【200】

氏 名(本 籍)	三河(みかわ) 寛(ひろし)(岩手県)
学位の種類	理学博士
学位記番号	博乙第 671 号
学位授与年月日	平成3年3月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
審査研究科	数学研究科
学位論文題目	CONTRIBUTIONS TO PRIME NUMBER THEORY ——GAPS BETWEEN PRIMES—— (素数論への寄与——素数の間隔——)
主 査	筑波大学教授 理学博士 内山三郎
副 査	筑波大学教授 理学博士 阿部英一
副 査	筑波大学教授 理学博士 梶谷邦彦
副 査	筑波大学教授 理学博士 太刀川弘幸

論文の要旨

本論文の目的は，解析的・代表的・算術的諸方法を用いて，解析的整数論における最も基本的かつ中心的な話題である素数分布論の諸問題を研究することである。つぎの3つの著名な予想：

(A) 素数の双子 $p, p+2$ は無限に多く存在する；

(B) 十分大きなすべての x に対して，区間 $(x, x+c(\log x)^2)$ は少くとも1つの素数を含む；

(C) 法 q に関する任意の等差数列における最小の素数は $cq(\log q)^2$ を越えない

は、現今なお未解決のものであって，これらの予想の真偽に関する問題は，いわゆるRiemann予想が正しいとしても，直ちに解決されるというものではない。著者は，これらの予想が，ある意味で，平均的には成立つことを示す。得られた結果は下に記す5つの定理に要約される。

k を正の整数，Λ を von Mangoldt 関数として

$$\Psi(x, 2k) = \sum_{2k<n\leqq x} \Lambda(n)\Lambda(n-2k)$$

とおき，$E(y, 2k) = \Psi(y, 2k) - H(y, 2k)$ とおく。H は Ψ に対して予想される漸近展開における主項である。

定理1. 任意の $\varepsilon>0$ と $A>0$ とにたいして，$2x\leqq y\leqq x^{3-\varepsilon}$ ならば

$$\sum_{k\leqq x} (E(y, 2k))^2 \ll xy^2(\log y)^{-A}$$

が成り立つ。

定理2.　定理1の1つの双対。

定理1または定理2により，殆どすべての$k>1$に対して，素数の双子$p, p+2k$は無限に多く存在すること，がわかる。(この事実そのものは既知であるが，定理1または定理2はそれの見通しのよい証明を与える。)

重複度を数えて高々$r(\geqq 1)$個の素数因子からなる自然数を概素数と呼び，P_rと記す。ここで，最も興味のあるものはP_2である。

定理3.　殆どすべての自然数nにたいして，区間

$$(n, n + g(n)(\log n)^5)$$

は少くとも1つの概素数P_2を含む。gは任意の，正の単調増加関数である。

この定理は概素数P_2の間隔について1つの情報を与える。

定理4.　すべての整数$q>1$と殆どすべての整数$a, (a, q)=1$，に対して

$$P_2 \equiv a \pmod q,\ P_2 \ll g(q)\, q (\log q)^5$$

をみたす概素数P_2がある。gは定理3におけるものと同じとする。

つぎの定理は定理4の1つの双対である。

定理5.　Qを任意の大きな整数，aを任意の零でない整数とすれば$Q<q\leqq 2Q$なる殆どすべての整数$q, (a, q)=1$，に対して概素数P_2が存在し

$$P_2 \equiv a \pmod q,\ P_2 \ll \tau(a)\, q (\log q)^7$$

をみたす。τは約数関数である。

定理4および定理5は，ともに，等差数列中の最小の概素数P_2の平均的の大きさを与えるものである。

審査の要旨

上記の定理1，定理3および定理5は，それぞれ D. Wolke (1989), G. Harman (1981) および Y. Motohashi (1979) による結果の著しい改良であって，現在望み得る殆ど最終的といえる形のものである。また，定理2と定理4は，ともに著者による新しいタイプの結果であり，極めて興味あるものである。これらの新しい形の結果を得るためには勿論，先人たちによる結果をこのように本質的に改良するためには，新しい発想によるあたらしい方法の開発が必須であり，困難な長い計算の遂行を要するのであるが，著者はその優れた着想と深い洞察とにより，これを見事に果している。これは，解析的整数論とくに素数論への大きな寄与である。

著者の業績はすでに国内外において高く評価されている。

よって，著者は理学博士の学位を受けるに十分な資格を有するものと認める。