

自己相似過程

高速情報通信網上を流れるトラヒックは、従来の電話の呼の発生やパケット交換網のそれとは異なる性質をもつといわれている。そのトラヒックをモデル化すると考えられているのが自己相似過程である。本章では、ATM 等の高速通信網の自己相似性を解析するために必要なモデルである自己相似過程について説明する。

2.1 自己相似過程

自己相似過程は以下のように定義される。

定義 1 (自己相似過程)

$\{Y_t; t > 0\}$ を連続時間パラメタ t をもつ確率過程、 H を自己相似パラメタ、 c を任意の正の数(伸縮パラメタ)とする。このとき、確率過程 $c^{-H}Y_{ct}$ の分布がもとの確率過程の分布 Y_t と等しくなるとき、 $\{Y_t; t > 0\}$ を自己相似パラメタ H をもつ自己相似過程という。

この定義は、 $t_i (i = 1, 2, \dots)$ を時間列とし、 c を任意の正の数とすると、

$$c^{-H} (Y_{ct_1}, Y_{ct_2}, \dots, Y_{ct_n})$$

の分布が

$$(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$$

の分布と同じであるということを意味する。

今、 Y_t は自己相似パラメタ H をもつ自己相似過程とする。 $t > 0$ に対して

$$Y_t =_d t^H Y_1 \tag{2.1}$$

となる性質は以下のような漸近的な振る舞いをもつ。十分時間が経過したとき ($t \rightarrow \infty$) の Y_t の振る舞いは

1. $H < 0 \Rightarrow Y_t \xrightarrow{d} 0$
2. $H = 0 \Rightarrow Y_t =_d Y_1$
3. $H > 0$ かつ $Y_t \neq 0 \Rightarrow |Y_t| \xrightarrow{d} \infty$

となる。また、ほとんど時間が経過していないとき ($t \rightarrow 0$) は

1. $H < 0$ かつ $Y_t \neq 0 \Rightarrow |Y_t| \xrightarrow{d} \infty$
2. $H = 0 \Rightarrow Y_t =_d Y_1$
3. $H > 0 \Rightarrow Y_t \xrightarrow{d} 0$

となる [4, 96]. ここで使われた $=_d$ は分布において等しいということの意味し、 \xrightarrow{d} は法則収束を意味する。 $H = 0$ の場合は、 Y_t と Y_1 は確率 1 で等しくなる。

定常であるようなデータをモデル化するために、定常増分をもつ自己相似過程を考える。ここで、定常増分は以下のように定義される。

定義 2 (定常増分)

任意の $k \geq 1$ と任意の k 個の時点 t_1, t_2, \dots, t_k に対し

$$Y_{t_1+c} - Y_{t_1+c-1}, Y_{t_2+c} - Y_{t_2+c-1}, \dots, Y_{t_k+c} - Y_{t_k+c-1}$$

の分布が $c \in \mathbb{R}$ に依存しないならば Y_t は定常増分をもつという。

$H < 0$ ならば、定常増分をもつ自己相似過程 Y_t は各 t に対して確率 1 で $Y_t = 0$ となる [95, 96]. 以下では、 $H > 0$ を仮定し、確率 1 で $Y_0 = 0$ である場合を考える。

2.2 自己相関係数による長記憶性

時系列データが自己相似性をもつとき、以下のような性質が現れる。

1. 集積過程 $X^{(m)}$ の分散 $\text{var}[X^{(m)}]$ が漸近的に $c_{\text{var}} m^{-\beta}$ に等しくなる。
2. 自己相関係数 $\rho(k)$ が漸近的に $c_{\rho} k^{-\beta}$ に等しくなる。

ここで c_{var} および c_{ρ} は定数とする。自己相関係数 $\rho(k)$ は、ある時系列データの確率変数列を $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ で表すとき (通信網上の場合、単位時間に発生するパケット数等)、 X_n と X_{n+k} の間の相関係数とする。集積過程とは、 $\{X^{(m)} = (X_i^{(m)}; i = 1, 2, \dots); m = 1, 2, \dots\}$ のように書け、 $X_i^{(m)}$ はもとの時系列データ X_n を m 個ずつのグループに分けたときの平均、つまり、 $X_i^{(m)} = 1/m \sum_{n=(i-1)m+1}^{im} X_n$ である。

確率変数列 $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ が定常過程であるとは、次のように定義される。

定義 3 (定常過程-弱定常過程)

確率過程 $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ が次の条件を満たすとき、

- 平均は定数. $\mu = E[X_n]$.

