

## 第 4 章

# M/G/∞ 待ち行列による自己相似過程の生成法の検証

---

第 3 章で見たように、情報通信網のトラヒック、特に圧縮動画像は長記憶性をもつと思われる。そこで本章では、長記憶性をもつトラヒックを生成することに焦点をあてる。このことは、情報通信網のトラヒック性能評価のために待ち行列モデルを考えたりシミュレーションを行うに際し便利である。本章では、サービス時間が Pareto 分布に従う M/G/∞ 待ち行列システムの系内人数を利用した自己相似過程を生成する Paxson らの方法について、シミュレーションによりその有効性の範囲を検証した。

まず初期状態が空である M/G/∞ 待ち行列システムと、定常状態から始まる M/G/∞ 待ち行列システムの理論的解析を示す。客は到着率  $\lambda$  の Poisson 分布に従って、常に十分な数のサーバがある待ち行列システムに到着し、待ち時間なしでサービスに入る。サービス時間は分布関数が  $B(x)$ 、平均が  $b$  であるような一般分布に従う。定常状態から始まる M/G/∞ 待ち行列システムでは、時刻 0 で系内にいる客の数は平均が  $\rho = \lambda b$  の Poisson 過程に従い、その残りサービス時間はそれぞれサービス時間分布の余命とする。長記憶性をもつ過程を生成するためにサービス時間分布は Pareto 分布を用いた。このようにして得られた系内人数の自己相関係数から逆算することによって、与えられた自己相似パラメタ  $H$  をもつ時系列データを発生することができる。シミュレーションの結果、この方法は、 $H \lesssim 0.7$  のとき有効であることが分かった。

### 4.1 初期状態が空の M/G/∞ システム

M/G/∞ システムにおける時刻  $t$  での系内人数を  $N(t)$  とする。本節では、時刻  $t = 0$  での系内人数が  $N(0) = 0$  の場合を考える。このとき、時刻  $t$  と時刻  $t + \ell$  における系内人数の相関係数を求める。

時刻に  $t$  において系内に  $k$  人存在するとは、この時刻までに到着した客の数が  $n$  人であ

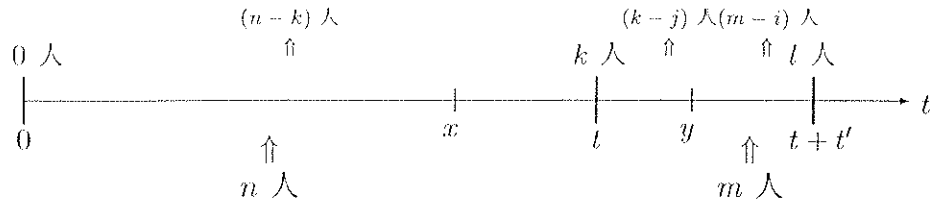


図 4.1: M/G/∞(初期状態: 系内人数 0) における到着とサービス終了の客数.

るとき,  $(n-k)$  人のサービスが終了しているということである. 更に, 時刻  $t+t'$  において系内に  $l$  人いるとは, 時刻  $t$  までに到着した  $n$  人の客の中で時刻  $t+t'$  までにサービスが終了しなかった  $j$  人と, 時刻  $t$  から時刻  $t+t'$  の間に到着した  $m$  人の客の中でサービスが終了しなかった  $i$  人の合計が  $l$  人であるということである.

これを図式化したものが図 4.1 である.

まず時刻  $t$  までに到着する  $n$  人について考える. 時刻  $t$  までに  $n$  人が到着する確率は, 到着率  $\lambda$  の Poisson 分布に従うから  $e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$  であり, 到着した  $n$  人は次のように分けられる.

$$n \text{ 人} = \begin{cases} (n-k) \text{ 人} & \text{時刻 } t \text{ までにサービスが終了する} \\ (k-j) \text{ 人} & \text{時刻 } t \text{ から時刻 } t+t' \text{ までの間にサービスが終了する} \\ j \text{ 人} & \text{時刻 } t+t' \text{ までにサービスが終了しない} \end{cases}$$

$n$  人をこのように  $(n-k)$  人,  $(k-j)$  人,  $j$  人に分ける方法の数は  $\binom{n}{n-k, k-j, j} = \frac{n!}{(n-k)!(k-j)!j!}$  である. また, ある 1 人の客が  $[0, t]$  の間の微小時間  $[x, x+dx]$  に到着して, 時刻  $t$  までにサービスを終了する確率は

$$\frac{1}{t} \int_0^t B(t-x) dx$$

である. それぞれの客は独立に振る舞うので

$$P\{(n-k) \text{ 人の客が } [0, t] \text{ にサービスが終了する}\} = \left[ \frac{1}{t} \int_0^t B(t-x) dx \right]^{n-k}$$

となる. 同様に

$$\begin{aligned} & P\{(k-j) \text{ 人の客が } [t, t+t'] \text{ の間にサービスが終了する}\} \\ &= \left[ \frac{1}{t} \int_0^t (B(t+t'-x) - B(t-x)) dx \right]^{k-j} \end{aligned}$$

$$P\{j \text{ 人の客が } [0, t+t'] \text{ にサービスが終了しない}\} = \left[ \frac{1}{t} \int_0^t (1 - B(t+t'-x)) dx \right]^j$$

となる.

時刻  $t$  から 時刻  $t+t'$  の間に  $m$  人が到着する確率は  $e^{-\lambda t'}(\lambda t')^m/m!$  であり, それらの  $m$  人は

$$m \text{ 人} = \begin{cases} (m-i) \text{ 人} & \text{時刻 } t+t' \text{ までにサービスが終了する} \\ i \text{ 人} & \text{時刻 } t+t' \text{ までにサービスが終了しない} \end{cases}$$

と分けられる. このとき

$$\begin{aligned} & P\{(m-i) \text{ 人の客が } [t, t+t'] \text{ の間にサービスが終了する} \\ & \quad = \left[ \frac{1}{t'} \int_t^{t+t'} B(t+t'-y) dy \right]^{m-i} \\ & P\{i \text{ 人の客が時刻 } t+t' \text{ までにサービスが終了しない} \} \\ & \quad = \left[ \frac{1}{t'} \int_t^{t+t'} (1-B(t+t'-y)) dy \right]^i \end{aligned}$$

である.

