1\}$ は $\{R_1 \otimes S_1\} = (r_0^{(1)}S_1, r_1^{(1)}S_1, \cdots, r_{N_2-1}^{(1)}S_1)$ であり、長さ N_1N_2 を持つ系列である。この結果と、長さ $2, 10, 26$ のGolay Pairsがカーネルとなりうることより、長さ $2^a10^b26^c$ のGolay Pairsが存在することがわかる。ここで、a, b, c は $a, b, c \geq 0$ を満たす任意の整数であり、$a = b = c = 0$ の場合もGolay Pairs

N				
1	$(-,-)$	$(-,+)$	$(+,-)$	$(+,+)$
2	$(--,-+)$	$(-+,--)$	$(+-,--)$	$(++,-+)$
	$(--,+-)$	$(-+,++)$	$(+-,++)$	$(++,+-)$
4	$(---+,--+-)$	$(-+--,---+)$	$(+---,--+-)$	$(++-+,---+)$
	$(---+,-+--)$	$(-+--,-+++)$	$(+---,-+--)$	$(++-+,-+++)$
	$(---+,+-++)$	$(-+--,+---)$	$(+---,+-++)$	$(++-+,+---)$
	$(---+,++-+)$	$(-+--,+++-)$	$(+---,++-+)$	$(++-+,+++-)$
	$(--+-,---+)$	$(-+++,--+-)$	$(+-++,---+)$	$(+++-,--+-)$
	$(--+-,-+++)$	$(-+++,-+--)$	$(+-++,-+++)$	$(+++-,-+--)$
	$(--+-,+---)$	$(-+++,+-++)$	$(+-++,+---)$	$(+++-,+-++)$
	$(--+-,+++-)$	$(-+++,++-+)$	$(+-++,+++-)$	$(+++-,++-+)$

表 3: 長さ $N=1,2,4$ の Golay Pairs の総数

であると見なす。すなわち系列のペア $\{+,+\},\{+,-\},\{-,+\},\{-,-\}$ も Golay Pairs であるとする。一方、長さ $2\cdot 9^d, 2\cdot 49^d, 2p$ の Golay Pairs は存在しないことが証明されている。ここで、d は任意の正の整数であり、p は $p=3 \pmod 4$ を満たす整数である。

計算機を用いた検索により、長さ $N=1,2,4,8,10$ の異なる Golay Pairs の総数は、それぞれ $4,8,32,192,128$ であることが示されている。表 3 に長さ $N=1,2,4$ の全ての Golay Pairs を示す。

例 4.1.1-2　系列のペア $\{S_1,S_2\}$ を長さ 10 の Golay Pairs$\{S_1,S_2\}=(+--+-+---+,+-------++-)$ とする。このとき、$\{R_1,R_2\}=\{S_1S_2,S_1(-S_2)\}$ に従って、長さ 20 の Golay Pairs$\{R_1,R_2\}$ は以下のように構成される。

$$\begin{aligned}\{R_1,R_2\} &= (+--+-+---++-------++-,\\ &\quad +--+-+---+-+++++++--+)\end{aligned}$$

また、長さ $N_1=2$ の Golay Pairs$\{S_1,S_2\}=(++,--)$ と長さ $N_2=26$ の Golay Pairs

$$\begin{aligned}&\{R_1,R_2\}\\ =\ &(+++--+++-+-----+-++--+----,\\ &---++---+-++-+-+-++--+----)\end{aligned}$$

が与えられているとする。このとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{S_1+S_2}{2} &= (1,0) \\
\frac{S_1-S_2}{2} &= (0,1) \\
\frac{\overline{S_1}-\overline{S_2}}{2} &= (1,0) \\
\frac{\overline{S_1}+\overline{S_2}}{2} &= (0,1)
\end{aligned}
$$

であり、式(74)より、長さ $N_1N_2=52$ の Golay Pairs$\{T_1,T_2\}$ が以下のように得られる。

$$
\begin{aligned}
& \{T_1,T_2\} \\
= \; & (+++--+++-+-----+-++--+---- \\
& ---++---+-++-+-+-++--+----, \\
& +++--+++-+-----+-++--+---- \\
& +++--+++-+--+-+-+--++-++++)
\end{aligned}
$$

