

第 5 章

3次元弾性率分布再構成法

本章では、5.1、5.2、5.3節において、本研究で提案する3次元弾性率再構成法の予備知識となる弾性論の基礎式に関する導出を行う[115]。5.4節では他の研究者によって提案されている弾性率再構成法についてレビューし、5.5節で本研究で提案する3次元弾性率再構成法について述べる。

5.1 変位 - 歪みの関係の導出

固体・液体・気体を含めた全ての物体は外力によって運動し、変形する。物体の微小部分（体要素）はそのとき位置と形を変える。この体要素の微小な空間的変位は、(a) 並進、(b) 回転、(c) 互いに直交する3軸方向の伸縮、の3つの変位の重ね合わせである。これはヘルムホルツにより導かれた、連続体の運動学の基本定理である。質点運動では並進だけを、剛体の運動では並進と回転だけを考えればよかったわけであるが、連続体の運動の特徴は(c)の純粹の変形にあると言える。

図5.1のように体要素中に2点O、Pをとる。要素の変位に伴ってOはO'に、PはP'に移動したとする。O、Pの位置を直交座標で表し、それぞれO(0,0,0)、また便宜上P(x,y,z) = P(x₁, x₂, x₃)とし、ベクトル $\vec{OO'}$ の成分を u_{i0} 、 $\vec{PP'}$ の成分を u_i ($i=1, 2, 3$ で、 $u_1 = u_x$ 、 $u_2 = u_y$ 、 $u_3 = u_z$)とする。 u_i は変位ベクトルである。位置ベクトル \vec{OP} は微小体積中にあるので、 x_1 、 x_2 、 x_3 はいずれも微小量である。これに注意して u_i をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i0} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 x_j + \dots \\ &= u_{i0} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right)_0 x_2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right)_0 x_3 + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

となる。ここで下の添字0ははOにおける値を意味する。式(5.1)では、添字jに関する和の規約が適用されている。和の規約とは、1つの項の中に同一の添字が2つ以上出現したときは、式(5.1)のように $j = 1, 2, 3$ についての和を示すと定めたプロトコルである。

式(5.1)を次のように書き換える。

$$u_i = u_{i0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) x_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) x_j + \dots \quad (5.2)$$

この式の中で、右辺第1項 u_{i0} は一定ベクトルであるから、明らかに並進を表し、第2項は回転、第3項は歪みを表す。ここでは、後述との整合性をとるために、式(5.2)第3項において、 $x_i = i$ 、 $x_j = j$ 、 $i, j = x, y, z$ として、歪みテンソル ε_{ij} を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \\ (i, j &= x, y, z)\end{aligned}\tag{5.3}$$

式(5.3)が、微小変位の場合における、変位と歪みの関係式である。

5.2 応力 - 歪みの関係の導出

5.2.1 簡単な変形下のフック弾性体

応力と歪みが比例関係で結ばれた固体を線形弾性体、またはフック (Hooke) 弾性体という。ここでは等方弾性体を仮定する。等方弾性体とは、弾性的性質が方向に依って変化しない物質のことを指す。

図5.2のような長さ l 、断面積 S の棒を力 F で引っ張ったとき、長さが Δl だけ伸びたとする。 Δl が微小であれば、これは力 F に比例する。これがフックの法則の原形である。このような1次元の場合のフックの法則を応力 - 歪みの関係で表すと、

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}\tag{5.4}$$

図5.2の座標系を用いてテンソルの形に表すと、

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy}\tag{5.5}$$

となり、ここで比例定数 E はヤング率と呼ばれ、物質定数である。

この座標系では応力テンソルの σ_{yy} 以外の成分は全て0であり、引っ張りにより棒は x 、 z 方向に縮む。等方性を仮定したから x 、 z 方向の垂直歪みは等しく、

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{zz} \\ &= -\nu \varepsilon_{yy}\end{aligned}\tag{5.6}$$

とできる。 ν は正の物質定数で無次元量であり、ポアソン (Poisson) 比と呼ばれる。

次に、図5.3のような直方体形の固体にずり応力 σ_{xy} と σ_{yx} を加えて純粹ずり歪みを発生させることを考える。図5.3における角度変化 $\Delta\theta$ が十分に小さければ、 $2\Delta\theta = 2\varepsilon_{xy}$ が成立し、かつ比例関係がこの場合にも適用できるので、 ε_{xy} が十分小さければ、

