

## 第 5 章

# M/G/1 ランダム順サービスシステムの待ち時間分布の高次モーメントの解析

---

ここから先の第 5 章と第 6 章では、待ち行列システムにおける客の待ち時間の高次モーメントについての解析を示す。

本章では、ランダム順サービスによる M/G/1 待ち行列システムの待ち時間分布の高次モーメントを *Mathematica* により求めた。高次モーメントはその分布の特徴をつかむ上で重要である。本章では特に、4 次モーメントまでを用いて表される統計的指標として、2 乗変動係数、歪度、及び尖度に注目し、サービス規律によるそれらの比較を行った。

### 5.1 モデルと定式化

バッファが無限の容量をもつ、M/G/1 待ち行列システムを考える。客は率  $\lambda$  の Poisson 過程で到着し、サービス時間分布は分布関数の LST が  $B^*(s)$ 、平均が  $b$ 、 $n$  次モーメントが  $b^{(n)}$  で表される一般の分布に従っている。サービスの規律はランダム順サービス (random order of service: ROS) とする。ランダム順サービスとは、サービス終了時に存在するすべての客の中から等確率で次にサービスする客を選ぶサービス規律である。トラヒック強度は  $\rho = \lambda b$  で与えられ、システムを安定に保つために  $\rho < 1$  の関係を仮定する。

任意の客の待ち時間  $W$  は到着してからサービスが始まるまでの時間とする。待ち時間  $W$  の平均と 2 次モーメントは、既に次のように与えられている。

$$E[W] = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} \quad (5.1)$$

$$E[W^2] = \frac{2\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)(2-\rho)} + \frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{(1-\rho)^2(2-\rho)} \quad (5.2)$$

Kingman [42] ([18, 77, 81] も参照) によると、待ち時間  $W$  の分布関数の LST は  $s >$

$\inf[B^*(x) + x/\lambda - 1]$  に対して,

$$W^*(s) = 1 - \rho + \frac{\lambda(1-\rho)}{s} \int_{\Theta^*(s)}^1 \frac{(1-z)[B^*(\lambda - \lambda z) - B^*(s + \lambda - \lambda z)]}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} dK(z, s) \quad (5.3)$$

と与えられる. ここで  $K(z, s)$  は

$$K(z, s) := \exp \left[ - \int_z^1 \frac{du}{u - B^*(s + \lambda - \lambda u)} \right] \quad (5.4)$$

であり, 稼働期間の長さの分布関数の LST  $\Theta^*(s)$  は方程式

$$\Theta^*(s) = B^*[s + \lambda - \lambda\Theta^*(s)]$$

の一意解である.  $E[W^n]$  の計算方法は原理的には簡単で式 (5.3) の  $W^*(s)$  の  $s$  の冪の係数として与えられる.

この方法は Conolly [19] によるものであるが, 式 (5.1) – 式 (5.2) で与えられているように 2 次モーメントまでしか求められていない. 本研究では, *Mathematica* を用いてこの方法で高次モーメントの計算を行った.

## 5.2 Conolly の方法による *Mathematica* のプログラム

図 5.1 に示したプログラムで  $W^*(s)$  の  $s$  の冪の係数から待ち時間の高次モーメントを計算することができる. まず式 (5.3) の積分部分を書き直す.

$$\begin{aligned} \Psi^*(s) &:= \int_{\Theta^*(s)}^1 \frac{(1-z)[B^*(\lambda - \lambda z) - B^*(s + \lambda - \lambda z)]}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} dK(z, s) \\ &= \int_{\Theta^*(s)}^1 K(z, s) \left[ 1 + \frac{1-z}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} \right] dz \end{aligned} \quad (5.5)$$

プログラムの最初の部分は初期設定で, Takács [77] の方法で稼働期間  $\Theta$  の  $n$  次モーメントを明示的に計算している.  $\Theta$  の明示的な結果は Takagi ら [82] に掲載されている.

第 2 段落は式 (5.5) の大括弧で囲まれた数式を  $(1-z)$  の冪に展開している.

$$1 + \frac{1-z}{B^*(\lambda - \lambda z) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n (1-z)^n \quad (5.6)$$

$\{r_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$  が  $g3[n]$  に格納される. ここで  $y = (1-z)/(1 - \Theta^*(s))$  と変数変換すると

$$\begin{aligned} z &= 1 - y(1 - \Theta^*(s)) \\ 1 - u &= \lambda y v (1 - \Theta^*(s)) \\ du &= -y(1 - \Theta^*(s)) dv \end{aligned}$$

となり、式 (5.6) は  $s$  の冪級数に展開される。この係数は  $y$  についての多項式であり、`g6[n]` に格納されている。よって式 (5.5) は、

$$\Psi^*(s) = \int_0^1 K[1 - y(1 - \Theta^*(s)), s] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} r_n y^n (1 - \Theta^*(s))^{n+1} \right] dy \quad (5.7)$$

と書くことができる。

第 3 段落目は  $K[1 - y(1 - \Theta^*(s)), s]$  を  $s = 0$  まわりで冪級数展開した部分である。式 (5.4) の対数を取ることによって得られた式

$$-\log K[1 - y(1 - \Theta^*(s)), s] = \int_{[1-y(1-\Theta^*(s))]}^1 \frac{du}{u - B^*(s + \lambda - \lambda u)} \quad (5.8)$$

において、

$$v = \frac{1 - u}{y(1 - \Theta^*(s))}$$

と変数変換する。このとき

$$\begin{aligned} u &= 1 - yv(1 - \Theta^*(s)) \\ 1 - u &= \lambda yv(1 - \Theta^*(s)) \\ du &= -y(1 - \Theta^*(s)) dv \end{aligned}$$

