

第5章 領域内の部分領域を通過する流動量

5.1 はじめに

第3章で領域が円の場合の理論流動量分布を導出し、第4章において領域形状と移動の発生密度に関する拡張を行った。いずれの計算も領域内の任意の地点における流動量を記述・導出するものであったが、現実の都市地域の分析に際して、ある長さを持った線的な要素や面積を持った地域を通過する流動量を測る必要が生じる。

本章ではこのような流動量を、領域内の部分領域を通過する流動量と定義し、図5.1のようなモデルを用いてこの部分領域を通過する流動量を理論的に分析する。

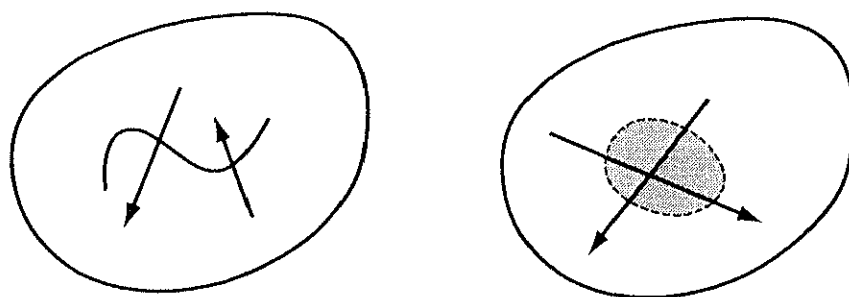


図 5.1: 領域内の部分領域を通過する移動

今後、図5.1に示した領域内の“線的な”部分領域と“面的な”部分領域に分けて論じることとする。幅を持たない曲線は2次元平面で定義した対象領域においては次元が1つ下がるため、厳密にいうと領域の“部分”にはなり得ないが、ここでは対象領域の内部に含まれる任意の図形と解釈されたい。

ところで、いま便宜上図5.1のような部分領域を“通過する”と述べたが、実際の都市では鉄道の線路や大規模公園などの都市施設のように横断できないものが多く存在する。つまり都市計画的な視点に立ったとき、ここでいう部分領域を通過する流動量は、結果的に迂回させられている移動を評価するための数理モデルととらえた方がよい場合もあるといえる。

この迂回距離についてもいくつかの強い仮定を与えた上で、迂回の総量に関して評価を試みることとする。

5.2 線的な部分領域を通過する流動量

本章では第2章で解説した線積分の知識を利用するため、まず流動量を測る対象が曲線分で表されるような部分領域の場合について論じる。

その後、計算例を兼ねて都市内移動費用のモデルについて説明する。

5.2.1 曲線分で表される部分領域について

まず、図5.2に示した領域内の曲線 C を通過する流動量を定式化する。

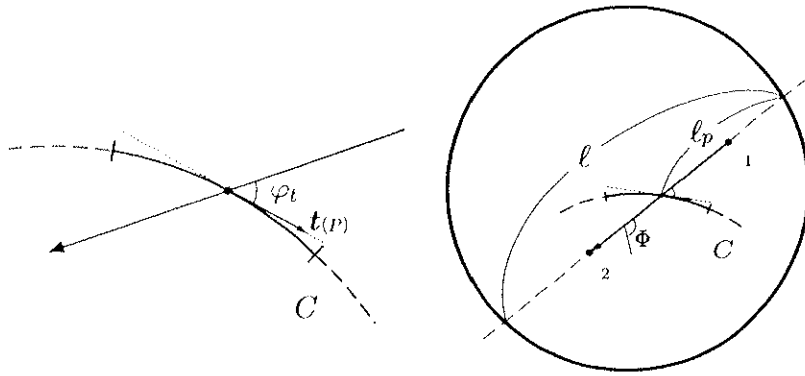


図 5.2: 曲線 C を通過する移動

まず、 C 上の任意の地点 P を曲線の端点からの距離 s で定める。地点 P を通過する流動量 $f_C(P)$ は第3.4節で計算した微小線分を通過する流動量に相当すると考えて良いので、式(3.4.5)から、

$$f_C(P) = 2 \int_0^\pi \ell \cdot \ell_p (\ell - \ell_p) \cdot \sin \varphi_t \, d\varphi_t \quad (0 \leq \varphi_t \leq \pi)$$