4.1.2 多相相補系列

$\{S_1,S_2\}, S_i=\{\hat{s}_n^{(i)}\}$ を長さ N の多相相補系列とする。このとき、以下に示す変換によって得られる系列のペア $\{R_1,R_2\}, R_i=\{\hat{r}_n^{(i)}\}$ も多相相補系列である。

$$\hat{r}_n^{(i)}=\hat{s}_n^{(i)}e^{i\frac{2\pi}{m}n}, i=1,2 \tag{75}$$

ここで、m は0でない任意の整数であり、$i=\sqrt{-1}$ である。また、Golay Pairs の場合と同様に、以下の操作によって得られる系列も多相相補系列である。

1. S_1 と S_2 の交換:$\{S_2,S_1\}$
2. S_1 または/かつ S_2 の -1 倍:$\{-S_1,S_2\},\{S_1,-S_2\},\{-S_1,-S_2\}$
3. S_1 と S_2 において、奇数または偶数番目の要素を -1 倍:
   $\{(-\hat{s}_0^{(1)},\hat{s}_1^{(1)},-\hat{s}_2^{(1)},\hat{s}_3^{(1)},\cdots),(-\hat{s}_0^{(2)},\hat{s}_1^{(2)},-\hat{s}_2^{(2)},\hat{s}_3^{(2)},\cdots)\}$,
   $\{(\hat{s}_0^{(1)},-\hat{s}_1^{(1)},\hat{s}_2^{(1)},-\hat{s}_3^{(1)},\cdots),(\hat{s}_0^{(2)},-\hat{s}_1^{(2)},\hat{s}_2^{(2)},-\hat{s}_3^{(2)},\cdots)\}$
4. S_1 または/かつ S_2 を反転させ複素共役をとる:
   $\{\overline{S_1}^*,S_2\},\{S_1,\overline{S_2}^*\},\{\overline{S_1}^*,\overline{S_2}^*\}$

ここで、系列 S_i の要素の順番を反転させた系列 $\overline{S_i}$ の非周期自己相関関数の絶対値は系列 S_i のそれと同一であるが、非周期自己相関関数のサイドローブの位相を保持するためには、要素を反転させさらに複素共役をとる操作が必要となる。多相系列 S_i の各要素を -1 倍すると、系列 S_i の各要素の位相を 180°回転させた系列が得られる。

簡単のために、多相系列 $S_i = \{\hat{s}_n^{(i)}\}$ の要素 $\hat{s}_n^{(i)} = e^{i\frac{2\pi}{4}s_n^{(i)}}$ を、その位相 $s_n^{(i)}$ を用いて $S_i = \{s_n^{(i)}\}$ と表すことにする。現在知られている 4 相相補系列のカーネルは

$$
\begin{aligned}
N = 3 &\ :\ (010, 002) \\
N = 5 &\ :\ (01321, 00013) \\
N = 13 &\ :\ (0001200302031, 0122212003203)
\end{aligned}
$$

である。Golay Pairs と同じ長さを持つ 4 相相補系列の例としては、以下のようなものがある。

$$
\begin{aligned}
N = 4 &\ :\ (0301, 0103) \\
N = 10 &\ :\ (0303210121, 0301230303) \\
N = 26 &\ :\ (01212123210103210303032301, \\
&\quad\ \ 01212123210123032121210123)
\end{aligned}
$$

長さ 100 以下において、長さ 3, 5, 6, 12, 13, 18, 24, 30, 36, 48, 50, 60, 72, 78, 96 の 4 相相補系列が見つかっている。また、長さ 7, 9, 11, 15, 17 の 4 相相補系列は存在しないことがわかっている。

例 4.1.2-1　長さ $N = 5$ の 4 相相補系列 $\{S_1, S_2\} = (01321, 00013)$ が与えられているとする。$m = 3$ とすると、式 (75) の変換

$$
\begin{aligned}
\hat{r}_n^{(1)} &= \hat{s}_n^{(1)} e^{i\frac{2\pi}{3}n} \\
\hat{r}_n^{(2)} &= \hat{s}_n^{(2)} e^{i\frac{2\pi}{3}n}
\end{aligned}
$$

によって、系列のペア $\{R_1, R_2\}$ が以下のように得られる。

$$
\{R_1, R_2\} = (4B9AB, 48075)
$$

$\{R_1, R_2\}$ も長さ $N = 5$ の相補系列である。ただし、位相状態数は増加して、12 相相補系列である。ここで、$A = 10, B = 11$ を表している。

また、以下に示す系列のペアも全て 4 相相補系列である。

1. $\{S_2, S_1\} = (00013, 01321)$
2. $\{S_1, -S_2\} = (01321, 22231)$
3. $(03301, 02033)$
4. $\{S_1, \overline{S_2^*}\} = (01321, 13222)$

