第 6 章

対称ポーリングシステムの待ち時間の 2 次モーメントの解析

ポーリングシステムとは，N 個の待ち行列を 1 つのサーバが順番にサービスするシステムである．このようなシステムでは 1 つの資源を順番に割り当てることによって多くのユーザーが利用できる．通信システムにおける応用例として，トークンリング LAN や高速 LAN のための FDDI の性能評価のために用いられる．

6.1 基本モデル

システム内に N 個の待ち行列があるとする．待ち行列にはサーバが動く順番に番号 $i(=1,2,\ldots,N)$ が付けられている．待ち行列 i には率 λ_i の Poisson 過程に従って客が到着する．待ち行列 i の客のサービス時間の分布関数の LST, 平均, n 次モーメントをそれぞれ $B^*(s)$, b_i, $b_i^{(n)}$ で表す．システムの総負荷は

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \quad ; \quad \rho_i = \lambda_i b_i$$

である．各待ち行列で客は先着順でサービスされ，各待ち行列のバッファは無限とする．システム全体を安定させるために $\bar{\rho} < 1$ と仮定する．待ち行列 i から 待ち行列 $i+1$ への移動時間の分布関数の LST, 平均, n 次モーメントをそれぞれ $R_i^*(s), r_i, r_i^{(n)}$ で表す．また，分散は $\delta_i^2 := r_i^{(2)} - r_i^2$ である．平均移動時間は

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{N} r_i$$

である．移動時間は到着過程，及び サービス過程とは独立であると仮定する．待ち行列 i の客の待ち時間の LST, 平均, n 次モーメントをそれぞれ $W_i^*, E[W_i], E[W_i^n]$ で表す．すべて

の待ち行列の到着過程, サービス過程とすべての移動時間が待ち行列の添え字 i に依存しないシステムを対称なシステムという. 対称なシステムでは添え字 i を省略して $\rho_i = \rho = \lambda b$ と書ける. 故に $\bar{\rho} = N\rho, \bar{r} = Nr$ となる.

6.2 全処理式サービスシステム

まずはじめに全処理式サービスシステムを考える. このシステムでは, サーバは各待ち行列に客がいなくなるまでサービスをし続ける. サービス中に到着した客も同じサービス期間内にサービスされる. 時刻に t に待ち行列 i にいる客数を $L_i(t)$ とする. 時刻 $t = \tau_i(m)$ での $[L_1(t), L_2(t), \ldots, L_N(t)]$ の結合母関数を, サーバが待ち行列 i に m 回目に巡回してきたときの m の極限として,

$$F_i(z_1, z_2, \ldots, z_N) := \lim_{m\to\infty} E\left[\prod_{j=1}^{N} z_j^{L_j(\tau_i(m))}\right] \tag{6.1}$$

と定義する. 時刻 $t = \tau_i(m)$ で各待ち行列の客の数を数えることにより,

$$\begin{aligned} &F_{i+1}(z_1, z_2, \ldots, z_N) \\ &= R_i^*\left[\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j - \lambda_j z_j)\right] F_i\left(z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, \Theta_i^*\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}(\lambda_j - \lambda_j z_j)\right], z_{i+1}, \ldots, z_N\right) \end{aligned}$$

の関係を得る. ここで $\Theta_i^*(s)$ は, 待ち行列 i の稼働期間の長さの分布関数の LST であり, 方程式

$$\Theta_i^*(s) = B_i^*[s + \lambda_i - \lambda_i \Theta_i^*(s)]$$

を満たす.

全処理式先着順サービスシステムでは, 待ち時間 W_i の分布関数の LST は

$$W_i^*(s) = \frac{1-\bar{\rho}}{\bar{r}} \cdot \frac{1 - F_i(1 - s/\lambda_i)}{s - \lambda_i + \lambda_i B_i^*(s)} \tag{6.2}$$

で与えられる. ここで, $t = \tau_i(m)$ での $L_i(t)$ の周辺分布の母関数は, m の極限として

$$F_i(z) := \lim_{m\to\infty} E[z^{L_i(\tau_i(m))}] = F_i(1, \ldots, 1, z, 1, \ldots, 1)$$

で定義される. $F_i(1, \ldots, 1, z, 1, \ldots, 1)$ の z の位置は i 番目である. この式の導出は [79]に記述してある.

待ち時間の 2 次モーメントを見つけるために, 各偏導関数を

$$
\begin{aligned}
f_i(j) &:= \left.\frac{\partial F_i(z_1, z_2, \dots, z_N)}{\partial z_j}\right|_{z_1=z_2=\dots=z_N=1} \\
f_i(j,k) &:= \left.\frac{\partial^2 F_i(z_1, z_2, \dots, z_N)}{\partial z_j \partial z_k}\right|_{z_1=z_2=\dots=z_N=1} \\
f_i(j,k,l) &:= \left.\frac{\partial^3 F_i(z_1, z_2, \dots, z_N)}{\partial z_j \partial z_k \partial z_l}\right|_{z_1=z_2=\dots=z_N=1} \\
& \qquad\qquad i,j,k,l = 1,2,\dots,N
\end{aligned}
$$

と書く. $\{f_i(j); i,j = 1,2,\dots,N\}$ に対する N^2 個の方程式は

$$
f_{i+1}(i) = r_i\lambda_i; \qquad f_{i+1}(j) = r_i\lambda_j + f_i(j) + \frac{f_i(i)\lambda_j b_i}{1-\rho_i} \qquad j \neq i
$$

で与えられ, これを解くことにより,

$$
f_i(i) = \frac{\lambda_i(1-\rho_i)\bar{r}}{1-\bar{\rho}}; \qquad f_i(j) = \lambda_j \left[\sum_{k=j}^{i-1} r_k + \frac{\bar{r}\sum_{k=j+1}^{i-1}\rho_k}{1-\bar{\rho}} \right] \quad j \neq i \tag{6.3}
$$

が得られる. 式 (6.2) と 式 (6.3) から, W_i の平均と 2 次モーメントは

$$
E[W_i] = \frac{\lambda_i b_i^{(2)}}{2(1-\rho_i)} + \frac{(1-\bar{\rho})f_i(i,i)}{2(1-\rho_i)\lambda_i^2\bar{r}} \tag{6.4}
$$

$$
E[W_i^2] = \frac{\lambda_i b_i^{(3)}}{3(1-\rho_i)} + \frac{\left[\lambda_i b_i^{(2)}\right]^2}{2(1-\rho_i)^2} + \frac{(1-\bar{\rho})f_i(i,i,i)}{3(1-\rho_i)\lambda_i^3\bar{r}} + \frac{(1-\bar{\rho})b_i^{(2)}f_i(i,i)}{2(1-\rho_i)^2\lambda_i\bar{r}} \tag{6.5}
$$