従って, 到着したすべての客に対し,  $m, n$  と,  $j+i=l$  の関係を考慮しながら  $j$  について加えると

$$\begin{aligned} & P[N(t) = k, N(t+t') = l | N(0) = 0] \\ & = \sum_{j=0}^{\min[k, l]} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!(k-j)!j!} \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left[ \frac{1}{t} \int_0^t B(t-x) dx \right]^{n-k} \\ & \quad \times \left[ \frac{1}{t} \int_0^t (B(t+t'-x) - B(t-x)) dx \right]^{k-j} \left[ \frac{1}{t} \int_0^t (1-B(t+t'-x)) dx \right]^j \\ & \quad \times \sum_{m=t-j}^{\infty} \frac{m!}{(m-l+j)!(l-j)!} \cdot e^{-\lambda t'} \frac{(\lambda t')^m}{m!} \left[ \frac{1}{t'} \int_t^{t+t'} B(t+t'-y) dy \right]^{m-l+j} \\ & \quad \times \left[ \frac{1}{t'} \int_t^{t+t'} (1-B(t+t'-y)) dy \right]^{l-j} \\ & = e^{-\rho B_R(t)} e^{-\rho B_R(t')} \sum_{j=0}^{\min[k, l]} \frac{\left[ \lambda \int_0^t (B(t'+x) - B(x)) dx \right]^{k-j}}{(k-j)!} \\ & \quad \times \frac{\left[ \lambda \int_0^t (1-B(t'+x)) dx \right]^j}{j!} \frac{\left[ \lambda \int_0^{t'} (1-B(y)) dy \right]^{l-j}}{(l-j)!} \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\rho = \lambda b$$

$$B_R(t) = \frac{1}{b} \int_0^t (1 - B(y)) dy$$

とする。\$B\_R(t)\$ は残りサービス時間の分布関数である。

系内人数の相関係数を計算するために \$z\$ 変換を考えると

$$\begin{aligned} E \left[ z_1^{N(t)} z_2^{N(t+t')} \mid N(0) = 0 \right] &:= \sum_{k=0}^{\infty} z_1^k \sum_{l=0}^{\infty} z_2^l P \left[ N(t) = k, N(t+t') = l \mid N(0) = 0 \right] \\ &= \exp \left\{ \rho \left\{ (z_1 - 1) B_R(t) + (z_2 - 1) B_R(t') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z_1(z_2 - 1) (B_R(t+t') - B_R(t')) \right\} \right\} \end{aligned}$$

となる [32]。

ここで \$z\_1 = z, z\_2 = 1\$ とおくと

$$E \left[ z^{N(t)} \mid N(0) = 0 \right] = \exp \left[ \rho B_R(t) (z - 1) \right]$$

が得られるので、\$N(t)\$ は平均が \$\rho B\_R(t)\$ の Poisson 分布

$$P \{ N(t) = k \mid N(0) = 0 \} = \frac{[\rho B_R(t)]^k}{k!} e^{-\rho B_R(t)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

に従うことが分かる。\$t \to \infty\$ (定常状態) のとき、これは平均 \$\rho\$ の Poisson 分布になる。このことを利用して第 4.2 節で定常状態から始まる M/G/∞ システムの解析を行う。また、時刻 \$t\$ における系内人数 \$N(t)\$ の分散と共分散は

$$\text{var} [N(t)] = \rho B_R(t)$$

$$\text{cov} [N(t), N(t+t')] = \rho [B_R(t+t') - B_R(t')]$$

である。従って、\$N(t)\$ と \$N(t+t')\$ の相関係数は

$$r_1(t, t') := \frac{\text{Cov} [N(t), N(t+t')]}{\sqrt{\text{var} [N(t)] \text{var} [N(t+t')]} } = \frac{B_R(t+t') - B_R(t')}{\sqrt{B_R(t) B_R(t+t')}} \quad (4.1)$$

となる。これは時刻 \$t\$ に依存する。

## 4.2 定常状態から始まる M/G/∞ システム

次に、M/G/∞ システムは時刻 0 で既に定常状態になっていると仮定して、その系内人数の相関係数を考える。時刻 0 において、系内人数はパラメタ \$\rho\$ の Poisson 分布

$$P \{ N(0) = k \} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

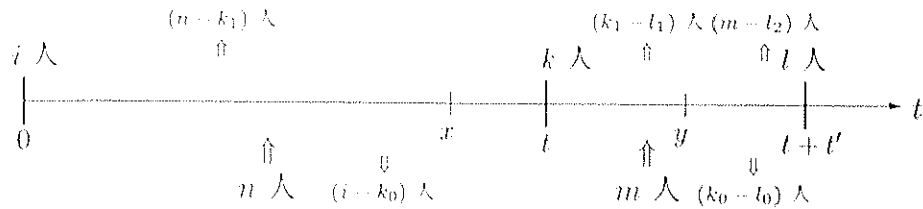


図 4.2: M/G/∞(初期状態: 系内人数  $i$ ) における到着とサービス終了の客数.

に従う。また、系内にいる客の残りのサービス時間分布はもとのサービス時間の余命の分布  $B_R(t)$  であると仮定する。まず  $N(0) = i$  であるという条件の下で時刻  $t$  に系内人数が  $j$  人である確率を考える。その確率は、

$$P\{N(t) = j | N(0) = i\} = e^{-\rho B_R(t)} \sum_{k=\max\{0, j-i\}}^j B_R(t)^{i-j+k} [1 - B_R(t)]^{j-k} \frac{(\rho B_R(t))^k}{k!}$$

で与えられる [32]. 更に初期状態が Poisson 分布に従うことから条件をはずすと、

$$P\{N(t) = j\} = e^{-\rho} \frac{\rho^j}{j!}$$

なる。これは平均  $\rho$  の Poisson 分布になっている。つまり、定常状態から始めたとき任意の時点の系内人数は平均  $\rho$  の Poisson 分布に従うことが分かる。

次に、時刻  $t$  にシステム内に  $k (= k_0 + k_1)$  人いて、かつ時刻  $t + t'$  にシステム内に  $l (= l_0 + l_1 + l_2)$  人いる確率を考える。

時刻 0 に既に系内にいる  $i$  人の客のうち、時刻  $t$  までに  $(i - k_0)$  人のサービスが終了し、時刻  $t + t'$  までに時刻  $t$  で残っていた  $k_0$  人のうち更に  $(k_0 - l_0)$  人のサービスが終了し、 $l_0$  人はサービスが終了せずシステムに残る。また、時刻  $t$  までに到着した  $n$  人の客は、時刻  $t$  までに  $(n - k_1)$  人のサービスが終了し、時刻  $t + t'$  までに残りの  $(k_1 - l_1)$  人のサービスが終了し、 $l_1$  人はサービスが終了せずに残る。時刻  $t$  から時刻  $t + t'$  に到着した  $m$  人の客のうち、サービスが終了するのは  $(m - l_2)$  人で、 $l_2$  人はシステムに残る。この状況を図 4.2 に示す。

時刻 0 にいる  $i$  人は、

$$i \text{ 人 } \begin{cases} i - k_0 \text{ 人} & \text{時刻 } t \text{ までにサービス終了} \\ k_0 - l_0 \text{ 人} & \text{時刻から } t \text{ と時刻 } t + t' \text{ までの間にサービス終了} \\ l_0 \text{ 人} & \text{時刻 } t + t' \text{ までにサービスが終了しない} \end{cases}$$

$[0, t]$  の間に到着した  $n$  人は、

$$n \text{ 人 } \begin{cases} n - k_1 \text{ 人} & \text{時刻 } t \text{ までにサービス終了} \\ k_1 - l_1 \text{ 人} & \text{時刻 } t \text{ と時刻 } t + t' \text{ の間にサービス終了} \\ l_1 \text{ 人} & \text{時刻 } t + t' \text{ までにサービスが終了しない} \end{cases}$$

