3 直交系列

本節では、直交系列の定義及び、その特性について述べる。[13]

周期自己相関関数が周期の倍数に一致するシフトを除く全てのシフトにおいて 0 になる周期系列は直交系列と呼ばれている。つまり、周期 N の周期系列 $\{\hat{a}_n^{(r)}\}$ の周期自己相関関数が以下の関係を満たしているとき、周期系列 $\{\hat{a}_n^{(r)}\}$ は直交系列となる。

$$R_r(\tau) = \begin{cases} E & (\tau = 0 \pmod N) \\ 0 & (\tau \neq 0 \pmod N) \end{cases} \tag{28}$$

ここで、$E = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{a}_n^{(r)}|^2$ である。もし、周期系列 $\{\hat{a}_n^{(r)}\}$ の各要素が絶対値 1 の複素数のみで構成されているならば、$E = N$ である。ここで、周期系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ が直交系列であるための必要十分条件について述べる。周期 N の系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ に N 次の DFT を施したものを系列 $\{F(k)\}$ とする。つまり、

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_n^{(r)} e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} \tag{29}$$

とする。ここで、$i = \sqrt{-1}, 0 \leq k < N$ である。系列 $\{F(k)\}$ も周期 N の周期系列である。周期系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ の周期自己相関関数 $R_r(\tau)$ と $\{F(k)\}$ の間には以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{N-1} R_r(\tau) e^{i\frac{2\pi\tau k}{N}} &= \sum_{\tau=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_n^{(r)*} \hat{a}_{n+\tau}^{(r)}\right] e^{i\frac{2\pi\tau k}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_n^{(r)*} e^{i\frac{2\pi nk}{N}} \sum_{m=n}^{N+n-1} \hat{a}_m^{(r)} e^{-i\frac{2\pi mk}{N}} \\ &= F^*(k)F(k) = |F(k)|^2 \end{aligned} \tag{30}$$

ただし、$m = \tau + n$ とした。もし、周期系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ が直交系列ならば、式 (28) より、

$$\sum_{\tau=0}^{N-1} R_r(\tau) e^{i\frac{2\pi\tau k}{N}} = R_r(0) e^{i\frac{2\pi 0k}{N}} = E \tag{31}$$

または、

$$|F(k)| = \sqrt{R_r(0)} = \sqrt{E} \tag{32}$$

である。従って、系列 $\{F(k)\} = (F(0), F(1), \cdots, F(N-1))$ の全ての要素が同じ絶対値 $|F(k)| = \sqrt{E}$ であるとき、またそのときに限り、周期系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ は直交系列となる。一般的に言って、上記の結果は、インパルス関数のフーリエ変換 (Fourier Transform) は一定値であることを示している。第2.3節に述べたように、二つの周期系列がともに直交系列であるとき、すなわち、周期自己相関関数が $\tau = 0$ を除く全てのシフトにおいて0であるとき、二つの直交系列間の周期相互相関関数の絶対値の数学的下界は $\sqrt{N}$ である。ここで、N は直交系列の周期である。この数学的下界は、後の節で述べる Frank Sequences、変調可能な直交系列、また本論文において提案される拡張された変調可能な直交系列などで実現される。

通信方式への応用という観点から考えると、系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ は良好なエネルギー効率 (energy efficiency)η を持つことが望ましい。ここで、η は以下のように定義される。

$$\eta = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \left|\hat{a}_n^{(r)}\right|^2}{N \cdot max\left\{\left|\hat{a}_n^{(r)}\right|^2\right\}} \tag{33}$$

特に、系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ が直交系列である場合は、

$$\eta = \frac{E}{N \cdot max\left\{\left|\hat{a}_n^{(r)}\right|^2\right\}} \tag{34}$$

である。このパラメータ η は各要素の絶対値が一定でない系列にとっては、特に重要である。もし、各要素の絶対値が一定値1である直交系列ならば、η の値は最大値1に等しい。

周期 N_1 の周期系列 $\hat{a}^{(r)} = \left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ と周期 N_2 の周期系列 $\hat{a}^{(s)} = \left\{\hat{a}_n^{(s)}\right\}$ がともに直交系列であり、かつ、$gcd(N_1, N_2) = 1$ であるとする。このとき、系列 $\hat{a}^{(r)}$ を N_2 周期繰り返した系列と系列 $\hat{a}^{(s)}$ を N_1 周期繰り返した系列の要素ごとの積をとった周期 N_1N_2 の系列 $\hat{a}^{(rs)} = \hat{a}^{(r)} \times \hat{a}^{(s)} = \left\{\hat{a}_n^{(r)} \cdot \hat{a}_n^{(s)}\right\}$ を考える。この周期系列 $\hat{a}^{(rs)}$ もまた直交系列である。系列 $\hat{a}^{(r)}, \hat{a}^{(s)}, \hat{a}^{(rs)}$ の周期自己相関関数をそれぞれ $R_r(\tau), R_s(\tau), R_{rs}(\tau)$ とすると、

$$R_{rs}(\tau) = R_r(\tau) \cdot R_s(\tau) \tag{35}$$

である。つまり、系列 $\hat{a}^{(rs)}$ の周期自己相関関数は以下のように計算され、

$\hat{a}^{(rs)}$ が直交系列であることが確かめられる。

$R_r(\tau)$:		N_1	0	$\cdots$	N_1	0	$\cdots$	0	N_1	0	0	0	$\cdots$
$R_s(\tau)$:	×)	N_2	0	$\cdots$	0	$\cdots$	N_2	0	0	$\cdots$	N_2	0	$\cdots$
$R_{rs}(\tau)$:		N_1N_2	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$

例 3-1　周期 $N_1 = 9$ の直交系列 $\left\{\hat{a}^{(r)}\right\}$ 及び、周期 $N_1 = 2$ の直交系列 $\left\{\hat{a}^{(s)}\right\}$ がそれぞれ以下のように与えられているとする。

$$\begin{aligned}\left\{\hat{a}^{(r)}\right\} &= \left(1,1,1,1,e^{\frac{2i}{3}\pi},e^{\frac{-2i}{3}\pi},1,e^{\frac{-2i}{3}\pi},e^{\frac{2i}{3}\pi}\right)\\ \left\{\hat{a}^{(s)}\right\} &= (i,1)\end{aligned}$$