と表される. よって $E[W_i]$ を得るために $f_i(i,i)$ を計算すればよい. $\{f_i(j,k); i,j,k = 1,2,\dots,N\}$ に対する N^3 個の方程式は

$$
\begin{aligned}
f_{i+1}(j,k) =& \lambda_j\lambda_k r_i^{(2)} + r_i\lambda_k f_i(j) + r_i\lambda_j f_i(k) + f_i(i)\lambda_j\lambda_k \left[\frac{2r_i b_i}{1-\rho_i} + \frac{b_i^{(2)}}{(1-\rho_i)^3} \right] \\
&+ \frac{b_i}{1-\rho_i}\left[f_i(i,j)\lambda_k + f_i(i,k)\lambda_j\right] + f_i(j,k) + \frac{f_i(i,i)\lambda_j\lambda_k b_i^2}{(1-\rho_i)^2} \\
& \qquad\qquad j \neq i, k \neq i \qquad (6.6) \\
f_{i+1}(i,j) =& \lambda_i\lambda_j r_i^{(2)} + \lambda_i r_i \left[f_i(j) + \frac{f_i(i)\lambda_j b_i}{1-\rho_i} \right] \qquad j \neq i \qquad (6.7) \\
f_{i+1}(i,i) =& \lambda_i^2 r_i^{(2)} \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

で与えられる．一般に方程式 (6.6) – (6.8) の明示的な解を求めることはできないが，対称なシステムに対する $f_i(i,i)$ は

$$f_i(i,i) = \frac{\delta^2\lambda^2 N(1-\rho)}{1-N\rho} + \frac{N(N-1)\lambda^3 r b^{(2)}}{(1-N\rho)^2} + \frac{N^2 r^2 \lambda^2 (1-\rho)^2}{(1-N\rho)^2}$$

と与えられる．ここで，$\delta^2 = r^{(2)} - r^2$ である．式 (6.4) にこの $f_i(i,i)$ を代入して，対称な全処理式サービスシステムの平均待ち時間を得られる [33]．

$$E[W] = \frac{\delta^2}{2r} + \frac{Nr(1-\rho)}{2(1-N\rho)} + \frac{N\lambda b^{(2)}}{2(1-N\rho)} \tag{6.9}$$

同様に 2 次モーメント $E[W^2]$ を求めるためには $f_i(i,i,i)$ が必要になる．

$\{f_i(j,k,l); i,j,k,l = 1,2,\ldots,N\}$ に対する N^4 個の方程式は

$$\begin{aligned}
f_{i+1}(j,k,l) &= \lambda_j\lambda_k\lambda_l r_i^{(3)} \\
&+ \left[\lambda_j\lambda_k f_i(l) + \lambda_j\lambda_l f_i(k) + \lambda_k\lambda_l f_i(j) + \frac{3\lambda_j\lambda_k\lambda_l b_i f_i(i)}{1-\rho_i}\right] r_i^{(2)} \\
&+ \Bigg[\lambda_j f_i(k,l) + \lambda_k f_i(j,l) + \lambda_l f_i(j,k))r_i \\
&+ \frac{2b_i(\lambda_j\lambda_k f_i(i,l) + \lambda_j\lambda_l f_i(i,k) + \lambda_k\lambda_l f_i(i,j))}{1-\rho_i}\Bigg] r_i \\
&+ 3\lambda_j\lambda_k\lambda_l r_i\left[\frac{b_i^2 f_i(i,i)}{(1-\rho_i)^2} + \frac{b_i^{(2)} f_i(i)}{(1-\rho_i)}\right] + \lambda_j\lambda_k\lambda_l\left[\frac{3\lambda_i {b_i^{(2)}}^2}{(1-\rho_i)^5} + \frac{b_i^{(3)}}{(1-\rho_i)^4}\right] f_i(i) \\
&+ \left[\lambda_j\lambda_k f_i(i,l) + \lambda_j\lambda_l f_i(i,k) + \lambda_k\lambda_l f_i(i,j) + \frac{3\lambda_j\lambda_k\lambda_l b_i f_i(i,i)}{1-\rho_i}\right] \frac{b_i^{(2)}}{(1-\rho_i)^3} \\
&+ \frac{\lambda_j\lambda_k\lambda_l b_i^3 f_i(i,i,i)}{(1-\rho_i)^3} + [\lambda_j\lambda_k f_i(i,i,l) + \lambda_j\lambda_l f_i(i,i,k) + \lambda_k\lambda_l f_i(i,i,j)] \\
&\times \frac{b_i^2}{(1-\rho_i)^2} + [\lambda_j f_i(i,k,l) + \lambda_k f_i(i,j,l) + \lambda_l f_i(i,j,k)] \frac{b_i}{1-\rho_i} + f_i(j,k,l) \\
&\qquad j \neq i, k \neq i, l \neq i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{i+1}(i,j,k) &= \lambda_i\lambda_j\lambda_k r_i^{(3)} + \lambda_i\left[\lambda_j f_i(k) + \lambda_k f_i(j) + \frac{2\lambda_j\lambda_k b_i f_i(i)}{1-\rho_i}\right] r_i^{(2)} + \lambda_i r_i f_i(j,k) \\
&+ \frac{(\lambda_j f_i(i,k) + \lambda_k f_i(i,j))\rho_i r_i}{1-\rho_i} + \frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_k r_i b_i^2 f_i(i,i)}{(1-\rho_i)^2} + \frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_k r_i b_i^{(2)} f_i(i)}{(1-\rho_i)^3} \\
&\qquad j \neq i, k \neq i
\end{aligned}$$

$$f_{i+1}(i,i,j) = \lambda_i^2\lambda_j r_i^{(3)} + \lambda_i^2 r_i^{(2)} f_i(j) + \frac{\lambda_i\lambda_j\rho_i f_i(i)}{1-\rho_i} \qquad j \neq i$$

$$f_{i+1}(i,i,i) = \lambda_i^3 r_i^{(3)}$$

となる．一般の N に対して対称なシステムでさえ $f_i(i,i,i)$ を明示的に求めることができないので，本論文では，$N=2,3,4$ の場合について *Mathematica* を用いて解いた．その結果，待ち時間の 2 次モーメントは次のようになる．