$[t, t+t']$  の間に到着した  $m$  人は,

$$m \text{ 人 } \begin{cases} m-l_2 \text{ 人} & \text{時刻 } t \text{ と時刻 } t+t' \text{ の間にサービス終了} \\ l_2 \text{ 人} & \text{時刻 } t+t' \text{ までにサービスが終了しない} \end{cases}$$

と場合分けできる. 但し, ここで  $k = k_0 + k_1, l = l_0 + l_1 + l_2$  の関係がある. 以上のことを考慮して, 第 4.1 節と同様に  $N(t)$  と  $N(t+t')$  の結合確率分布を計算すると,

$$\begin{aligned} & P[N(t) = k, N(t+t') = l | N(0) = i] \\ &= i! e^{-\rho(B_R(t) + B_R(t'))} \sum_{k_1 = \max[k-i, 0]}^k \sum_{l_0=0}^{\min[k-k_1, l]} \sum_{l_1=0}^{\min[k, l-l_0]} \rho^{k_1+l-l_0-l_1} \frac{[B_R(t)]^{i-k+k_1}}{(i-k+k_1)!} \\ & \times \frac{[B_R(t+t') - B_R(t)]^{k-k_1-l_0} [B_R(t') + B_R(t) - B_R(t+t')]^{k_1-l_1}}{(k-k_1-l_0)! (k_1-l_1)!} \\ & \times \frac{[1 - B_R(t+t')]^{l_0} [B_R(t+t') - B_R(t')]^{l_1} [B_R(t')]^{l-l_0-l_1}}{l_0! l_1! (l-l_0-l_1)!} \end{aligned}$$

となる. 更に時刻 0 での系内人数と残りのサービス時間に関する条件を外すと, この確率は

$$\begin{aligned} & P[N(t) = k, N(t+t') = l] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\rho} \rho^i}{i!} P[N(t+t') = l, N(t) = k | N(0) = i] \\ &= e^{-\rho(B_R(t') + 1)} \sum_{k_1=0}^k \sum_{l_0=0}^{\min[k-k_1, l]} \sum_{l_1=0}^{\min[k_1, l-l_0]} \frac{[\rho(B_R(t+t') - B_R(t))]^{k-k_1-l_0}}{(k-k_1-l_0)!} \\ & \times \frac{[\rho(1 - B_R(t+t'))]^{l_0} [\rho(B_R(t') + B_R(t) - B_R(t+t'))]^{k_1-l_1}}{l_0! (k_1-l_1)!} \\ & \times \frac{[\rho(B_R(t+t') - B_R(t'))]^{l_1} [\rho B_R(t')]^{l-l_0-l_1}}{l_1! (l-l_0-l_1)!} \\ &= e^{-\rho(B_R(t') + 1)} \sum_{j=0}^{\min[k, l]} \frac{[\rho B_R(t')]^{k-j} [\rho(1 - B_R(t'))]^j [\rho B_R(t')]^{l-j}}{(k-j)! j! (l-j)!} \end{aligned}$$

で与えられる. これは時刻  $t$  に依存しない.

これを  $z$  変換すると,

$$E \left[ z_1^{N(t)} z_2^{N(t+t')} \right] = \exp[\rho \{ z_1 z_2 - 1 - B_R(t')(z_1 - 1)(z_2 - 1) \}]$$

となり, これより, 時刻  $t$  における系内人数  $N(t)$  の分散と共分散は

$$\text{var}[N(t)] = \rho$$

$$\text{Cov}[N(t), N(t+t')] = \rho[1 - B_R(t')]$$

が得られる. よって,  $N(t)$  と  $N(t+t')$  の相関係数は

$$r_2(t') = 1 - B_R(t') \quad (4.2)$$

となる.

### 4.3 系内人数の自己相関係数

第 4.2 節で考察した定常状態から始まる  $M/G/\infty$  待ち行列システムにおいて、サービス時間分布が表 4.1 に示されているように、指数分布、一定時間分布、Pareto 分布に従う場合を考える。

表 4.1: 各分布の分布関数とその平均。

サービス時間分布	分布関数	平均サービス時間 ( $b$ )
指数分布	$B(x) = 1 - e^{-\mu x}$	$1/\mu$
一定時間分布	$B(x) = \begin{cases} 1(x \geq D) \\ 0(x < D) \end{cases}$	$D$
Pareto 分布	$B(x) = 1 - (a/x)^c, c > 1, a > 0$	$ac/(c-1)$

ここで、Pareto 分布の分散は

$$\sigma^2 = \frac{ca^2}{(c-1)^2(c-2)}$$

で与えられるので、この分布が有限な分散をもつためには  $c > 2$  でなければならないことに注意する。

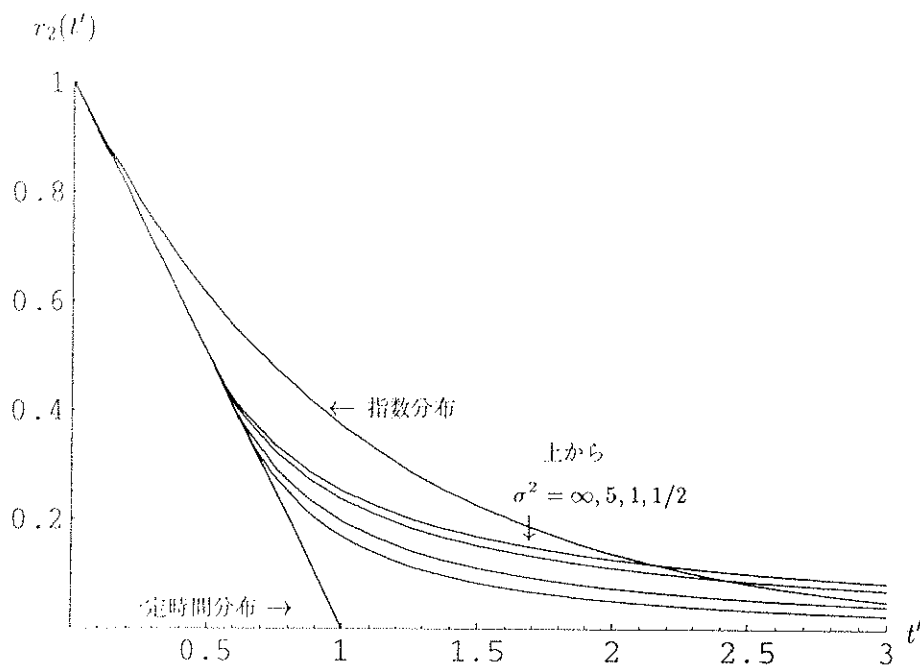
表 4.1 に示されたサービス時間分布に対し、定常  $M/G/\infty$  システムの系内人数の自己相関係数  $r_2(t')$  を、(4.2) により計算すると

$$\begin{aligned} \text{指数分布: } r_2(t') &= e^{-\mu t'} \\ \text{一定時間分布: } r_2(t') &= \begin{cases} 1 - \frac{t'}{D} & (t' < D) \\ 0 & (t' \geq D) \end{cases} \\ \text{Pareto 分布: } r_2(t') &= \begin{cases} 1 - \frac{c-1}{c} t' & (t' < a) \\ \frac{1}{c} \left(\frac{a}{t'}\right)^{c-1} & (t' \geq a) \end{cases} \end{aligned}$$