- 有限な 2 次モーメント $E[X_n^2] < \infty$ をもつ.
- 共分散関数 $\gamma(m, n) = E[(X_m - \mu)(X_n - \mu)]$ が時間の差 $|m - n|$ にのみ依存する.

確率過程 $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ は (弱) 定常過程であるという.

本論文では, 定常過程を弱定常過程の意味で用いる. 自己相関係数が 2. のような性質をもつとき, もとの時系列データは長記憶性をもつという. 長記憶性は次のように定義される [5, 55, 98].

定義 4 (長記憶自己相関係数)

$\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ を定常過程とし, $\rho(k)$ を X_n と X_{n+k} の自己相関係数とする. 実数 $\beta \in (0, 1)$ と, 次の性質

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L_1(tx)}{L_1(t)} = 1 \quad \forall x > 0$$

をもつ関数 $L_1(x)$ が存在して以下の関係式を満足するとき X_n を長記憶性 (long memory, long-range dependence, strong dependence, または long-range correlations) をもつ定常過程という.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{L_1(k)k^{-\beta}} = 1 \quad (2.2)$$

式 (2.2) によって与えられる長記憶性の定義は漸近的な定義である. つまり, 式 (2.2) では, 確率変数のずれ k が無限になるときの漸近的な相関係数の振る舞いに関することしか定義されていない [4].

定義 4 で用いられている $L_1(x)$ は slowly varying function と呼ばれ, この関数の例として定数や対数関数等が挙げられる. 議論を簡略化するために, 以下では $L_1(x) = c_\rho$ とする.

$\{Y_n; n = 1, 2, \dots\}$ を自己相似パラメタ H をもつ離散型自己相似過程とする. そして, Y_n とその増分過程 $X_n = Y_n - Y_{n-1}$ の相関係数を求める. 定常増分をもつ離散型自己相似過程 $\{Y_n; n = 1, 2, \dots\}$ の共分散関数を $\gamma_y(m, n) = \text{cov}(Y_m, Y_n)$ で表す. 表記を簡略化するために $E(Y_n) = 0$ と仮定する. このとき, 増分過程 $X_n = Y_n - Y_{n-1}$ の分散 σ^2 は

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(X_n - \mu)^2] \\ &= E[(Y_n - Y_{n-1})^2] \\ &= E[Y_1^2] \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる. ここで, $\mu := E[X_n] = E[Y_n - Y_{n-1}] = 0$ である. 更に, $m < n$ に対して

$$\begin{aligned} E[(Y_n - Y_m)^2] &= E[(Y_{n-m} - Y_0)^2] \\ &= E[Y_{n-m}^2] \\ &= \sigma^2(n-m)^{2H} \quad \text{式 (2.1), 式 (2.3) より} \end{aligned}$$

である。一方,

$$\begin{aligned} E[(Y_n - Y_m)^2] &= E[Y_n^2] - 2E[Y_m Y_n] + E[Y_m^2] \\ &= \sigma^2 n^{2H} - 2\gamma_y(m, n) + \sigma^2 m^{2H} \end{aligned}$$

であるから,

$$\gamma_y(m, n) = \frac{1}{2}\sigma^2 [m^{2H} - (n - m)^{2H} + n^{2H}] \quad (2.4)$$

