

氏 名 (本 籍)	山	口	孝	男	(茨城県)
学 位 の 種 類	理 学 博 士				
学 位 記 番 号	博 甲 第 231 号				
学 位 授 与 年 月 日	昭 和 59 年 3 月 24 日				
学 位 授 与 の 要 件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当				
審 査 研 究 科	数 学 研 究 科 数 学 専 攻				
学 位 論 文 題 目	Finiteness and uniqueness of diffeomorphism classes of Riemannian manifolds (Riemann多様体族の微分同相類の有限性と一意性)				
主 査	筑波大学教授	理学博士	塩	浜	勝 博
副 査	筑波大学教授	理学博士	高	橋	恒 郎
副 査	筑波大学教授	理学博士	中	川	久 雄
副 査	筑波大学教授	理学博士	宮	下	庸 一

論 文 の 要 旨

Riemann多様体の曲率と位相構造の研究は大域的微分幾何学の重要な研究課題のひとつである。初期の研究はHopf, Myers, Synge等によって始められ、変分学を応用して正曲率Riemann多様体のコンパクト性、向きづけ可能性等が論じられた。その後、道の空間のモース理論、指数定理を用いたKlingenberg, Bengerによる球面定理へと発展した。球面定理は1960年代末にWeinstein, Cheegerによって、その自然な拡張である有限性定理へと更に発展した。

本論文はCheegerの有限性定理に対する精密な定量的評価を与え、更にその手法を発展させてコンパクト階数1の対称空間に対する微分同相定理を与えた。

第一章では次の定理が証明されている。自然数 n 及び正数 Λ, Λ_1, V を与えたとき、 $m(\Lambda, \Lambda_1, V)$ によって以下の条件により特徴づけられたRiemann多様体の全体を表す： n 次元コンパクトRiemann多様体 M はその断面曲率 K_M 、曲率テンソル R_M 、直径 $d(M)$ 及び体積 $\text{Vol}(M)$ が

$$|K_M| \leq \Lambda^2, \quad \|\nabla R_M\| \leq \Lambda_1, \quad d(M) \leq 1, \quad \text{Vol}(M) \leq V$$

を満たす。

定理 $m(\Lambda, \Lambda_1, V)$ が許容する微分同相類の個数は有限であり、その数は与えられた定数によって定量的に表わされる。

第二章では標準的な空間に近い幾何学的特徴をもつRiemann多様体族の微分同相類の一意性を第一章で求めた結果を用いて証明する。

定理 与えられた自然数 n と正数 $\Lambda \geq 1$, Λ_1 に対して $\varepsilon = \varepsilon(n, \Lambda, \Lambda_1) > 0$ が存在し, 以上の条件を満たす n 次元完備連結Riemann多様体 M は n 次元単位球面 S^n と微分同和である: $1 \leq K_M \leq \Lambda^2$, $\|R_M\| \leq \Lambda_1$, $\text{Vol}(M) \geq \text{Vol}(S^n) - \varepsilon$

同様の微分同相定理が他の階数 1 のコンパクト対称空間に対しても得られる。この場合, 定曲率でない為に条件は複雑になるが, 定量的な評価が得られている。

審 査 の 要 旨

Cheegerによる有限性定理の証明はAscoliの定理が基本的である。微分同相類の個数が有限でないものと仮定して矛盾を導びき出す為に, その個数に対する定量的評価を与える事は不可能であった。それ故, いかにして定量的な評価を与えるかが重要な問題となっていた。第一章に述べられた方法は位相空間論で使われるnetの概念と解析学における「たたみ込み」の手法を組み合わせるRiemann多様体の中の局所微分同相写像を構成し, それらが多様体の中の微分同相写像に拡張可能となる為のnetの満たすべき条件を求めている。この方法により, 初めて微分同相類の個数が定量的に評価された。これはきわめて一般的な方法であって, 非コンパクトRiemann多様体に対しても適用出来ることは従来の方法と著しく異なり注目される点である。

この有限性定理の応用として一意性定理が得られる。標準的計量をもつ射影空間及び単位球面に対して, 計量がある意味でそれに充分近いようなRiemann多様体の全体が許容し得る可微分構造は一意的である。この計量族に対しても定量的に評価されている点は注目すべきである。

以上の結果は大域的微分幾何学の発展に大きく寄与し, 将来のこの分野への研究に多くの示唆を含んでいる。

よって, 著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認められる。