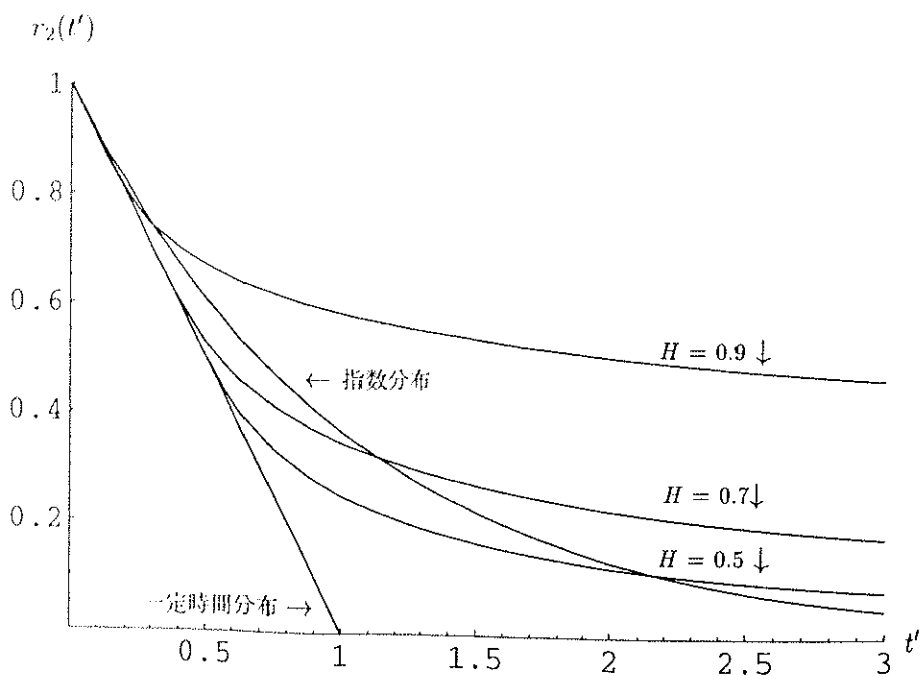
となる。

サービス時間分布が指数分布の場合は、 $\sum_{t'=0}^{\infty} r_2(t') < \infty$  となることから系内人数は短記憶性をもつことが分かる [4, 21]。サービス時間が一定のとき、系内人数の自己相関係数  $r_2(t')$  は  $t' \geq D$  で 0 になる。従って、この場合も系内人数は短記憶性である。

サービス時間分布が Pareto 分布の場合、形状パラメタ  $c$  を調節することによって系内人数に長記憶性をもたせることができる。自己相関係数  $r_2(t')$  が、 $t' \rightarrow \infty$  で漸近的に  $|t'|^{2H-2}$  ( $1/2 < H < 1$ ) のように減少するとき、その時系列データは式 (2.2) より自己相似パ



(a): サービス時間分布の分散をパラメタとしてプロット.

(b): 系内人数の自己相似パラメタ  $H$  をパラメタとしてプロット.図 4.3: サービス時間分布に対する系内人数の自己相関係数 ( $b = 1$ ).



ラメタ  $H$  の長記憶性をもつという。この場合,  $c = 3 - 2H$  という関係が得られるので, 系内人数は,  $1 < c < 2$  ( $1/2 < H < 1$ ) のとき長記憶性をもち,  $c \geq 2$  ( $0 < H \leq 1/2$ ) のとき短記憶性をもつ。

図 4.3 は, 平均が  $b = 1$  のサービス時間分布に対して, 自己相関係数  $r_2(t)$  をプロットしたものである。Pareto 分布サービス時間に対するプロットでは, サービス時間の分散 (図 4.3 (a)) または系内人数の自己相似パラメタ  $H$  (図 4.3 (b)) をパラメタとして使用した。図から明らかなように, サービス時間分布の分散が大きくなるにつれて, 系内人数の自己相関係数は増加することが分かる。また, 自己相似パラメタ  $H$  が大きくなるにつれて, 自己相関係数が増加することも見てとれる。これは, 自己相似パラメタ  $H$  が増加するにつれて, 分布の裾が長くなる長記憶性の特徴を示している。

#### 4.4 シミュレーション

本節では,  $M/G/\infty$  システムの系内人数の相関係数をシミュレーションによって検証する。サービス時間分布として, 分布の裾が長い Pareto 分布を用いる。また比較のため, 指数分布と一定時間分布の場合についてもシミュレーションを行った。

シミュレーションは, 時間の単位を平均サービス時間に取り, 50,000 時間に渡って行った。すべての場合に, トラフィック密度を  $\rho = 40$  とした。サービス時間分布として指数分布, 一定時間分布, 及び自己相似パラメタ  $H$  がそれぞれ  $H = 0.9, 0.7, 0.5$  になるような Pareto 分布について, *Mathematica* 用いて 20 回のランを行った。

20 回のランから得られた系内人数の自己相似パラメタ  $H$  の平均を表 4.2 と表 4.3 に示す。表 4.2 はサービス時間が指数分布に従う場合の  $R/S$  解析と分散解析の結果である。系内人数の自己相関係数が指数関数になることから, これは明らかに短記憶的である [21]。これは, 第 3.6 節においてにおいて参考のために示した Poisson 乱数列に対して  $R/S$  解析及び分散解析を行ったときの結果と一致する。サービス時間が一定時間の場合,  $t \geq D$  の範囲で  $r_2(t) = 0$  となる。このこともシミュレーションによって確認することができた。また, 図 4.5 - 図 4.12 にシミュレーション結果の  $R/S$  解析 (左) と分散解析 (右) を示す。図 4.5, 図 4.7, 図 4.9 は, 定常状態から始まる  $M/G/\infty$  システムで, サービス時間分布は Pareto 分布, 自己相似パラメタの値が上から  $H = 0.9$  (図 4.5),  $0.7$  (図 4.7),  $0.5$  (図 4.9) の場合である。図 4.6 図 4.8 図 4.10 は, 時刻 0 において, 系内人数が空でサービス時間分布, 自己相似パラメタの値は定常状態から始めたときと同じにした場合である。図 4.11, 図 4.12 は, 定常状態から始まる  $M/G/\infty$  システムであるが, サービス時間分布は指数分布 (図 4.11) と一定時間分布 (図 4.12) の場合である。

表 4.3 の  $R/S$  解析の結果から, 長記憶性を有する値 ( $H = 0.7, 0.9$ ) では 95 % 信頼区間内に理論値がおさまっていることが分かる。しかしながら, 分散解析においては理論値は信頼区間の範囲外に出ている。このことから, 長記憶性を検証するときは, 分散解析よりも  $R/S$  解析の方が適当であると思われる。 $H = 0.5$  の場合,  $R/S$  解析, 分散解析の結果では 95 %

表 4.2: 指数分布と一定時間分布に従うサービス時間をもつ M/G/∞ 待ち行列システムのシミュレーション結果.