となる。同様に X_n と X_{n+k} ($k > 0$) の自己共分散関数を計算すると,

$$\begin{aligned} \gamma(k) &:= \text{cov}(X_n, X_{n+k}) \\ &= \text{cov}(X_1, X_{k+1}) \\ &= \frac{1}{2}E \left[\left(\sum_{j=1}^{k+1} X_j \right)^2 + \left(\sum_{j=2}^k X_j \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^k X_j \right)^2 - \left(\sum_{j=2}^{k+1} X_j \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \{ E[(Y_{k+1} - Y_0)^2] + E[(Y_{k-1} - Y_0)^2] - E[(Y_k - Y_0)^2] \\ &\quad - E[(Y_k - Y_0)^2] \} \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 [(k+1)^{2H} + (k-1)^{2H} - 2k^{2H}] \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。 $k < 0$ に対しては, $\gamma(k) = \gamma(-k)$ とする。従って, 自己相関係数 $\rho(k)$ は, $k > 0$ に対して

$$\rho(k) = \frac{1}{2} [(k+1)^{2H} + (k-1)^{2H} - 2k^{2H}]$$

と与えられる。 $k < 0$ に対しては, $\rho(k) = \rho(-k)$ となる。次にテーラー展開を使って $\rho(k)$ の漸近的な振る舞いをみる。 $g(x) = (1+x)^{2H} - 2 + (1-x)^{2H}$ と定義すると, $0 < H < 1, H \neq 1/2$ に対して $\rho(k) = \frac{1}{2}k^{2H}g(k^{-1})$ となる。 $g(x)$ をテーラー展開すると, $g(x) = 2H(2H-1)x^2 + O(x^4)$ となるのでこれを代入すると,

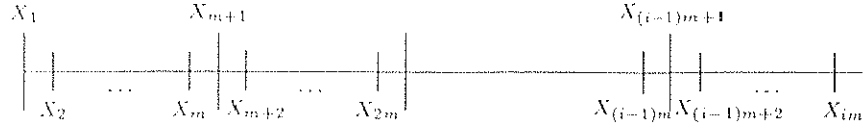
$$\begin{aligned} \rho(k) &= \frac{1}{2}k^{2H} \cdot 2H(2H-1)\frac{1}{k^2} + O(k^{2H-4}) \\ &= (2H-1)Hk^{2H-2} + O(k^{2H-4}) \end{aligned}$$

となる。故に,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{H(2H-1)k^{2H-2}} = 1 \quad (2.6)$$

となることが分かる。

式 (2.2) と式 (2.6) より, 過程 $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ は $1/2 < H < 1$ のとき, 長記憶性をもつことが分かる。 $H = 1$ の場合, $\rho(k) \equiv 1$ となり k の値に依存しなくなってしまう。また,

図 2.1: $X_i^{(m)}$ の説明.

$H > 1$ の場合, $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = \infty$ となる. これは $|\rho(k)| \leq 1$ に矛盾する. よって共分散が存在して, 自己相関係数が 0 に収束するならば $0 < H < 1$ となる.

以下では, $\{Y_n; n = 1, 2, \dots\}$ の 2 次モーメントが有限で, $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = 0$, $0 < H < 1$ と仮定する.

つまり $\{Y_n; n = 1, 2, \dots\}$ が自己相似パラメタ H ($1/2 < H < 1$) をもつ自己相過程であるときその増分過程 $X_n = Y_n - Y_{n-1}$ は長記憶性をもつことが分かる.

長記憶性を用いて, 自己相似性を次のように定義することもできる[4, 5, 55, 56, 98]. 確率過程 $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ に対して, 平均を $\mu = E[X_n]$, 分散を $\sigma^2 = E[(X_n - \mu)^2]$, 自己相関係数を $\rho(k) = E[(X_n - \mu)(X_{n+k} - \mu)]/\sigma^2$ とする. ここで, $\{X^{(m)} = (X_i^{(m)}; i = 1, 2, \dots); m = 1, 2, \dots\}$ で与えられる確率過程を考える. $X_i^{(m)}$ はもとの確率過程を大きさ m ずつに区切ってそのグループを一つのまとまりとして考えたときの i 番目のグループの平均を表す (図 2.1 参照). つまり, $X_i^{(m)}$ は

$$X_i^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{n=(i-1)m+1}^{im} X_n$$

と書ける. このとき $\{X^{(m)}; m = 1, 2, \dots\}$ を集積過程と呼ぶ. この集積過程の自己相関係数 $\rho^{(m)}(k)$ は

$$\rho^{(m)}(k) = E \left[(X_i^{(m)} - \mu)(X_{i+k}^{(m)} - \mu) \right] / \sigma^2$$

