2　基礎的概念

本節では、本論文の内容を理解するために必要な、系列設計全般に関する基礎的概念について述べる。

2.1　非周期系列と周期系列

通信への応用を目的とした系列設計においては、一般に“非周期系列”及び“周期系列”と呼ばれる二種類の系列が研究の対象となっている。本節では、非周期系列と周期系列について述べる。

非周期系列とは、有限の長さを持つ系列のことである。一般に、長さ N の非周期系列 $\{a(i)\}, 0 \le i \le N-1$ は以下のように、系列の各要素を順番に並べて表される。

$$\{a(i)\} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}) \tag{1}$$

または、

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}) \tag{2}$$

一方、周期系列とは、ある周期で同じ要素が繰り返される無限の長さを持つ系列のことである。周期 N の周期系列 $a(i)$ は以下のように周期 N で同じ要素が繰り返される系列である。

$$(\cdots, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1} \cdots) \tag{3}$$

一般に、上記の周期系列 $a(i)$ は、その一周期に相当する要素を順番に並べることによって、以下のように表される。

$$\{a(i)\} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}) \tag{4}$$

または、

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}) \tag{5}$$

本論文では“直交系列”及び“相補系列”という二種類の系列を扱う。直交系列は周期系列においてのみ定義される系列である。また、相補系列は非周期系列、周期系列のそれぞれにおいて定義される系列であるが、本論文で扱う相補系列は“周期相補系列”である。よって本論文では、特に注意の無い場合は、系列とは周期系列を意味するものとする。

2.2 相関関数

本節では相関関数の定義と周期相関関数のDFT(Discrete Fourier Transformation)を用いた計算法について述べる。

一般に相関関数とは二つの関数の類似度を量的に表す尺度であるといえる。信号処理の分野においては、雑音に汚された信号の中から意味のある信号を取り出すような応用で広く使われている。相関関数は、簡単に言うと二つのベクトルの内積の概念を抽象化したものである。二つのベクトルが相似関係にあるとき、両ベクトルのなす角は0°であるから内積は最大となる。また二つのベクトルがお互いの成分を何も持たないとき両ベクトルのなす角は90°であるので、内積は0である。このことを抽象化した相関関数では、二つの信号の間にまったく類似性が無い場合は相関値が0になり、二つの信号が同一で、時間的なずれも無い場合は相関値が最大になる。同一の信号間の相関関数を自己相関関数、異なる信号間の相関関数を相互相関関数と呼ぶ。通常、相関関数は二つの信号の積の積分の形で定義される。信号 $x(t)$ と $y(t)$ の相互相関関数 $R_{xy}(\tau)$ は以下のように定義される。

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{x(t)} y(t+\tau) dt \tag{6}$$

ここで、$\overline{x(t)}$ は $x(t)$ の複素共役を表す。同様にして、信号 $x(t)$ の自己相関関数 $R_x(\tau)$ は以下のように定義される。

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overline{x(t)} x(t+\tau) dt \tag{7}$$

相関関数はパルスの反射波などを計測するときによく使用されている。放射パルスを $x(t)$ とし、戻ってくる反射信号を $y(t)$ とする。この場合 $y(t)$ が雑音に汚されてうまく計測できないことがある。このようなとき、相関関数を利用すると、戻ってきたパルス信号の時間的位置を割り出すことが可能である。送信パルスと反射パルスの時間差はパルスが往復に要した時間であるから、これをもとにパルスが反射した位置までの距離を推定できる。これがレーダの原理である。

式(6)、式(7)は連続信号に対する相互相関関数、自己相関関数の定義であるので、ここで、系列に対する相関関数を定義する。

まず、非周期系列の相関関数を定義する。それぞれが有限の長さ N, M を持つ二つの非周期系列 $\{a(i)\}, \{b(i)\}$ を以下のように定義する。

$$\{a(i)\} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}) \tag{8}$$

$$\{b(i)\} = (b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{M-1}) \tag{9}$$

このとき、非周期系列 $\{a(i)\}, \{b(i)\}$ の非周期相互相関関数 $R_{ab}(\tau)$ は以下のように定義される。

$$R_{ab}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{a(i)} \cdot b(i+\tau) \tag{10}$$