ここで、$i = \sqrt{-1}$ である。このとき、系列 $\left\{\hat{a}_n^{(rs)}\right\}$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}\left\{\hat{a}_n^{(rs)}\right\} &= \left\{\hat{a}_n^{(r)}\cdot\hat{a}_n^{(s)}\right\}\\ &= \Big(-i,1,-i,1,-ie^{\frac{2i}{3}\pi},e^{\frac{-2i}{3}\pi},-i,e^{\frac{-2i}{3}\pi},-ie^{\frac{2i}{3}\pi},1,-i,1,-i,\\ &\qquad e^{\frac{2i}{3}\pi},-ie^{\frac{-2i}{3}\pi},1,-ie^{\frac{-2i}{3}\pi},e^{\frac{2i}{3}\pi}\Big)\end{aligned}$$

系列 $\left\{\hat{a}_n^{(rs)}\right\}$ も直交系列である。

系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ を各要素の絶対値が 1 である直交系列とする。すなわち、$\hat{a}_n^{(r)} = e^{i\frac{2\pi}{N}f(n)} = \alpha^{f(n)}$ とする。ここで、$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{N}}, i = \sqrt{-1}$ である。このとき、以下に示す系列も直交系列となる。

1. $\left\{\hat{a}_{m\pm n}^{(r)}\right\}$: ここで、$m$ は任意の整数であり、添え字の $m \pm n$ は N を法とする剰余類として計算される。
2. $\left\{c\hat{a}_n^{(r)}\right\}$: ここで、$c$ は任意の複素数の定数である。
3. $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\beta^{mn}\right\}$: ここで、$m$ は任意の整数であり、β は 1 の N 乗根である。
4. $\left\{\hat{a}_n^{(r)*}\right\}$: ここで、$\hat{a}_n^{(r)*}$ は $\hat{a}_n^{(r)}$ の複素共役を表す。
5. $\{F(k)\}$: ここで、系列 $\{F(k)\}$ は系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ に DFT を施すことによって得られる系列である。

例 3-2　周期 $N = 8$ の直交系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ を以下のように与える。

$$\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\} = (1,1,i,-1,1,-1,i,1)$$

ここで、$i=\sqrt{-1}$ である。このとき、直交系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ に DFT を施すことによって得られる系列を $\{F(k)\}$ とすると、$\{F(k)\}$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\{F(k)\} \;=\; & \Big(2+2i,(2-2i)(-1)^{\frac{1}{4}},2-2i,(-2+2i)(-1)^{\frac{1}{4}},2+2i,\\ & (-2+2i)(-1)^{\frac{1}{4}},2-2i,(2-2i)(-1)^{\frac{1}{4}}\Big)\end{aligned}$$

系列 $\{F(k)\}$ も直交系列となる。また、$|F(k)|=2.82843, k=0,1,\cdots,7$ であり、系列 $\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ が直交系列であるための必要十分条件を満たしていることも確かめられる。同様に、以下に示す周期系列も全て直交系列である。

$$\begin{aligned}\left\{\hat{a}_{2+n}^{(r)}\right\} &= (i,-1,1,-1,i,1,1,1)\\ \left\{(1-2i)\hat{a}_n^{(r)}\right\} &= (1-2i,1-2i,2+i,-1+2i,1-2i,-1+2i,\\ &\quad 2+i,1-2i)\\ \left\{\hat{a}_n^{(r)}e^{\frac{i6\pi n}{5}}\right\} &= \Big(e^{\frac{i6\pi\cdot 0}{5}},e^{\frac{i6\pi\cdot 1}{5}},ie^{\frac{i6\pi\cdot 2}{5}},-e^{\frac{i6\pi\cdot 3}{5}},e^{\frac{i6\pi\cdot 4}{5}},-e^{\frac{i6\pi\cdot 5}{5}},\\ &\quad ie^{\frac{i6\pi\cdot 6}{5}},e^{\frac{i6\pi\cdot 7}{5}}\Big)\\ \left\{\hat{a}_n^{(r)*}\right\} &= (1,1,-i,-1,1,-1,-i,1)\end{aligned}$$

3.1 多相直交系列

各要素の絶対値が全て等しい系列は多相系列と呼ばれている。本節では種々の多相直交系列に関して、その構成法及び特性について述べる。[13]

3.1.1 Frank Sequences

q を自然数とする。Frank Sequences $F=\left\{\hat{a}^{(1)},\cdots,\hat{a}^{(r)},\cdots,\hat{a}^{(q-1)}\right\}$ は周期 $N=q^2$ の多相系列の集合であり、系列 $\hat{a}^{(r)}=\left(\hat{a}_0^{(r)},\hat{a}_1^{(r)},\cdots,\hat{a}_{N-1}^{(r)}\right)$ の各要素は 1 の q 乗根である。具体的に各要素を示すと、

$$\hat{a}_n^{(r)}=\hat{a}_{jq+k}^{(r)}=\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q}rjk\right),0\le j<q,0\le k<q \tag{36}$$

である。ここで、r,n はそれぞれ $gcd\,(r,q)=1,\quad 0\le n\le q^2-1$ を満たす自然数である。また、Frank Sequences は以下のように行列を用いて表

現することも可能である。

$$
\begin{aligned}
F^{(r)} &= \left[\hat{f}_{j,k}^{(r)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha^{r} & \alpha^{2r} & \cdots & \alpha^{(q-1)r} \\ 1 & \alpha^{2r} & \alpha^{4r} & \cdots & \alpha^{2(q-1)r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(q-1)r} & \alpha^{2(q-1)r} & \cdots & \alpha^{(q-1)^2 r} \end{bmatrix}, \\
\hat{f}_{j,k}^{(r)} &= \alpha^{rjk}, \alpha = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q}\right) \qquad (37)
\end{aligned}
$$

ここで、j, k はそれぞれ q 次の行列 $F^{(r)}$ の行番号、列番号を表す。このとき、

$$
\hat{a}_n^{(r)} = \hat{a}_{jq+k}^{(r)} = \hat{f}_{j,k}^{(r)} \qquad (38)
$$

である。

Frank Sequences は周期自己相関関数、周期相互相関関数について以下の特性を持つことが証明されている。

$$
\begin{aligned}
R_r(\tau) &= \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_n^{(r)} \hat{a}_{n+\tau}^{*(r)} = \begin{cases} N & (\tau = 0 \pmod N) \\ 0 & (\tau \neq 0 \pmod N) \end{cases} \qquad (39) \\
|R_{r,s}(\tau)| &= \left| \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_n^{(r)} \hat{a}_{n+\tau}^{*(s)} \right| = \sqrt{N} = q, \\
& \forall \tau, r \neq s, gcd(r-s, q) = 1 \qquad (40)
\end{aligned}
$$