で与えられるとする. このとき, すべて m に対して $\text{var}[X^{(m)}] = \sigma^2 m^{-\beta}$ の関係が成り立ち (但し, $\beta \in (0, 1)$), かつ $k \geq 0$ で

$$\rho^{(m)}(k) = \rho(k)$$

が成り立つとき, $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ は自己相似パラメタ $H = 1 - \beta/2$ をもつ厳密な 2 次の自己相似性をもつという. また, 十分大きな k に対して,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho^{(m)}(k) = \rho(k)$$

が成り立つとき $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ は自己相似パラメタ $H = 1 - \beta/2$ をもつ漸近的な 2 次の自己相似性をもつという.

自己相関係数を用いて時系列データの特性を整理すると次のようになる.

- $0 < H < 1/2 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) < \infty$ (短記憶性)
- $H = 1/2 \Rightarrow \forall k (\neq 0), \rho(k) = 0$ (無相関)
- $1/2 < H < 1 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) = \infty$ (長記憶性)

2.3 スペクトル密度による長記憶性

スペクトル密度関数を用いても長記憶性を定義することができる。一般の確率過程に対して、平均値を引いた平均0の確率過程 $\{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ を考える。 $X^T(f)$ を区間 $[0, T]$ に制限した Fourier 変換とし、それを t が連続時間のときは

$$X^T(f) = \int_0^T X_t e^{-i2\pi ft} dt,$$

離散時間のときは、 $[0, T]$ を N 個の区間に分けて、

$$X^T(f) = \Delta \sum_{j=0}^N X_{j\Delta} e^{-i2\pi fj\Delta}$$

で表す。 ($i = \sqrt{-1}$)。ここで $T = N\Delta$ が成り立つ。スペクトル密度関数 $S(f)$ は、 $T \rightarrow \infty$ で期待値 $E[|X^T(f)|^2/T]$ が存在するとき

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{T} |X^T(f)|^2 \right]$$

として定義される [37]。 $S(f)$ の物理的意味は周波数 f Hz における単位時間あたりのエネルギー成分である。

スペクトル密度関数が与えられる例として、平均0で、かつ自己共分散関数 $\gamma(t)$ が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) dt < \infty$$

である弱定常過程が挙げられ、そのスペクトル密度関数 $S(f)$ は

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

で与えられる [37]。これは、原点でのスペクトル密度関数が

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(t) dt < \infty$$

で、有限の値をもつ。

非定常な確率過程に対してもスペクトル密度関数が与えられることが知られている。その1つの例が Brown 運動過程である。Brown 運動過程のスペクトル密度関数は

$$S(f) = c_B |f|^{-2} \quad (2.7)$$

として与えられる [87]。ここで、 c_B は定数である。この導出は第 2.4.1 節に示す。

弱定常過程と大きく異なる点は、原点で発散していることであり、これは非定常過程の特徴でもある。しかし、原点で発散している確率過程がすべて非定常な過程ではなく、原点で発散する定常過程も存在している。それが自己相似過程である。スペクトル密度関数を用いた長記憶性の定義は次のようになる [5, 55, 98]。

定義 5 (長記憶-スペクトル密度関数)

$\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ を定常過程、 $S(f)$ をスペクトル密度関数とする。実数 $\alpha \in (0, 1)$ と $x \rightarrow 0$ で $L_1(x)$ と同じ性質をもつ関数 $L_2(x)$ 、つまり

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_2(tx)}{L_2(t)} = 1 \quad \forall x > 0$$

が存在して、以下の関係式を満たすとき、 $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ は長記憶性をもつ定常過程という。

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{S(f)}{L_2(f)|f|^{-\alpha}} = 1 \quad (2.8)$$

ここで α と定義 4 で用いられた β の間には $\alpha = 1 - \beta$ の関係がある。 $L_1(x)$ と同様に以下では $L_2(x)$ を定数 c_s として議論する。式 (2.8) は、スペクトル密度関数が原点で発散するが、原点の近傍では $1/f$ より緩やかであることを示している。逆に、スペクトル密度関数が原点の近傍で

$$S(f) \approx c_s |f|^{-\alpha} \quad \alpha > 1$$

のときは、非定常過程であるという [87]。従って、スペクトル密度関数を推定することにより長記憶性、短記憶性、及び非定常性を検証することができる。

一方、 X_n のスペクトル密度関数は Sinai [74] によると、 X_n の 2 次モーメントが有限で、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = 0$$