と書けるので、式 (5.8) は

$$-\log K[1 - y(1 - \Theta^*(s)), s] = y(1 - \Theta^*(s)) \int_0^1 \frac{dv}{\Delta}$$

と書ける。ここで

$$\Delta := 1 - yv(1 - \Theta^*(s)) - B^*[s + \lambda yv(1 - \Theta^*(s))]$$

である。次に、 $s = 0$  のまわりで  $\Delta$  を冪級数展開する。 $s \rightarrow 0$  のとき、 $1 - \Theta^*(s) \rightarrow 0$  となるので、 $w := yv(1 - \Theta^*(s))$  と変数変換すると、 $B^*(s + \lambda w)$  は

$$\begin{aligned} B^*(s + \lambda w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{*(n)}(0)}{n!} (s + \lambda w)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{(n)}}{n!} (s + \lambda w)^n \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\Delta = -w - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{(n)}}{n!} (s + \lambda w)^n$$

が得られる. 更に,  $\mathbf{f3}[\mathbf{n}]$  に  $(s + \lambda w)^n$  を展開したものが格納されている. 以上より  $\Delta$  の  $s$  による冪級数展開が得られ, その係数は  $\mathbf{f6}[\mathbf{n}]$  に入っている. これより,  $\Delta^{-1}$  も  $s$  によって展開することができ, その係数を  $\mathbf{f8}[\mathbf{n}]$  に格納される. このようにして,  $K[1 - y(1 - \Theta^*(s)), s]$  は

$$\begin{aligned} & K[1 - y(1 - \Theta^*(s)), s] \\ &= \exp \left[ - (1 - \Theta^*(s)) y \int_0^1 \frac{dv}{\Delta} \right] \\ &= \exp \left[ - \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E[\Theta^m]}{m!} (-s)^m \right\} \left( \frac{-1}{bs} \right) \left\{ \log[1 - y] + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(y) s^n \right\} \right] \\ &= (1 - y)^{E[\Theta]/b} \sum_{n=0}^{\infty} k_n(y) s^n \end{aligned} \quad (5.9)$$

と計算することができる. ここで,  $\Delta_n(y)$  は  $\mathbf{f11}[\mathbf{n}]$  に,  $k_n(y)$  は  $\mathbf{f16}[\mathbf{n}]$  にそれぞれ格納されている. 一般に  $E[\Theta] = 1/(1 - \rho)$  は整数ではないが,  $k_n(y)$  は  $y$  と  $\log(1 - y)$  の多項式になっていることに注意する. このプログラムにおいて,  $1 - \Theta^*(s)$  に対して  $\mathbf{g4}[\mathbf{n}]$  を用いている.

式 (5.9) を式 (5.7) に代入することによって,

$$\begin{aligned} \Psi^*(s) &= \int_0^1 (1 - y)^{1/(1-\rho)} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} k_n(y) s^n \right] \left[ \sum_{n=0}^{\infty} r_n y^n (1 - \Theta^*(s))^{n+1} \right] dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n s^n \end{aligned} \quad (5.10)$$

と冪級数展開することができる. しかし, *Mathematica* では

$$\int_0^1 (1 - y)^a y^m (\log[1 - y])^n dy = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{k+n} \frac{n!}{(1 + a + k)^{n+1}}$$

の計算を明示的に行うことはできないため, 本来の `Integrate` コマンドの機能を無効にして, 新しく `integrate` コマンドを作って計算した. 式 (5.10) の  $\psi_n$  が第5段落の  $\mathbf{h1}[\mathbf{n}]$  に格納され,

$$W^*(s) = (1 - \rho) \left\{ 1 + \frac{\lambda}{s} \Psi^*(s) \right\}$$

から  $E[W^n]$  を計算することができる.  $n$  次モーメント  $E[W^n]$  は  $\mathbf{h2}[\mathbf{n}]$  に蓄えられ, それを  $\text{\LaTeX}$  形式にしたものが  $\mathbf{h3}[\mathbf{n}]$  に出力される.

### 5.3 他のサービス規律との比較

図 5.1 の *Mathematica* のプログラムによって M/G/1 ランダム順サービスシステムの待ち時間分布の3次と4次のモーメントは次のように計算することができる.

$$\begin{aligned}
E[W^3] &= \frac{\lambda b^{(4)}(6 - \rho + \rho^2)}{4(1 - \rho)(2 - \rho)(3 - 2\rho)} + \frac{3[\lambda b^{(2)}](18 - 15\rho + 4\rho^2 - \rho^3)}{4(1 - \rho)^3(2 - \rho)^2(3 - 2\rho)} \\
&\quad + \frac{\lambda^2 b^{(2)} b^{(3)}(30 - 23\rho + 7\rho^2 - 2\rho^3)}{2(1 - \rho)^2(2 - \rho)^2(3 - 2\rho)} \\
E[W^4] &= \frac{2\lambda b^{(5)}(12 - 5\rho + 5\rho^2)}{5(1 - \rho)(2 - \rho)(3 - 2\rho)(4 - 3\rho)} \\
&\quad + \frac{3[\lambda b^{(2)}]^4(90 - 135\rho + 76\rho^2 - 23\rho^3 + 4\rho^4)}{(1 - \rho)^4(2 - \rho)^3(3 - 2\rho)^2} \\
&\quad + \frac{2\lambda^3 b^{(2)^2} b^{(3)}(864 - 1896\rho + 1668\rho^2 - 799\rho^3 + 233\rho^4 - 34\rho^5)}{(1 - \rho)^3(2 - \rho)^3(3 - 2\rho)^2(4 - 3\rho)} \\
&\quad + \frac{4[\lambda b^{(3)}]^2(12 - 13\rho + 7\rho^2 - 2\rho^3)}{(1 - \rho)^2(2 - \rho)^2(3 - 2\rho)(4 - 3\rho)} \\
&\quad + \frac{\lambda^2 b^{(2)} b^{(4)}(216 - 342\rho + 219\rho^2 - 89\rho^3 + 20\rho^4)}{(1 - \rho)^2(2 - \rho)^2(3 - 2\rho)^2(4 - 3\rho)}
\end{aligned}$$

5 次と 6 次のモーメントは図 5.2 に示す [83].

