

## 第3章 流動量分布の理論的導出

### 3.1 はじめに

本章は理想的な都市モデルを仮定したときの“移動の起終点ペア”を基本単位とする地点流動量について理論的な分布を導出することを目的とする。

まず第3.2節で1次元の空間における流動を考える。領域内部の任意地点における流動量を議論する簡単なモデルを作り、このモデルを用いていくつかの場合における流動量の分布を調べてみる。

第3.3節では2次元連続平面上の有限な領域内の理論流動量分布を導出する。その際、全く異なる2つの導出方法(微小な円を用いる計算方法と一様な直線を用いる計算方法)を示し、これらが同じ計算結果を導くことを明らかにする。この2つの方法を比較し、また後述の微小線分の流動量との関係を調べることで、2次元平面における“流動量”の理論的基礎を明らかにする。

また流動量分布のという視点において1次元モデルと2次元モデルを比較することで、本研究の主要な対象である2次元平面の特徴を際立たせることもこの節の目的の1つである。

最後に第3.4節で、任意の方向に固定された微小な線分を通過する流動量について、その導出法と意味について論じる。

### 3.2 1次元空間の流動量について

都市は2次元のあるいは3次元のあるひろがりを持つものであるが、たとえば街道に沿って発達した都市や海岸沿いに成立した都市で観察されるアクティビティはおよそ1次元的であると考えてもさしつかえなからう。

またそのような場合でなくても、地域において他を卓越した幹線道路において特定の方向に移動を限定したモデルが説明力を持つことも多い。

そこでまず1次元の都市モデルを用いて流動量分布を導出し、その性質を論じる。

#### 3.2.1 移動の発生確率が一様な場合

図3.1のような長さ $\ell$ の曲線分で表される1次元の都市領域 $L$ を考える。

まず最も簡単な場合を考え、都市 $L$ の上で移動の起終点が密度1で偏りなく分布し、領域内のあらゆる2点間で等しく移動が発生すると仮定する。

領域の一方の境界から長さ $x$ の位置に地点 $X$ を取ると、 $X$ を通過する移動、すなわち起終点ペアは、あらゆる起終点ペアのうち一方の点が領域 $A$ にあり、もう一方の点が領域 $B$ にあるものである。

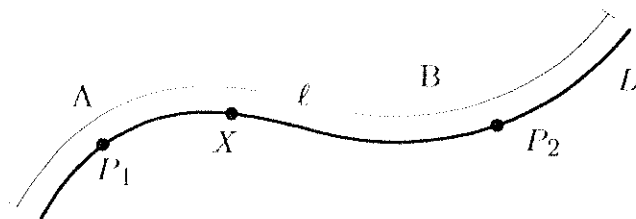


図 3.1: 1次元の都市

以下、任意の  $X$  について、その地点を通過する移動ペアの量を流動量と定義し  $f(x)$  で表すことにする。

仮に領域 A 上に一点  $P_1$  を固定したとき、もう一方の点  $P_2$  が取りうる範囲は領域 B の長さに等しい。また  $P_1$  も A の長さだけ取りうるので、 $f(x)$  は  $P_1$  と  $P_2$  を入れ換えた場合も考えて、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_{P_1 \in A, P_2 \in B} dP_1 dP_2 + \int_{P_1 \in B, P_2 \in A} dP_1 dP_2 \\
 &= \int_0^x \int_x^\ell dP_1 dP_2 + \int_x^\ell \int_0^x dP_1 dP_2 \\
 &= 2x(\ell - x)
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