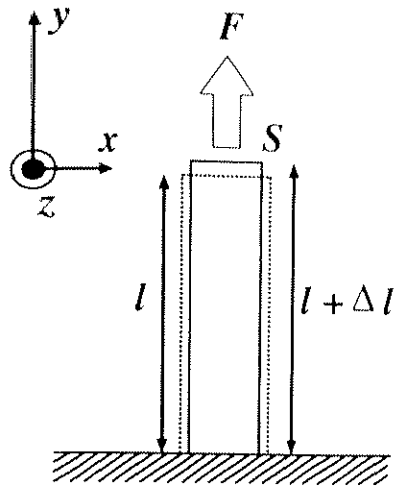


図 5.2: 1次元フック弾性棒

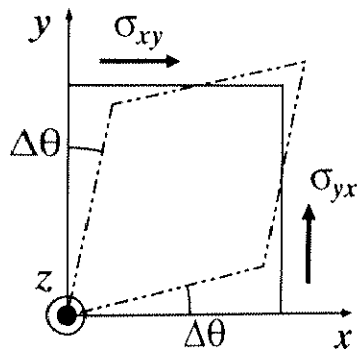


図 5.3: 純粋ずり歪み

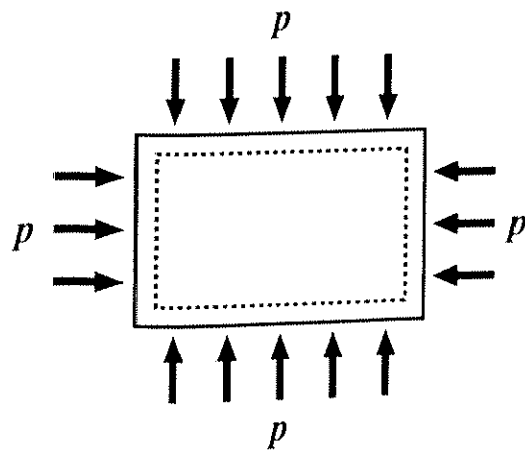


図 5.4: 等方圧縮

$$\sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy} \quad (5.7)$$

と書ける。比例定数 G はずり弾性率と呼ばれ物質定数である。

さらに、図 5.4 のような直方体ブロックに静圧 p を加えて、ブロック体積を V から $V - \Delta V$ ($\Delta V > 0$) に圧縮した場合を考えると、 ΔV が十分小さければ比例関係

$$p = K \frac{\Delta V}{V} \quad (5.8)$$

が成り立ち、 K は体積弾性率と呼ばれる物質定数である。

以上のように等方性弾性体の変形に線形法則を適用することによって、4 種類の物質定数 (E 、 ν 、 G 、 K) を定義できる。

5.2.2 フックの法則の拡張

以上で述べたフックの法則は、簡単な変形下で導かれるものであるが、より实际的に 3次元の変形に対してフックの法則を拡張することを考える。図 5.5 のような等方的で一様な直方体形の弾性体を考える。この弾性体に変形を加える前の各軸辺の長さをそれぞれ l_x 、 l_y 、 l_z とする。このとき、直方体の各面に垂直応力 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} を同時に作用させて、3 方向に引っ張ったときの直方体の変形を導く。式 (5.5) と式 (5.6) に基づくと、3 辺の長さ l_x 、 l_y 、 l_z はそれぞれ

$$l_x \left(1 + \frac{1}{E} \sigma_{xx}\right) \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}\right) \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz}\right) \quad (5.9a)$$

$$l_y \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}\right) \left(1 + \frac{1}{E} \sigma_{yy}\right) \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz}\right) \quad (5.9b)$$

$$l_z \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}\right) \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}\right) \left(1 + \frac{1}{E} \sigma_{zz}\right) \quad (5.9c)$$

に変化する。このとき歪み σ_{xx}/E などは全て微量であるとする、それらの積を省略することができるので、垂直歪みは、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{l_x} \left\{ l_x \left(1 + \frac{1}{E} \sigma_{xx}\right) \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}\right) \left(1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz}\right) - l_x \right\} \\ &= \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right\} \end{aligned} \quad (5.10a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right\} \quad (5.10b)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right\} \quad (5.10c)$$