上の結果を用いて, 同じパラメタをもつ 3 つのサービス規律, つまり, 先着順サービス, 後着順サービス, 及びランダム順サービスの待ち時間分布の 2 乗変動係数 (s.e.v.), 歪度 (skewness), 尖度 (kurtosis) を比較する. これらの指標は分布を特徴づけるものである. 文献 [77, 82, 84] により, 先着順サービスと後着順サービスの 2-4 次モーメントは

$$\begin{aligned}
E[W^2]_{\text{FCFS}} &= \frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1 - \rho)^2} + \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1 - \rho)} \\
E[W^3]_{\text{FCFS}} &= \frac{3[\lambda b^{(2)}]^3}{4(1 - \rho)^3} + \frac{\lambda^2 b^{(2)} b^{(3)}}{(1 - \rho)^2} + \frac{\lambda b^{(4)}}{4(1 - \rho)} \\
E[W^4]_{\text{FCFS}} &= \frac{3[\lambda b^{(2)}]^4}{2(1 - \rho)^4} + \frac{3\lambda^3 b^{(2)^2} b^{(3)}}{(1 - \rho)^3} + \frac{2[\lambda b^{(3)}]^2}{3(1 - \rho)^2} + \frac{\lambda^2 b^{(2)} b^{(4)}}{(1 - \rho)^2} + \frac{\lambda b^{(5)}}{5(1 - \rho)} \\
E[W^2]_{\text{LCFS}} &= \frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1 - \rho)^3} + \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1 - \rho)^2} \\
E[W^3]_{\text{LCFS}} &= \frac{3[\lambda b^{(2)}]^3}{2(1 - \rho)^5} + \frac{3\lambda^2 b^{(2)} b^{(3)}}{2(1 - \rho)^4} + \frac{\lambda b^{(4)}}{4(1 - \rho)^3} \\
E[W^4]_{\text{LCFS}} &= \frac{15[\lambda b^{(2)}]^4}{2(1 - \rho)^7} + \frac{10\lambda^3 b^{(2)^2} b^{(3)}}{(1 - \rho)^6} + \frac{4[\lambda b^{(3)}]^2}{3(1 - \rho)^5} + \frac{2\lambda^2 b^{(2)} b^{(4)}}{(1 - \rho)^5} + \frac{\lambda b^{(5)}}{5(1 - \rho)^4}
\end{aligned}$$

で与えられる。各指標は

$$\begin{aligned} \text{2乗変動係数} &= \frac{\text{var}[W]}{(E[W])^2} \\ \text{歪度} &= \frac{E[(W - E[W])^3]}{(\text{var}[W])^{3/2}} \\ \text{尖度} &= \frac{E[(W - E[W])^4]}{(\text{var}[W])^2} \end{aligned}$$

で計算される。ここで  $\text{var}[W] = E[(W - E[W])^2] = E[W^2] - (E[W])^2$  である。

サービス時間分布が一定時間分布の場合、その LST は  $B^*(s) = e^{-s}$  と与えられるので、到着率  $\lambda$  をパラメタとして各サービス規律の 2 乗変動係数、歪度、尖度を計算し、グラフに示したものが図 5.3(a)、図 5.4(a)、図 5.5(a) である。同様にサービス時間分布が平均 1 の指数分布に従う場合、LST は  $B^*(s) = 1/(1+s)$  であり、そのときの 2 乗変動係数、歪度、尖度は図 5.3(b)、図 5.4(b)、図 5.5(b) に示す。図 5.3 - 図 5.5 から次のことが見てとれる。

1.  $\lambda \rightarrow 0$  のとき、2 乗変動係数、歪度、尖度の値は発散する。
2.  $\lambda \rightarrow 1$  のとき、先着順サービスとランダム順サービスにおいては各指標はある値に収束する。
3.  $\lambda \rightarrow 1$  のとき、後着順サービスにおいては各指標は発散する。
4. ランダム順サービスシステムの曲線は先着順サービスと後着順サービスの間に挟まれている。

Erlang 分布や超指数分布についても 2 乗変動係数の値を  $1/10 - 1000$  まで変動させることによって 4. と同様のことが起こることを確認した。各サービス規律の平均サービス時間は等しく、分散に関して不等式  $\text{var}[W]_{\text{FCFS}} < \text{var}[W]_{\text{ROS}} < \text{var}[W]_{\text{LCFS}}$  が成り立っているので、2 乗変動係数についてはランダム順サービスが先着順サービスと後着順サービスの間にあることを証明できる。ここでは、歪度と尖度に関しては解析的な証明を与えていない。