$$N=2:$$

$$E[W^2] = \frac{2-\rho+2\rho^2}{3\left(1-\rho+\rho^2\right)}\left[\frac{r^{(3)}}{2r}+\frac{\lambda b^{(3)}}{1-2\rho}\right]+\frac{\left(2-\rho+2\rho^2\right)\lambda b^{(2)}}{(1-2\rho)\left(1-\rho+\rho^2\right)}\left[\frac{\delta^2}{2r}+\frac{\lambda b^{(2)}}{1-2\rho}\right] + \frac{\left(2-3\rho+4\rho^2\right)\delta^2}{2(1-2\rho)\left(1-\rho+\rho^2\right)}+\frac{\left(2-5\rho+6\rho^2-4\rho^3\right)r^2}{2(1-2\rho)^2\left(1-\rho+\rho^2\right)}+\frac{(3-2\rho)\lambda r b^{(2)}}{(1-2\rho)^2} \tag{6.10}$$

$$N=3:$$

$$E[W^2] = \frac{1-2\rho+2\rho^2-3\rho^3}{1-3\rho+4\rho^2-3\rho^3}\left[\frac{r^{(3)}}{3r}+\frac{\lambda b^{(3)}}{1-3\rho}\right] + \frac{\left(9-28\rho+39\rho^2-45\rho^3+27\rho^4\right)\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)(1-3\rho)\left(1-3\rho+4\rho^2-3\rho^3\right)}\left[\frac{\delta^2}{3r}+\frac{\lambda b^{(2)}}{1-3\rho}\right] + \frac{\left(2-7\rho+13\rho^2-12\rho^3\right)\delta^2}{(1-3\rho)\left(1-3\rho+4\rho^2-3\rho^3\right)}+\frac{\left(8-37\rho+76\rho^2-93\rho^3+54\rho^4\right)r^2}{3(1-3\rho)^2\left(1-3\rho+4\rho^2-3\rho^3\right)} + \frac{3(5-3\rho)\lambda r b^{(2)}}{2(1-3\rho)^2} \tag{6.11}$$

$$N=4:$$

$$E[W^2] = \frac{4-14\rho+28\rho^2-51\rho^3+46\rho^4-40\rho^5}{3(1-2\rho)\left(1-3\rho+7\rho^2-7\rho^3+5\rho^4\right)}\left[\frac{r^{(3)}}{4r}+\frac{\lambda b^{(3)}}{1-4\rho}\right] + \frac{\left(8-22\rho+51\rho^2-72\rho^3+66\rho^4-40\rho^5\right)\lambda b^{(2)}}{(1-\rho)(1-4\rho)\left(1-3\rho+7\rho^2-7\rho^3+5\rho^4\right)}\left[\frac{\delta^2}{4r}+\frac{\lambda b^{(2)}}{1-4\rho}\right] + \frac{3\left(4-22\rho+68\rho^2-127\rho^3+130\rho^4-80\rho^5\right)\delta^2}{4(1-2\rho)(1-4\rho)\left(1-3\rho+7\rho^2-7\rho^3+5\rho^4\right)} + \frac{\left(20-134\rho+444\rho^2-943\rho^3+1278\rho^4-1064\rho^5+480\rho^6\right)r^2}{4(1-2\rho)(1-4\rho)^2\left(1-3\rho+7\rho^2-7\rho^3+5\rho^4\right)} + \frac{2(7-4\rho)\lambda r b^{(2)}}{(1-4\rho)^2} \tag{6.12}$$

6.3 ゲート式サービスシステム

次にゲート式サービスシステムを考える．このシステムでは，サーバが待ち行列に到着した瞬間にその待ち行列に存在する客しかサービスしない．サービス期間中にその待ち行列に到着した客は次にサーバが訪れてくるまでサービスを受けられない．ゲート式サービスシス

テムでは，式 (6.1) で定義された結合母関数 $F_i(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ は方程式

$$
\begin{aligned}
&F_{i+1}(z_1, z_2, \ldots, z_n) \\
&= B_i^*\left[\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j - \lambda_j z_j)\right] F_i\left(z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, B_i^*\left[\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j - \lambda_j z_j)\right], z_{i+1}, \ldots, z_N\right)
\end{aligned}
$$

を満たす．この式から，第 6.2 節と同様の方法により $f_i(i), f_i(i,i), f_i(i,i,i)$ を求めることができる．$\{f_i(j); i, j = 1, 2, \ldots, N\}$ についての N^2 個の方程式は

$$
f_{i+1}(i) = r_i\lambda_i + \rho_i f_i(i); \qquad f_{i+1}(j) = r_i\lambda_j + \lambda_j b_i f_i(i) + f_i(j) \qquad j \neq i
$$

である．これを解くことにより，

$$
f_i(i) = \frac{\lambda_i \bar{r}}{1-\rho}; \qquad f_i(j) = \lambda_j \left[\sum_{k=j}^{i-1} r_k + \frac{\bar{r}\sum_{k=j}^{i-1}\rho_k}{1-\bar{\rho}}\right] \qquad j \neq i
$$

となる．$\{f_i(j,k); i, j, k = 1, 2, \ldots, N\}$ についての N^3 個の方程式は

$$
\begin{aligned}
f_{i+1}(j,k) &= \lambda_j\lambda_k r_i^{(2)} + r_i\lambda_k f_i(j) + r_i\lambda_j f_i(k) + f_i(i)\lambda_j\lambda_k(2r_ib_i + b_i^{(2)}) \\
&\quad + f_i(j,k) + b_i\lambda_k f_i(i,j) + b_i\lambda_j f_i(i,k) + b_i^2\lambda_j\lambda_k f(i,i) \qquad j \neq i, k \neq i \qquad (6.13) \\
f_{i+1}(i,j) &= \lambda_i\lambda_j r_i^{(2)} + r_i\lambda_i f_i(j) + f_i(i)\lambda_i\lambda_j(2r_ib_i + b_i^{(2)}) + \lambda_i b_i f_i(i,j) \qquad (6.14) \\
&\quad + \lambda_i\lambda_j b_i^2 f_i(i,i) \qquad j \neq i \qquad (6.15) \\
f_{i+1}(i,i) &= \lambda_i^2 r_i^{(2)} + f_i(i)\lambda_i^2(2r_ib_i + b_i^{(2)}) + (\lambda_i b_i)^2 f_i(i,i) \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

と与えられる．対称なシステムに対して，方程式 (6.13) – (6.16) を解くと

$$
f_i(i,i) = \frac{\delta^2\lambda^2 N}{(1-N\rho)(1+\rho)} + \frac{N^2\lambda^3 r b^{(2)}}{(1-N\rho)^2(1+\rho)} + \frac{N^2 r^2\lambda^2}{(1-N\rho)^2}
$$