とできる。

この微小線分の流動量に対して、第2.5節で定義した線積分の式(2.5.6)を適用すれば C を通過する総流動量 F_C を求めることができる。

つまり、曲線 C の流動量 F_C はつぎのように定式化できることになる。

$$\begin{aligned} F_C &= \int_C f_C(P) \, dP \\ &= 4 \int_C \int_0^\pi \ell \cdot \ell_p (\ell - \ell_p) \cdot \sin \varphi_t \, d\varphi_t \, ds. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

また、式(5.2.1)は積分順序を入れ換えてつぎのように書くこともできる。

$$F_C = 4 \int_0^\pi \left\{ \int_C \ell \cdot \ell_p (\ell - \ell_p) \cdot \sin \varphi_t \, ds \right\} d\varphi_t. \quad (5.2.2)$$

これはまず曲線上のすべての地点において、ある決まった角度で交差する流動について積分してから、最後にすべての角度について足しあげたものである。

さらに、図 5.2 領域全体の流動の向き Φ を最初に固定すれば、

$$F_C = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_C \ell \cdot \ell_p (\ell - \ell_p) \cdot \sin \left(\Phi - \frac{t(P)}{|t(P)|} \right) ds \right\} d\Phi. \quad (5.2.3)$$

のように変形することも可能である。

また、曲線 C が有限個の微分不可能な点を持つとき、つまり図 5.3 のようにほとんどいたるところで滑らかな場合は、有限個の滑らかな曲線 (図中 C_1, C_2, C_3) に分解してそれぞれについて求めた流動量を足せばよい。

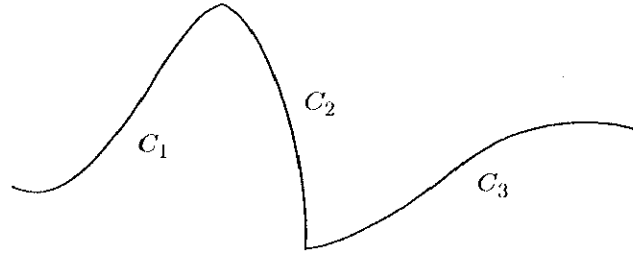


図 5.3: ほとんどいたるところで滑らかな曲線

念のため補足するが、 C が一般の曲線であるということは C に 2 回以上よぎる直線が存在するという意味する。

曲線と交わる直線の測度 (本数) を調べるときはこの交差回数を割り引いて計量しなくてはならないが、いまはあくまでも流動量に関する議論であるから “延べ交差回数” を求めておいて問題ない。

5.2.2 直線分をよぎる流動量の計算例 ～ 都市内移動費用のモデル ～

線的な部分領域を通過する流動量の計算例として領域内の 2 点を結ぶ直線分をよぎる流動量を計算してみる。

ここで直線分を用いるのは、流動量を解析的に計算できるという理由だけでなく 2 点間を結ぶ線分とはすなわち本論文において地点間の移動経路に相当するからである。

つまり、領域内のあらゆる2点間で移動が一樣に発生したと仮定したとき、任意の移動ペアの経路をよぎる流動量を用いて、その2地点間の移動費用を表すようなモデルを考えてみたい。

施設立地モデルを持ち出すまでもなく、一般に都市内の移動にかかる費用は基本的に距離抵抗で説明されるが多い。これに対しここでは、一樣な移動発生を仮定した領域で中心部分の流動量が相対的に多いという知見を受け、「混雑抵抗」の定義を試みるものである。