かつ $0 < H < 1$ のとき

$$S(f) = 2c_{ss} |e^{i2\pi f} - 1|^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j + f|^{-2H-1}, \quad f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

で与えられる。ここで、 $c_{ss} = c_{ss}(H, \sigma^2) = \sigma^2 \sin(\pi H) \Gamma(2H + 1)$ 、 $\sigma^2 = \text{var}(X_n)$ 、 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ である。このスペクトル密度関数の原点近傍での振舞いはテーラー展開によって

$$S(f) = c_{ss} |f|^{1-2H} + O(|f|^{\min(3-2H, 2)})$$

となる。従って、 $H \in (1/2, 1)$ のとき、自己相似過程の増分過程は長記憶性をもつ。逆に、長記憶性をもつ過程は、スペクトル密度関数が原点近傍で漸近的に $|f|^{-\alpha}$ であるため、 $H = (1 + \alpha)/2$ の漸近的自己相似過程とも呼ばれる。

自己相関係数を用いた定義 4 と スペクトル密度関数を用いた定義 5 は次の定理により同値である [4].

定理 1

(i) $0 < \beta = 2 - 2H < 1$ となる β に対して定義 4 の式 (2.2) が成り立つと仮定する。このときスペクトル密度関数 $S(f)$ が存在し、

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{S(f)}{c_s |f|^{1-2H}} = 1$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} c_s &= \sigma^2 \pi^{-1} c_\rho \Gamma(2H - 1) \sin(\pi - \pi H) \\ \sigma^2 &= \text{var}[X_n] \\ \Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

である。

(ii) $0 < \alpha = 2H - 1 < 1$ となる α に対して定義 5 の式 (2.8) が成り立つと仮定する。このとき、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho(k)}{c_\rho k^{2H-2}} = 1$$

となる。ここで、

$$c_\rho = \frac{2c_s \Gamma(2 - 2H) \sin(\pi H - \frac{\pi}{2})}{\sigma^2}$$

である。

最後に、スペクトル密度関数 $S(f)$ を用いてその原点近傍 ($f \rightarrow 0$) での振舞いについてまとめると、次のように分類することができる。

$$S(f) \approx \begin{cases} c_s |f|^{-\alpha} & (0 < \alpha < 1) & \text{長記憶} \\ c_s |f|^{-\alpha} & (\alpha > 1) & \text{非定常} \\ c_s & & \text{短記憶} \end{cases}$$

また、 $S(f) \approx f^{-1}$ となるとき、この特性を $1/f$ 特性という。

2.4 長記憶性をもつ確率過程

この節では長記憶性をもつ確率過程のモデル化の例としてよく用いられる FGN と fractional ARIMA 過程について説明する.

2.4.1 Fractional Brownian motion 過程と fractional Gaussian noise

まず, Brown 運動過程を次のように定義する.

定義 6 (Brown 運動過程)

$\{B(t); t > 0\}$ を連続時間型の確率過程とする. 確率過程 $B(t)$ が次の性質を満たすとき, $B(t)$ を Brown 運動過程と呼ぶ.

1. 増分 $B(t) - B(s)$ は, 平均 0, 分散 $\sigma^2|t - s|$ の正規分布に従う.
2. $B(t)$ は独立増分をもつ.
3. 確率 1 で $B(0) = 0$ で, $B(t)$ は $t = 0$ で連続である.