サービス時間分布	R/S 解析	95 % 信頼区間	分散解析	95 % 信頼区間
指数分布	0.518	[0.507, 0.530]	0.487	[0.482, 0.506]
一定時間分布	0.508	[0.495, 0.521]	0.489	[0.473, 0.499]

表 4.3: Pareto 分布に従うサービス時間をもつ M/G/∞ 待ち行列システムのシミュレーション結果.

理論値	R/S 解析	95 % 信頼区間	分散解析	95 % 信頼区間
初期状態：系内人数 定常状態				
$H = 0.9$	0.893	[0.871, 0.909]	0.840	[0.825, 0.854]
$H = 0.7$	0.706	[0.690, 0.721]	0.670	[0.649, 0.691]
$H = 0.5$	0.568	[0.559, 0.578]	0.546	[0.531, 0.574]
初期状態：系内人数 0				
$H = 0.9$	0.878	[0.864, 0.892]	0.832	[0.812, 0.848]
$H = 0.7$	0.708	[0.695, 0.721]	0.683	[0.661, 0.705]
$H = 0.5$	0.586	[0.570, 0.604]	0.555	[0.537, 0.574]

信頼区間の外に出ている。そこで、このデータを用いてスペクトル解析を行った。スペクトル解析の際の分割数は 64 である。その結果の一部を図 4.4 に示す。左側が時刻 0 において系内人数が 0 の場合、右側が時刻 0 に定常状態になっている場合である。図 4.4 より、短記憶性の特徴が見られることが分かるが、すべてのシミュレーション結果においてこのような結果が得られた訳ではない。中には弱い長記憶性を示すものを含まれていた。その結果、Pareto 分布を用いて短記憶性(無相関)をもつものを発生させるのは適さないと思われる。

#### 4.5 シミュレーションの有効性

M/G/∞ システムの定常状態における系内人数は Poisson 分布に従う [32]。このことを確認するために、 $\chi^2$  検定を行った。図 4.13 は、 $H = 0.7$  (上) 及び  $0.9$  (下) に相当する M/G/∞ システムのシミュレーション結果の分布と同じ平均をもつ Poisson 分布を図示したものである。図 4.13 から、 $H = 0.9$  の場合は 理論的な Poisson 分布とかなりかけ離れていることが分かる。更に、 $H = 0.75$  でも Poisson 分布に合わないことが確かめられた。これ

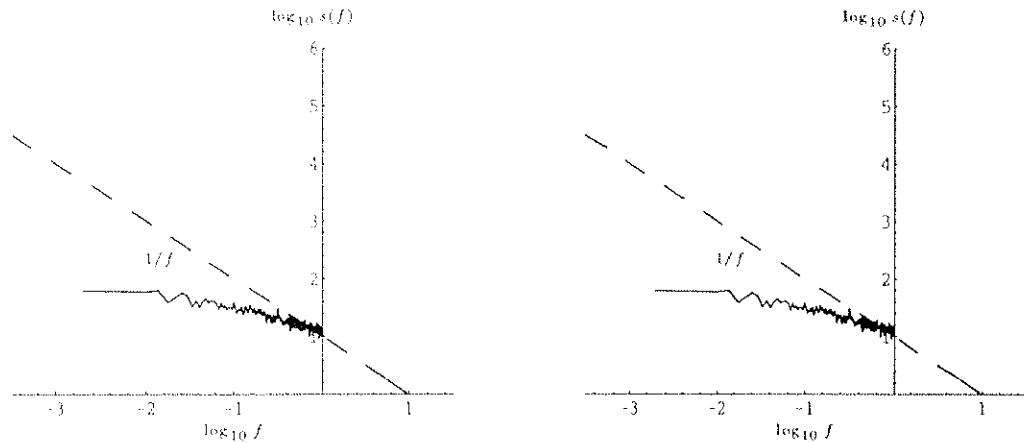


図 4.4:  $M/G/\infty$  システム ( $H = 0.5$ ) のシミュレーション結果に対するスペクトル解析. (左): 初期状態が空, (右): 初期状態が定常状態.

らの結果によれば,  $H \lesssim 0.7$  となるような Pareto 分布サービス時間をもつ  $M/G/\infty$  システムのシミュレーションによってのみ, 目的とする  $H$  の値をもつ自己相似過程を生成することができるようである.

上述のシミュレーションは初期状態が空である場合と定常状態である場合について行ったが, 50,000 時間という非常に長い時間に渡るランを行ったので, それらの結果には顕著な違いが見られなかった. 更に, 同じ時系列データを用いスペクトル解析を行った. スペクトル解析では時系列データに関して, 長記憶性と短記憶性以外に非定常性も検出することができる.  $H = 0.7$  に対応する Pareto 分布サービス時間で, 初期状態が空の条件で行ったシミュレーションに対して, 初めの 513 時間, 1,025 時間, 5,000 時間のデータを用いてスペクトル解析を行うと, 非定常性を示すものがかかり現れた. そして, 10,000 時間のデータを用いたときには, ほとんどが定常状態に達していることが分かった. このスペクトル解析の 1 つを示したが図 4.14 である. 図 4.14 は単位時間を平均サービス時間とし, 1,025 時間, 5,000 時間, 10,000 時間, 50,000 時間とシミュレーション時間の長さを変えたときのスペクトル解析の結果である. 1,025 時間の図や 5,000 時間の図では  $1/f$  に平行になっているように見える. 更に 10,000 時間と 50,000 時間を示したでは  $1/f$  より傾きが平らになってきていることが見てとれる. このことからおよそ 10,000 時間が経過すると, 定常状態に達すると考えられる.

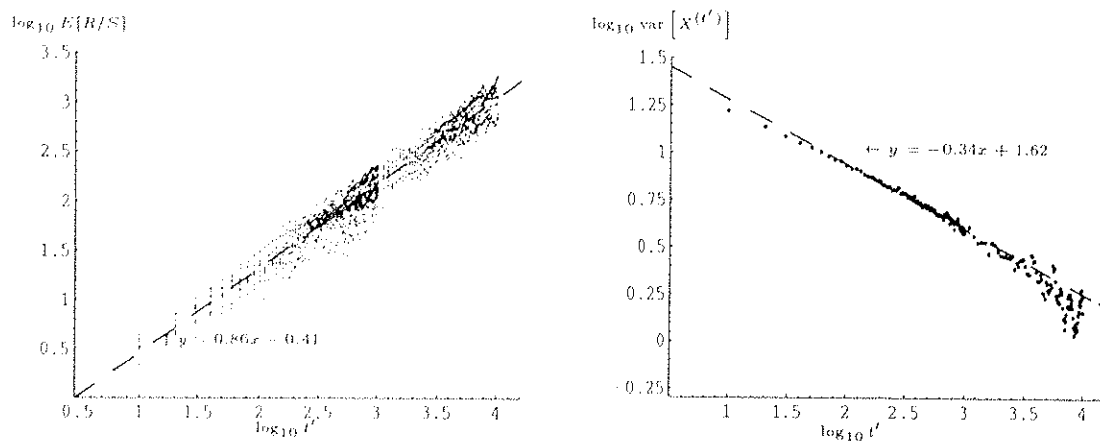


図 4.5: 定常状態から始まる M/G/∞ システム ( $H = 0.9$ ) の解析結果. (左): R/S 解析, (右): 分散解析.