第4.1.1節において述べた、長さ N の Golay Pairs を用いて、長さ $N \cdot 2^k$ の Golay Pairs を構成する方法は多相相補系列にも適用可能である。系列のペア $\{S_1, S_2\}$ を長さ N の多相相補系列とする。このとき、以下に示す系列のペア $\{R_1, R_2\}$ は全て長さ $2N$ の多相相補系列である。

$$\{R_1, R_2\} = \left\{S_1 S_2, \overline{S_2^*}(-\overline{S_1^*})\right\} \tag{76}$$

$$\{R_1, R_2\} = \left\{S_1 S_2, (-\overline{S_2^*})\overline{S_1^*}\right\} \tag{77}$$

$$\{R_1, R_2\} = \{S_1 S_2, (-S_1) S_2\} \tag{78}$$

$$\{R_1, R_2\} = \{S_1 S_2, S_1(-S_2)\} \tag{79}$$

$$\{R_1, R_2\} = \left\{S_1 \overline{S_2^*}, S_2(-\overline{S_1^*})\right\} \tag{80}$$

例 4.1.2-2　長さ 3 の 4 相相補系列 $\{S_1, S_2\} = (002, 010)$ が与えられているとする。このとき、以下に示す系列のペア $\{R_1, R_2\}$ は全て長さ 6 の 4 相相補系列である。

$$\begin{aligned}
\{R_1, R_2\} &= \left\{S_1 S_2, \overline{S_2^*}(-\overline{S_1^*})\right\} = (002010, 030022) \\
\{R_1, R_2\} &= \{S_1 S_2, S_1(-S_2)\} = (002010, 002232) \\
\{R_1, R_2\} &= \left\{S_1 \overline{S_2^*}, S_2(-\overline{S_1^*})\right\} = (002030, 010022)
\end{aligned}$$

系列のペア $\{S_1, S_2\}$ を長さ N の多相相補系列とする。このとき、以下に示す系列のペア $\{R_1, R_2\}$ も長さ $2N$ の多相相補系列である。

$$\{R_1, R_2\} = \left\{S_1(e^{i\phi} S_2), S_1(e^{i(\phi+\pi)} S_2)\right\} \tag{81}$$

ここで、$i = \sqrt{-1}$ である。式 (81) を用いると、全ての Golay Pairs を二倍の長さを持つ多相相補系列に変換することが可能である。

例 4.1.2-3　長さ 4 の Golay Pairs$\{S_1, S_2\} = (+ - --, + + -+)$ が与えられているとする。このとき、$\phi = \frac{\pi}{2}$ として、長さ 8 の 4 相相補系列 $\{R_1, R_2\}$ を以下のように得ることが可能である。

$$\{R_1, R_2\} = \left\{S_1(e^{i\phi} S_2), S_1(e^{i(\phi+\pi)} S_2)\right\}$$

$$= (1,-1,-1,-1,i,i,-i,i,\quad 1,-1,-1,-1,-i,-i,i,-i)$$
$$= (02221131, 02223313)$$

長さ N_1 の多相相補系列 $\{S_1, S_2\}$ と長さ N_2 の多相相補系列 $\{R_1, R_2\}$ が与えられたとき、長さ $2N_1N_2$ の多相相補系列 $\{T_1, T_2\}$ は以下の方法で構成可能である。

$$\{T_1, T_2\} = \{(S_1 \otimes R_1)(S_2 \otimes R_1'), (S_1 \otimes R_2)(S_2 \otimes R_2')\} \tag{82}$$

ここで、$\otimes$ はクロネッカー積を表し、$\{R_1', R_2'\}$ は多相相補系列 $\{R_1, R_2\}$ のメイトを表す。メイトについては第4.2節において述べる。

例4.1.2-4　長さ3の4相相補系列 $\{S_1, S_2\} = \{R_1, R_2\} = (010, 002)$ が与えられているとする。このとき、$\{R_1, R_2\}$ のメイト $\{R_1', R_2'\}$ は $\{R_1', R_2'\} = (022, 030)$ と与えられる。式(82)に従うと、長さ $2N_1N_2 = 18$ の4相相補系列 $\{T_1, T_2\}$ が以下のように構成できる。

$$\{T_1, T_2\} = (010121010022022200, 002113002030030212) \tag{83}$$

4.2 完全相補系列

本節では、相補系列に対するメイト(Mate)の概念及び、完全相補系列について述べる。[13]