Brown 運動過程 $\{B(t); t > 0\}$ が自己相似パラメタ $H = 1/2$ の自己相似性をもつ. このことは定義 6 より示すことができる. $B(ct)$ の平均は,

$$E[B(ct)] = E[B(ct) - B(0)] = 0 = c^{1/2}E[B(t)]$$

となり, $t > s$ に対する共分散 $\text{cov}(B(t), B(s))$ は

$$\text{cov}(B(t), B(s)) = E[(B(t) - B(s))(B(s) - B(0))] + E[B^2(s)]$$

と書ける. ここで, $B(t) - B(s)$ と $B(s) - B(0)$ は独立であるから, $E[(B(t) - B(s))(B(s) - B(0))] = 0$ となり

$$\begin{aligned} \text{cov}(B(t), B(s)) &= E[B^2(s)] \\ &= E[(B(s) - B(0))^2] \\ &= \text{var}[B(s)] \\ &= \sigma^2 s \end{aligned}$$

となる. 同様に $s > t$ のときは, $\text{cov}(B(t), B(s)) = \sigma^2 t$ となり, これらをまとめると,

$$\text{cov}(B(t), B(s)) = \sigma^2 \min(t, s) \tag{2.10}$$

と書ける. 故に, 任意の $c > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \text{cov}(B(ct), B(cs)) &= c\sigma^2 \min(t, s) \\ &= \text{cov}(c^{1/2}B(s), c^{1/2}B(t)) \end{aligned}$$

となる. よって $\{B(t); t > 0\}$ は自己相似パラメタ $H = 1/2$ の自己相似性をもつことが分かる [4].

定義 6 から, Brown 運動過程 $B(t)$ のスペクトル密度関数を求める. Brown 運動過程 $\{B(t); t > 0\}$ の連続時間 Fourier 変換は

$$X^T(f) = \int_0^T B(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

で与えられる. このとき, スペクトル密度関数は

$$\begin{aligned} E[|X^T(f)|^2] &= E[X^T(f)\overline{X^T(f)}] \\ &= E\left[\int_0^T \int_0^T B(t)e^{-i2\pi ft} B(s)e^{i2\pi fs} ds\right] \\ &= \int_0^T \int_0^T e^{-i2\pi ft} e^{i2\pi fs} E[B(t)B(s)] dt ds \end{aligned} \quad (2.11)$$

と書ける. $\overline{X^T(f)}$ は $X^T(f)$ の共役であり, $\overline{X^T(f)} = \int_0^T B(t)e^{i2\pi ft} dt$ と書ける. ここで, 式 (2.10) より $\text{cov}(B(t), B(s)) = \sigma^2 \min(t, s)$ となるので, 式 (2.11) は

$$\begin{aligned} E[|X^T(f)|^2] &= \sigma^2 \int_0^T \int_0^T e^{-i2\pi ft} e^{i2\pi fs} E[B(t)B(s)] dt ds \\ &= \sigma^2 \left[\int_0^T \int_0^s t e^{-i2\pi ft} dt e^{i2\pi fs} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_s^T s e^{-i2\pi ft} dt e^{i2\pi fs} ds \right] \\ &= \frac{2\sigma^2}{(2\pi f)^2} \left[T + \frac{\sin(2\pi fT)}{(2\pi f)^3} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

と変形できる. 式 (2.12) の極限を取ると,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{|X^T(f)|^2}{T}\right] = \frac{2\sigma^2}{(2\pi)^2} f^{-2}$$

となる. これで式 (2.7) が示された.

次に, fractional Brownian motion (FBM) 過程を考える. FBM 過程は通常の Brown 運動の重み付け平均として定義することができる [4].

定義 7 (fractional Brownian motion 過程)

s を正の定数とし, 加重関数 $w_H(t, u)$ を

$$w_H(t, u) = \begin{cases} 0 & t \leq u \\ (t-u)^{H-\frac{1}{2}} & 0 \leq u < t \\ (t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} & u < 0 \end{cases}$$

と定義する. 更に, $\{B(t); t > 0\}$ は, 定義 6 で $\sigma^2 = 1$ をもつ Brown 運動 (標準 Brown 運動) であるとする. このとき, $0 < H < 1$ となる H に対して, $\{B_H(t); t > 0\}$ を

$$B_H(t) = s \int_{-\infty}^t w_H(t, u) dB(u) \quad (2.13)$$

で定義する. この $\{B_H(t); t > 0\}$ を自己相似パラメタ H をもつ fractional Brownian motion (FBM) 過程と呼ぶ.

文献 [57] では, s の値として $\Gamma(H + 1/2)$ を用いている.