ここで、周期相互相関関数に関する特性は q が奇数のときのみ成立する。なぜなら、もし、q が偶数であったとすると、r, s は q と互いに素であるような自然数でなければならないので、r, s ともに奇数でなければならない。二つの奇数の差は常に偶数になるので、整数 $r-s$ は常に偶数になる。したがって、q が偶数であるとき整数 $r-s$ が q と互いに素になることは無い。つまり、上記の条件 $gcd(r-s, q) = 1$ を満たすことが出来ない。以上の理由により、上記の周期相互相関特性は q が奇数のときのみ成立する。

Frank Sequences の周期自己相関特性、周期相互相関特性を証明するために、まず以下の関係式を導いておく。c は $0 \leq c \leq N-1$ を満たす自然数であるとし、$gcd(r, N) = 1$ であるとする。

$c \neq 0$ のとき、

$$
\sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}rcn} = \frac{e^{\pm\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}rcN} - 1}{e^{\pm\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}rc} - 1} = \frac{e^{\pm 2\pi\sqrt{-1}rc} - 1}{e^{\pm\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}rc} - 1} = 0 \qquad (41)
$$

$c = 0$ のとき、

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}rcn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N \tag{42}$$

以上より、

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\pm\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}rcn} = \begin{cases} N & (c = 0) \\ 0 & (c \neq 0) \end{cases} \tag{43}$$

である。

まず、周期自己相関特性について証明する。$\tau = uq + v,\quad n = jq + k,\quad n + \tau = (u + j + \epsilon)q + (v + k - \epsilon q)$ とする。ここで、$k + v \leq q - 1$ のとき $\epsilon = 0$ であり、$k + v > q - 1$ のとき $\epsilon = 1$ である。すると、

$$\begin{aligned} R_{r,r}(\tau) &= \sum_{n=0}^{q^2-1} \hat{a}_n^{(r)} \hat{a}_{n+\tau}^{*(r)} = \sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q-1} \alpha^{rjk} \alpha^{-r(u+j+\epsilon)(v+k-\epsilon q)} \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} \alpha^{-r\{k(u+\epsilon)+v(u+\epsilon)\}} \left[\sum_{j=0}^{q-1} \alpha^{-rjv}\right] \\ &= \begin{cases} q^2 & (u = v = 0) \\ 0 & (v \neq 0) \end{cases} \end{aligned} \tag{44}$$

最後の等号は式 (43) より導かれる。以上のように周期自己相関関数は $u = v = 0$ すなわち $\tau = 0$ のときのみ $R_{r,r}(0) = R_r(0) = q^2 = N$ であり、$\tau \neq 0$ においては $R_{r,r}(\tau) = R_r(\tau) = 0$ である。

次に、周期相互相関特性について証明する。周期自己相関特性の場合と同じように $\tau, n, n + \tau, \epsilon$ を定義し、$r \neq s$ とする。

$$\begin{aligned} |R_{r,s}(\tau)| &= \left|\sum_{n=0}^{q^2-1} \hat{a}_n^{(r)} \hat{a}_{n+\tau}^{*(s)}\right| = \left|\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{q-1} \alpha^{rjk} \alpha^{-s(u+j+\epsilon)(v+k-\epsilon q)}\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{q-1} \alpha^{-s\{k(u+\epsilon)+v(u+\epsilon)\}} \left[\sum_{j=0}^{q-1} \alpha^{j\{k(r-s)-sv\}}\right]\right| \end{aligned} \tag{45}$$

ここで、$\left[\sum_{j=0}^{q-1} \alpha^{j\{k(r-s)-sv\}}\right]$ は式 (43) により $k(r - s) - sv = 0$ のときのみ q になり、$k(r - s) - sv \neq 0$ の場合は 0 になる。$k(r - s) - sv = 0$、すなわち $k(r - s) = sv$ を満たす k は $gcd(r - s, q) = 1$ の場合のみ一意に決まり、$k = \frac{sv}{r-s} \pmod q$ と表される。よって、$gcd(r - s, q) = 1$ の場合,

$$\begin{aligned} |R_{r,s}(\tau)| &= q\left|\alpha^{-s\left\{\frac{sv}{r-s} \pmod q)(u+\epsilon)+v(u+\epsilon)\right\}}\right| \\ &= q = \sqrt{N} \end{aligned} \tag{46}$$

である。

周期 $N = q^2$ の Frank Sequences の各要素は 1 の q 乗根であるので、Frank Sequences の位相状態数は明らかに q に等しい。

例 3.1.1　$q = 5, N = q^2 = 25$ とすと、$gcd(r,q)$ を満たす r は $r = 1,2,3,4$ となるので 4 つの Frank Sequences が得られる。この 4 つの Frank Sequences はすべて $gcd(r-s,q)$ を満足するので、これらの Frank Sequences のうち任意の二つの系列間の周期相互相関特性は $|R_{r,s}(\tau)| = 5$ である。この 4 つの Frank Sequences を以下に示す。

$$
\begin{aligned}
\left\{\hat{a}_n^{(1)}\right\} &= \Big(1,1,1,1,1,1,e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},1,e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},\\
&\quad 1,e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},1,e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi}\Big)\\
\left\{\hat{a}_n^{(2)}\right\} &= \Big(1,1,1,1,1,1,e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},1,e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},\\
&\quad 1,e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},1,e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi}\Big)\\
\left\{\hat{a}_n^{(3)}\right\} &= \Big(1,1,1,1,1,1,e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},1,e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},\\
&\quad 1,e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},1,e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi}\Big)\\
\left\{\hat{a}_n^{(4)}\right\} &= \Big(1,1,1,1,1,1,e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},1,e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},\\
&\quad 1,e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi},e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},1,e^{\frac{2i}{5}\pi},e^{\frac{4i}{5}\pi},e^{\frac{-4i}{5}\pi},e^{\frac{-2i}{5}\pi}\Big)
\end{aligned}
$$

ここで、$i = \sqrt{-1}$ である。また、周期自己相関特性、周期相互相関特性は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
R_r(\tau) &= \begin{cases} 25 & (\tau = 0) \\ 0 & (\tau \neq 0) \end{cases}, r = 1,2,3,4 \\
|R_{r,s}(\tau)| &= 5, \forall\tau, r = 1,2,3,4, s = 1,2,3,4, r \neq s
\end{aligned}
$$