この場合の座標系は明らかに応力及び歪みテンソルの共通の主軸であるから、ずり応力やずり歪みはすべて 0 であり、式 (5.10a)～式 (5.10c) は、主軸座標における応力 - 歪みの 1 価関係を表している。

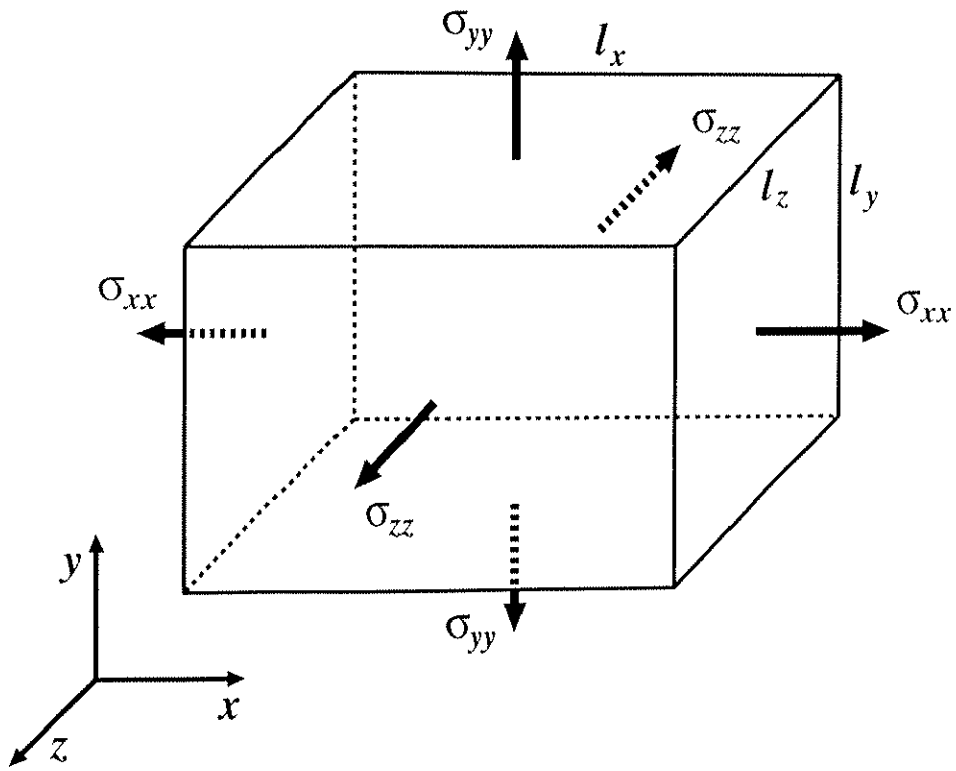


図 5.5: 伸び歪みの重ね合わせ

これを純粹ずり歪みの場合の応力 - 歪み関係である式 (5.7) についても成り立つように書き換え、指標付きの表示にすると以下のような構成方程式の形が推論される。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \{ (1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij} \} \quad (5.11)$$

式 (5.11) を応力テンソルについて解くと、

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left\{ \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right\} \quad (5.12)$$

ただし、添字は $i, j = x, y, z$ であり、 $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ 、 $\sigma_{kk} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ である。 δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (5.13)$$

である。以上のように等方弾性体の応力 - 歪み関係を記述する線形構成方程式である式 (5.11) または式 (5.12) は、2つの物質定数を含む形で表すことができる。

5.2.3 一般化フックの法則

5.2.2節で導かれた式 (5.12) は、更に一般的に得ることができる。線形弾性体構成方程式の最も一般的な記述は

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.14)$$

のように1個の応力成分に対して9個の歪み成分が線形結合した形で書くことができる。ただし、添字は $i, j, k, l = x, y, z$ である。 C_{ijkl} は弾性定数であり、4階のテンソルである。このテンソルは81個の成分を持つが、対称性を利用して独立な21個の成分に減らすことができる。