$\lambda \rightarrow 0$  の極限では、システム内にはほとんど客が存在せず到着した客はすぐにサービスされる。そのためにサービスの順番には、ほとんど差が生じない。3 つのシステムにおける  $n$  次モーメントで  $\lambda \rightarrow 0$  のときに最も影響を与える項は

$$E[W^n] = \frac{\lambda b^{(n+1)}}{n+1} + O(\lambda^2) \quad n = 1, 2, \dots$$

である。一定時間サービスでは  $E[W^n] \approx \lambda/(n+1)$  となるので、

$$\text{2乗変動係数} = \frac{4}{3\lambda} + O(1), \quad \text{歪度} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{\lambda}} + O(\sqrt{\lambda}), \quad \text{尖度} = \frac{9}{5\lambda} + O(1)$$

となり、指数時間サービスでは  $E[W^n] \approx \lambda n!$  となるので

$$\text{2乗変動係数} = \frac{2}{\lambda} + O(1), \quad \text{歪度} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2\lambda}} + O(\sqrt{\lambda}), \quad \text{尖度} = \frac{6}{\lambda} + O(1)$$

となる. これらのことから  $\lambda \rightarrow 0$  のときは発散することが分かる.

$\rho \rightarrow 1$  (過負荷) のとき, FCFS システムでは

$$E[W^n] \approx n!(E[W])^n$$

と近似できる. ここで,  $E[W] = \lambda b^{(2)}/[2(1-\rho)]$  である. これは過負荷の場合の流体近似の結果から予測できる. この極限において, 待ち時間分布は指数分布をもつ [43].

$$P\{W \leq x\} \approx 1 - e^{-x/E[W]} \quad x \geq 0$$

よって,

$$2 \text{ 乗変動係数} \approx \frac{\frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^2} - \left(\frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}\right)^2}{\left(\frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}\right)^2} = 1$$

となる. この結果は, 2 乗変動係数はサービス時間分布に依存しないことを意味している. 同様に,

$$\text{歪度} = 2, \quad \text{尖度} = 9$$

となる. これらの指標の値は指数分布の値と同じである. これはサービス時間分布に依存せず, よって M/M/1 待ち行列システムの場合に一致するからである. 先着順サービスの M/M/1 待ち行列システムの正確な待ち時間分布は次のように書ける. システム内に客がいない確率が  $1-\rho$  でこのときは待ち時間は 0 である. システム内に少なくとも 1 人客がいる確率は  $\rho$  で, このとき, 到着した客の待ち時間は平均  $1/(\mu-\lambda)$  の指数分布に従う. よって, 待ち時間分布はこの和で表される.

$$P\{W \leq x\} = 1 - \rho + \rho[1 - e^{-(\mu-\lambda)x}] = 1 - \rho e^{-(\mu-\lambda)x} \quad x \geq 0$$

ここで,  $1/\mu$  が平均サービス時間であるから  $\rho = \lambda/\mu$  となる. これより,

$$E[W^n]_{\text{FCFS, M/M/1}} = \frac{n! \rho}{\mu^n (1-\rho)^n} \quad n = 1, 2, \dots$$

後着順サービスでは, 待ち時間のモーメントに影響を与える項は

$$E[W^n]_{\text{LCFS}} \approx \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(E[W])^n}{(1-\rho)^{n-1}} \quad n = 2, 3, \dots$$

と書ける. 故に, 図 5.3 - 図 5.5 で示したように

$$2 \text{ 乗変動係数} \approx \frac{2}{1-\rho} \quad \text{歪度} \approx \frac{3\sqrt{2}}{(1-\rho)^{1/2}} \quad \text{尖度} \approx \frac{30}{1-\rho}$$

86 第5章 M/G/1 ランダム順サービスシステムの待ち時間分布の高次モーメントの解析

となるので発散することが分かる.

ランダム順サービス [42] ではモーメントに影響を与える項は

$$E[W^n] \approx (n!)^2 (E[W])^n \quad n = 2, 3, \dots$$

である. 故に,

$$2 \text{ 乗変動係数} = 3 \quad \text{歪度} = \frac{26}{3\sqrt{3}} \quad \text{尖度} = \frac{151}{3}$$

となる. ランダム順サービスの場合もサービス時間分布には依存しない.



---

```

$RecursionLimit = 16384
e =.
w =.
e = 5 (*dimension of n th moment*)
B[0] = 1
B'[0] = -b
Derivative[n_][B][0]=Derivative[n][b] * (-1)^n
f1[n_] = (s/(s -lambda +lambda B[s]))^n
busy[1] = b/(1-lambda b)
busy[n_]:=Expand[(-1)^(n-1)/lambda * (n-1)! *
                Coefficient[Series[f1[n],{s,0,n-1}],s^(n-1)]]

g1[z] = Normal[Series[B[lambda - lambda z],{z,1,e+1}]]
g2[z] = 1 + (1 - z) / (g1[z] - z)
g3[n_] := Apart[Coefficient[
                Normal[Series[(-1)^n * g2[z],{z,1,e+1}]],(-1+z),n],b]
g4[n_] := Sum[s^i * (-1)^(i+1) * busy[i] /i!,{i,1,n}]
g5[n_] := Normal[Series[(g4[e+1])^n,{s,0,e+1}]]
g6[n_] := Cancel[Collect[
                Expand[Sum[g5[i] * g3[i-1] * y^(i-1),{i,1,n}]],s]]

f2[n_] := Normal[Series[(s+lambda w)^n,{s,0,e+1}]]
w= g4[e+1] * v * y
f3[n_] := Collect[Expand[f2[n]],s]
f4[s] = Collect[Sum[Derivative[i][B][0] * f3[i] /i!,{i,0,e+1}],s]
f5[s,v] = 1- w - f4[s]
f6[n_] := Cancel[Factor[
                Coefficient[Cancel[f5[s,v]/ (b s)],s,n]] / (1- y v)]
f7[s,v] = Sum[f6[i] * (-1)^i * s^i,{i,0,e+1}]
f8[n_] := Factor[Coefficient[Normal[Series[1/f7[s,v],{s,0,e}]],s,n]]
f9[s,v] = Collect[Sum[f8[i] * (-1)^i * s^i,{i,0,e}],{v,y}]
f10[s] = Collect[- Integrate[f9[s,v]/(1- v y),{v,0,1}],s]