3.1.2 Chu Sequences

Chu Sequences $C = \left\{\hat{a}^{(1)},\cdots,\hat{a}^{(r)},\cdots,\hat{a}^{(N-1)}\right\}$ に属する周期 N の系列 $\hat{a}^{(r)} = \left(\hat{a}_0^{(r)},\hat{a}_1^{(r)},\cdots,\hat{a}_{N-1}^{(r)}\right)$ の各要素は以下のように与えられる。

$$
\hat{a}_n^{(r)} = \begin{cases} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}r(n+1)n} & (N \quad odd) \\ e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{N}rn^2} & (N \quad even) \end{cases}, 0 \leq n < N, gcd(r,N) = 1 \qquad (47)
$$

Chu Sequences の周期自己相関関数は以下の特性を持つことが証明されている。

$$R_r(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_n^{(r)} \hat{a}_{n+\tau}^{*(r)} = \begin{cases} N & (\tau = 0 \pmod{N}) \\ 0 & (\tau \neq 0 \pmod{N}) \end{cases} \tag{48}$$

また、N を奇数とし、$gcd(r-s, N) = 1$ と仮定すると、周期相互相関関数は以下の特性を持つことが証明されている。

$$|R_{r,s}(\tau)| = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{a}_n^{(r)} \hat{a}_{n+\tau}^{*(s)} = \sqrt{N}, \forall\tau, r \neq s \tag{49}$$

N が奇数のとき、周期 N の Chu Sequences の位相状態数は N に等しい。また、N が偶数のとき、周期 N の Chu Sequences の位相状態数は $2N$ に等しくなる。どちらの場合でも、Chu Sequences の位相状態数は Frank Sequences の位相状態数よりも大きくなる。

例 3.1.2　$N = 25$ とする。このとき $gcd(r, N) = 1$ を満たす r は $r = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24$ の 20 個存在するので、Chu Sequences も 20 個存在する。しかし、これら 20 個の Chu Sequences のなかで $gcd(r-s, N) = 1$ を満たす、つまり上記の周期相互相関特性を保持している系列の組み合わせの個数の最大値は 4 である。そのような系列の組み合わせとして $r = 1, 2, 3, 4$ に対応する系列を選ぶことができる。この 4 つの Chu Sequences を以下に示す。

$$\begin{aligned}
\left\{\hat{a}_n^{(1)}\right\} &= \Big(1, e^{\frac{4i}{25}\pi}, e^{\frac{12i}{25}\pi}, e^{\frac{24i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{5}\pi}, e^{\frac{2i}{5}\pi}, e^{\frac{-16i}{25}\pi}, e^{\frac{12i}{25}\pi}, e^{\frac{-6i}{25}\pi}, e^{\frac{-4i}{5}\pi}, \\
&\quad e^{\frac{4i}{5}\pi}, e^{\frac{14i}{25}\pi}, e^{\frac{12i}{25}\pi}, e^{\frac{14i}{25}\pi}, e^{\frac{4i}{5}\pi}, e^{\frac{-4i}{5}\pi}, e^{\frac{-6i}{25}\pi}, e^{\frac{12i}{25}\pi}, e^{\frac{-16i}{25}\pi}, e^{\frac{2i}{5}\pi}, \\
&\quad e^{\frac{-2i}{5}\pi}, e^{\frac{24i}{25}\pi}, e^{\frac{12i}{25}\pi}, e^{\frac{4i}{25}\pi}, 1\Big) \\
\left\{\hat{a}_n^{(2)}\right\} &= \Big(1, e^{\frac{8i}{25}\pi}, e^{\frac{24i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{25}\pi}, e^{\frac{-4i}{5}\pi}, e^{\frac{4i}{5}\pi}, e^{\frac{-18i}{25}\pi}, e^{\frac{24i}{25}\pi}, e^{\frac{-12i}{25}\pi}, e^{\frac{2i}{5}\pi}, \\
&\quad e^{\frac{-2i}{5}\pi}, e^{\frac{22i}{25}\pi}, e^{\frac{24i}{25}\pi}, e^{\frac{-22i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{5}\pi}, e^{\frac{2i}{5}\pi}, e^{\frac{-12i}{25}\pi}, e^{\frac{24i}{25}\pi}, e^{\frac{18i}{25}\pi}, e^{\frac{4i}{5}\pi}, \\
&\quad e^{\frac{-4i}{5}\pi}, e^{\frac{-2i}{25}\pi}, e^{\frac{24i}{25}\pi}, e^{\frac{8i}{25}\pi}, 1\Big) \\
\left\{\hat{a}_n^{(3)}\right\} &= \Big(1, e^{\frac{12i}{25}\pi}, e^{\frac{-14i}{25}\pi}, e^{\frac{22i}{25}\pi}, e^{\frac{4i}{5}\pi}, e^{\frac{-4i}{5}\pi}, e^{\frac{2i}{25}\pi}, e^{\frac{-14i}{25}\pi}, e^{\frac{-18i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{5}\pi}, \\
&\quad e^{\frac{2i}{5}\pi}, e^{\frac{-8i}{25}\pi}, e^{\frac{-14i}{25}\pi}, e^{\frac{-8i}{25}\pi}, e^{\frac{2i}{5}\pi}, e^{\frac{-2i}{5}\pi}, e^{\frac{-18i}{25}\pi}, e^{\frac{-14i}{25}\pi}, e^{\frac{2i}{25}\pi}, e^{\frac{-4i}{5}\pi}, \\
&\quad e^{\frac{4i}{5}\pi}, e^{\frac{22i}{25}\pi}, e^{\frac{-14i}{25}\pi}, e^{\frac{12i}{25}\pi}, 1\Big) \\
\left\{\hat{a}_n^{(4)}\right\} &= \Big(1, e^{\frac{16i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{25}\pi}, e^{\frac{-4i}{25}\pi}, e^{\frac{2i}{5}\pi}, e^{\frac{-2i}{5}\pi}, e^{\frac{-14i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{25}\pi}, e^{\frac{-24i}{25}\pi}, e^{\frac{4i}{5}\pi}, \\
&\quad e^{\frac{-4i}{5}\pi}, e^{\frac{6i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{25}\pi}, e^{\frac{6i}{25}\pi}, e^{\frac{-4i}{5}\pi}, e^{\frac{4i}{5}\pi}, e^{\frac{-24i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{25}\pi}, e^{\frac{-14i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{5}\pi}, \\
&\quad e^{\frac{2i}{5}\pi}, e^{\frac{-4i}{25}\pi}, e^{\frac{-2i}{25}\pi}, e^{\frac{16i}{25}\pi}, 1\Big)
\end{aligned}$$