まず、応力テンソルと歪みテンソルは対称テンソルであるので、 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 、 $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ を利用して、

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.15)$$

$$\sigma_{ji} = C_{jikl} \varepsilon_{kl} \quad (5.16)$$

より、 $C_{ijkl} = C_{jikl}$ となり、

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.17)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijlk} \varepsilon_{lk} \quad (5.18)$$

より、 $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ となって、36個に減る。

次に、歪みエネルギー（弾性ポテンシャル） W の存在を仮定すると、Clapeyronの公式から、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (5.19)$$

式(5.19)の W を ε_{ij} と ε_{kl} で微分すると、

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \quad (5.20)$$

式(5.20)の添字 i, j と k, l を交換しても $\partial^2 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} = \partial^2 W / \partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}$ となることから $C_{ijkl} = C_{klij}$ が導かれ、弾性定数は21個に減る。

ここでこの線形弾性体に等方性を仮定すると、独立な弾性定数は2個に減ることが以下のように示される。弾性的性質が方向に依らないということは、座標軸を任意に回転して、式(5.14)を

$$\sigma_{ij'} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl'} \quad (5.21)$$

形に変換したときに、弾性定数が回転前と変化しない、すなわち

$$C_{ijkl} = C_{ij'kl'} \quad (5.22)$$

であることを意味する。一般に直交変換に対して不変であるようなテンソルを等方テンソルと呼ぶが、この等方テンソルは偶数階のものだけが存在する。4階の等方テンソルは3つあるが、そのうち、 C_{ijkl} において、 (i, j) 及び (k, l) の各々について対称であるものは

$$\delta_{ij} \delta_{kl} \quad (5.23)$$

$$\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \quad (5.24)$$

である。よって、 λ 、 μ をスカラーの定数として

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.25)$$

とおくことができる。この関係を式(5.14)に代入すると

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i, j = x, y, z) \quad (5.26)$$

が得られる。 λ 、 μ をラメ (Lamé) の弾性定数と呼ぶ。このラメの弾性定数は、式(5.26)を式(5.12)と比較するなどして、始めに導いた E 、 ν 、 G 、 K などに関係づけることができる。すなわち、等方性を仮定すれば、線形弾性体の構成方程式は、 E 、 ν 、 $G(=\mu)$ 、 K 、 λ のうちの任意の2つの物質定数を用いて完全に記述されることが示された。

5.3 応力つりあいの式の導出

ここでは、図5.6のような微小直方体の各面に働く応力成分からつりあいの式を求める。この微小体要素内に働く力は、外力により生じた応力成分等の面積力と重力などの体積力の和である。つりあいの状態では力が平衡状態にあり、運動方程式における加速度が0となるので、まず x 軸方向のつりあいを考えると以下のような式が導ける。

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dl_x\right) dl_y dl_z + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dl_y\right) dl_z dl_x + \left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dl_z\right) dl_x dl_y - (\sigma_{xx} dl_y dl_z + \sigma_{xy} dl_z dl_x + \sigma_{xz} dl_x dl_y) + f_x dl_x dl_y dl_z = 0 \quad (5.27)$$

この式を整理し、また y 軸及び z 軸方向のつりあいについても同様に考えると、以下の3式からなるつりあいの式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (5.28a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (5.28b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (5.28c)$$

ここで、 f_x 、 f_y 、 f_z は単位体積あたりの体積力である。

5.4 弾性率再構成に関する各種提案手法

弾性的特性が与えられた下で、外力を加えたときの内部変位等の弾性体の応答を求める問題は順問題であり、内部変位から弾性率等の弾性特性を推定する問題は逆問題と呼ばれる。弾性率再構成に関する提案手法の多くは、超音波により組織内部の変位を計測し、5.1、5.2、5.3節で述べたような弾性論に基に、変位データを用いて再構成を行うものである。以下、簡単にレビューする。

Ophir らの方法 [7]

既に述べたように、静的な圧縮に基づく組織弾性評価は Ophir らによって始められた。Ophir らは、組織を1次元のばねで近似し、組織表面に圧縮を与える前後のRF 1ラインについて、相互相関関数を用いて変位を計測し、これを空間微分することによって歪みに変換した。その後弾性率に変換するためには応力分布が必要であるが、この応力分布は、均質媒体の一樣応力場を仮定し、円形圧縮板の半径で決定される理論的な応力分布式を用いて、これらの比をとることにより、1次元の弾性率が求められている。