```

```

f11[n_] := Cancel[Factor[Coefficient[f10[s],s,n]]]
f12[s] = Sum[f11[i] * s^i,{i,0,e}]
f13[s] = Collect[Cancel[Expand[f12[s] * y * g4[e+1]/(b s) ]],s]
f14[n_] := Cancel[Factor[Coefficient[f13[s],s,n]]]
f15[n_] := Sum[f14[i] * s^i ,{i,1,n}]
f16[n_] := Cancel[Factor[
    Coefficient[Normal[Series[Exp[f15[e]],{s,0,e}]],s,n]]]
f17[s] = Sum[f16[i] * s^i ,{i,0,e}]
Unprotect[Integrate]
integrate[u_ + t_ ,y_] := integrate[u,y] + integrate[t,y]
integrate[c_ u_ ,y_] := c integrate[u,y] /; FreeQ[c,y]
integrate[y_^m_. (Log[1-y_])^n_.,y_]
    := Sum[Binomial[m,k] * (-1)^k *
        (-1+a+k)^(-n) * n! * (1+a+k)^(-1),{k,0,m}]
integrate[(Log[1-y_])^n_.,y_] := (-1)^n * (1+a)^(-n-1) * n!
integrate[y_^m_.,y_] := m! * Product[(a+i)^(-1),{i,1,m+1}]
integrate[c_,y_] := c * (1+a)^(-1) /; FreeQ[c,y]
a = 1/(1 - b lambda)

h1[n_] := Cancel[Factor[integrate[Cancel[Factor[Coefficient[f17[s] *
    g6[e+1],s,n]]],y]]]
h2[n_] := Apart[Cancel[(-1)^n * n! * (1- lambda b) * lambda h1[n+1]]]
h3[n_] := Do[TeXForm[h2[i] >>> conc.tex,{i,0,n}]
h4[n_] := Do[h2[i] >>> conc,{i,0,n}]
Integrate =.
Protect[Integrate]

```

---

図 5.1: *Mathematica* による M/G/1 ランダム順サービスシステムの待ち時間分布の高次モーメントの計算プログラム.