ここで、$i=\sqrt{-1}$ である。また、周期自己相関特性、周期相互相関特性は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
R_r(\tau) &= \begin{cases} 25 & (\tau = 0) \\ 0 & (\tau \neq 0) \end{cases}, \\
r &\in \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 7, & 8, & 9, & 11, & 12, \\ 13, & 14, & 16, & 17, & 18, & 19, & 21, & 22, & 23, & 24 \end{matrix} \right\} \\
|R_{r,s}(\tau)| &= 5, \forall\tau, r = 1,2,3,4, s = 1,2,3,4, r \neq s
\end{aligned}
$$

3.1.3 Combined Frank/Chu Sequences

より多くの直交系列を含む集合を得ることを目的として、Combined Frank/Chu Sequences と呼ばれる系列の集合が定義されている。Combined Frank/Chu Sequences は同じ周期の Frank Sequences $F=\left\{\hat{f}_n^{(r)}\right\}$ と Chu Sequences $C=\left\{\hat{c}_n^{(s)}\right\}$ とを結合したものである。つまり、

$$
\begin{aligned}
FC &= \left\{ \hat{f}^{(1)}, \cdots, \hat{f}^{(s)}, \cdots, \hat{f}^{(s')}, \cdots, \hat{f}^{(q-1)}, \right. \\
&\quad \left. \hat{c}^{(1)}, \cdots, \hat{c}^{(r)}, \cdots, \hat{c}^{(r')}, \cdots, \hat{c}^{(N-1)} \right\} \qquad (50)
\end{aligned}
$$

である。ここで、$N=q^2, gcd(s,q)=1, gcd(s',q)=1, gcd(r,N)=1, gcd(r',N)=1$ である。もし、$N=q^2$ が奇数で、$gcd(s-s',q)=1, gcd(r-r',N)=1$ であるならば、上記の Frank Sequences, Chu Sequences の節で述べたように、これらの系列は良好な周期相互相関特性を持つことになる。

これらの系列の周期自己相関関数は明らかにもとの Frank Sequences, Chu Sequences の周期自己相関関数と同じ特性を保持している。一方、もし、二つの系列が共に Frank Sequences であったならば、その周期相互相関関数はすべてのシフトで $\sqrt{N}$ に等しい絶対値を持つ。同様に、二つの系列が共に Chu Sequences であったならば、その周期相互相関関数はすべてのシフトで $\sqrt{N}$ に等しい絶対値を持つ。さらに、一方の系列が Frank Sequences であり、もう一方の系列が Chu Sequences である場合には、以下の周期相互相関特性を持つことが証明されている。

$$
\left| R_{\hat{f}^{(s)},\hat{c}^{(r)}}(\tau) \right| = \sqrt{N}, r \neq s \pmod q \qquad (51)
$$

$$
\begin{aligned}
\left| R_{\hat{f}^{(s)},\hat{c}^{(s+hq)}}(\tau) \right| &= \begin{cases} 0 & \left(v \neq v_0 = \frac{q+1}{2}\right) \\ |g(h,s)| & \left(v = v_0 = \frac{q+1}{2}\right) \end{cases}, \\
& r = s \pmod q \qquad (52)
\end{aligned}
$$

τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$R_{\hat{c}^{(1)},\hat{f}^{(1)}}(\tau)$	0	0	0	24	0	0	0	0	4.4	0	0	0	0	1.8	0	0	0	0	1.8	0	0	0	0	4.4	0
$R_{\hat{c}^{(2)},\hat{f}^{(2)}}(\tau)$	0	0	0	21	0	0	0	0	3.8	0	0	0	0	8.2	0	0	0	0	8.2	0	0	0	0	3.8	0
$R_{\hat{c}^{(3)},\hat{f}^{(3)}}(\tau)$	0	0	0	18	0	0	0	0	6.2	0	0	0	0	11	0	0	0	0	11	0	0	0	0	6.2	0
$R_{\hat{c}^{(4)},\hat{f}^{(4)}}(\tau)$	0	0	0	14	0	0	0	0	12	0	0	0	0	8.8	0	0	0	0	8.8	0	0	0	0	12	0

表 1: Combined Frank/Chu Sequences の周期相互相関特性 ($N = 25, r = s \pmod 5$)

ここで、$0 \leq h < q, \tau = uq + v$ であり、

$$
\begin{aligned}
g(h,s) &= q \sum_{k=0}^{\frac{q-1}{2}-1} \alpha^{(s+hq)k(k+1)/2q - su(k+v_0)} + \\
&\quad q \sum_{k=\frac{q-1}{2}}^{q-1} \alpha^{(s+hq)k(k+1)/2q - s(u+1)(k+v_0)} \qquad (53)
\end{aligned}
$$

である。Combined Frank/Chu Sequences における系列の位相状態数は周期 N によって異なるが、$\sqrt{N}, N, 2N$ のいずれかである。

例 3.1.3 例 3.1.1 と例 3.1.2 で述べた Frank Sequences,Chu Sequences を用いると、周期25の Combined Frank/Chu Sequences は以下のように与えられる。

$$FC = \left\{\hat{f}^{(1)}, \hat{f}^{(2)}, \hat{f}^{(3)}, \hat{f}^{(4)}, \hat{c}^{(1)}, \hat{c}^{(2)}, \hat{c}^{(3)}, \hat{c}^{(4)}\right\}$$

このとき、周期相互相関特性に関して、$R_{\hat{c}^{(r)},\hat{c}^{(s)}}(\tau), R_{\hat{f}^{(r)},\hat{f}^{(s)}}(\tau)$, $R_{\hat{c}^{(r)},\hat{f}^{(s)}}(\tau) (r \neq s \pmod 5)$ の場合は周期相互相関関数の各シフトの絶対値は一定値5に等しい。$r = s \pmod 5$ の場合の周期相互相関関数 $R_{\hat{c}^{(s)},\hat{f}^{(s)}}$ を表1に示す。

3.1.4 Milewski Sequences

Milewski Sequences は Chu Sequences より導かれる直交系列である。任意の正の整数 $q > 1, m \geq 1$ に対して、周期 q^{2m+1} の q^{m+1} 相 Milewski Sequences が構成される。

$\left\{\hat{b}_n^{(r)}\right\}$ を周期 q の Chu Sequences とすると、周期 $N = q^{2m+1}$ の Milewski

Sequences $\{\hat{c}_n\} = \{\hat{c}_{jq^m+k}\}$ は以下のように構成される。

$$\hat{c}_n^{(r)} = \hat{c}_{jq^m+k}^{(r)} = \hat{b}_{j \pmod q}^{(r)} \alpha^{rjk}, \alpha = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q^{m+1}}} \tag{54}$$