となる。このことは  $P_1$  の位置と  $P_2$  の位置を別々の座標で表したつぎの図 3.2 から計算することもできる。

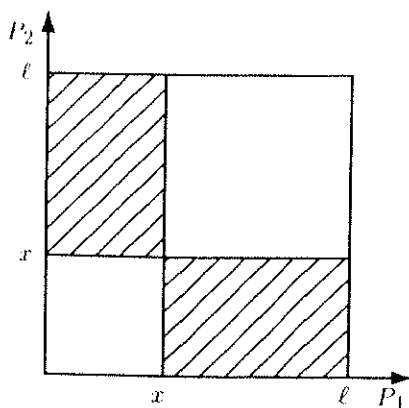


図 3.2: 流動量を計算するための図

地点  $X$  を通過する流動量は図の斜線部の面積に等しくなるので、やはり、

$$f(x) = 2x(\ell - x)$$

である。このとき流動量  $f(x)$  は図 3.3 のように領域の中心  $\ell/2$  で最大となるような 2 次曲線になることがわかる。

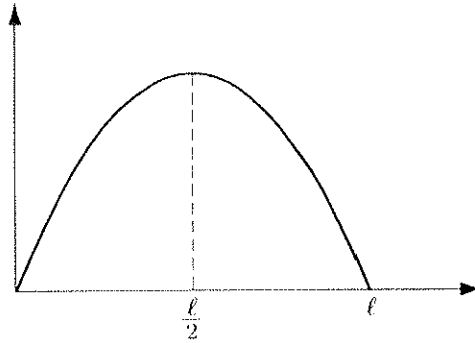


図 3.3: 1 次元の領域の流動量分布

1次元の領域で起終点が一様に分布するという条件で、起終点の総量を一定 (すなわち移動ペアの総量も一定) のまま、領域の大きさを変えたときの流動量分布の変化を調べてみよう。

起終点の総量を 2 とし、領域の大きさを変化させたときの起終点分布を図 3.4 に示す。

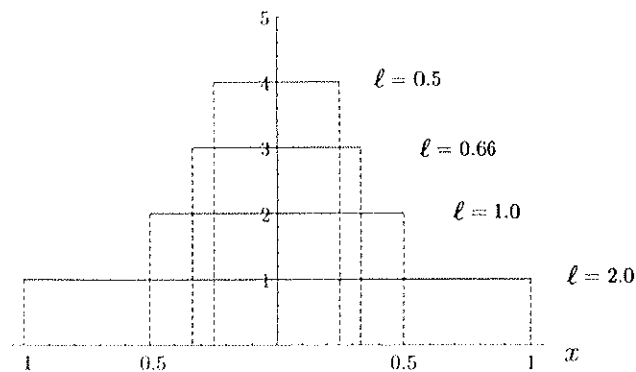


図 3.4: 起終点の総量が一定で領域の大きさが異なるときの一様な起終点分布

それぞれの場合の流動量分布を計算すると図 3.5 のようになり、領域の中心における流動量が全て同じになることがわかる。

流動量分布がこのようになる理由はずぎのように考えられる。

1次元の領域ではどんな 2 点間の移動も、その 2 点の間の領域がその移動の通る経路になっ

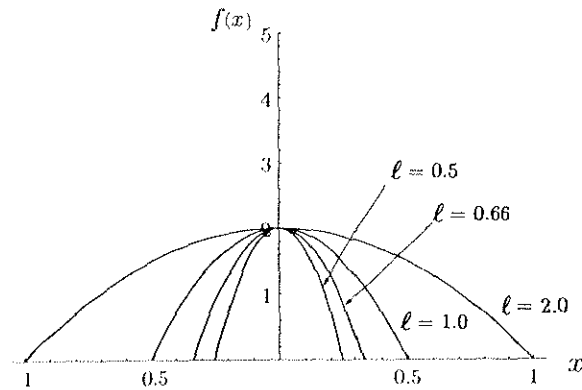


図 3.5: 起終点の総量が一定で領域の大きさが異なるときの流動量分布

ている。言い換えると、ある地点を挟んで両側にある 2 点を結ぶ移動は全てその地点を通過するというのである。

上の計算例では起終点分布が一様な場合を考えたが、この理由により計測地点をはさんだそれぞれの領域で起終点の量に変化しなければ、起終点がどのように分布しても計測地点の流動量には影響がないということがわかる。

実はこのような結果は 2 次元では成立しない。詳しくは第 3.3 節で 2 次元領域の流動量分布計算を示した後に述べることにする。

### 3.2.2 移動の発生確率が一様でない場合

図 3.1 の 1 次元モデルを用いて、領域内の移動の発生が一様でない場合の流動量分布を調べる。

いま、任意の 2 地点  $P_1, P_2$  間の移動の発生確率が  $\mu(P_1, P_2)$  で与えられると仮定する。つまりここまでの計算は  $\mu = 1$  の場合に相当することになる。

領域内の起終点の分布が  $\rho(X)$  で与えられたとき、 $P_1, P_2$  間の移動の発生確率  $\mu(P_1, P_2)$  を、

$$\mu(P_1, P_2) = \rho(P_1) \cdot \rho(P_2) \quad (3.2.2)$$

と定義する。このときの流動量分布関数  $f(x)$  は、地点流動量を定義した式 (2.2.2) によりつぎのように定式化できる。

$$f(x) = \int \mu(P_1, P_2) \, dP_1 \, dP_2 \quad (3.2.3)$$

上式 (3.2.3) を用いれば任意の  $\mu(P_1, P_2)$  に対する流動量分布  $f(x)$  を計算することができる。現実に近い  $\mu$  についても、数値計算を用いて流動量分布を計算することが可能であるが、ここではよく知られた人口分布のモデルを参考にして領域の中心から対称に分布する起終点について流動量分布を計算してみよう。