相補系列 $\{S_1, S_2\}$ と $\{R_1, R_2\}$ において、もし、添え字の等しい系列間の非周期相互相関関数の和が全てのシフトにおいて0であるならば、すなわち、

$$R_{S_1,R_1}(\tau) + R_{S_2,R_2}(\tau) = \sum_{n=0}^{N-\tau-1} (\hat{s}_n^{(1)} \hat{r}_{n+\tau}^{(1)*} + \hat{s}_n^{(2)} \hat{r}_{n+\tau}^{(2)*}) = 0, \forall\tau \tag{84}$$

であるならば、相補系列 $\{R_1, R_2\}$ は相補系列 $\{S_1, S_2\}$ のメイトと呼ばれる。同様に、相補系列 $\{S_1, S_2\}$ は相補系列 $\{R_1, R_2\}$ のメイトである。また、このとき、相補系列 $\{S_1, S_2\}$ と $\{R_1, R_2\}$ のペア $\{\{S_1, S_2\}, \{R_1, R_2\}\}$ は完全相補系列と呼ばれる。

系列のペア $\{S_1, S_2\}$ を任意のGolay Pairsとする。このとき、以下に示す二つのメイト $\{R_1, R_2\}$ が存在することが証明されている。

$$\{R_1, R_2\} = \{\overline{S_2}, -\overline{S_1}\} \tag{85}$$

または、

$$\{R_1, R_2\} = \{-\overline{S_2}, \overline{S_1}\} \tag{86}$$

ここで、$\overline{S_i}$ は系列 S_i の要素の順序を反転させた系列を表す。この二つメイト $\{R_1, R_2\}$ 以外に $\{S_1, S_2\}$ のメイトとなりうる系列のペアは存在しないことも証明されている。

例 4.2-1　長さ $N = 4$ の Golay Paris$\{S_1, S_2\} = (---+, --+-)$ が与えられているとする。このとき、$\{S_1, S_2\}$ のメイト $\{R_1, R_2\}$ は以下のように与えられる。

$$\{R_1, R_2\} = \{\overline{S_2}, -\overline{S_1}\} = (-+--, -+++)$$

または、

$$\{R_1, R_2\} = \{-\overline{S_2}, \overline{S_1}\} = (+-++, +---)$$

このとき、$\{\{S_1, S_2\}, \{R_1, R_2\}\}$ は完全相補系列である。

また、多相相補系列のメイトを得るためには、式(85)及び、式(86)における要素の反転の操作に複素共役をとることを加える必要がある。すなわち、

$$\{R_1, R_2\} = \{\overline{S_2^*}, -\overline{S_1^*}\} \tag{87}$$

または、

$$\{R_1, R_2\} = \{-\overline{S_2^*}, \overline{S_1^*}\} \tag{88}$$

とする必要がある。

例 4.2-2　長さ 5 の 4 相相補系列 $\{S_1, S_2\} = (01321, 00013)$ が与えられているとする。このとき、$\{S_1, S_2\}$ のメイト $\{R_1, R_2\}$ は以下のように与えられる。

$$\{R_1, R_2\} = \{\overline{S_2^*}, -\overline{S_1^*}\} = (13000, 10312)$$

または、

$$\{R_1, R_2\} = \{-\overline{S_2^*}, \overline{S_1^*}\} = (31222, 32130)$$

このとき、$\{\{S_1, S_2\}, \{R_1, R_2\}\}$ は完全相補系列である。

4.3 周期相補系列と周期完全相補系列

本節では、相補系列及び、完全相補系列の概念を周期系列に拡張した、周期相補系列と周期完全相補系列について述べる。[13]

周期 N の周期系列のペア $\{S_1, S_2\}, S_i = \{s_n^{(i)}\}$ において、それぞれの系列の周期自己相関関数の和が、0 シフトを除く全てのシフトにおいて 0 であるとき、すなわち、

$$\sum_{i=1}^{2} R_{S_i}(\tau) = \begin{cases} E & (\tau = 0) \\ 0 & (\tau \neq 0) \end{cases} \tag{89}$$

であるとき、$\{S_1, S_2\}$ は周期相補系列と呼ばれる。ここで、$E = \sum_{i=1}^{2} R_{S_i}(0)$ は $\{S_1, S_2\}$ のエネルギーと呼ばれ、2 相及び、多相周期相補系列の場合は $E = 2N$ である。また、$R_{S_i}(\tau)$ は系列 S_i の周期自己相関関数である。すなわち、

$$R_{S_i}(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{s}_n^{(i)*} \hat{s}_{n+\tau}^{(i)} \tag{90}$$