Sumi らの方法 [116, 117, 118]

Sumi らは、相対弾性率の推定法を提案している。Region-of-Interest (ROI) に平面応力状態を仮定し、力源が存在しないと仮定すると、相対弾性率の空間分布を未知数、歪みと

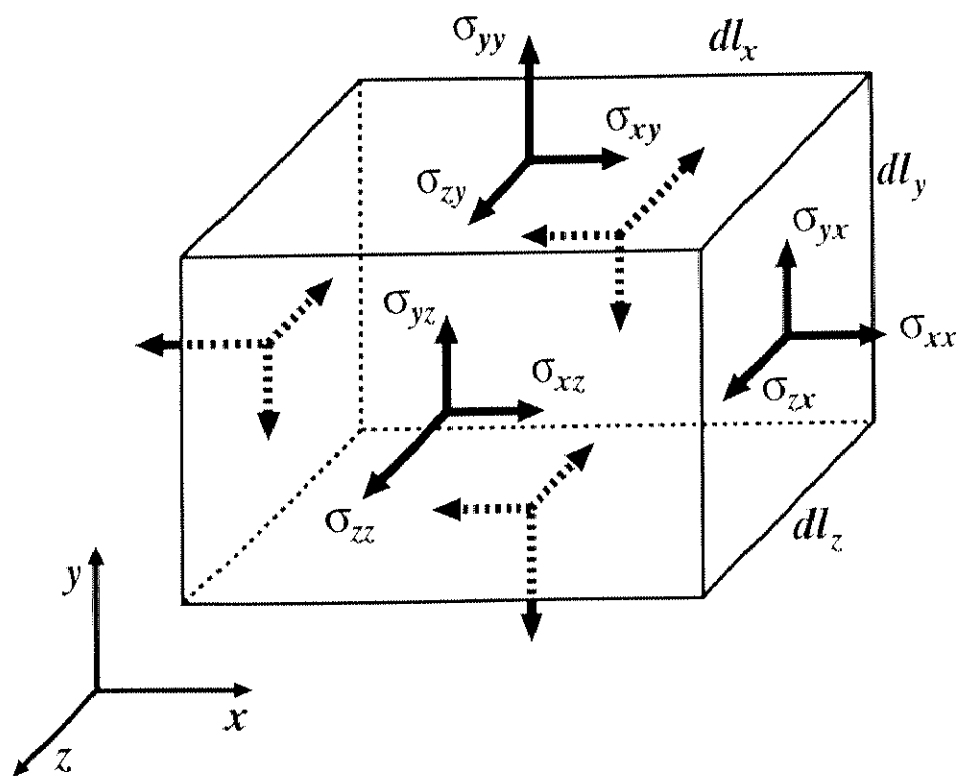


図 5.6: 微小体要素各面に働く応力

その空間微分を係数とした線形連立方程式を得る。この連立方程式を解くと、相対ずり弾性率の空間微分が求まり、これを空間的に積分すると、相対ずり弾性率が求まる。この再構成法は外力や応力データを用いずに、変形や歪みのみから生体組織の力学特性の空間分布の定量化を図ることができ、体表におけるずり弾性率が既知であれば、絶対値としてのずり弾性率分布を求めることができる。

O'Donnell らの方法 [119, 120, 121]

組織が完全に非圧縮であるとし、このとき応力歪み関係式には内部圧力項が現れるようになるが、これをつりあい式に代入して、2階微分によりこの圧力項を消去する。このようにすると、含まれる弾性率としては、ただ1つとなる。これに関して差分方程式を解き、弾性率を再構成しているが、付加すべき境界条件が多く、また高次微分項を含むために、変位計測の誤差が増幅され易いという欠点がある。また、変位-歪み関係が非線形となる場合の再構成法についても提案されている [121]。

Remano らの方法 [122]