## ・起終点分布が線形のとき

まず起終点が原点からの距離に対して図 3.6 に示すとおり線形で減少するように分布した場合を考える。すなわち、

$$\rho(P_1) = \rho(P_2) = -\alpha^2|x| + \alpha \quad (\alpha \geq 0). \quad (3.2.4)$$

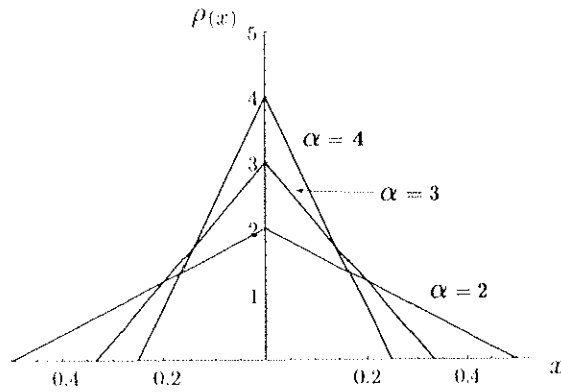


図 3.6: 総量が一定の起終点分布 (線形)

このとき流動量の分布は式 (3.2.5) のようになり、その分布は図 3.7 のようになる。

$$f(x) = -\frac{1}{2}(\alpha x - 1)(\alpha^2 x^2 - 2\alpha x - 1). \quad (3.2.5)$$

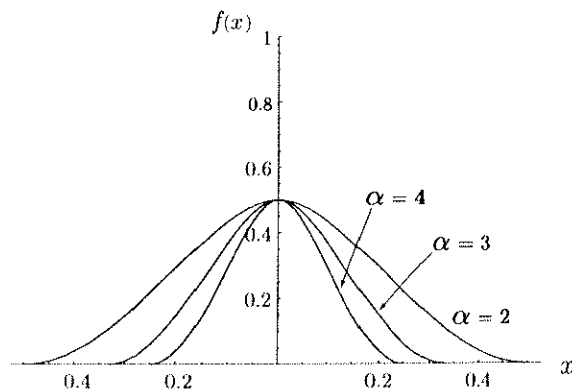


図 3.7: 起終点分布が線形で減少するときの流動量分布

つづいて起終点の密度分布が指数分布型のときおよび正規分布型のときについて流動量分布を計算する。

これまで有限な領域を仮定していたが、起終点が中心を対称な指数分布のときと正規分布のときは無限の領域を仮定する。このように仮定することでいずれの場合も (正規分布の場合は誤差関数を用いるが) 流動量分布を陽に計算できる。これは単純に計算の都合だけであって、これまで同様有限な領域を仮定しても数値計算を用いて流動量分布を求めることができる。

・起終点分布が指数分布型 (Clark 型) のとき

起終点の密度分布は総量が1になるように係数を調整して,

$$\rho(P_1) = \rho(P_2) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}, \quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1. \right)$$

と書け, 分布はつぎの図 3.8 のようになる.

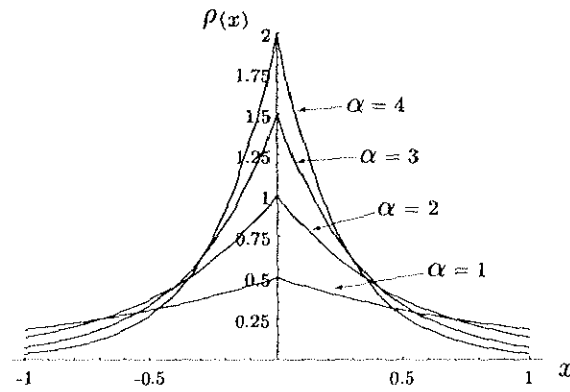


図 3.8: 指数分布型の起終点分布

流動量分布は次式 (3.2.6) のように表され, その分布は図 3.9 のようになる.