となる．

更に， $\{f_i(j,k,l,m); i,j,k,l=1,2,\ldots,N\}$ に対する N^4 個の方程式は

$$\begin{aligned}
f_{i+1}(j,k,l) &= \lambda_i\lambda_j\lambda_k r_i^{(3)} + [\lambda_k\lambda_l f_i(j) + \lambda_j\lambda_k f_i(l) + \lambda_j\lambda_l f_i(k) + 3\lambda_j\lambda_k\lambda_l b_i f_i(i)]\, r_i^{(2)} \\
&+ \Big[\, 3\lambda_j\lambda_k\lambda_l b_i^{(2)} f_i(i) + 3\lambda_j\lambda_k\lambda_l b_i^2 f_i(i,i) + \lambda_j f_i(k,l) + \lambda_k f_i(j,l) \\
&+\lambda_l f_i(j,k) + \{2\lambda_k\lambda_l f_i(i,j) + 2\lambda_j\lambda_l f_i(i,k) + 2\lambda_j\lambda_k f_i(i,l)\}\, b_i \,\Big]\, r_i \\
&+\lambda_j\lambda_k\lambda_l f_i(i) b_i^{(3)} + \big[\, \lambda_k\lambda_l f_i(i,j) + \lambda_j\lambda_l f_i(i,k) + \lambda_j\lambda_k f_i(i,l) \\
&+3\lambda_j\lambda_k\lambda_l b_i f_i(i,i)\,\big]\, b_i^{(2)} + [\lambda_j f_i(i,k,l) + \lambda_k f_i(i,j,l) + \lambda_l f_i(i,j,k)]\, b_i \\
&+ [\lambda_k\lambda_l f_i(i,i,j) + \lambda_j\lambda_l f_i(i,i,k) + \lambda_j\lambda_k f_i(i,i,l)]\, b_i^2 + \lambda_j\lambda_k\lambda_l b_i^3 f_i(i,i,i) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j \neq i, k \neq i, l \neq i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{i+1}(i,j,k) &= \lambda_i\lambda_j\lambda_k r_i^{(3)} + \lambda_i\, [3\lambda_j\lambda_k b_i f_i(i) + \lambda_k f_i(j) + \lambda_j f_i(k)]\, r_i^{(2)} \\
&+\lambda_i\, \big[\, 3\lambda_j\lambda_k b_i^{(2)} f_i(i) + b_i \,\big\{\, 2\lambda_k f_i(i,j) + 2\lambda_j f_i(i,k) \\
&+3b_i\lambda_j\lambda_k f_i(i,i) \,\big\} + f_i(j,k) \,\big]\, r_i + \lambda_i\lambda_j\lambda_k b_i^{(3)} f_i(i) \\
&+\lambda_i\, [\lambda_k f_i(i,j) + \lambda_j f_i(i,k) + 3\lambda_j\lambda_k b_i f_i(i,i)]\, b_i^{(2)} \\
&+\lambda_i\, [f_i(i,j,k) + \lambda_j b_i f_i(i,i,k) + \lambda_k b_i f_i(i,i,j)]\, b_i + \lambda_i\lambda_j\lambda_k b_i^3 f_i(i,i,i) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j \neq i, k \neq i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{i+1}(i,i,j) &= \lambda_i^2\lambda_j r_i^{(3)} + \lambda_i^2\, [3\lambda_j b_i f_i(i) + f_i(j)]\, r_i^{(2)} + \lambda_i^2 \,\Big[\, 3\lambda_j \Big\{ b_i^{(2)} f_i(i) + b_i^2 f_i(i,i) \Big\} \\
&+2b_i f_i(i,j) \,\Big]\, r_i + \lambda_i^2\lambda_j b_i^{(3)} f_i(i) + 3\lambda_i^2\lambda_j b_i b_i^{(2)} f_i(i,i) + \lambda_i^2 b_i^{(2)} f_i(i,j) \\
&+\lambda_i^2 b_i^2 f_i(i,i,j) + \lambda_i^2\lambda_j b_i^3 f_i(i,i,i) \qquad\qquad\qquad\qquad j \neq i \\
f_{i+1}(i,i,i) &= \lambda_i^3 r_i^{(3)} + \lambda_i^3 b_i^{(3)} f_i(i) + 3\lambda_i^3 b_i r_i^{(2)} f_i(i) + 3\lambda_i^3 b_i^2 r_i f_i(i,i) + 3\lambda_i^3 (r_i f_i(i) \\
&+b_i f_i(i,i)) b_i^{(2)} + \lambda_i^3 b_i^3 f_i(i,i,i)
\end{aligned}$$

で与えられる．

ゲート式先着順サービスシステムでの待ち時間 W_i の分布関数の LST は

$$W_i^*(s) = \frac{1-\bar{\rho}}{\bar{r}} \cdot \frac{F_i\,[B_i^*(s)] - F_i\,(1 - s/\lambda_i)}{s - \lambda_i + \lambda_i B_i^*(s)}$$

であるので, 平均と 2 次モーメントは

$$\begin{aligned}
E[W_i] &= \frac{(1-\bar{\rho})(1+\rho_i) f_i(i,i)}{2\lambda_i^2 \bar{r}} \\
E[W_i^2] &= \frac{(1-\bar{\rho})(1+\rho_i+\rho_i^2) f_i(i,i,i)}{3\lambda_i^3 \bar{r}} + \frac{(1-\bar{\rho}) b_i^{(2)} f_i(i,i)}{2\lambda_i \bar{r}}
\end{aligned}$$

となる．よって，対称なゲート式サービスシステムの平均待ち時間は

$$E[W] = \frac{\delta^2}{2r} + \frac{Nr(1+\rho)}{2(1-N\rho)} + \frac{N\lambda b^{(2)}}{2(1-N\rho)} \tag{6.17}$$