Remano らは、3次元変位データを用いて、ラメの弾性定数と密度の比の空間分布を定量的に推定する手法について提案している。外力としては、低周波振動を与え、この振動がつりあいの式における体積力とみなして、ガウスの公式などを用いて定式化を行っている。提案手法はシミュレーションで評価されているが、解析対象となる物体のポアソン比は0.2程度としており、安定した結果が得られているが、生体のように非圧縮性に近い媒体に対して有効であるかは未知数である。

Raghavan らの方法 [123]

非圧縮状態を仮定し、弾性方程式から未知圧力項を消去せずに、未知数として加えて逆問題を解いている。これが可能となっているのは、有限差分式に基づいた再構成法だからである。すなわち、弾性率と圧力項の2変数が未知数として扱われる。これを解くには、2変数に関連した適切な境界条件を付加する必要がある。

山下らの方法 [124]

弾性率を再構成する手法自体は、Sumiらと同一であるが、変位計測をオプティカルフロー法で行っており、豚肉を用いた実験結果などが行われている。

Kallel らの方法 [125]

弾性率を求める逆問題を解くのに、有限要素法に基づいた線形摂動法を用いている。シミュレーションのみしか行われていない。再構成に用いている変位はビーム軸方向成分のみである。実際の応用を考慮すると、モデリングが困難かつ計算時間なども問題として挙げられる。また拘束条件や境界条件も問題であると思われる。

山川らの方法 [126]

ビーム軸方向の歪み成分のみを用いて、この歪みデータと3次元有限要素法により反復的に弾性率に再構成を行っている。まず、弾性率分布として一様分布を仮定し、この下で有限要素法により、応力分布の推定を行う。この応力分布の垂直成分と計測された軸方向歪みを用いて、弾性方程式により弾性率分布を更新する。その後再び更新された弾性率分布の下で有限要素法を実行して応力分布を求め、弾性率分布を更新する。このような反復演算を行い、弾性率分布の更新率が予め設定したしきい値以下となった段階で計算を打ち切り、そのときの弾性率分布が所望の分布であるとしている。弾性率を絶対値として求めるには、組織表面に加えた圧力分布を必要とする。

5.5 3次元弾性率分布再構成法の原理

本節では、本研究で提案する3次元弾性率再構成法について述べる。

超音波を用いて計測された変位ベクトルの分布から歪みテンソル成分の分布を求め、この分布に基づいて弾性定数分布を再構成することを考える。

再構成の対象となる生体組織は、線形弾性体であり、等方性を有すると仮定する。また、本手法では、再構成すべき弾性定数（弾性率）として、ヤング率 E とポアソン比 ν を考える。この場合、先に導いたように、応力 - 歪みの関係を表す構成方程式は、式 (5.12) のような形となる。式 (5.12) の中の $E/(1+\nu)$ は、ラメの定数 μ を用いて表すと $2\mu = E/(1+\nu)$ となることからこれで置き換え、また $l = \nu/(1-2\nu)$ とおいて成分ごとに書き下すと

$$\sigma_{xx} = 2\mu\{l\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{xx}\} \quad (5.29a)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\{l\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{yy}\} \quad (5.29b)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\{l\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{zz}\} \quad (5.29c)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \quad (5.29d)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} \quad (5.29e)$$

$$\sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx} \quad (5.29f)$$

なお、ラメの定数 μ は必ず弾性率 G と等しい。また、 $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ である。応力テンソルは対称テンソルであり、 $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ 、 $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ 、 $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$ となることから、この分の表記は省略した。この式の中で、歪みテンソル ε_{ij} は計測された変位ベクトルより式 (5.3) を用いて得ることができる。これを成分ごとに書き下すと

$$\varepsilon_{xx} = u_{x,x} \quad (5.30a)$$

$$\varepsilon_{yy} = u_{y,y} \quad (5.30b)$$

$$\varepsilon_{zz} = u_{z,z} \quad (5.30c)$$

$$\varepsilon_{xy} = (u_{x,y} + u_{y,x})/2 \quad (5.30d)$$

$$\varepsilon_{yz} = (u_{y,z} + u_{z,y})/2 \quad (5.30e)$$

$$\varepsilon_{zx} = (u_{z,x} + u_{x,z})/2 \quad (5.30f)$$

ここで、各項の添字、 x 、 y 、 z は、 $\partial/\partial x$ 、 $\partial/\partial y$ 、 $\partial/\partial z$ を意味する。例えば、 $u_{x,y} = \partial u_x/\partial y$ である。歪みテンソルも応力テンソルと同様対称テンソルであり、 $\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy}$ 、 $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ 、 $\varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz}$ となることから、この分の表記は省略している。従って応力テンソル σ_{ij} が既知であればヤング率とポアソン比を求めることが可能であるが、一般に外力に応じて発生した応力分布を求めることは非常に難しい。そのため、式 (5.28a)~式 (5.28c) のつりあいの式に基づいて再構成の定式化を行うことを考える。