$$f(x) = e^{-\alpha|x|} - \frac{1}{2}e^{-2\alpha|x|}. \quad (3.2.6)$$

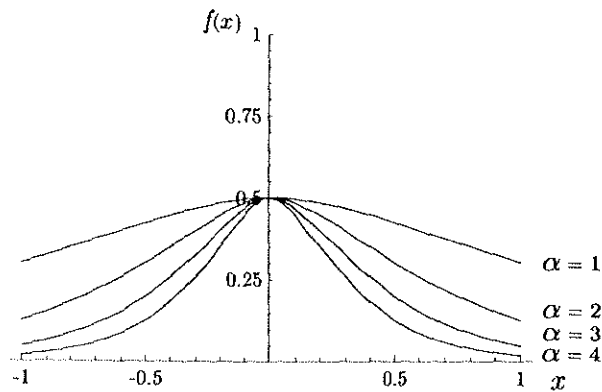


図 3.9: 流動量分布の変化 (指数分布)

・起終点分布が正規分布型 (Sherratt 型) のとき

やはり起終点分布は総量が1になるように係数を調整して,

$$\rho(P_1) = \rho(P_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}, \quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1. \right)$$

と書け, 分布はつぎの図 3.10 のようになる.

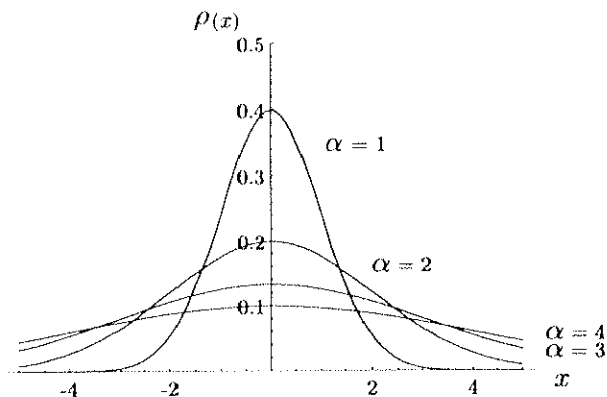


図 3.10: 正規分布型の起終点分布

流動量分布は次式 (3.2.7) のように表され, その分布は図 3.11 のようになる.

$$f(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{Erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}\alpha} \right)^2 \right\}. \quad (3.2.7)$$

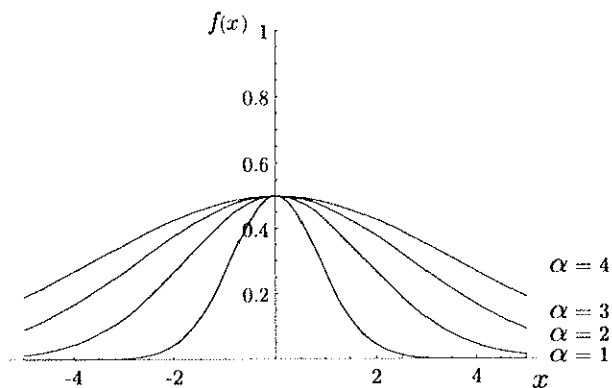


図 3.11: 流動量分布の変化 (正規分布)

### 第3章 流動量分布の理論的導出

起終点の密度分布に関して3種類の関数を仮定して流動量分布を計算した。

その結果、前節で起終点分布が一様なときに示したように、流動量計測地点をはさんだ両側でそれぞれの起終点の総量が一定であれば、計測地点(上の例では領域の中心)の流動量が起終点分布の変化に依存しないことが改めて示された。

この結果をふまえて、流動量計測地点をはさんだそれぞれの領域で起終点の総量が $\alpha$ 倍になった場合を考える。すなわちこのときの起終点分布 $\rho'(P_1), \rho'(P_2)$ が、

$$\rho'(P_1) = \alpha \rho(P_1), \rho'(P_2) = \alpha \rho(P_2)$$

と表せるから、任意の2地点間で発生する移動の量は、

$$\rho'(P_1) \cdot \rho'(P_2) = \alpha^2 \rho(P_1) \cdot \rho(P_2)$$

となる。

したがって、このとき計測地点における流動量は $\alpha^2$ 倍になることがわかる。

### 3.3 2次元空間における流動量分布の理論的導出

2次元平面上の都市について考えると、この都市におけるある(点的な)要素の位置は2変数を用いて表現されることになる。前節の1次元の場合1変数で表された2点の関係を2次元空間の1点に置き換えて考えたときと同様にして、この平面上の2地点は4次元空間における1点として表すことができる。

