Independent partitions and number of countable models

第 1 階述語論理 L と,L の中の完全で無限模型をもつ理論 T, 及び T の十分に大きな模型σを固定する。それぞれの長さが m,k 自由変数列 $(\overline{x}, \overline{y})$ をもつ L の論理式$\phi(x, y)$ と,$|\Pi|^k)$ の元$\overline{a}$ について,$\phi(\pi, a)$ で$\pi = \phi(\overline{b}, \overline{a})$ となる $|\Pi|^n$の元$\overline{b}$全体の集合を表わすものとする。論理式の集合$\phi(\overline{x}, \overline{a}_i)|i < \omega$ が分割であるとは, ある自然数 n が存在して, 集合族$\phi(\pi, \overline{a}_i)|i < \omega$ の中の任意の n 個は共通部分をもたないことである。k 個の分割$\phi\lambda(\overline{x}, \overline{a}_{i\lambda})|i < \omega\lambda < \kappa$, が独立であるとは, κからωへのどんな写像 f についても集合$\bigcap_{\lambda<\kappa} \phi\lambda(\pi, \overline{a}_{f(\lambda)}, \lambda)$ が空集合におならないことである。また,$|\pi|$ の部分集合 A と,$|\pi|^k$の元のあつまり $\overline{a}_i|i < \omega$ について,A 上$\overline{a}_i|i\epsilon I$が独立であるとは, 各 i ε I について, タイプ t$(\overline{a}i, A^U\overline{a}_i|i\epsilon I, J \neq i)$ が A 上 fork しないこととする。

坪井氏は独立な分割の個数と独立な $|\pi|$ の元に関して

定理１. 無限基数κについて, 次の２条件 (i),(ii) は同値である。

(i) κより小さい任意の基数λについて, λ個の独立な分割が存在する。

(ii) κより小さい任意の基数λについて,$|\pi|$ の部分集合Aと $|\pi|^k$の元$\overline{a}_i(i < \lambda), \overline{b}$で,

$\overline{a}_i|i < \lambda$ は A 上独立になるが, 各$\overline{a}_i$は A 上 b と独立にならないものがある。

を証明した。$k^m_{ind}(T)$ で上記のような長さ k の独立な分割が存在しないような最小の基数をあらわすことにすると, 定理１より,

系２.

$$k^m_{ind}(T) = k^i_{ind}(T) forall m^{\epsilon\omega}$$

が直ちに得られる。したがって, $k^m_{ind}(T)$ は m によらず定まる。これを $k_{ind}(T)$ とあらわすとき, T が superstable とすると $k_{ind}(T)$ はωになる。一方, 坪井氏は本論文で

定理３.$k_{ind}(T_n) = \omega$となる完全な理論の上昇列 $T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_n \subset \cdots$

について, その和で

得られる理論 T の可算モデルの個数は 1 または無限である。

を証明した。この事実は A.Lanchlan よる次の定理：

Lanchlan の定理,Superstable な理論の可算モデルの個数は 1 または無限である。

の拡張になっている。