式 (5.28a)~式 (5.28c) に、式 (5.29a)~式 (5.29f) を代入して変形すると、次のような式を得る。

$$\begin{pmatrix} l\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & l\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & l\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{,x}/\mu \\ \mu_{,y}/\mu \\ \mu_{,z}/\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (l\varepsilon_{kk})_{,x} + \varepsilon_{xx,x} + \varepsilon_{xy,y} + \varepsilon_{xz,z} \\ (l\varepsilon_{kk})_{,y} + \varepsilon_{yx,x} + \varepsilon_{yy,y} + \varepsilon_{yz,z} \\ (l\varepsilon_{kk})_{,z} + \varepsilon_{zx,x} + \varepsilon_{zy,y} + \varepsilon_{zz,z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x/2 \\ f_y/2 \\ f_z/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

ここで、体積力ベクトル (f_x, f_y, f_z) を無視すると、含まれる未知変量は l 、 μ となる。 l が空間的に一様な分布であることを仮定すると、式 (5.31) は、 $(\mu_{,x}/\mu, \mu_{,y}/\mu, \mu_{,z}/\mu)$ を未知ベクトルとした 3 元連立 1 次方程式として扱うことができる。 l が一様であるとは、ポアソン比 ν が一様であることを意味し、この場合 $(\mu_{,x}/\mu, \mu_{,y}/\mu, \mu_{,z}/\mu) = (E_{,x}/E, E_{,y}/E, E_{,z}/E)$ となるので、ヤング率 E を求めることと等しくなる。以上のことから解くべき方程式は以下のようなものになる。

$$\begin{pmatrix} l\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & l\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & l\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{,x}/E \\ E_{,y}/E \\ E_{,z}/E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l\varepsilon_{kk,x} + \varepsilon_{xx,x} + \varepsilon_{xy,y} + \varepsilon_{xz,z} \\ l\varepsilon_{kk,y} + \varepsilon_{yx,x} + \varepsilon_{yy,y} + \varepsilon_{yz,z} \\ l\varepsilon_{kk,z} + \varepsilon_{zx,x} + \varepsilon_{zy,y} + \varepsilon_{zz,z} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

ここでは、 l は定数、すなわちポアソン比 ν を定数として扱うことになるのである値を与える必要があるが、 ν のとり得る値の範囲としては $0 \leq \nu \leq 0.5$ であることは良く知られており、生体組織は $\nu \cong 0.5$ として扱う場合が多い。 $0 \leq \nu < 0.5$ のときは圧縮性、 $\nu = 0.5$ のときは非圧縮性と呼ばれるが、非圧縮性の場合 $l \rightarrow \infty$ となって式 (5.32) は解けなくなるため、 ν としては 0.5 に近い値を空間内における定数として採用することにする。

上の連立方程式を 3次元の全空間点について解いた後、 $E_{,x}/E = (\log E)_{,x}$ などであることを用いて x 、 y 、 z 各軸方向にこれらを積分すると

$$\int_{x_0}^x \{\log E(x', y, z)\}_{,x} dx' = \log E(x, y, z) - \log E(x_0, y, z) \quad (5.33a)$$

$$\int_{y_0}^y \{\log E(x, y', z)\}_{,y} dy' = \log E(x, y, z) - \log E(x, y_0, z) \quad (5.33b)$$

$$\int_{z_0}^z \{\log E(x, y, z')\}_{,z} dz' = \log E(x, y, z) - \log E(x, y, z_0) \quad (5.33c)$$