つまりこの空間上である条件を満たす起終点のペアを計量しようとしたときに、図3.2を用いて計算した面積に相当する量、すなわち4次元量の体積(4次元空間における点の集合の測度)を求めなければならないことがわかる。

1次元のときに用いた作法に倣い、2次元平面における2点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ について、 $P_1P_2$ 間の移動経路を $\mathfrak{R}(P_1, P_2)$ で表し、また $P_1, P_2$ 間で起こる移動量が4次元の密度 $\mu(x_1, y_1, x_2, y_2)$ を用いて、

$$\mu(x_1, y_1, x_2, y_2) \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2 \, dy_2 \quad (3.3.1)$$

で表されるものとする。

図3.12に示した領域 $D$ の内部の2点 $P_1, P_2$ を端点とするような移動が取る経路を $\mathfrak{R}(P_1, P_2)$ と表したとき、経路の集合 $\mathfrak{R}(P_1, P_2)$ が条件 $A$ を満たす $P_1, P_2$ のペアの量は、

$$\int_{P_1, P_2 \in D, \mathfrak{R}(P_1, P_2) \in A} \mu(x_1, y_1, x_2, y_2) \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2 \, dy_2 \quad (3.3.2)$$

と表すことができる。

以上は第2.2節で定義した領域と流動量の定義を2次元平面で解釈したものである。2次元平面では対象とする量、すなわち流動量が4次元量であることを強調して述べたが、今後は便宜上 $P_1, P_2$ を用いて、



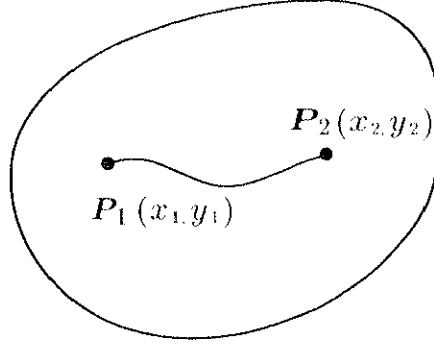


図 3.12: 2次元平面上の有限領域と移動の概念

$$\int_{P_1, P_2 \in D, \mathfrak{R}(P_1, P_2) \in A} \mu(P_1, P_2) \, dP_1 \, dP_2 \quad (3.3.3)$$

と表す.

まずは円形の都市領域の内部で起終点が一様に分布すると仮定し, 式 (3.3.2) で一般的に与えた2地点間の移動生起確率  $\mu$  についても本章では  $\mu = 1$ , つまりあらゆる地点のペアにつき(往復を区別して) 等しく1だけ移動が発生するものとして議論を進める.

こうして仮定したモデルは後に様々な場合を考えるための基本モデルとなるものである. より一般性の高い都市形状や人口分布に関する拡張は第4章で詳しく論じることにする.

### 3.3.1 微小円を用いた流動量分布の導出

いま2次元平面上の有限な都市領域  $D$  が図 3.13 のような半径  $R$  の円で表されると仮定する. さらに,  $D$  の内部に中心が  $h(0 \leq h \leq R - r)$  だけ離れた位置にある半径  $r$  の円で表される小領域  $D_r$  を考える.

領域内の移動の経路  $\mathfrak{R}(P_1, P_2)$  は, ここでは起点を  $P_1$ , 終点を  $P_2$  (ただし  $P_1 \neq P_2$ ) とする直線分とする.

すると領域  $D$  内で移動の起終点が一様に密度1で分布し, あらゆる2点で等しく移動が発生するという仮定により, 小領域  $D_r$  を通過する流動量  $f(D_r)$  は  $D_r$  を通過する全ての線分(経路)の数としてつぎのように定式化される.

$$f(D_r) = \int_{\mathfrak{R}(P_1, P_2) \cap D_r \neq \emptyset} dP_1 \, dP_2. \quad (3.3.4)$$

図 3.14 のように移動の一方の端点  $P_1$  を固定して考えたとき,  $P_1$  を起点として発生する移動のうち小領域  $D_r$  を通過するものは, 終点  $P_2$  が図中の斜線部にあるものであるから, 移動