$$\begin{aligned}
E[W^5] &= \frac{\lambda b^{(6)}(120 - 86\rho + 97\rho^2 - 19\rho^3 + 8\rho^4)}{6(1-\rho)(2-\rho)(3-2\rho)(4-3\rho)(5-4\rho)} \\
&+ \frac{15[\lambda b^{(2)}]^5(4032 - 11688\rho + 14302\rho^2 - 9945\rho^3 + 4545\rho^4 - 1475\rho^5 + 333\rho^6 - 48\rho^7 + 4\rho^8)}{2(1-\rho)^5(2-\rho)^4(3-2\rho)^3(4-3\rho)} \\
&+ \frac{5\lambda^4 b^{(2)^3} b^{(3)}}{2(1-\rho)^4(2-\rho)^4(3-2\rho)^3(4-3\rho)^2(5-4\rho)} \left( 498240 - 2183712\rho + 4208116\rho^2 - 4744636\rho^3 \right. \\
&\left. + 3531819\rho^4 - 1860877\rho^5 + 719917\rho^6 - 204359\rho^7 + 41008\rho^8 - 5420\rho^9 + 384\rho^{10} \right) \\
&+ \frac{5\lambda^3 b^{(2)^2} b^{(3)^2}}{3(1-\rho)^3(2-\rho)^3(3-2\rho)^2(4-3\rho)^2(5-4\rho)} \left( 44640 - 142752\rho + 197582\rho^2 - 160485\rho^3 \right. \\
&\left. + 87173\rho^4 - 33021\rho^5 + 8537\rho^6 - 1458\rho^7 + 144\rho^8 \right) \\
&+ \frac{\lambda^3 b^{(2)^2} b^{(4)}}{2(1-\rho)^3(2-\rho)^3(3-2\rho)^3(4-3\rho)^2(5-4\rho)} \left( 69120 - 261216\rho + 430896\rho^2 - 418578\rho^3 \right. \\
&\left. + 274679\rho^4 - 130517\rho^5 + 45028\rho^6 - 10768\rho^7 + 1680\rho^8 - 144\rho^9 \right) \\
&+ \frac{5\lambda^2 b^{(3)} b^{(4)}(2520 - 4926\rho + 4453\rho^2 - 2540\rho^3 + 903\rho^4 - 202\rho^5 + 32\rho^6)}{6(1-\rho)^2(2-\rho)^2(3-2\rho)^2(4-3\rho)(5-4\rho)} \\
&+ \frac{\lambda^2 b^{(2)} b^{(5)}(10080 - 25344\rho + 28414\rho^2 - 20727\rho^3 + 10773\rho^4 - 3600\rho^5 + 740\rho^6 - 96\rho^7)}{2(1-\rho)^2(2-\rho)^2(3-2\rho)^2(4-3\rho)^2(-5+4\rho)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[W^6] &= \frac{2\lambda b^{(7)}(360 - 378\rho + 497\rho^2 - 210\rho^3 + 91\rho^4)}{7(1-\rho)(2-\rho)(3-2\rho)(4-3\rho)(5-4\rho)(6-5\rho)} \\
&+ \frac{90[\lambda b^{(2)}]^6}{(1-\rho)^6(2-\rho)^5(3-2\rho)^4(4-3\rho)^2} \left( 48672 - 206688\rho + 389114\rho^2 - 433067\rho^3 \right. \\
&\left. + 322236\rho^4 - 172099\rho^5 + 68371\rho^6 - 20094\rho^7 + 4157\rho^8 - 548\rho^9 + 36\rho^{10} \right) \\
&+ \frac{15\lambda^5 b^{(2)^4} b^{(3)}}{(1-\rho)^5(2-\rho)^5(3-2\rho)^4(4-3\rho)^3(5-4\rho)^2(6-5\rho)} \left( 440294400 - 3240829440\rho \right. \\
&\left. + 10966193856\rho^2 - 22675140256\rho^3 + 32153957512\rho^4 - 33293853196\rho^5 + 26178876994\rho^6 \right. \\
&\left. - 16029385309\rho^7 + 7746765097\rho^8 - 2957836689\rho^9 + 880179597\rho^{10} - 197896410\rho^{11} \right. \\
&\left. + 31786788\rho^{12} - 3275592\rho^{13} + 164448\rho^{14} \right) \\
&+ \frac{10[\lambda^2 b^{(2)} b^{(3)}]^2}{(1-\rho)^4(2-\rho)^4(3-2\rho)^3(4-3\rho)^3(5-4\rho)^2(6-5\rho)} \left( 62035200 - 382230720\rho \right. \\
&\left. + 1072369968\rho^2 - 1825112436\rho^3 + 2121168028\rho^4 - 1796703705\rho^5 + 1151947527\rho^6 \right. \\
&\left. - 568365051\rho^7 + 214854225\rho^8 - 60624996\rho^9 + 12111584\rho^{10} - 1542792\rho^{11} + 95328\rho^{12} \right) \\
&+ \frac{20\lambda^3 b^{(3)^3}}{(1-\rho)^3(2-\rho)^3(3-2\rho)^2(4-3\rho)^2(5-4\rho)(6-5\rho)} \left( 18720 - 65376\rho + 103610\rho^2 \right. \\
&\left. - 101827\rho^3 + 69850\rho^4 - 34106\rho^5 + 11370\rho^6 - 2355\rho^7 + 234\rho^8 \right) \\
&+ \frac{15\lambda^4 b^{(2)^3} b^{(4)}}{(1-\rho)^4(2-\rho)^4(3-2\rho)^4(4-3\rho)^3(5-4\rho)^2(6-5\rho)} \left( 64281600 - 433848960\rho \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +1340086464\rho^2 - 2522671896\rho^3 + 3256829928\rho^4 - 3079739910\rho^5 + 2222252366\rho^6 \\
 & -1252167821\rho^7 + 554087948\rho^8 - 190178753\rho^9 + 49086518\rho^{10} - 9016676\rho^{11} + 1060680\rho^{12} \\
 & -60768\rho^{13} \Big) + \frac{20\lambda^3 b^{(2)} b^{(3)} b^{(4)}}{(1-\rho)^3(2-\rho)^3(3-2\rho)^3(4-3\rho)^2(5-4\rho)^2(6-5\rho)} \Big( 1296000 - 6307200\rho \\
 & +13885200\rho^2 - 18571044\rho^3 + 17094456\rho^4 - 11521391\rho^5 + 5795769\rho^6 - 2142557\rho^7 + 555537\rho^8 \\
 & -91550\rho^9 + 7320\rho^{10} \Big) + \frac{5[\lambda b^{(4)}]^2 (2160 - 4788\rho + 5268\rho^2 - 3851\rho^3 + 1886\rho^4 - 589\rho^5 + 94\rho^6)}{(2-\rho)^2(1-\rho)^2(3-2\rho)^2(4-3\rho)(5-4\rho)(6-5\rho)} \\
 & + \frac{3\lambda^3 b^{(2)^2} b^{(5)}}{(1-\rho)^3(2-\rho)^3(3-2\rho)^3(4-3\rho)^3(5-4\rho)^2(6-5\rho)} \Big( 10713600 - 58527360\rho + 145138464\rho^2 \\
 & -219478904\rho^3 + 230037628\rho^4 - 179175516\rho^5 + 106843020\rho^6 - 48557035\rho^7 + 16327775\rho^8 \\
 & -3860220\rho^9 + 582684\rho^{10} - 43056\rho^{11} \Big) \\
 & + \frac{2\lambda^2 b^{(3)} b^{(5)} (34560 - 101088\rho + 140592\rho^2 - 128262\rho^3 + 81991\rho^4 - 35319\rho^5 + 9494\rho^6 - 1248\rho^7)}{(1-\rho)^2(2-\rho)^2(3-2\rho)^2(4-3\rho)^2(5-4\rho)(6-5\rho)} \\
 & + \frac{2\lambda^2 b^{(2)} b^{(6)}}{[(1-\rho)(2-\rho)(3-2\rho)(4-3\rho)(5-4\rho)]^2(6-5\rho)} \Big( 86400 - 303840\rho + 496056\rho^2 - 524114\rho^3 \\
 & +397787\rho^4 - 213717\rho^5 + 77818\rho^6 - 18214\rho^7 + 2184\rho^8 \Big)
 \end{aligned}$$

図 5.2: M/G/1 ランダム順サービスシステムの待ち時間の 5 次と 6 次モーメント.