となり，$N=2,3,4$ のときの待ち時間の 2 次モーメントは次のようになる．

$N=2$:

$$\begin{aligned}
E[W^2] &= \frac{\left(1+\rho+\rho^2\right)\left(2+\rho-2\rho^2\right)}{3\,(1+\rho)\,(1+\rho^2-\rho^3)}\left[\frac{r^{(3)}}{2r}+\frac{\lambda b^{(3)}}{1-2\rho}\right]\\
&+\frac{\left(2+4\rho+6\rho^2-3\rho^4-2\rho^5\right)\lambda b^{(2)}}{(1+\rho)^2\,(1-2\,\rho)\,(1+\rho^2-\rho^3)}\left[\frac{\delta^2}{2r}+\frac{\lambda b^{(2)}}{1-2\rho}\right]\\
&+\frac{\left(1+\rho+\rho^2\right)\left(2+5\rho+2\rho^2-4\rho^3\right)r^2}{2\,(1+\rho)\,(1-2\rho)^2\,(1+\rho^2-\rho^3)}+\frac{\left(1+\rho+\rho^2\right)\left(2+3\rho+8\rho^2-8\rho^3\right)\delta^2}{2\,(1+\rho)\,(1-2\rho)\,(1+\rho^2-\rho^3)}\\
&+\frac{\left(5+3\rho+2\rho^2\right)\lambda r b^{(2)}}{(1+\rho)\,(1-2\rho)^2}
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$N=3$:

$$\begin{aligned}
E[W^2] &= \frac{\left(1+\rho+\rho^2\right)\left(1+\rho-\rho^3-3\rho^4\right)}{(1-\rho)\,(1+\rho)\,(1+\rho+4\rho^2+2\rho^3+3\rho^4)}\left[\frac{r^{(3)}}{3r}+\frac{\lambda b^{(3)}}{1-3\rho}\right]\\
&+\frac{\left(9+20\rho+54\rho^2+18\rho^3-8\rho^4-75\rho^5-63\rho^6-27\rho^7\right)\lambda b^{(2)}}{2\,(1-\rho)\,(1+\rho)^2\,(1-3\rho)\,(1+\rho+4\rho^2+2\rho^3+3\rho^4)}\left[\frac{\delta^2}{3r}+\frac{\lambda b^{(2)}}{1-3\rho}\right]\\
&+\frac{\left(1+\rho+\rho^2\right)\left(8+14\rho+24\rho^2+\rho^3-12\rho^4-27\rho^5\right)r^2}{3\,(1-\rho)\,(1+\rho)\,(1-3\rho)^2\,(1+\rho+4\rho^2+2\rho^3+3\rho^4)}\\
&+\frac{\left(1+\rho+\rho^2\right)\left(2+2\rho+12\rho^2-5\rho^3+3\rho^4-18\rho^5\right)\delta^2}{(1-\rho)\,(1+\rho)\,(1-3\rho)\,(1+\rho+4\rho^2+2\rho^3+3\rho^4)}\\
&+\frac{3\left(7+4\rho+3\rho^2\right)\lambda r b^{(2)}}{2\,(1+\rho)\,(1-3\rho)^2}
\end{aligned} \tag{6.19}$$

$N = 4$:

$$
\begin{aligned}
E[W^2] = & \frac{\left(a4 + 2\rho - 2\rho^2 - 15\rho^3 - 31\rho^4 + 7\rho^5 + 18\rho^6 + 40\rho^7\right)}{3\left(1+\rho\right)\left(1-\rho+4\rho^2-5\rho^3\right)\left(1-\rho+\rho^2+2\rho^3\right)} \left[\frac{r^{(3)}}{4r} + \frac{\lambda b^{(3)}}{1-4\rho}\right] \\
& + \frac{\left(8 + 4\rho + 41\rho^2 - 85\rho^3 - 9\rho^4 - 144\rho^5 + 66\rho^6 + 116\rho^7 + 80\rho^8\right)\lambda b^{(2)}}{\left(1+\rho\right)^2\left(1-4\rho\right)\left(1-\rho+4\rho^2-5\rho^3\right)\left(1-\rho+\rho^2-2\rho^3\right)} \\
& \times \left[\frac{\delta^2}{4r} + \frac{\lambda b^{(2)}}{1-4\rho}\right] + \frac{2\left(9+5\rho+4\rho^2\right)\lambda r b^{(2)}}{\left(1+\rho\right)\left(1-4\rho\right)^2} \\
& + \frac{\left(20 + 10\rho + 70\rho^2 - 75\rho^3 - 83\rho^4 - 197\rho^5 + 50\rho^6 + 104\rho^7 + 160\rho^8\right)r^2}{4\left(1+\rho\right)\left(1-4\rho\right)^2\left(1-\rho+4\rho^2-5\rho^3\right)\left(1-\rho+\rho^2-2\rho^3\right)} \\
& + \frac{\left(12 - 2\rho + 90\rho^2 - 121\rho^3 + 51\rho^4 - 355\rho^5 + 138\rho^6 - 16\rho^7 + 320\rho^8\right)\delta^2}{4\left(1+\rho\right)\left(1-4\rho\right)\left(1-\rho+4\rho^2-5\rho^3\right)\left(1-\rho+\rho^2-2\rho^3\right)} \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

6.4 数値結果

本節では，総負荷 $\bar{\rho} = N\rho$ を同じにしたとき，種々の対称なシステムの待ち時間の比較をする．サーバの移動時間による変動を避けるために移動時間は一定時間と仮定する．故に，$r^{(2)} = r^2, r^{(3)} = r^3, \delta^2 = 0$ となる．ここで，$\bar{\rho} = N\lambda b$ と $\bar{r} = Nr$ を一定に保ちながら，$N \to \infty$ とすると連続ポーリングモデルの平均と 2 次モーメントを得る [25]．

$$
E[W] = \frac{\bar{\rho} b^{(2)}}{2(1-\bar{\rho})b} + \frac{\bar{r}}{2(1-\bar{\rho})} \qquad (6.21)
$$

$$
E[W^2] = \frac{2\bar{\rho} b^{(3)}}{3(2-\bar{\rho})(1-\bar{\rho})b} + \frac{\bar{\rho}^2(3-\bar{\rho})\left[b^{(2)}\right]^2}{3(2-\bar{\rho})(1-\bar{\rho})^2 b^2} + \frac{\bar{\rho}\bar{r} b^{(2)}}{(1-\bar{\rho})^2 b} + \frac{\bar{r}^2}{3(1-\bar{\rho})^2} \qquad (6.22)
$$

各待ち行列の負荷は無限小なので，連続ポーリングモデルは全処理式とゲート式による違いはなくなる．単一待ち行列システム $(N = 1)$ の待ち時間の 2 次モーメントは

$$
\text{全処理式サービス} : E[W^2] = \frac{1}{3}\left[\frac{r^{(3)}}{r} + \frac{\lambda b^{(3)}}{1-\rho}\right] + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}\left[\frac{r^{(2)}}{r} + \frac{\lambda b^{(2)}}{1-\rho}\right] \qquad (6.23)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{ゲート式サービス} : E[W^2] = & \frac{1}{3}\left[\frac{r^{(3)}}{r} + \frac{\lambda b^{(3)}}{1-\rho}\right] + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}\left[\frac{r^{(2)}}{r} + \frac{\lambda b^{(2)}}{1-\rho}\right] \\
& + \frac{(1+\rho+\rho^2)\lambda r b^{(2)}}{(1-\rho)(1-\rho^2)} + \frac{\rho(1+2\rho)r^{(2)}}{1-\rho^2} + \frac{2\rho^3 r^2}{(1-\rho)(1-\rho^2)}
\end{aligned} \qquad (6.24)
$$