ここで、$j = 0, 1, \cdots, q^{m+1} - 1, k = 0, 1, \cdots, q^m - 1, gcd(r, q) = 1$ である。Milewski Sequences は以下のように行列を用いて表現することも可能である。

$$M^{(r)} = \left[\hat{m}_{j,k}^{(r)}\right] = \begin{bmatrix} \hat{b}_0^{(r)} & \hat{b}_0^{(r)} & \hat{b}_0^{(r)} & \cdots & \hat{b}_0^{(r)} \\ \hat{b}_1^{(r)} & \hat{b}_1^{(r)}\alpha^r & \hat{b}_1^{(r)}\alpha^{2r} & \cdots & \hat{b}_1^{(r)}\alpha^{(q^m-1)r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{b}_{q-1}^{(r)} & \hat{b}_{q-1}^{(r)}\alpha^{(q-1)r} & \hat{b}_{q-1}^{(r)}\alpha^{2(q-1)r} & \cdots & \hat{b}_{q-1}^{(r)}\alpha^{(q^m-1)(q-1)r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ \hat{b}_0^{(r)} & \hat{b}_0^{(r)}\alpha^{q^m r} & \hat{b}_0^{(r)}\alpha^{2q^m r} & \cdots & \hat{b}_0^{(r)}\alpha^{(q^m-1)q^m r} \\ \hat{b}_1^{(r)} & \hat{b}_1^{(r)}\alpha^{(q^m+1)r} & \hat{b}_1^{(r)}\alpha^{2(q^m+1)r} & \cdots & \hat{b}_1^{(r)}\alpha^{(q^m-1)(q^m+1)r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{b}_{q-1}^{(r)} & \hat{b}_{q-1}^{(r)}\alpha^{(q^{m+1}-1)r} & \hat{b}_{q-1}^{(r)}\alpha^{2(q^{m+1}-1)r} & \cdots & \hat{b}_{q-1}^{(r)}\alpha^{(q^m-1)(q^{m+1}-1)r} \end{bmatrix} \tag{55}$$

ここで、j, k はそれぞれ $q^{m+1} \times q^m$ 次の行列 $M^{(r)}$ の行番号、列番号を表す。このとき、

$$\hat{c}_n^{(r)} = \hat{c}_{jq^m+k}^{(r)} = \hat{m}_{j,k}^{(r)} \tag{56}$$

である。

もし、$gcd(r - s, q) = 1$ かつ q が奇数ならば、Milewski Sequences は最適な周期相互相関特性 $|R_{r,s}(\tau)| = \sqrt{N}$ を持つ。Milewski Sequences の位相状態数は q^{m+1} である。

例 3.1.4 $q=3, m=1$ とすると、$N=q^{2m+1}=3^3=27$ である。周期 $q=3$ の Chu Sequences は $\left\{\hat{b}_n^{(r)}\right\}=\left(1, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}r}, 1\right)$, $r=1,2$ と与えれれるので、9 相 Milewski Sequences が以下のように得られる。

$$
\begin{aligned}
\left\{\hat{c}_n^{(1)}\right\} &= \Big(1,1,1,e^{\frac{2i}{3}\pi},e^{\frac{8i}{9}\pi},e^{\frac{-8i}{9}\pi},1,e^{\frac{4i}{9}\pi},e^{\frac{8i}{9}\pi},1,e^{\frac{2i}{3}\pi},e^{\frac{-2i}{3}\pi},e^{\frac{2i}{3}\pi},e^{\frac{-4i}{9}\pi},\\
&\quad e^{\frac{4i}{9}\pi},1,e^{\frac{-8i}{9}\pi},e^{\frac{2i}{9}\pi},1,e^{\frac{-2i}{3}\pi},e^{\frac{2i}{3}\pi},e^{\frac{2i}{3}\pi},e^{\frac{2i}{9}\pi},e^{\frac{-2i}{9}\pi},1,e^{\frac{-2i}{9}\pi},\\
&\quad e^{\frac{-4i}{9}\pi}\Big)\\
\left\{\hat{c}_n^{(2)}\right\} &= \Big(1,1,1,e^{\frac{-2i}{3}\pi},e^{\frac{-2i}{9}\pi},e^{\frac{2i}{9}\pi},1,e^{\frac{8i}{9}\pi},e^{\frac{-2i}{9}\pi},1,e^{\frac{-2i}{3}\pi},e^{\frac{2i}{3}\pi},e^{\frac{-2i}{3}\pi},\\
&\quad e^{\frac{-8i}{9}\pi},e^{\frac{8i}{9}\pi},1,e^{\frac{2i}{9}\pi},e^{\frac{4i}{9}\pi},1,e^{\frac{2i}{3}\pi},e^{\frac{-2i}{3}\pi},e^{\frac{-2i}{3}\pi},e^{\frac{4i}{9}\pi},e^{\frac{-4i}{9}\pi},1,\\
&\quad e^{\frac{-4i}{9}\pi},e^{\frac{-8i}{9}\pi}\Big)
\end{aligned}
$$

ここで、$i=\sqrt{-1}$ である。これらの系列の周期自己相関特性、周期相互相関特性は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
R_r(\tau) &= \begin{cases} 27 & (\tau=0) \\ 0 & (\tau\neq 0) \end{cases}, r=1,2 \\
|R_{1,2}(\tau)| &= \sqrt{27}
\end{aligned}
$$

最後に、周期 $N\leq 40$ までの直交系列に関して、最小の位相状態数 q を持つものについて表 2 にまとめる。ここで、"$Chu_3\times Frank_4$"という表記は周期 $N_1=3$ の Chu Sequences と周期 $N_2=4$ の Frank Sequences の積によって得られる系列を示す。

3.2 多相直交系列の変調

本節では Frank Sequences,Chu Sequences に対する変調方法と、その結果得られる Modulatable Frank Sequences,Modulatable Chu Sequences の特性について述べる。[13]

3.2.1 変調可能な直交系列 (Modulatable Frank Sequences)

Frank Sequences において、q が奇数かつ素数であるならば、周期 $N=q^2$ の Frank Sequences は $M=q-1$ 個存在し、それらの系列のうちの任意の二つの系列間の周期相互相関関数の絶対値は全てのシフトで一定になり、数学的下界を満たす。ここで、Frank Sequences を一般化することを