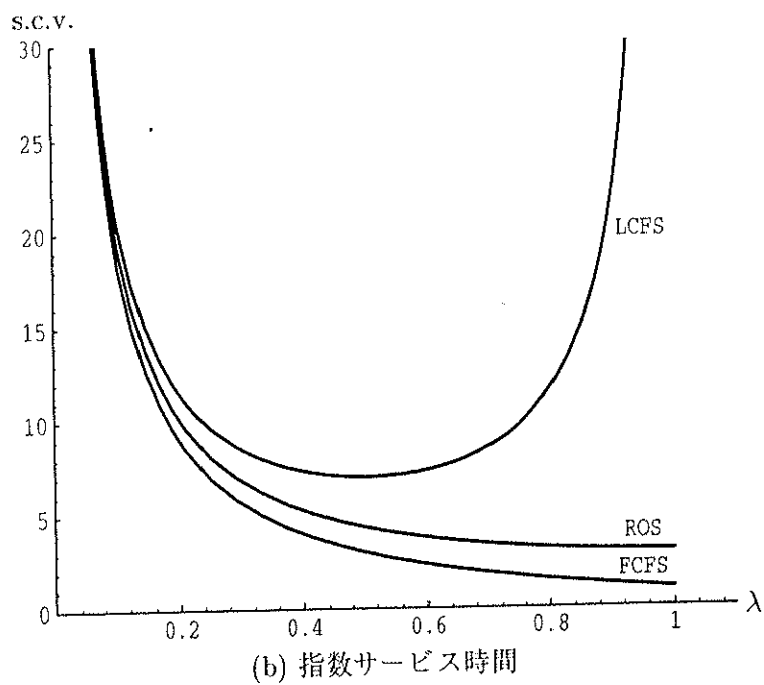
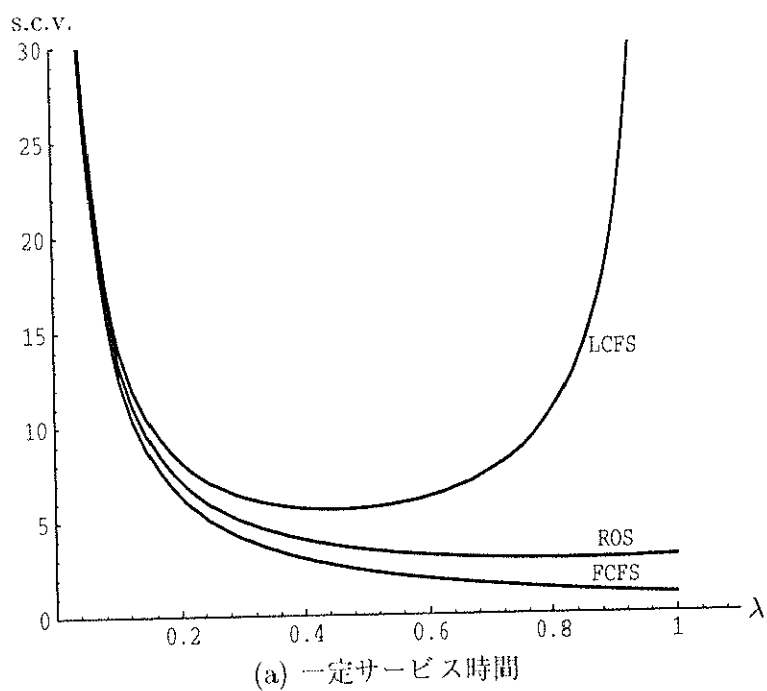
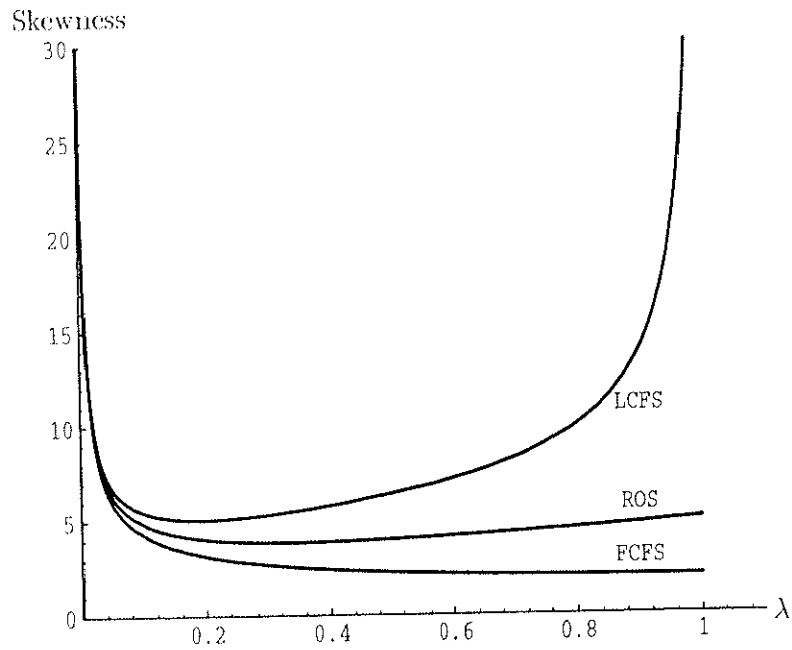
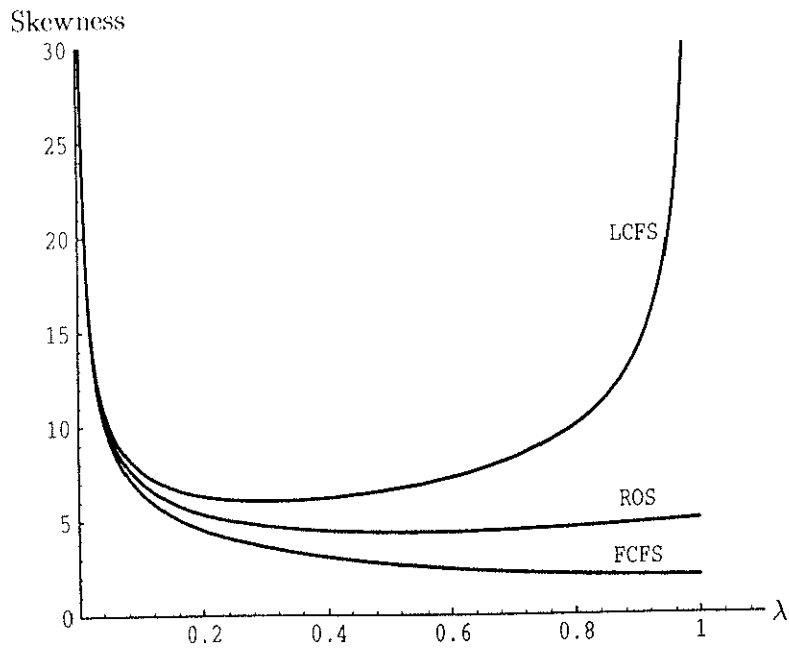