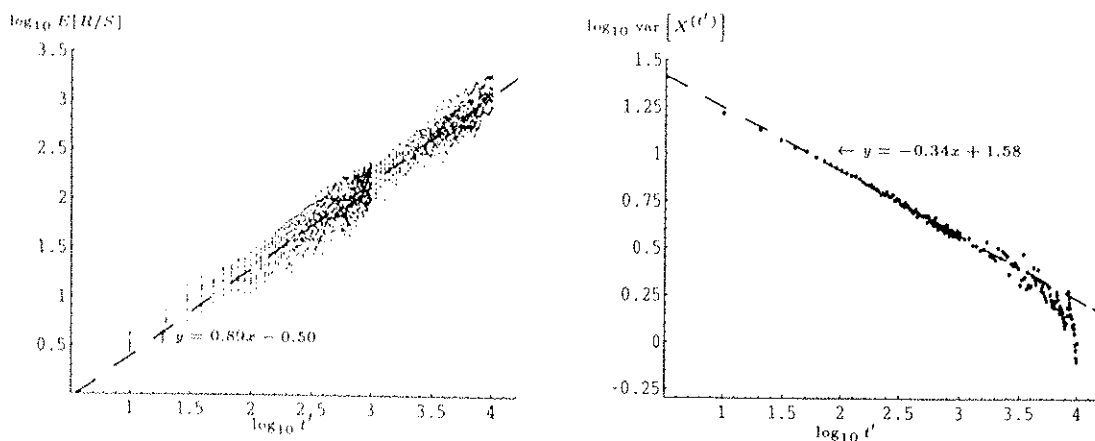


図 4.6: 空から始まる M/G/∞ システム ( $H = 0.9$ ) の解析結果. (左): R/S 解析, (右): 分散解析.

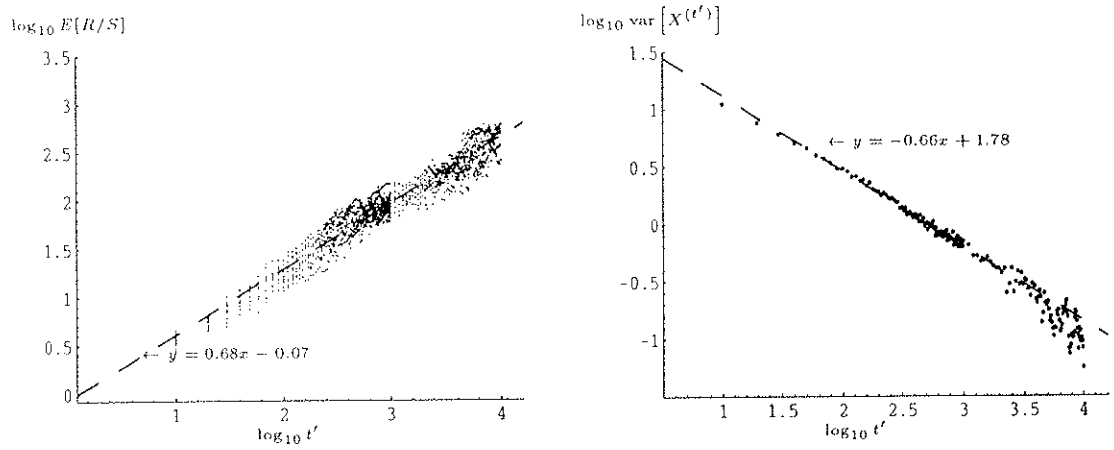


図 4.7: 定常状態から始まる  $M/G/\infty$  システム ( $H = 0.7$ ) の解析結果. (左):  $R/S$  解析, (右): 分散解析.

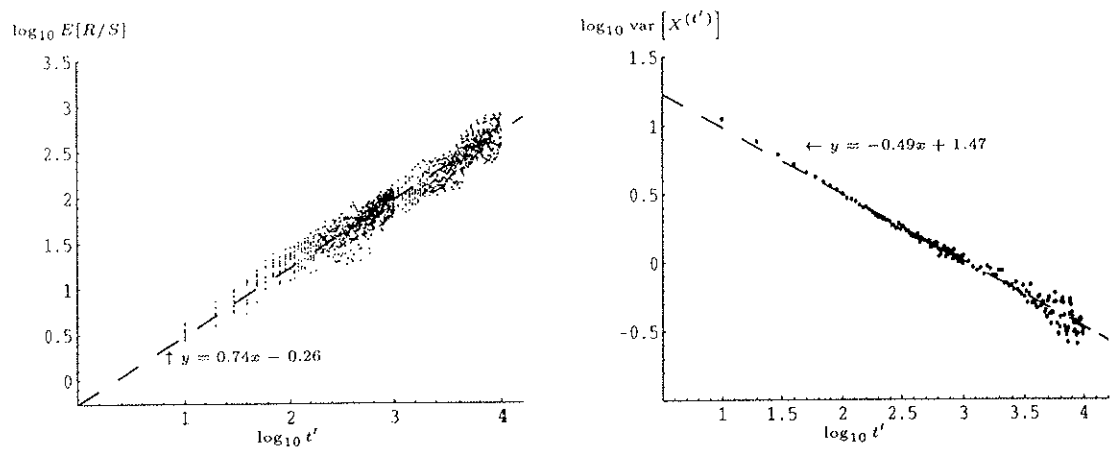


図 4.8: 空から始まる  $M/G/\infty$  システム ( $H = 0.7$ ) の解析結果. (左):  $R/S$  解析, (右): 分散解析.