ただし、

$$\begin{aligned} a(i) &= 0 \qquad (i < 0, N-1 < i) \qquad (11)\\ b(i) &= 0 \qquad (i < 0, M-1 < i) \qquad (12) \end{aligned}$$

とする。ここで、$\overline{a(i)}$ は $a(i)$ の複素共役を表す。$R_{ab}(\tau)$ は有限の長さ $N+M-1$ を持つ。また、非周期系列 $\{a(i)\}$ の非周期自己相関関数 $R_a(\tau)$ は以下のように定義される。

$$R_a(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{a(i)} \cdot a(i+\tau) \tag{13}$$

ただし、

$$a(i) = 0 \qquad (i < 0, N-1 < i) \tag{14}$$

とする。$R_a(\tau)$ は有限の長さ $2N-1$ を持つ。

次に、周期系列の相関関数を定義する。ともに周期が N である二つの周期系列 $\{a(i)\}, \{b(i)\}$ を、それぞれ一周期分の要素を用いて以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \{a(i)\} &= (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}) \qquad (15)\\ \{b(i)\} &= (b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{N-1}) \qquad (16) \end{aligned}$$

このとき、二つの周期系列 $\{a(i)\}, \{b(i)\}$ の周期相互相関関数 $R_{ab}(\tau)$ は以下のように定義される。

$$R_{ab}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{a(i)} \cdot b\left((i+\tau) \pmod N\right) \tag{17}$$

周期相互相関関数 $R_{ab}(\tau)$ も周期 N の周期系列となる。また、周期系列 $\{a(i)\}$ の周期自己相関関数 $R_a(\tau)$ は以下のように定義される。

$$R_a(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{a(i)} \cdot a\left((i+\tau) \pmod N\right) \tag{18}$$

周期自己相関関数 $R_a(\tau)$ も周期 N の周期系列となる。

ここで、周期系列の相関関数の DFT(Discrete Fourier Transformation) を用いた計算法について述べる。周期 N の周期系列 $\{x(i)\} = (x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{N-1})$ の DFT$\{X(i)\} = (X_0, X_1, X_2, \cdots, X_{N-1})$ を以下のように定義する。

$$X(i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{-ik} \tag{19}$$

また、DFT の逆変換である IDFT(Inverse Discrete Fourier Transformation) を以下のように定義する。

$$x(i) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot W_N^{ik} \tag{20}$$

ただし、$W_N = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{N}\right)$ である。次に相互相関関数 $R_{ab}(i)$ に N 次の DFT を施したものを $P_{ab}(\tau)$、同様に周期系列 $\{a(i)\}, \{b(i)\}$ に N 次の DFT を施したものを $\{A(\tau)\}, \{B(\tau)\}$ とすると、

$$\begin{aligned}
P_{ab}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} R_{ab}(k) \cdot W_N^{-\tau k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{a(l)} \cdot b(l+k) \cdot W_N^{-\tau k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \overline{a(l)} \cdot W_N^{l\tau} \sum_{k=0}^{N-1} b(l+k) \cdot W_N^{-\tau(l+k)} \\
&= \sqrt{N} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} a(l) \cdot W_N^{-l\tau}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=l}^{N-1+l} b(t) \cdot W_N^{-\tau t} \\
&= \sqrt{N} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} a(l) \cdot W_N^{-l\tau}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=l}^{N-1} b(t) \cdot W_N^{-\tau t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=N}^{N-1+l} b(t) \cdot W_N^{-\tau t} \right) \\
&= \sqrt{N} \overline{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} a(l) \cdot W_N^{-l\tau}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=l}^{N-1} b(t) \cdot W_N^{-\tau t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{l-1} b(t) \cdot W_N^{-\tau t} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{N}\overline{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{l=0}^{N-1}\overline{a(l)}\cdot W_N^{-l\tau}}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=0}^{N-1}b(t)\cdot W_N^{-\tau t} \\
&= \sqrt{N}\overline{A(\tau)}B(\tau) \qquad (21)
\end{aligned}
$$