となる．これは，M/G/1 システムにおける多重バケーションモデル に対応する [81]．

図 6.1 – 図 6.4 は $b = 1, \bar{r} = 1$ もしくは 100 として $\bar{\rho}$ に対する $E[W]$ と $E[W^2]$ $(N = 1, 2, 3, 4, \infty)$ をグラフに示している．サービス時間分布は一定時間分布と指数分布に従う場

合を考えた．比較のために，N 個の待ち行列をもつ全処理式サービスシステム，ゲート式サービスシステム，連続ポーリングシステムの待ち時間の n 次モーメントをそれぞれ $E[W^n]_{e,N}$, $E[W^n]_{g,N}$, $E[W^n]_{\infty}$ と書く．図 6.1 – 図 6.4 から，待ち時間の平均と 2 次モーメントには

$$\begin{aligned} E[W^n]_{e,1} < E[W^n]_{e,2} < E[W^n]_{e,3} < E[W^n]_{e,4} < E[W^n]_{\infty} \\ < E[W^n]_{g,4} < E[W^n]_{g,3} < E[W^n]_{g,2} < E[W^n]_{g,1} \qquad n = 1, 2 \end{aligned}$$

の関係が成り立つことが見てとれる．平均待ち時間については，式 (6.9), 式 (6.17), 式 (6.21) から明らかである．移動時間が短いとき，待ち時間の 2 次モーメントは連続ポーリングシステムと単一待ち行列システム (多重バケーションモデル) によってかなりきつい上限と下限を与えているので $N(= 2, 3, \ldots)$ 個の待ち行列をもつシステムで $E[W^n]$ を近似するのに式 (6.22), 式 (6.23), 式 (6.24) を使うことができることを示唆している．

一般の N について 2 次モーメントを得ることは難しいが，$\bar{\rho} \to 1$ の過負荷での極限形式を推測することは可能である．式 (6.10) – 式 (6.12), 式 (6.18) – 式 (6.20) において，極限を考えるとき最も影響を与える項は $O(1/(1 - \bar{\rho})^2)$ である．これらの項の係数から過負荷の極限を導く．

$$\begin{aligned} \text{全処理式サービス} : E[W^2] &\approx \frac{2\left[N\lambda b^{(2)}\right]^2}{3(1 - N\rho)^2} + \frac{N(N-1)\lambda r b^{(2)}}{(1 - N\rho)^2} + \frac{[(N-1)r]^2}{3(1 - N\rho)^2} \\ \text{ゲート式サービス} : E[W^2] &\approx \frac{2(N^2 + N + 1)\left[N\lambda b^{(2)}\right]^2}{3(N+1)^2(1 - N\rho)^2} + \frac{N(N^2 + N + 1)\lambda r b^{(2)}}{(N+1)(1 - N\rho)^2} \\ &\quad + \frac{(N^2 + N + 1)r^2}{3(1 - N\rho)^2} \end{aligned}$$

これらは $N \to \infty$ としたとき，式 (6.22) から得られる過負荷時の連続ポーリングモデルの結果と一致する．

移動時間が 0 のシステムでは，上の過負荷時の極限は

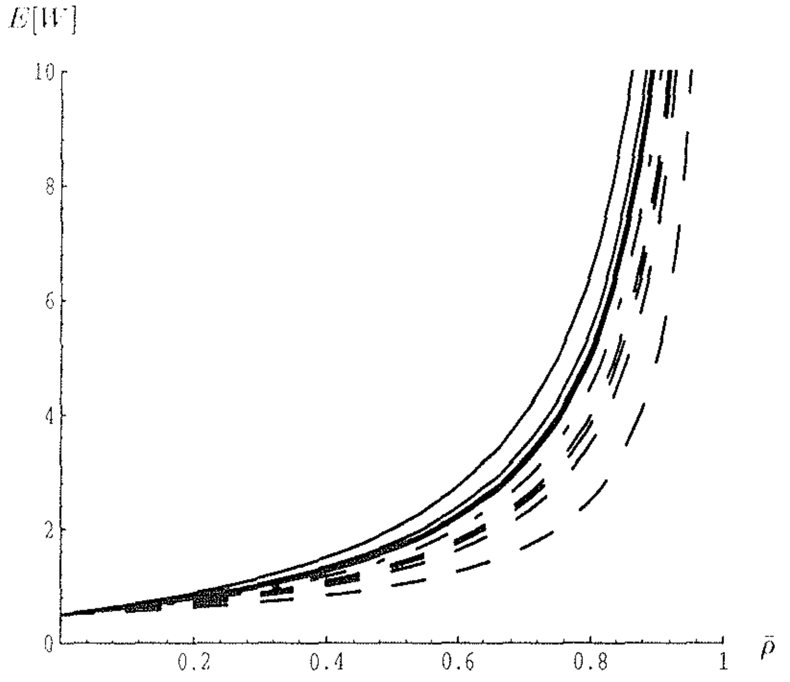
$$\begin{aligned} \text{exhaustive service} : E[W^2] &\approx \frac{2[N\lambda b^{(2)}]^2}{3(1 - N\rho)^2} \\ \text{gated service} : E[W^2] &\approx \frac{2(N^2 + N + 1)[N\lambda b^{(2)}]^2}{3(N+1)^2(1 - N\rho)^2} \end{aligned}$$