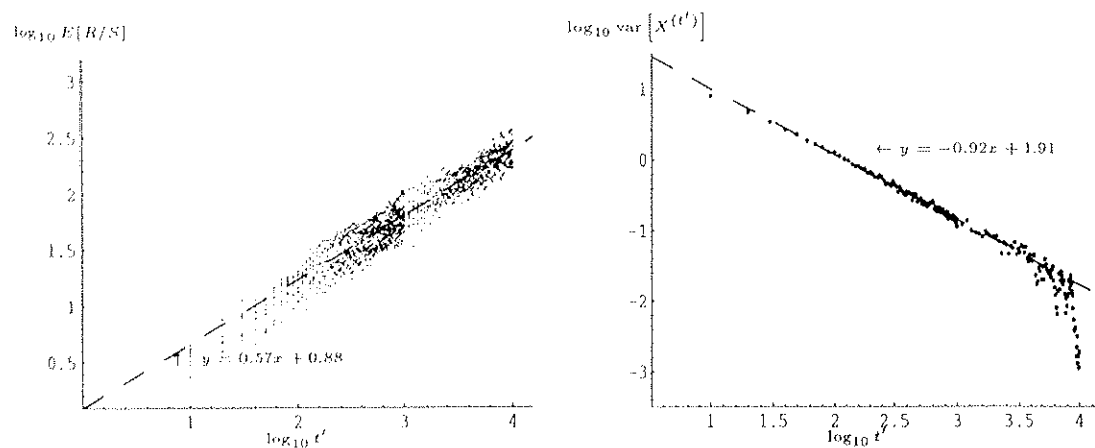


図 4.9: 定常状態から始まる M/G/∞ システム ( $H = 0.5$ ) の解析結果. (左): R/S 解析, (右): 分散解析.

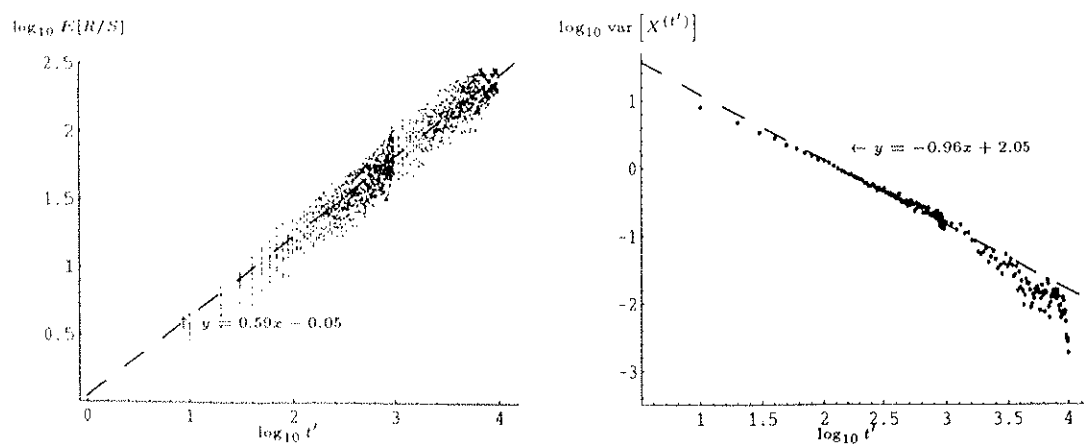


図 4.10: 空から始まる M/G/∞ システム ( $H = 0.5$ ) の解析結果. (左): R/S 解析, (右): 分散解析.

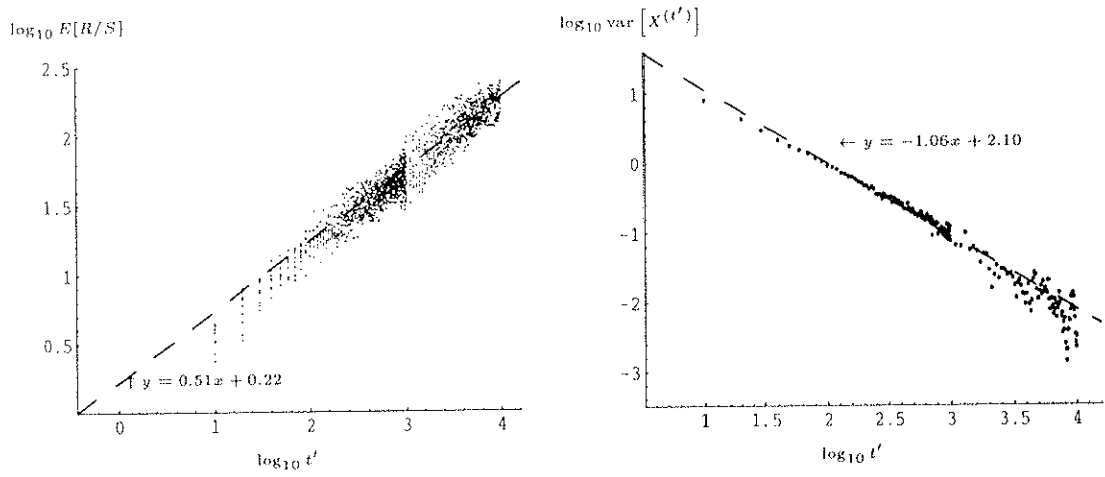


図 4.11: 定常状態から始まる  $M/G/\infty$  システム (指数分布) の解析結果. (左):  $R/S$  解析, (右): 分散解析.