N	q	構成法	N	q	構成法
			21	21	Chu_{21}
2	4	Chu_2	22	44	Chu_{22}
3	3	Chu_3	23	23	Chu_{23}
4	2	$(+1,+1,+1,-1)$	24	12	$Chu_3 \times Milewski_8$
5	5	Chu_5	25	5	$Frank_{25}$
6	12	Chu_6	26	26	Chu_{26}
7	7	Chu_7	27	9	$Milewski_{27}$
8	4	$Milewski_8$	28	14	$Chu_7 \times Frank_4$
9	3	$Frank_9$	29	29	Chu_{29}
10	20	Chu_{10}	30	60	Chu_{30}
11	11	Chu_{11}	31	31	Chu_{31}
12	6	$Chu_3 \times Frank_4$	32	8	$Milewski_{32}$
13	13	Chu_{13}	33	33	Chu_{33}
14	28	Chu_{14}	34	68	Chu_{34}
15	15	Chu_{15}	35	35	Chu_{35}
16	4	$Frank_{16}$	36	6	$Frank_{36}$
17	17	Chu_{17}	37	37	Chu_{37}
18	12	$Chu_2 \times Frank_9$	38	76	Chu_{38}
19	19	Chu_{19}	39	39	Chu_{39}
20	10	$Chu_5 \times Frank_4$	40	20	$Chu_5 \times Milewski_8$

表 2: 最小の位相状態数 q を持つ多相直交系列 (周期 $N \leq 40$)

考える。この一般化された Frank Sequences は、絶対値 1 の複素数によってもとの Frank Sequences が変調されたものと見なすことができる。変調を施しても、周期自己相関関数及び、周期相互相関関数の特性は変化しないことから、これらの一般化された Frank Sequences は変調可能な直交系列 (Modulatable Frank Sequences) と呼ばれる。変調可能な直交系列を構成する際に、変調に用いられる複素数の列は、直接拡散方式のスペクトラム拡散通信の情報伝送に利用可能であり、同時に情報伝送のための同期を最適な状態で保持するためにも利用可能である。

$\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ を周期 $N = q^2$ の Frank Sequences であるとする。ここで、q は任意の正の整数である。このとき変調可能な直交系列は以下のように定義される。

$$\hat{s}_n^{(r)} = \hat{b}_k \hat{a}_{jq+k}^{(r)} = \hat{b}_k e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q} rjk}, 0 \leq k < q, 0 \leq j < q, gcd(r, q) = 1 \qquad (57)$$

ここで、$\hat{b}_k, 0 \leq k < q$ は絶対値 1 の任意の複素数である。

$\{d_k\} = (d_0, d_1, \cdots, d_{q-1})$ を送信したい情報とする。ここで、$d_k = 0, 1, \cdots, Q-1$ とする。このとき以下のように $\hat{b}_k$ を選べば良い。

$$\hat{b}_k = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{Q} d_k} \qquad (58)$$

式 (57) より明らかに、任意の Frank Sequences から変調可能な直交系列を得ることが可能である。同一の Frank Sequences を変調して得られた全ての変調可能な直交系列を、一つの集合の要素と定義する。そのとき、変調可能な直交系列の集合は以下のような特性を持つことが証明されている。

1. 全ての集合は、周期 $N = q^2$ の変調可能な直交系列を無限個含んでいる。
2. 異なる集合に属する任意の二つの系列の周期相互相関関数の絶対値は一定値であり、その値は数学的下界を実現している。
3. 同じ集合に属する任意の二つの系列の周期相互相関関数は q の倍数に一致するシフトを除いて、全てのシフトで 0 である。

例 3.2.1　$q = 3$ とすると、周期 $N = q^2 = 9$ の Frank Sequences が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \left\{\hat{a}_n^{(1)}\right\} &= \left(1, 1, 1, 1, e^{\frac{2i}{3}\pi}, e^{\frac{-2i}{3}\pi}, 1, e^{\frac{-2i}{3}\pi}, e^{\frac{2i}{3}\pi}\right) \\ \left\{\hat{a}_n^{(2)}\right\} &= \left(1, 1, 1, 1, e^{\frac{-2i}{3}\pi}, e^{\frac{2i}{3}\pi}, 1, e^{\frac{2i}{3}\pi}, e^{\frac{-2i}{3}\pi}\right) \end{aligned}$$

ここで、$i=\sqrt{-1}$ である。$\{d_k\} \in \{(1,0,3),(2,5,1),(2,7,3),(0,0,4)\}$ を伝送すべき情報とする。以下のように $\hat{b}_k$ を選ぶと、

$$\hat{b}_k = e^{\frac{2i}{9}\pi d_k}, k=0,1,2$$

以下のようの四つの変調可能な直交系列が得られる。

$$\begin{aligned}
\left\{\hat{s}_n^{(1,1)}\right\} &= \left(e^{\frac{2i}{9}\pi}, 1, e^{\frac{2i}{3}\pi}, e^{\frac{2i}{9}\pi}, e^{\frac{2i}{3}\pi}, 1, e^{\frac{2i}{9}\pi}, e^{\frac{-2i}{3}\pi}, e^{\frac{-2i}{3}\pi}\right) \\
\left\{\hat{s}_n^{(1,2)}\right\} &= \left(e^{\frac{4i}{9}\pi}, e^{\frac{-8i}{9}\pi}, e^{\frac{2i}{9}\pi}, e^{\frac{4i}{9}\pi}, e^{\frac{-2i}{9}\pi}, e^{\frac{-4i}{9}\pi}, e^{\frac{4i}{9}\pi}, e^{\frac{4i}{9}\pi}, e^{\frac{8i}{9}\pi}\right) \\
\left\{\hat{s}_n^{(2,1)}\right\} &= \left(e^{\frac{4i}{9}\pi}, e^{\frac{-4i}{9}\pi}, e^{\frac{2i}{3}\pi}, e^{\frac{4i}{9}\pi}, e^{\frac{2i}{9}\pi}, 1, e^{\frac{4i}{9}\pi}, e^{\frac{8i}{9}\pi}, e^{\frac{-2i}{3}\pi}\right) \\
\left\{\hat{s}_n^{(2,2)}\right\} &= \left(1, 1, e^{\frac{8i}{9}\pi}, 1, e^{\frac{2i}{3}\pi}, e^{\frac{2i}{9}\pi}, 1, e^{\frac{-2i}{3}\pi}, e^{\frac{-4i}{9}\pi}\right)
\end{aligned}$$