まず、第3章で用いたような移動の発生が一樣な円の領域を仮定する。

前節で得られた結果から、領域内の2点 P_1, P_2 を結ぶ直線分を C で表し、2点間の移動費用 $\Omega(P_1, P_2)$ を以下のように定義する (ω は定数)。

$$\Omega(P_1, P_2) = \omega \int_C f_C(P) \, ds \quad (5.2.4)$$

地点流動量の分布が領域の中心を頂点とする単峰な形をしていることから、2点間の距離が等しくても、より都心の近くを通過するペアの方が領域内のその他の移動に交差する量が多くなることが直感的にわかるだろう。

式 (5.2.4) を用いれば領域内で自由に動く2点間の移動費用を求めることができる。

いま仮定している円領域の対称性を考慮することで図5.4のように一方の点 (P_1) をある半径上に固定してもう一方の点 (P_2) を領域内で自由に動かすことであらゆる2点間について調べ尽くすことができる。

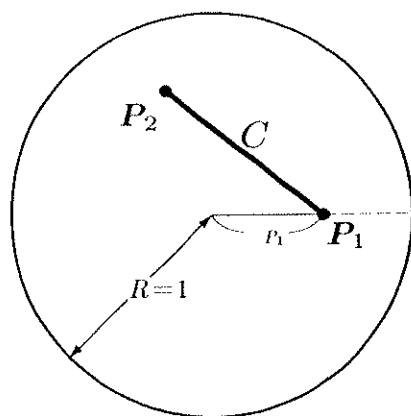


図 5.4: 移動の起点 (終点) の位置

いま P_1 を半径 ($R=1$) 上で動かしながら、その点からの移動費用が等しくなる P_2 の軌跡を描くとつぎの図のようになる。

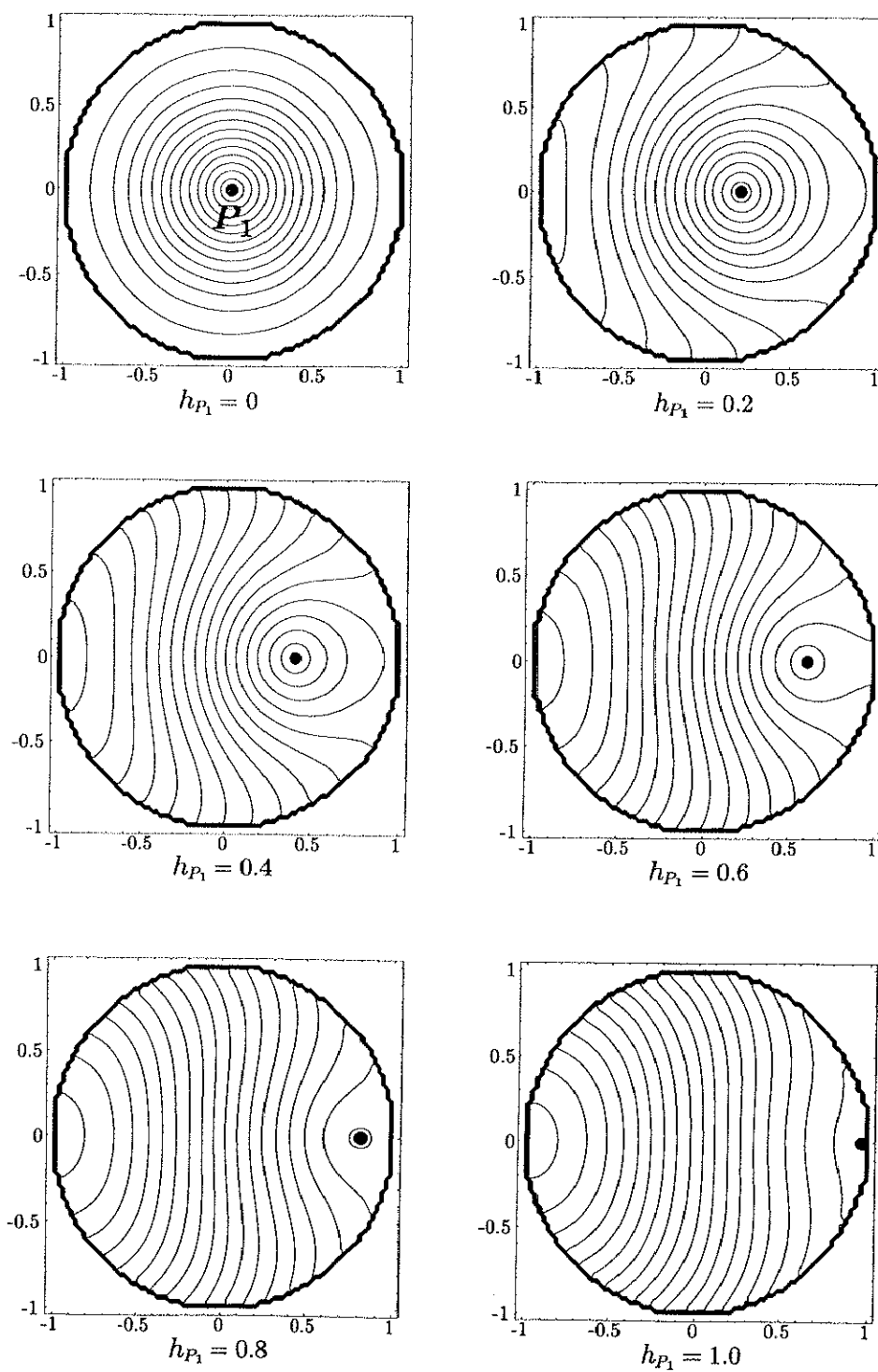


図 5.5: 移動費用が等しい点の軌跡

固定された P_1 の位置に仮に都市施設があると想定したときに、図 5.5 をこの施設を利用する (訪れる) のに必要な費用 (の一部) と解釈すればつぎのような問題が考えられよう。

前述のようにこの種の立地問題のモデルは距離抵抗を土台にして成立しているので、たとえば全く同質の 2 つの施設の利用圏域は一般にその 2 つの施設から等しい距離の軌跡つまり 2 点を結ぶ線分の垂直 2 等分線を境界とするように分割される。