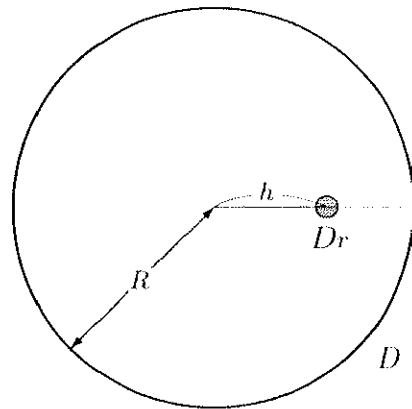


図 3.13: 円形の領域  $D$  と小領域  $D_r$

の発生に関する仮定より、その量は図中の斜線部の面積  $S(P_1)$  で表される。

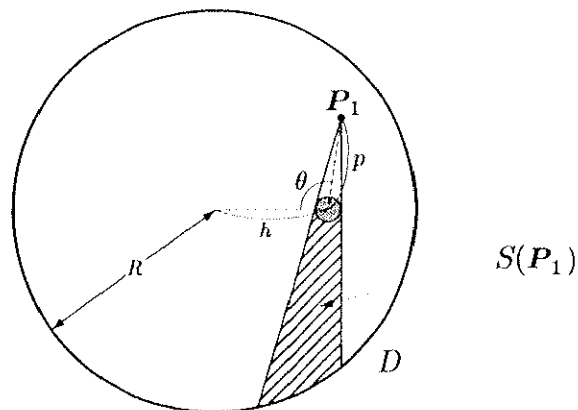


図 3.14: 小領域  $D_r$  を通過する流動量

$D$  内のあらゆる地点に起点を発生させてそれぞれに対応するこの面積  $S(P_1)$  を足しあげたものがこの小領域  $D_r$  を通過する総流動量  $f(D_r)$  に相当するので、 $P_1$  が図のように極座標系で示されるときヤコビアンに注意して  $f(D_r)$  は、

$$f(D_r) = \int_{P_1 \in D} S(P_1) \cdot p \, dP_1 \quad (3.3.5)$$

のように書ける。

ところが図 3.14 から明らかなように、斜線部の面積  $S(P_1)$  を定式化するためには  $p$  と  $\theta$  によっていくつかの場合分けをする必要があり、また場合分けされた関数も陽に積分できない複雑な関数となる。

そこで  $r$  が無限に小さいとき、すなわち、

$$r = \Delta r$$

のときに  $S(\mathbf{P}_1)$  が図3.15に斜線で示した扇形(の一部)の面積  $S'(\mathbf{P}_1)$  に等しくなることを利用して流動量を計算する.

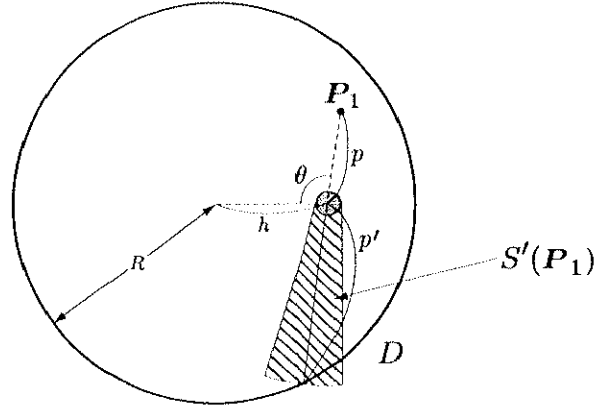


図 3.15: 小領域が微小 ( $r = \Delta r$ ) な場合

図より  $S'(\mathbf{P}_1)$  は,

$$S'(\mathbf{P}_1) = \arcsin \frac{\Delta r}{p} (p'^2 + 2p \cdot p')$$

と書けるが,  $p'$  は,

$$p' = h \cos \theta + \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta}$$

となることがわかるので  $f(D_r)$  は,

$$f(D_r) = \int_0^{2\pi} \int_{\Delta r}^{-h \cos \theta + \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta}} S'(\mathbf{P}_1) \, dp \, d\theta \quad (3.3.6)$$

と定式化できる. やはり  $\Delta r$  が微小であることから,

$$\begin{aligned} (\Delta r)^2 &= 0 \\ \arcsin \frac{\Delta r}{p} &= \frac{\Delta r}{p} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

とできるので結局, 流動量  $f(D_r)$  は, 微小円と領域の離心率  $k = h/R$  のみを変数として,

$$\begin{aligned}
 f(D_r) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\Delta r}^{-h \cos \theta + \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta}} \frac{\Delta r}{p} (p'^2 + 2p \cdot p') p \, dp \, d\theta \\
 &= 16 \Delta r R (R^2 - h^2) E \left( \frac{h}{R} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