ここで、最初の二つの系列はもとの Frank Sequences のうち最初の系列を変調したものであり、最後の二つの系列はもとの Frank Sequences のうち最後の系列を変調したものである。以下に $R_{\hat{s}^{(1,1)}}$, $\left|R_{\hat{s}^{(1,1)},\hat{s}^{(1,2)}}\right|$, $\left|R_{\hat{s}^{(1,2)},\hat{s}^{(2,2)}}\right|$ の計算結果を示す。

$$\begin{aligned}
R_{\hat{s}^{(1,1)}} &: (9,0,0,0,0,0,0,0,0) \\
\left|R_{\hat{s}^{(1,1)},\hat{s}^{(1,2)}}\right| &: (2.05,0,0,2.05,0,0,8.52,0,0) \\
\left|R_{\hat{s}^{(1,2)},\hat{s}^{(2,2)}}\right| &: (3,3,3,3,3,3,3,3,3)
\end{aligned}$$

3.2.2 Modulatable Chu Sequences

Chu Sequences から得られる一般化された Chu Sequences を Modulatable Chu Sequences と呼ぶ。

$\left\{\hat{a}_n^{(r)}\right\}$ を周期 $N=sm^2$ の Chu Sequences とする。ここで、m, s はともに任意の正の整数とする。また、$\left\{\hat{b}_n\right\}$ を絶対値が 1 である m 個の複素数を要素とする系列とする。このとき Modulatable Chu Sequences $\{\hat{s}_n\}$ は以下のように定義される。

$$\hat{s}_n^{(r)} = \hat{b}_{n \pmod m}\hat{a}_n^{(r)} = \begin{cases} \hat{b}_{n \pmod m} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}r(n+1)n} & (N \quad odd) \\ \hat{b}_{n \pmod m} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{N}rn^2} & (N \quad even) \end{cases},$$
$$0 \le n < N, gcd(r,N)=1 \tag{59}$$

$\{d_n\}=(d_0, d_1, \cdots, d_{m-1})$ を送信したい情報とする。ここで、$d_n = 0, 1, \cdots, Q-1$ とする。このとき以下のように $\hat{b}_n$ を選べば良い。

$$\hat{b}_n = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{Q}d_n} \tag{60}$$

もし、N が素数 m の二乗ならば、$m-1$ 個の Chu Sequences を用いて、$m-1$ 個の Modulatable Chu Sequences を要素とする集合を得ることができる。この集合に属する任意の二つの系列の周期相互相関関数の絶対値は全てのシフトで一定値 $\sqrt{N}$ である。

Modulatable Frank Sequences は Modulatable Chu Sequences の特別な場合と見なすことが可能である。$\hat{b}_n^{(F)}, \hat{b}_n^{(C)}$ をそれぞれ Modulatable Frank Sequences と Modulatable Chu Sequences を変調するための絶対値 1 の複素数の系列であるとする。$N = m^2$ とし、

$$\hat{b}_n^{(C)} = \begin{cases} \hat{b}_n^{(F)} e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m^2} r(n+1)n} & (m \quad odd) \\ \hat{b}_n^{(F)} e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{m^2} rn^2} & (m \quad even) \end{cases}, \quad 0 \le n < m, gcd(r,m) = 1 \tag{61}$$

とすると、Modulatable Frank Sequences が得られる。$N = m^2$ が偶数であるとき、Modulatable Chu Sequences は、

$$\hat{s}_n^{(r)} = \hat{b}^{(C)}_{n \pmod m} \hat{a}_n^{(r)} = \left(\hat{b}^{(F)}_{n \pmod m} e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{m^2} r(n \pmod m)^2} \right) e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{m^2} rn^2}, \quad 0 \le n < m^2 \tag{62}$$

と表せる。変数 n を $n = jm + k, 0 \le j, k < m$ のように表すと、

$$\begin{aligned} \hat{s}_n^{(r)} &= \hat{s}_{jm+k}^{(r)} = \hat{b}_k^{(F)} e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{m^2} rk^2} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{m^2} r(jm+k)^2} = \hat{b}_k^{(F)} e^{\pi r j^2 \sqrt{-1}} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m} rjk} \\ &= \hat{b}_k^{(F)\prime} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m} rjk} \end{aligned} \tag{63}$$

と変形できるが、式 (63) の右辺は明らかに Modulatable Frank Sequences を表している。$N = m^2$ が奇数であるときも同様にして、

$$\begin{aligned} \hat{s}_n^{(r)} &= \hat{b}^{(C)}_{n \pmod m} \hat{a}_n^{(r)} \\ &= \left(\hat{b}^{(F)}_{n \pmod m} e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m^2} r(n \pmod m + 1)(n \pmod m)} \right) e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m^2} r(n+1)n}, \\ & \quad 0 \le n < m^2 \end{aligned} \tag{64}$$

ここで、変数 n を $n = jm + k, 0 \le j, k < m$ のように表すと、

$$\begin{aligned} \hat{s}_n^{(r)} &= \hat{s}_{jm+k}^{(r)} = \hat{b}_k^{(F)} e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m^2} rk(k+1)} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m^2} r(jm+k)(jm+k+1)} \\ &= \hat{b}_k^{(F)} e^{2\pi r j^2 \sqrt{-1}} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m} rj} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m} 2rjk} = \hat{b}_k^{(F)\prime} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m} r'jk} \end{aligned} \tag{65}$$

ここで、$2r = r'$ としたが、$N = m^2$ が奇数なので m も奇数である。よって $gcd(r, m) = 1$ ならば $gcd(r', m) = 1$ である。そのとき、式 (65) の右辺は明らかに Modulatable Frank Sequences を表している。

さらに、Milewski Sequences も Modulatable Chu Sequences の特別な場合であることが証明されている。

例 3.2.2　$s = 2, m = 2, N = 8 = 2 \times 2^2$ とする。このとき、$\hat{b}_0, \hat{b}_1$ をともに絶対値 1 の任意の複素数とすると、Modulatable Chu Sequences は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\left\{\hat{s}_n^{(r)}\right\} &= \left(\hat{b}_0, \hat{b}_1\alpha^{0.5}, \hat{b}_0\alpha^2, \hat{b}_1\alpha^{4.5}, \hat{b}_0, \hat{b}_1\alpha^{4.5}, \hat{b}_0\alpha^2, \hat{b}_1\alpha^{0.5}\right), \\
& \quad \alpha = e^{i\frac{2\pi r}{8}}, r = 1, 3, 5, 7
\end{aligned}
$$

ここで、$i = \sqrt{-1}$ である。もし、$\left(\hat{b}_0, \hat{b}_1\right) = (1, i), r = 1$ ならば、

$$
\left\{\hat{s}_n^{(1)}\right\} = \left(1, ie^{i\frac{\pi}{8}}, i, ie^{i\frac{\pi}{8}}, 1, ie^{i\frac{\pi}{8}}, i, ie^{i\frac{\pi}{8}}\right)
$$

である。