このモデルを距離抵抗ではなく「混雑抵抗」を基に設計したとき利用圏域はどのように分割されるだろうか。

この答えは図 5.6 のように 2 地点からの等移動費用線を重ねて描くことができる点線 (移動費用境界線) で表される。

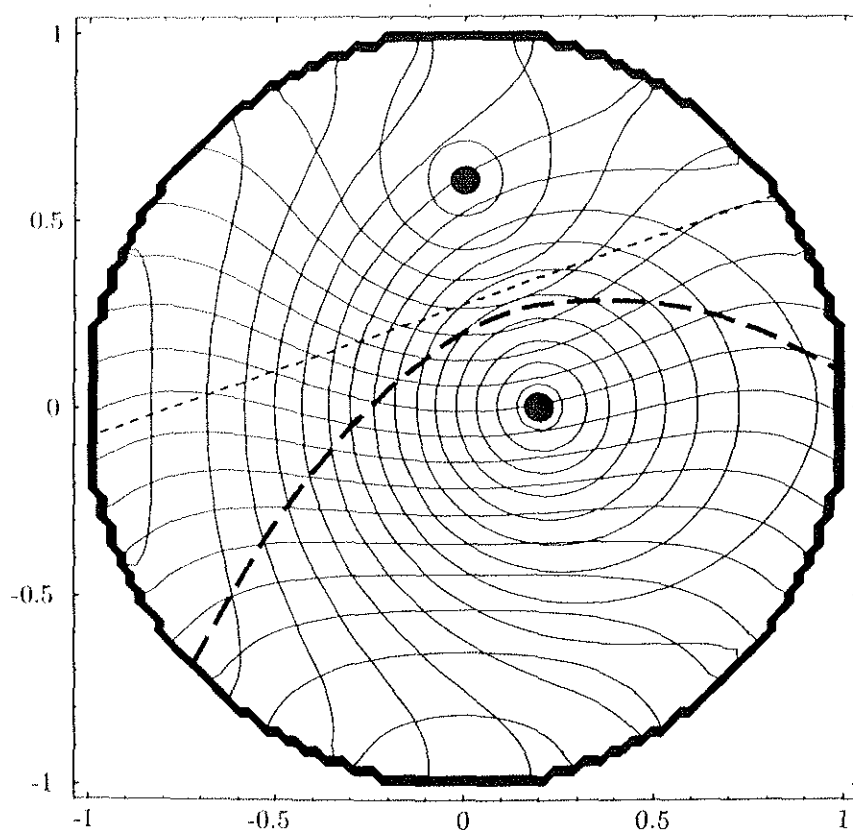


図 5.6: 移動費用の境界線

5.3 面的な部分領域を通過する流動量

第5.1節で議論した曲線分を通過する流動量の考え方を閉曲線に対して用いることで、この閉曲線が囲む面的な部分領域について定式化することができる。

ここでは特に閉曲線が凸である場合つまり部分領域が凸である場合に限って議論を進めることにする。

5.3.1 凸閉曲線で表される部分領域について

図5.7のような領域 D 内の部分領域 D' を通過する流動量 $F_{D'}$ について考えてみよう。

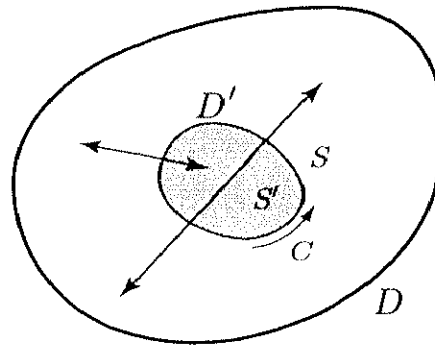


図 5.7: 部分領域 D'

いま D' の外周が長さ s の滑らかな曲線 C で表されると考えて良い。したがってこの外周に相当する曲線 C の流動量は第5.2節で定式化した曲線分の流動量を利用することができる。

いま、 C は閉曲線であるから、 C を通過する流動量の総和は周回積分の記号でをつぎのように書ける。

$$\oint_C f_C(P) ds \quad (5.3.1)$$

前述のように曲線 C を通過する“流動量”を求めるときは、移動と領域が交差した回数だけ勘定してやればよい。

しかし式 (5.3.1) の曲線 C を通過する流動量は、その内部で表される領域 D' を通過する流動量 $F_{D'}$ よりも多く勘定されてしまっているので若干の注意が必要である。

なぜなら領域 D' をよぎるような移動は2回以上境界線 C を通過し、さらに式 (5.3.1) は起終点を領域 D' 内に持つような移動も含んでいるからである。

領域 D と領域 D' の面積をそれぞれ S, S' とすれば、移動の一方の端点を D' の内部に持ち、もう一方の端点を D 内の D' 以外の部分に持つ移動の総量は、

$$S \cdot (S - S')$$

だから、 D' が凸のときに限って $F_{D'}$ は以下のような関係を満たすといえる。

$$\oint_C f_C(P) \, ds = 2 F_{D'} + S \cdot (S - S'). \quad (5.3.2)$$

したがって領域をよぎる流動量 $F_{D'}$ は、

$$F_{D'} = \frac{1}{2} \left\{ \oint_C f_C(P) \, ds - S \cdot (S - S') \right\} \quad (5.3.3)$$

となる。

5.4 不通領域を迂回する流動量と迂回距離について

本章の冒頭で述べたように、現実の都市には通行できない領域が存在する。たとえば首都圏の都心部に位置する皇居や新宿御苑などの大規模な不通領域は都市交通の観点からは大きな影響を持つ要因と考えられる。