$\{B_H(t); t > 0\}$ が自己相似パラメタ H の自己相似性をもつことは $\{B(t); t > 0\}$ の自己相似性から示すことができる. まず,

$$w(ct, u) = c^{H-\frac{1}{2}} w(t, uc^{-1})$$

となることに注意する. このとき, 式 (2.13) は

$$B_H(ct) = s \int_{-\infty}^t w_H(ct, u) dB(u) = sc^{H-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^t w_H(t, uc^{-1}) dB(u)$$

となり, $v = uc^{-1}$ と変数変換すると,

$$B_H(t) = sc^{H-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^t w_H(t, v) dB(cv)$$

$\{B(t); t > 0\}$ の定義から, $B(cv) = c^{1/2} B(v)$ となるので,

$$B_H(t) = sc^{H-\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^t w_H(t, v) dB(v) = c^H B_H(t)$$

となることが分かる. 従って, 定義 7 で定義された $B_H(t)$ は自己相似パラメタ H をもつ自己相似過程である. $\{B_H(t); t > 0\}$ が定常増分をもつことは, $B_H(t+h) - B_H(t)$ において $s = u - t$ と変数変換することによって簡単に示すことができる [58, 72]. このとき, $B_H(t)$ と $B_H(s)$ の共分散関数は式 (2.4) の導出において離散時間パラメタを連続時間パラメタに置き換えることにより,

$$\gamma(t, s) = \frac{C_H}{2} \left[|s|^{2H} - |t-s|^{2H} + |s|^{2H} \right]$$

となる. ここで, $C_H = E[(B_H(t) - B_H(t-1))^2]$ である. この共分散関数をもつ Gauss 過程として, FBM 過程を定義する場合もある [72].

Fractional Gaussian noise (FGN) は FBM 過程の増分過程として定義される. 離散型の FGN は定義より,

$$\begin{aligned} \Delta B_H(k) &= B_H(k) - B_H(k-1) \\ &= \int_{-\infty}^k K_H(k-u) dB(u) \end{aligned}$$

と書ける. ここで, $K_H(u)$ は,

$$K_H(u) = \begin{cases} u^{H-\frac{1}{2}} & 0 < u < 1 \\ u^{H-\frac{1}{2}} - (u-1)^{H-\frac{1}{2}} & u > 1 \end{cases}$$

で与えられる. このとき, FBM 過程は定常増分をもつ自己相似パラメタが H の自己相似過程であるから, その自己共分散関数 $E[B(i)B(i+k)]$ は式 (2.5) の導出と同様に,

$$E[B(i)B(i+k)] = \frac{C_H}{2} [(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}]$$

となる. この C_H は FBM 過程の共分散関数を求めたときのもと同じである. つまり, C_H は FGN の分散である. 連続型の FGN に関する議論は [58] に書かれている.

2.4.2 Fractional autoregressive integrated moving average 過程

まず, Box and Jenkins [10] によって提唱された autoregressive integrated moving average (ARIMA) 過程を考える. $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ は離散時間パラメタをもつ平均 0 の確率過程とする. B を $BX_n = X_{n-1}$ となるラグ演算子, Δ を $\Delta = 1 - B$ となる差分演算子とする. p と q を整数とし, 次の 2 つの多項式を定義する.

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^p \phi_j x^j, \quad \phi_0 = 1$$

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^q \psi_j x^j, \quad \psi_0 = 1$$

$\phi(x) = 0$ と $\psi(x) = 0$ を満たすすべての解は単位円の外側にあると仮定する. 更に, $\{\varepsilon_i; i = 1, 2, \dots\}$ を平均 0, 分散 σ_ε^2 の独立同一な正規分布に従う確率過程とする. このとき, autoregressive moving average (ARMA) 過程 ARMA(p, q) は

$$\phi(B)X_n = \psi(B)\varepsilon_i \quad (2.14)$$

の定常解として定義される. また, d 次の差分 $\Delta^d = (1 - B)^d$ に対して

$$\phi(B)\Delta^d X_n = \psi(B)\varepsilon_i \quad (2.15)$$

が成り立つとき, 確率過程 $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ を ARIMA 過程 ARIMA(p, d, q) と定義する¹. ARIMA(p, d, q) では, 通常 d は正の整数であるが, fractional ARIMA 過程では, d は実数になりうる. そのため, 差分演算子は

$$\Delta^d = (1 - B)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-1)^k B^k$$

¹Box and Jenkins [10] による ARIMA 過程の定義は $\psi(x)$ の次元を $q+d$ で表し $\psi(x) = 0$ を満たす解のうち d 個は 1, それ以外の q 個は単位円の外側にあるとしている.