のように非常に簡潔に定式化できる (ただし  $E$  は第2種完全楕円積分)。

改めて式 (3.3.8) の導出過程を注意深く見ると、 $\Delta r$  が  $\theta$  とは独立な量であることがわかる。つまり  $f(D_r)$  は微小な円を通過する量の体裁を取りながらも、あくまで流動の方向を定めたときの長さ  $2\Delta r$  を通過する量をすべての方向に関して足しあげたものであるから、微小な円  $D_r$  の中心  $P$  における“地点の”流動量は  $f(D_r)$  を  $2\Delta r$  で除して長さの密度に変化したものに相当することになる。

つまり、地点  $P$  の流動量  $f(P)$  は、

$$\begin{aligned}
 f(P) &= \frac{f(D_r)}{2\Delta r} \\
 &= 8 R (R^2 - h^2) E \left( \frac{h}{R} \right)
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

となる。

離心率  $k (= h/R)$  と流動量  $f(P)$  の関係は図 3.16 のようなグラフで示される。

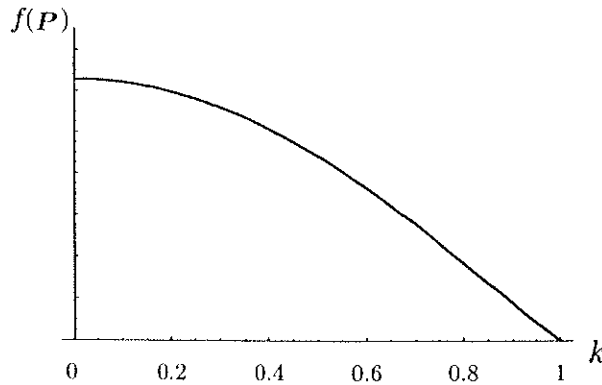


図 3.16: 流動量  $f(P)$  の分布

### 3.3.2 一様な直線を用いた流動量分布の導出

微小な円を用いて導出した流動量は、導出方法の考え方において比較的理解し易いものであったといえるが計算の過程がやや煩雑であった。つぎに示すのは第2章で定義した一様な直線を用いて先ほどの地点流動量を導出する方法である。

いま、一様な直線の集合  $G$  から取り出した1本の直線を  $g$  とし、その中で  $P \in g$  を満たすような  $g$  に注目する。

ある直線  $g$  上の (正確には  $g$  上で測ることができる) 地点  $P$  の流動量  $f^g(P)$  を計算して、つぎの式 (3.3.10) のようにして流動量  $f(P)$  を計算するのである。

$$f(P) = \int_{P \in g} dG. \quad (3.3.10)$$

あらためて微小円モデルのときと同じ円の領域を考える。

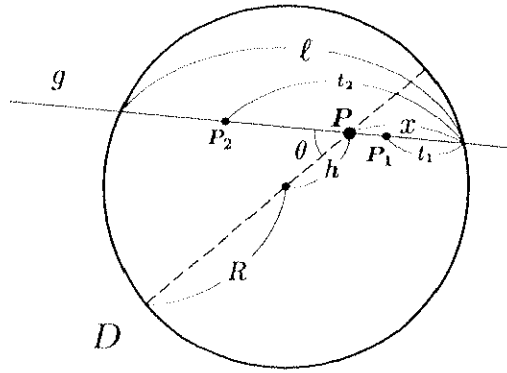


図 3.17: 円形の有限領域

第2.3節で示した Crofton の第3定理を導出する過程の式 (2.3.2),

$$[dP_1, dP_2] = |t_2 - t_1| [dt_1, dt_2, dG]$$

を用いると、 $g$  上の点  $P$  における流動量  $f^g(P)$  は、図 3.17 から

$$\begin{aligned} f^g(P) &= 2 \int dP_1 dP_2 \\ &= 2 \int_0^x \int_x^\ell (t_2 - t_1) dt_2 dt_1 \\ &= \ell \cdot x (\ell - x) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

のように計算でき、2次元上の2点の関係をあたかも1次元上で重み付けして計算したかのよう  
に簡潔に導くことができる。図 3.17 のように領域  $D$  が半径  $R$  の円の時、中心から  $P$  までの  
距離を  $h$ 、半径と  $g$  が成す角度を  $\theta$  とすると、

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{P}) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^g(\mathbf{P}) \, d\theta \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell \cdot x(\ell - x) \, d\theta
 \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