となる．この結果は待ち時間分布の n 次モーメントに対する最近の研究 [60] の特別な場合に一致する．

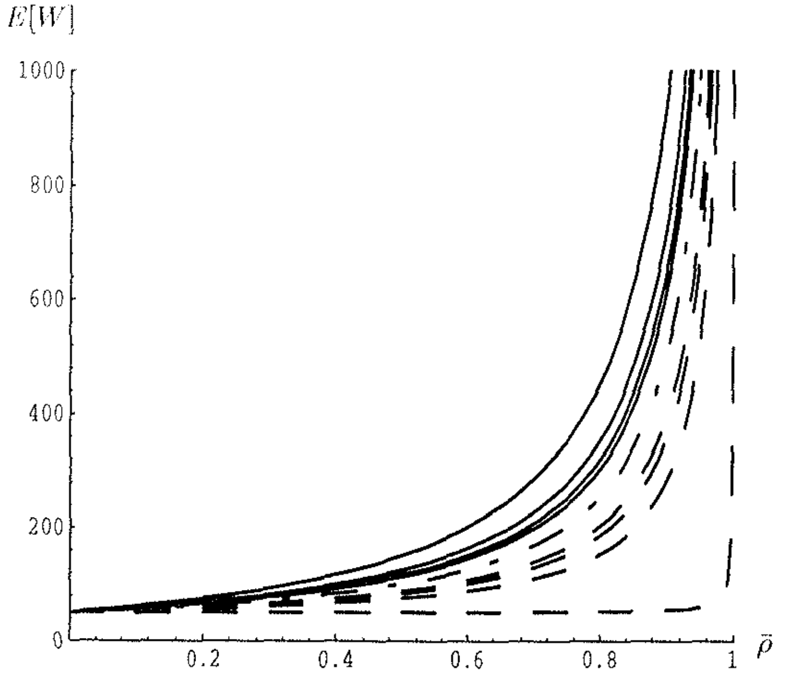
$$\begin{aligned} \text{全処理式サービス} : E[W^n] &\approx \frac{n![N\lambda b^{(2)}]^n}{(n+1)(1 - N\rho)^n} \\ \text{ゲート式サービス} : E[W^n] &\approx \frac{n!(N^n + N^{n-1} + \ldots + N^2 + N + 1)[N\lambda b^{(2)}]^n}{(n+1)(N+1)^n(1 - N\rho)^n} \\ &\qquad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

図の凡例

	:	全処理式サービスシステム 下から $N = 1, 2, 3, 4$
	:	ゲート式サービスシステム 上から $N = 1, 2, 3, 4$
	:	連続ポーリングシステム

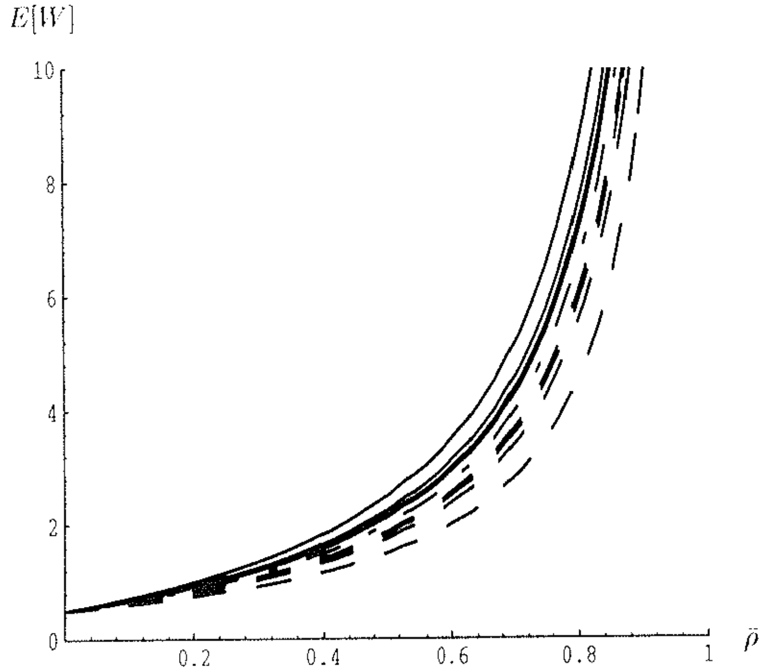


(a) $\bar{r} = 1$

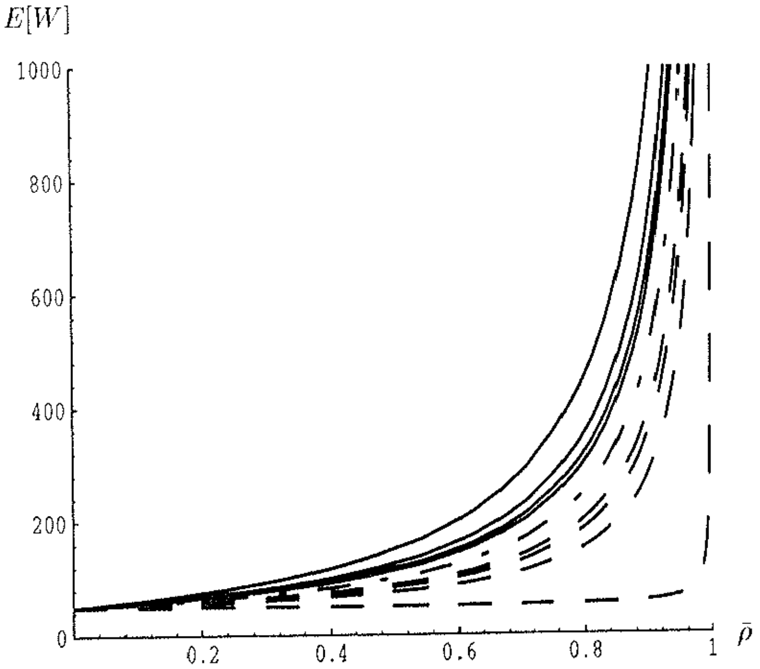


(b) $\bar{r} = 100$

図 6.1: 全処理式とゲート式の平均待ち時間 (サービス時間は一定).