と定義する. d が正整数の場合は, 最初の $d+1$ 項だけの演算と考える. ここで, 二項係数 $\binom{d}{k}$ は, Γ 関数を使って,

$$\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}$$

と書ける. 以上より, fractional ARIMA 過程を次のように定義する[4, 38].

定義 8 (fractional autoregressive integrated moving average モデル)

$\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ を定常過程とし, $-1/2 < d < 1/2$ となる d に対して

$$\phi(B)\Delta^d X_n = \psi(B)\varepsilon_i \quad (2.16)$$

を満たす. このとき, $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ を fractional autoregressive integrated moving average (fractional ARIMA) 過程という.

$0 < d < 1/2$ のとき, $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ は長記憶性をもつ. また, $d > 1/2$ のときは, 非定常性を示すが, $X_n - X_{n-1}$ と差分を取ることで, d の次元を 1 だけ下げることができる.

次に, fractional ARIMA モデルのスペクトル密度関数を計算する.

$$\tilde{X}_i = \phi^{-1}(B)\psi(B)\varepsilon_i \quad (2.17)$$

の関係を満たす ARMA(p, q) のスペクトル密度関数は

$$S_{\text{ARMA}}(f) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 |\psi(e^{i2\pi f})|^2}{|\phi(e^{i2\pi f})|^2}$$

と書ける [4, 10, 76]. 一般に, $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ がスペクトル密度関数 $S_Y(f)$ をもつ確率過程 $\{Y_n; n = 1, 2, \dots\}$ の線形フィルタ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)Y_{n-k}$ の形で表されるとき, $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ のスペクトル密度関数は $|A(f)|^2 S_Y(f)$, $A(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k)e^{i2\pi kf}$ で与えられる [65, 69].

今, fractional ARIMA モデルは式 (2.16) のように与えられているので,

$$\begin{aligned} X_n &= \Delta^{-d}\phi(B)^{-1}\psi(B)\varepsilon_i \\ &= \Delta^{-d}\tilde{X}_i \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-d}{k} (-1)^k B^k \tilde{X}_i \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-d}{k} (-1)^k \tilde{X}_{i-k} \end{aligned}$$

となり, これより,

$$\begin{aligned} S(f) &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-d}{k} (-1)^k e^{i2\pi kf} \right|^2 S_{\text{ARMA}}(f) \\ &= \left| (1 - e^{i2\pi f})^{-d} \right|^2 S_{\text{ARMA}}(f) \\ &= |1 - e^{i2\pi f}|^{-2d} S_{\text{ARMA}}(f) \\ &= |2 \sin(\pi f)|^{-2d} S_{\text{ARMA}}(f) \end{aligned}$$

となる. 更に, $\lim_{f \rightarrow 0} f^{-1} 2 \sin(\pi f) = 2\pi$ (定数) となることから, スペクトル密度関数の原点近傍での振る舞いは,

$$S(f) \approx \frac{\sigma_{2\varepsilon} |\psi(1)|^2}{|\phi(1)|^2} |2\pi f|^{-2d} = |2\pi|^{-2d} S_{\text{ARMA}}(0) |f|^{-2d}$$

となることが分かる. これが長記憶性をもつとき, $2d = 2H - 1$ の関係より,

$$d = H - \frac{1}{2}$$

となる.

$0 < d < 1/2$ に対する, 自己相関係数の $k \rightarrow \infty$ のときの漸近的性質は定理 1 より,

$$\rho(k) \approx \frac{2\sigma_{\varepsilon}^2 |\psi(1)|^2}{\pi \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df |\phi(1)|^2} \Gamma(1 - 2d) \sin(\pi d) |k|^{2d-1}$$

となる.