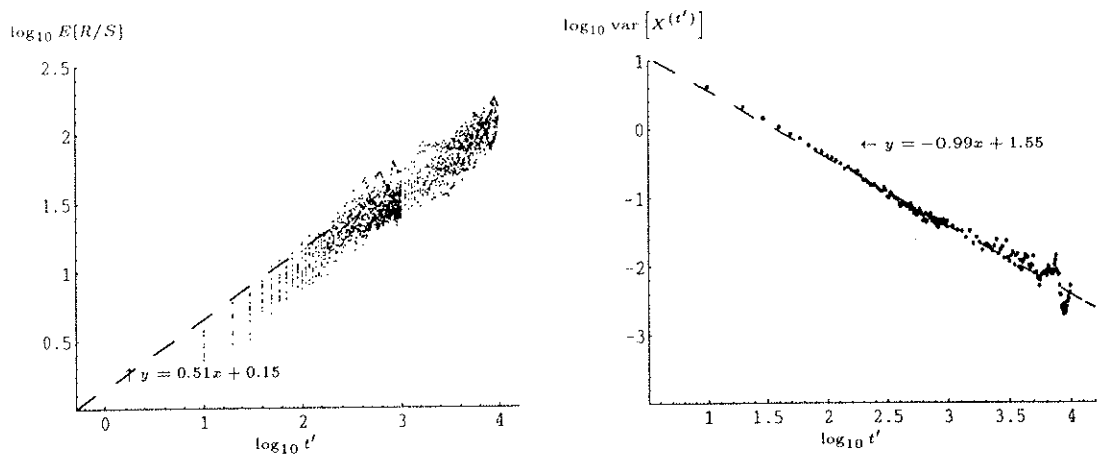
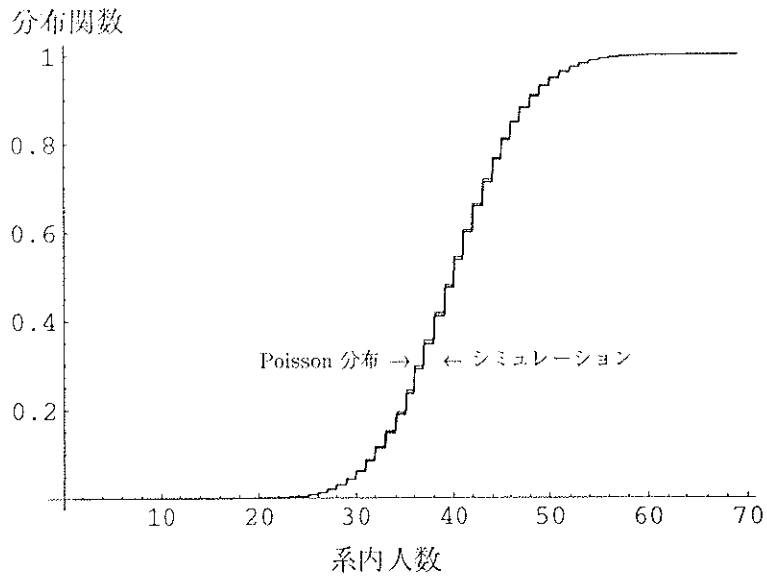
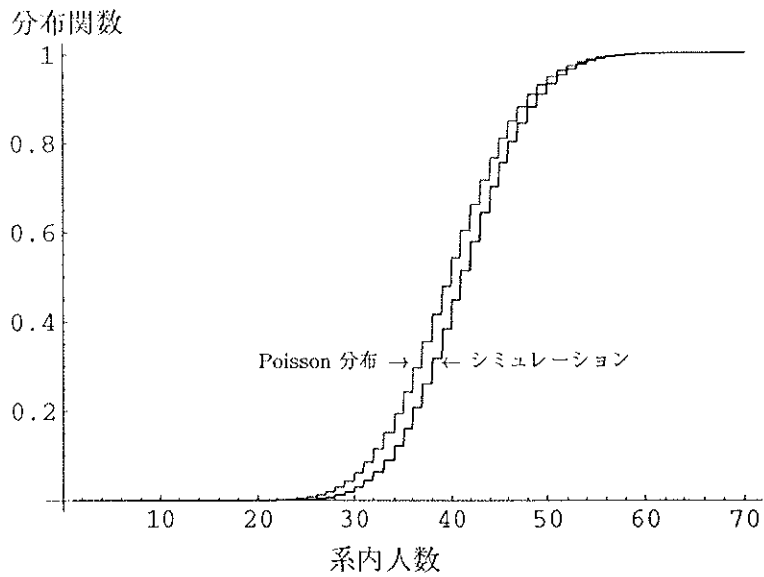


図 4.12: 定常状態から始まる  $M/G/\infty$  システム (一定時間分布) の解析結果. (左):  $R/S$  解析, (右): 分散解析.

(a) Pareto 分布のパラメータ:  $a = 3/8, c = 1.6$  ( $H = 0.7$ ).(b) Pareto 分布のパラメータ:  $a = 1/6, c = 1.2$  ( $H = 0.9$ ).図 4.13: Pareto 分布をサービス時間にもつ  $M/G/\infty$  のシミュレーションによる系内人数の分布と定常分布.



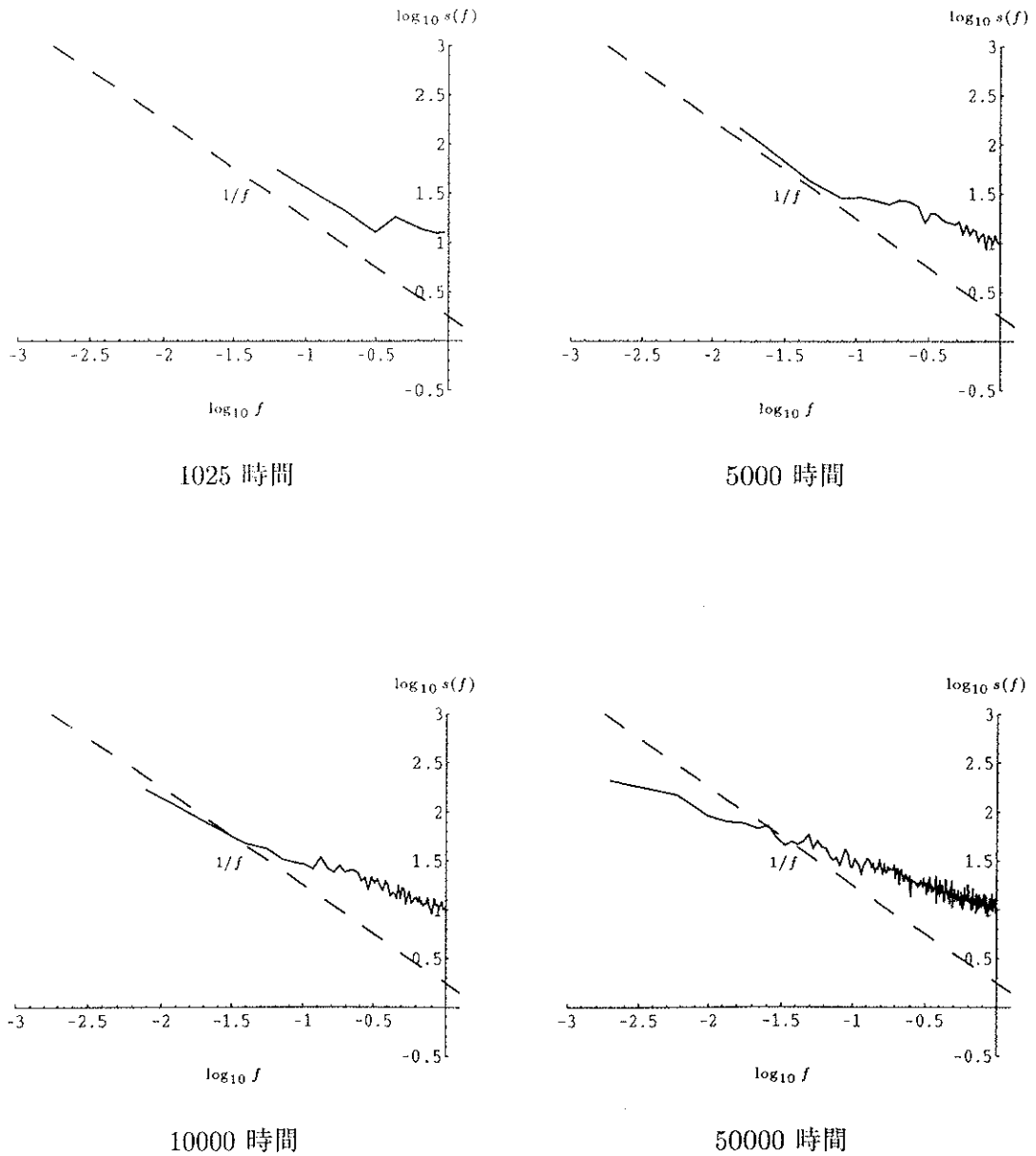


図 4.14: 空から始まる  $M/G/\infty$  システムのシミュレーション結果に対するスペクトル解析 ( $H = 0.7$ ).