本節では部分領域を通過する流動量に関する議論を下じきにして、不通領域を迂回する流動量とその迂回距離に関する評価を行うことにする。

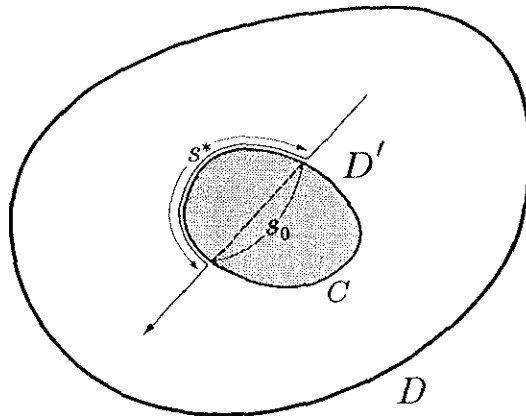


図 5.8: 迂回する移動と迂回経路

以下、不通領域に遮られて迂回を強いられる移動は図 5.8 のように迂回が不通領域に沿ってなされると仮定して議論を進めよう。

図 5.8 に示した経路 (逆向きも含む) で迂回する流動量 $f_{C,\theta}(P)$ は、

$$\int_0^{2\pi} f_{C,\theta}(P) \, d\theta = f_C(P)$$

$$\oint_C f_C(P) \, ds = F_{D'}$$

を満たす量である.

不通領域をよぎっている部分の長さを s_0 , 領域に沿って迂回している部分の長さを s^* とすると, 地点 P を通る移動の迂回の総延長は,

$$s^* \cdot f_C(P) \, ds$$

となり, この不通領域によって生じた迂回の総距離は,

$$\oint_C s^* \cdot f_C(P) \, ds \quad (5.4.1)$$

のように, また迂回によってロスした距離については,

$$\oint_C s^* \cdot f_C(P) \, ds - \oint_C s_0 \cdot f_C(P) \, ds \quad (5.4.2)$$

と記述できる.

ただし, $f_{D'}(P)$ や s_0, s^* は境界を表す曲線 C によって決まる量なので, この総迂回距離や迂回によってロスした量を明示的に計算することはできない.

ところで, 領域に遮られるそれぞれの移動について, その迂回経路は移動距離が距離が短くなるよう選択すると考えるのが自然なので, s, s_0, s^* は,

$$s_0 < s^* < \frac{s}{2}$$

のような関係を満たすといえる.

いま仮に迂回の向きに関して確率 $1/2$ で時計回りか半時計回りに決まる場合や, あるいはどちらか一方に決められているとすると,

$$s^* = \frac{s}{2}$$

と考えられるので, この不通領域によって生じた迂回の総距離は式 (5.4.1) より,

$$\oint_C \frac{s}{2} \cdot f_C(P) \, ds = \frac{s}{2} \cdot F_{D'} \quad (5.4.3)$$

のように計算することができる.

5.5 第5章のまとめ

本章では第4章までに論じてきた地点流動量とは異なり、領域内で長さや面積を持つ部分領域を通過する流動量について議論した。

その結果として、地点流動量の計算過程で重み付けして得られた微小線分の流動量を曲線に沿って足しあげることで任意の部分領域について流動量が得られることがわかった。

また、閉じた曲線について同様に考えれば、面的な部分領域についても同じように流動量分布を定式化できることを明らかにした。

この“部分領域の流動量”のモデルは、たとえば移動が発生・集中する地域、あるいは移動が通過できる地域を領域内のある部分に限定したり、対象地域の周辺と行き来する交通や単にこの領域を通過するだけの交通を除外したモデルを作る際にも応用が可能である。

線的な部分領域を通過する流動量計算例のなかで示した混雑抵抗に基づく立地モデルについては、数値的な計算を用いて既存のアルゴリズムを用いればある種の重み付ボロノイ図のようなものが描けると考えられる。あるいは2点間の移動費用を最小化するような経路設定のモデルへ発展できる可能性も残されている。

ただし、移動経路は互いに交差しあっているため、上のような問題を考えようとしたら経路の変化に対して移動費用の計算を動的に行わなければならないことに注意しておく必要がある。いずれにせよ都市内では日常的な光景である混雑現象を考慮したこのモデルはわれわれの現実の感覚に近いものではないだろうか。

ここでいう移動費用が、2点間の距離ではなく途中の経路によって変化することから、面的な部分領域の場合でも同じ形状で同じ面積を持つ部分領域で領域の中心部に位置する場合と領域の周辺部に位置する場合とでは流動量が変わると予想される。