である。ここで、$*$ は要素の複素共役を表す。

同様に、二つの周期相補系列 $\{S_1, S_2\}$ と $\{R_1, R_2\}$ において、添え字の等しい系列間の周期相互相関関数の和が全てのシフトにおいて 0 であるとき、すなわち、

$$\sum_{i=1}^{2} R_{S_i,R_i}(\tau) = 0, 0 \leq \tau \leq N-1 \tag{91}$$

であるとき、周期相補系列 $\{R_1, R_2\}$ は周期相補系列 $\{S_1, S_2\}$ のメイトと呼ばれる。同様に周期相補系列 $\{S_1, S_2\}$ は周期相補系列 $\{R_1, R_2\}$ のメイトである。また、周期相補系列 $\{S_1, S_2\}$ と周期相補系列 $\{R_1, R_2\}$ のペア $\{\{S_1, S_2\}, \{R_1, R_2\}\}$ は周期完全相補系列と呼ばれる。ここで、$R_{S_i,R_i}(\tau)$ は系列 S_i と系列 R_i の周期相互相関関数である。すなわち、

$$R_{S_i,R_i}(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{s}_n^{(i)*} \hat{r}_{n+\tau}^{(i)} \tag{92}$$

である。

ある周期相補系列 $\{S_1, S_2\}$ に対して、以下に示す操作を施した結果得られる系列のペアも周期相補系列になる。

1. S_1 または/かつ S_2 を -1 倍する。
2. S_1 かつ S_2 の奇数番目または偶数番目の要素を -1 倍する。
3. S_1 または/かつ S_2 の要素の順序を反転させ、複素共役をとる。
4. S_1 と S_2 の交換。
5. S_1 かつ S_2 を f でサンプリングする。ただし、$gcd(f,N)=1$ とする。
6. S_1 または/かつ S_2 を巡回シフトする。

例 4.3-1　系列のペア $\{S_1,S_2\}$ を $\{S_1,S_2\}=(++-+,+---)$ とする。$\{S_1,S_2\}$ は周期相補系列であることが確かめられる。さらに、以下に示す系列のペアも周期相補系列である。

1. S_1 かつ S_2 を -1 倍:$(--+-,-+++)$
2. S_1 かつ S_2 の偶数番目の要素を -1 倍:$(-+++,--+-)$
3. S_1 かつ S_2 の要素の順序を反転:$(+-++,---+)$
4. S_1 と S_2 の交換:$(+---,++-+)$
5. S_1 かつ S_2 を $f=3$ でサンプリング:$(-+++,--+-)$
6. S_1 の巡回シフト:$(-+++,+---)$

周期自己相関関数 $R(\tau)$ と非周期自己相関関数 $C(\tau)$ の間には以下に示す関係が成り立つ。

$$R(\tau)=C(\tau)+C(\tau-N),\forall\tau \tag{93}$$

この関係式より、非周期相補系列は常に周期相補系列でもあることがわかる。一方、周期相補系列は常に非周期相補系列であるとは限らない。すなわち、非周期相補系列は周期相補系列の特別な場合と考えることができる。

例 4.3-2　以下に示す系列のペア $\{S_1,S_2\}$ は長さ $N=10$ の非周期相補系列である。

$$\{S_1,S_2\}=(+--+-+---+,+-------++-)$$

$\{S_1,S_2\}$ は周期 $N=10$ の周期相補系列でもある。

以下に示すように、特殊な周期相補系列も提案されている。

$$\begin{aligned}\{S_1,S_2\} &= \{\{\hat{s}_n^{(1)}\},\{\hat{s}_n^{(2)}\}\},\\ \hat{s}_n^{(1)} &= \cos\frac{\pi n(n+1)}{N},\end{aligned}$$

$$\hat{s}_n^{(2)} = \sin\frac{\pi n(n+1)}{N} \tag{94}$$

ここで、$0 \leq n < N$ であり、N は奇数である。このこき、以下の関係は簡単に証明可能である。

$$R_{S_1}(\tau) + R_{S_2}(\tau) = \begin{cases} N & (\tau = 0) \\ 0 & (\tau \neq 0) \end{cases} \tag{95}$$

全ての周期相補系列 $\{S_1, S_2\}$ に対して、周期相補系列 $\{S_2, -S_1\}$ はメイトである。すなわち、

$$R_{S_1,S_2}(\tau) + R_{S_2,-S_1}(\tau) = 0 \tag{96}$$

である。ここで、非周期相補系列の場合とは異なり、系列 $\{S_1\}$ 及び、$\{S_2\}$ の要素の順序を反転する必要は無い。