従って、ヤング率分布は次のように求められることになる。

$$\frac{E(x, y, z)}{E(x_0, y, z)} = \exp \left\{ \int_{x_0}^x \{ \log E(x', y, z) \}_{,x} dx' \right\} \quad (5.34a)$$

$$\frac{E(x, y, z)}{E(x, y_0, z)} = \exp \left\{ \int_{y_0}^y \{ \log E(x, y', z) \}_{,y} dy' \right\} \quad (5.34b)$$

$$\frac{E(x, y, z)}{E(x, y, z_0)} = \exp \left\{ \int_{z_0}^z \{ \log E(x, y, z') \}_{,z} dz' \right\} \quad (5.34c)$$

上式は、各軸の積分開始点でのヤング率に対して相対的な任意の空間点でのヤング率が求められることを示しており、開始点でのヤング率が既知ならば、ヤング率空間分布の絶対値が求められることを意味している。

この様子を示したものが図 5.7 である。再構成プロセスをまとめると、3次元空間内の各点で、4章 4.4 節の手法により計測された変位ベクトル (u_x, u_y, u_z) 分布から式 (5.30a)~式 (5.30f) を用いて歪みテンソル成分の分布を求め、これを基に式 (5.32) を解いてその解を積分することによりヤング率分布が得られる。

各軸の積分開始点におけるヤング率値 $E(x_0, y, z)$ 、 $E(x, y_0, z)$ 、 $E(x, y, z_0)$ が全て等しい場合、図 5.7 の空間点 (x, y, z) におけるヤング率値は積分方向に依らず、同一の値として再構成されなければならない。しかし後のシミュレーションでも示すように、外力が加わる軸方向で求めた値とそれ以外の方向で求めた値は異なるものとなり、外力が加わる軸方向で積分して再構成した方が正しい分布をして求められる。このことは、文献 [116] でも指摘されている。従って、実際の再構成の際には、外力が加わる 1 方向のみの積分が良い。

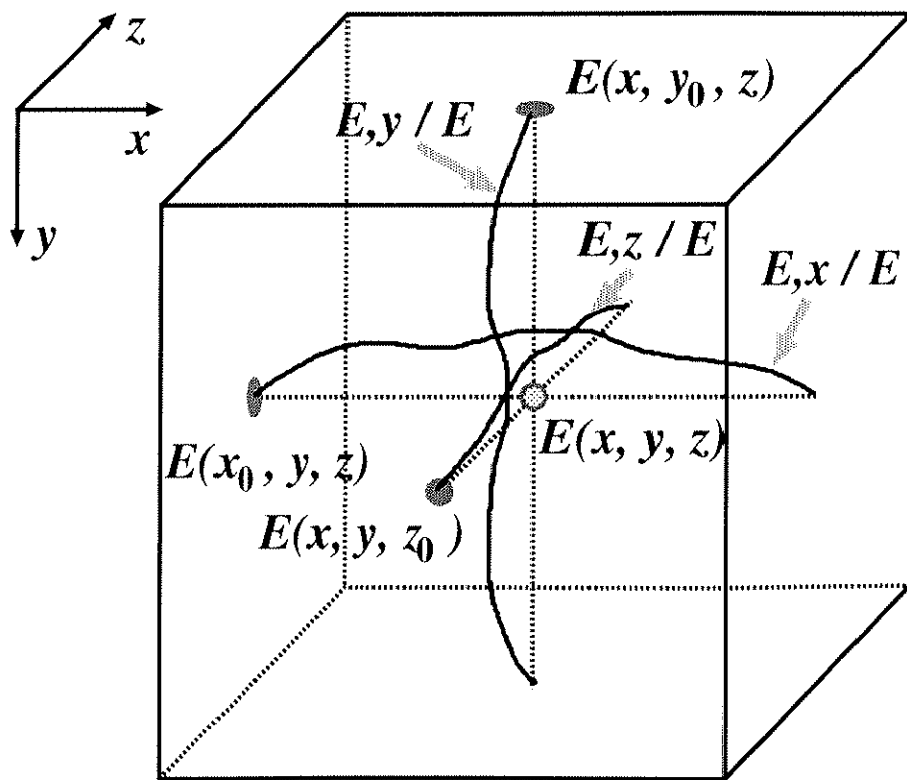


図 5.7: ヤング率 3次元分布の再構成