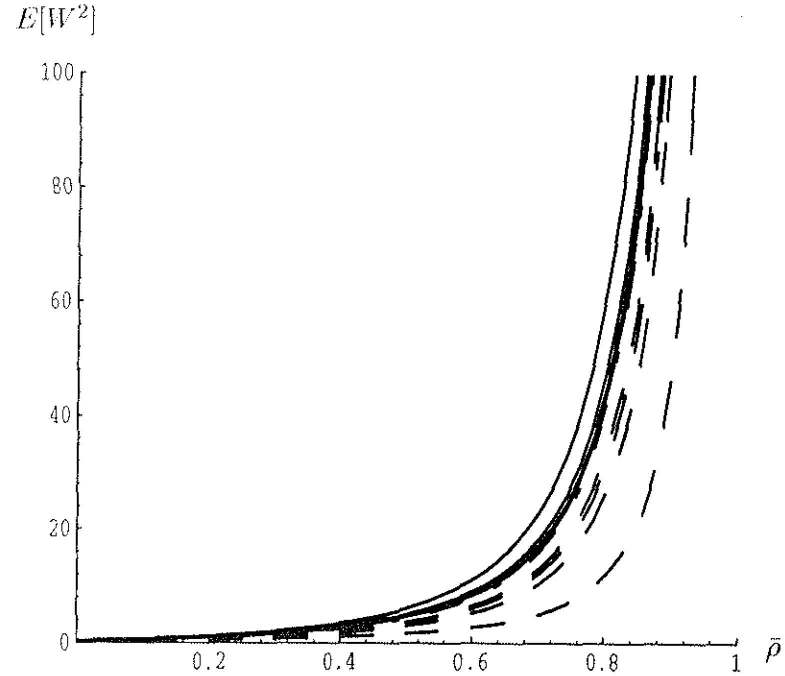


(a) $\bar{r}$ =1

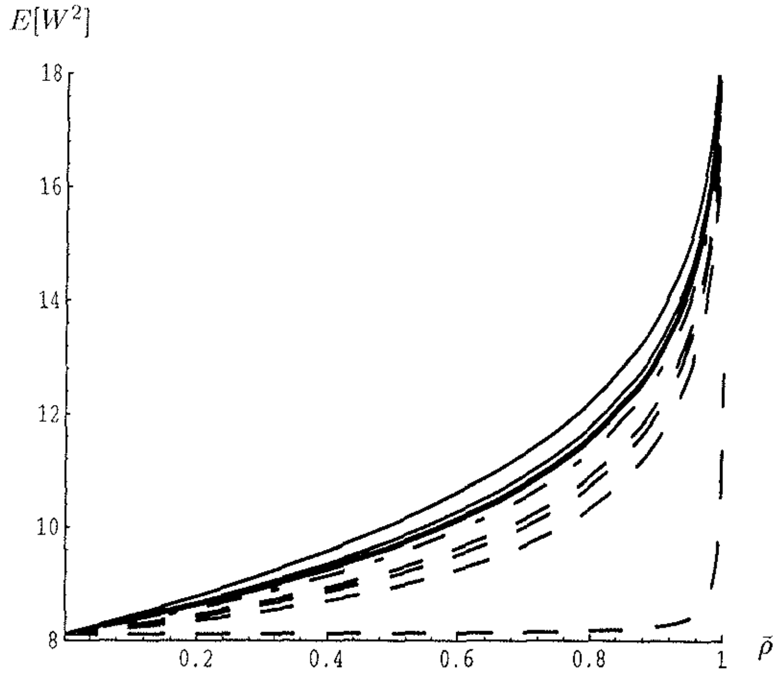


(b) $\bar{r}$ = 100

図 6.2: 全処理式とゲート式の平均待ち時間 (サービス時間は指数分布).

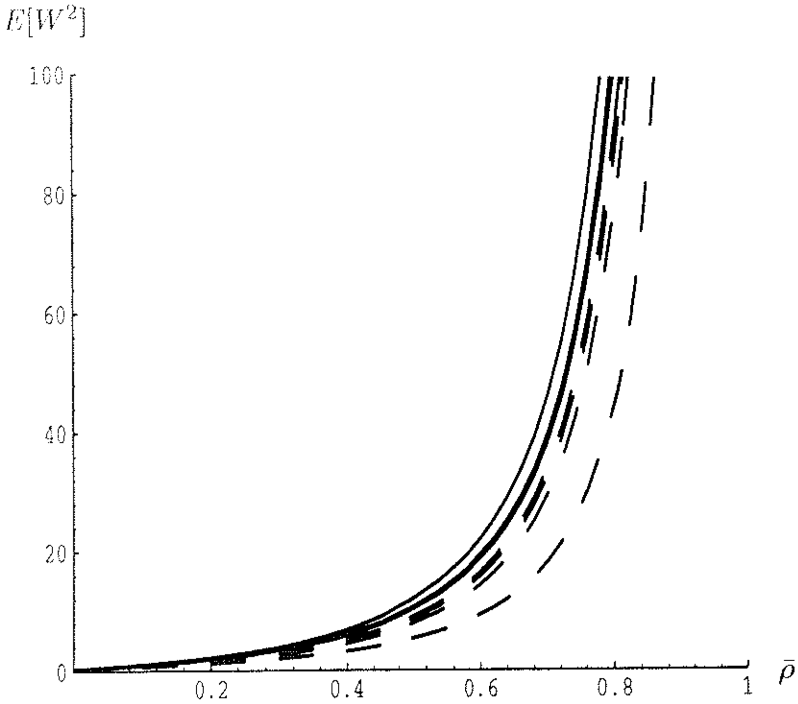


(a) $\bar{r} = 1$

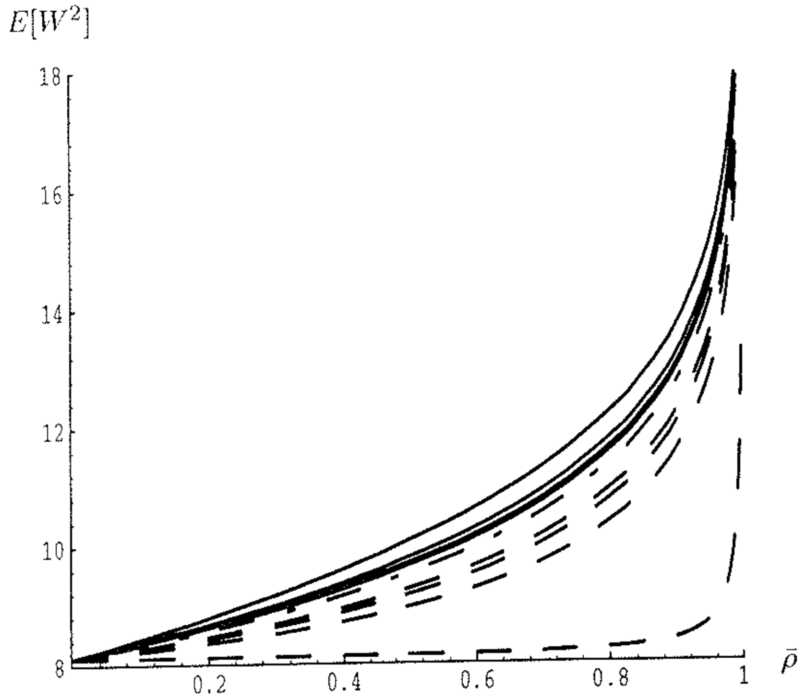


(b) $\bar{r}$ =100

図 6.3: 全処理式とゲート式の待ち時間の 2 次モーメント (サービス時間は一定).



(a) $\bar{r}$ =1



(b) $\bar{r}$ = 100

図 6.4: 全処理式とゲート式の待ち時間の 2 次モーメント (サービス時間は指数分布).