図 5.3: 先着順, 後着順, ランダム順サービスシステムの待ち時間の 2 乗変動係数.



(a) 一定サービス時間



(b) 指数サービス時間

図 5.4: 先着順, 後着順, ランダム順サービスシステムの待ち時間の歪度.

5.3. 他のサービス規律との比較

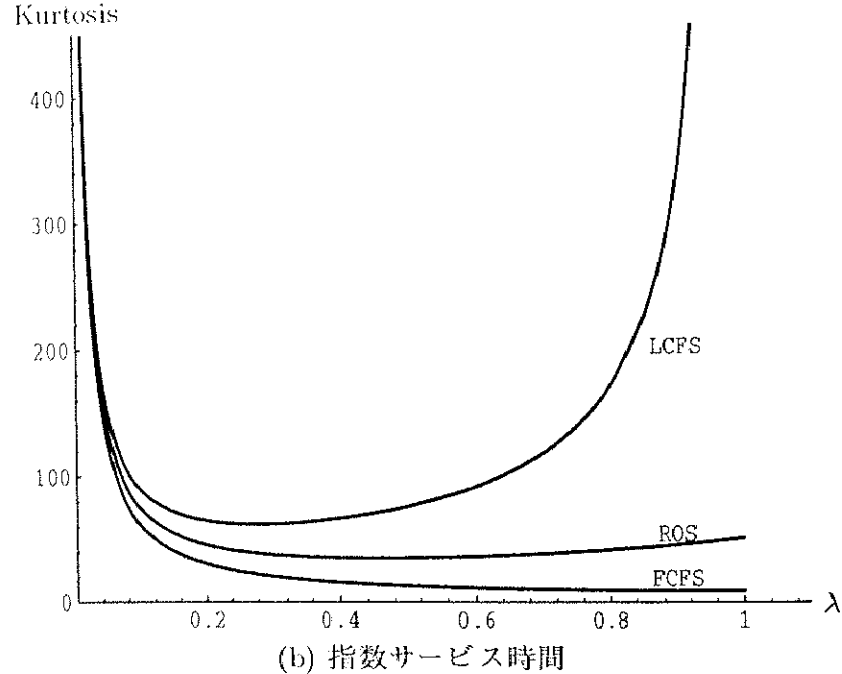
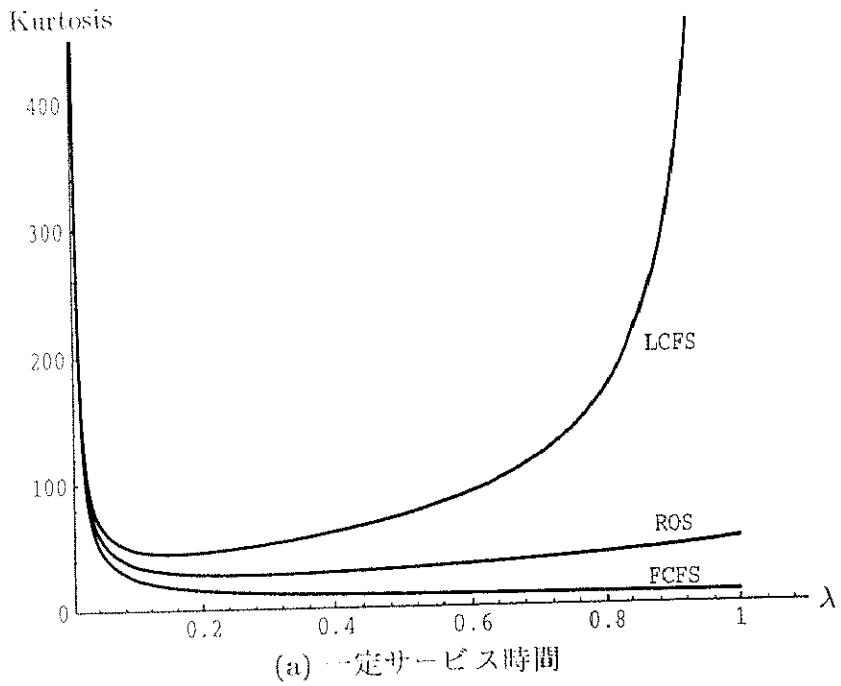


図 5.5: 先着順, 後着順, ランダム順サービスシステムの待ち時間の尖度.