【123】

氏　名（本 籍）	佐垣大輔（さがきだいすけ）（石　川　県）
学 位 の 種 類	博　　士（理　　学）
学 位 記 番 号	博　甲　第　2831　号
学位授与年月日	平成14年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当
審 査 研 究 科	数学研究科
学位論文題目	Crystal Bases, Path Models, and a Twining Character Formula for Demazure Modules （結晶基底，パス模型，およびデマジュール加群の繋絡指標に関する公式について）

主　査	筑波大学教授	理学博士	森　田　　純
副　査	筑波大学教授	理学博士	宮　本　雅　彦
副　査	筑波大学教授	理学博士	本　橋　信　義
副　査	筑波大学助教授	博士（理学）	内　藤　　聡

論 文 の 内 容 の 要 旨

繋絡指標（twining character）の概念は，Fuchs達（Commun. Math, Phys. 180，39-97（1996））によって導入された。これは，Dynkin図形のグラフ自己同型に対応した形式和であり，通常の指標（character）の一般化になっている。Fuchs達は，対称化可能なKac-Moody代数上の可積分な最高ウエイト加群，およびVerma加群の繋絡指標を考え，それらが軌道リー代数上の可積分な最高ウエイト加群，およびVerma加群の通常の指標と，ある意味，等しいことを示した。ここで，軌道リー代数とは，Dynkin図形のグラフ自己同型に対応して定まる対称化可能なKac-Moody代数である。

繋絡指標の概念は，様々な加群に対して自然に拡張できる。兼田－内藤は，有限次元半単純リー代数に関するDemazure加群の繋絡指標について研究し，それらが対応する軌道リー代数に関するDemazure加群の通常の指標と同一視できることを示した。本論文において著者は，一般の対称化可能なKac-Moody代数に関するDemazure加群の繋絡指標を考え，兼田－内藤によって与えられた公式が，この場合にも成立することを示した。また，兼田－内藤による証明が代数幾何的なものであるのに対し，ここで与えられた証明は，内藤と著者の共同研究によって得られたパス模型に関する結果や，柏原による結晶基底，大域基底の理論などを用いた，組合せ論的なものになっている。さらに，同様の手法によって，Fuch達によって与えられた可積分な最高ウエイト加群の繋絡指標に関する公式の別証明を与えることも出来る。

著者が証明した公式について説明する。$A=(aij)_{i,j\in I}$を，対称化可能な，一般化されたCartan行列とし，$\omega: I\to I$をAのDynkin図形のグラフ自己同型とする。このとき，ωはAに付随したKac-Moody代数$\mathrm{g}=\mathrm{g}(A)$上の自己同型で，gの三角分解を保つものを誘導する。さらに，gのCartan部分代数ηがωで保たれることに注意して，$\omega^*: \eta^*\to\eta^*$を$(\omega^*(\lambda))(h):=\lambda(\omega(h))$ $(\lambda\in\eta^*,\ h\in\eta)$で定め，$(\eta^*)^0:=\{\lambda\in\eta^* \mid \omega^*(\lambda)=\lambda\}$，$\widetilde{W}:=\{w\in \mathrm{W} \mid \omega^* w=w\omega^*\}$とおく。ここで，$W$はgのWeyl群である。

$L(\lambda)=\bigoplus_{x\in\eta^*}L(\lambda)_x$を，最高ウエイトが$\lambda\in\eta^*$の，可積分な最高ウエイトg－加群とする。このとき，gの$L(\lambda)$上の作用を自己同型ωで“捻った”作用を考えることによって，繋絡作用素（intertwining operator）$\tau_\omega: L(\lambda)\to L(\omega^*(\lambda))$で，$x\in\mathrm{g}$，$v\in L(\lambda)$に対して，$\tau_\omega(xv)=\omega^{-1}(x)\ \tau_\omega(xv)=\omega^{-1}(x)\ \tau_\omega(v)$を満たすものが得られる。特に，$\lambda\in(\eta^*)^0$のとき，$\tau_\omega$は$L(\lambda)$から自分自身への繋絡作用素となる。さら

に，$w \in \widetilde{W}$のとき，Demazure加群$L_w(\lambda) := U(\mathfrak{b}) L(\lambda)_w(\lambda)$は$\tau_\omega$で保たれることがわかる。ここで，$\mathfrak{b}$は$\mathfrak{g}$のBorel部分代数である。このとき，$L_w(\lambda)$の繋絡指標（twining character）を，

$$\mathrm{ch}^{\omega}(L_w(\lambda)) := \sum_{\chi \in (\eta^*)^0} \mathrm{tr}(\tau_\omega \mid L_w(\lambda)_\chi)\, e(\chi)$$

で定義する。

Dynkin図形のグラフ自己同型ωに対応して，軌道リー代数と呼ばれる，対称化可能なKac-Moody代数$\widehat{\mathfrak{g}}$が定義される。$\widehat{\eta}$を$\widehat{\mathfrak{g}}$のCartan部分代数，$\widehat{W}$を$\widehat{\mathfrak{g}}$のWeyl群としたとき，線形同型写像$P_\omega^* : \widehat{\eta}^* \to (\eta^*)^0$および群同型写像$\Theta : \widehat{W} \to \widetilde{W}$で，任意の$\widehat{w} \in \widehat{W}$に対して，$\Theta(\widehat{w}) = P_\omega^* \circ \widehat{w} \circ (P_\omega^*)^{-1}$が成立するものが存在する。

著者が示した公式は以下である：

Theorem. $\widehat{\lambda} := (P_\omega^*)^{-1}(\lambda)$，$\widehat{w} = \Theta^{-1}(w)$とおく。このとき，

$$\mathrm{ch}^{\omega}(L_w(\lambda)) = P_\omega^*(\mathrm{ch}\widehat{L}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda}))$$

が成立する。ここで，$\widehat{L}_{\widehat{w}}(\widehat{\lambda})$は，軌道リー代数$\widehat{\mathfrak{g}}$に関するDemazure加群である。

審 査 の 結 果 の 要 旨

数学研究科において，審査員全員の出席のもと，最終試験を行い，本論文について著者に説明を求め，関連事項について質疑応答を行った。その結果，審査員全員によって合格と判定された。

よって，著者は博士（理学）の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。