である。つまり、周期系列 $\{a(i)\},\{b(i)\}$ の相互相関関数 $R_{ab}(\tau)$ を求めるためには、

1. $\{a(i)\},\{b(i)\}$ に N 次の DFT を施し、$\{A(\tau)\},\{B(\tau)\}$ を求める。
2. $\{A(\tau)\}$ の複素共役と $\{B(\tau)\}$ の要素ごとの積を求め、さらに各要素を $\sqrt{N}$ 倍する。これが $P_{ab}(\tau)$ である。
3. 最後に $P_{ab}(\tau)$ に N 次の IDFT を施し、$R_{ab}(i)$ を求める。

とすれば良いことがわかる。この手順に従えば、時間領域で直接 $R_{ab}(\tau)$ を計算しなくても $R_{ab}(\tau)$ を計算することが可能になる。周期系列の自己相関関数も同様の計算方法によって求めることが可能である。

本論文では周期系列のみを扱うので、特に注意の無い場合は、相関とは周期相関を意味するものとする。

2.3 巡回行列による周期系列の表記法

本節では、末広 [5][7] によって提案された巡回行列を用いた周期系列の表記法について述べる。

周期 N の周期系列は以下のように巡回行列を用いて表現することができる。

$$
A = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & \cdots & a_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \qquad (22)
$$

ここで、A がユニタリ行列であるときに限り、A で表される周期系列は直交系列である。行列 A の第 0 行を N 次の離散フーリエ変換 (DFT) することによって得られる系列を対角要素とする対角行列 Λ_A を定義すると、以下の関係式が導かれる。

$$
A = F_N^{-1}\Lambda_A F_N \qquad (23)
$$

ここで、F_N は $N\times N$DFT 行列を表し、F_N^{-1} は F_N の逆行列を表す。行列 A がユニタリ行列であるとき、対角行列 Λ_A もユニタリ行列となり、Λ_A

の対角要素の絶対値は一定値をとる。よって、直交系列はDFTによって多相周期系列に変換される。

周期 N の他の周期系列が、以下のように巡回行列を用いて表現されているとき、

$$B = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{N-1} \\ b_{N-1} & b_0 & \cdots & b_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

巡回行列 A, B によって表される周期系列間の周期相互相関関数は以下のように表される。

$$AB^* = A\left(\overline{{}^tB}\right) \tag{25}$$

ここで、行列 $\bar{B}, {}^tB, B^*$ はそれぞれ行列 B の共役行列、転置行列、随伴行列を表す。また、行列 AB^* も巡回行列となる。行列 A, B で表される二つの周期系列がともに直交系列であるとき、A, B はユニタリ行列であるので、行列 AB^* もユニタリ行列となる。したがって、AB^* の全ての行のノルムは1に等しくなる。したがって、巡回行列行列 AB^* の各要素の絶対値が一定であるとき、行列 A, B で表される二つの直交系列間の周期相互相関関数の絶対値は数学的下界を実現する。

式(23)と同様に、行列 B についても対角行列 Λ_B を用いて、以下のように表す。

$$B = F_N^{-1}\Lambda_B F_N \tag{26}$$

すると、巡回行列 A, B によって表される周期系列間の周期相互相関関数は以下のように表される。

$$\begin{aligned} AB^* &= \left(F_N^{-1}\Lambda_A F_N\right)\left(F_N^{-1}\Lambda_B F_N\right)^* \\ &= \left(F_N^{-1}\Lambda_A F_N\right)\left(\overline{{}^t\left(F_N^{-1}\Lambda_B F_N\right)}\right) \\ &= \left(F_N^{-1}\Lambda_A F_N\right)\left(\overline{{}^tF_N\,{}^t\Lambda_B\,{}^tF_N^{-1}}\right) \\ &= \left(F_N^{-1}\Lambda_A F_N\right)\left(\overline{F_N\Lambda_B F_N^{-1}}\right) \\ &= \left(F_N^{-1}\Lambda_A F_N\right)\left(F_N^{-1}\overline{\Lambda_B}F_N\right) \\ &= F_N^{-1}\Lambda_A\overline{\Lambda_B}F_N \end{aligned} \tag{27}$$