となる。やはり領域が円だから図より、

$$x(\ell - x) = R^2 - h^2$$

および、

$$\ell = 2 \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta}$$

が成り立つので、結局流動量分布  $f(\mathbf{P})$  は、

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{P}) &= 8(R^2 - h^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \\
 &= 8R(R^2 - h^2) E\left(\frac{h}{R}\right)
 \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

となり、微小門のモデルを用いて導出した流動量分布の式 (3.3.9) と全く同じになる。したがって、図 3.18 に示すように式 (3.3.13) が表す流動量分布も当然、図 3.16 と同じになる。

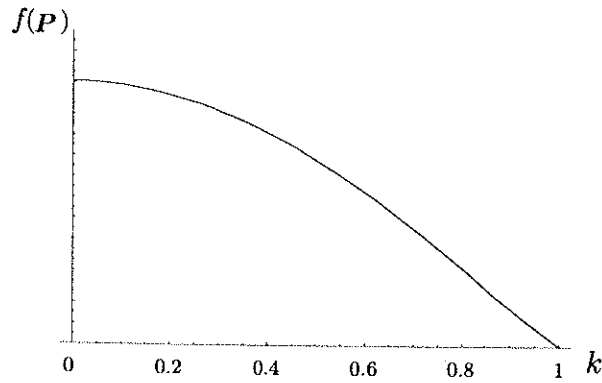


図 3.18: 移動の発生が一様な円領域における流動量分布

### 3.3.3 流動量分布関数の性質

先ほど導出した流動量分布式 (3.3.13),

$$f(P) = 8R(R^2 - h^2) E\left(\frac{h}{R}\right)$$

は、楕円積分を含むもののその導出過程からもわかるように領域が円の場合にのみ導くことができる分布式である。先程も述べたように、この流動量分布式が領域の中心からの離心率の関数として表されたことに注目してこの式をもう少し吟味しておくことにしよう。

この分布式の後半の楕円積分は、中心からの距離に依存する流動量の減衰傾向の程度を表している(無次元数である)ので、さしあたってはあまり考慮する必要がない。もちろん楕円積分に帰着した関数は実際のモデル設計あたって不便であるから、第6章で級数近似して取り扱う方法について述べる。

そうするとこの分布式の次数は3次であることがわかるが、もともと「移動ペア」という単位は4次のものであるからこの量は長さ密度になっていることに注意する。

つまり、この流動量を測った微小な線分の長さをかけて4次になるような密度である。

このような流動量分布式(3.3.13)の構造から、領域が円で与えられ領域内の移動起終点の発生が一樣で同条件のとき、半径が異なる2つの領域の流動量分布は以下の性質を持つことがわかる。

**[性質 1]**：半径の比が $\alpha$ である2つの円領域の、互いに離心率が等しい地点の流動量の比は $\alpha$ の3乗である。

#### [性質 1] の証明

半径 $R$ の円領域 $D$ と半径 $R'$ の円領域 $D'$ が図3.19のように表されるとし、この2つの領域の半径の相似比を $\alpha$ とする。

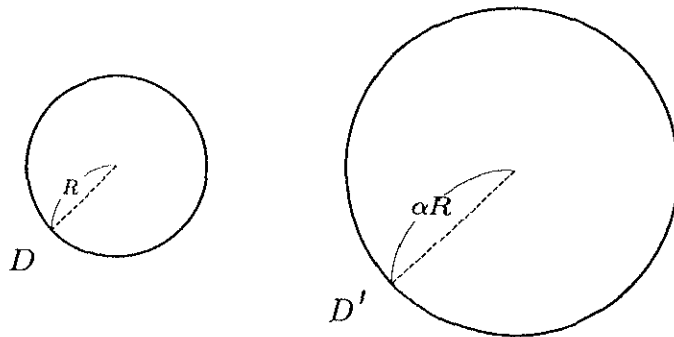


図 3.19: 相似な円の領域

$D$ において、中心から $h$ だけ離れた地点 $P$ の流動量は、式(3.3.13)で表される。領域 $D'$ の半径 $R'$ は条件より、

$$R = \alpha R' \quad (\alpha: \text{定数}) \quad (3.3.14)$$

であり、互いに離心率が等しい地点  $P'$  の中心からの距離  $h'$  は、

$$h' = \alpha h \quad (3.3.15)$$

である。

このとき、地点  $P'$  の流動量を  $f(P')$  とすると、

$$\begin{aligned} f(P') &= 8R'(R'^2 - h'^2) E\left(\frac{h'}{R'}\right) \\ &= 8(\alpha R) \{(\alpha R)^2 - (\alpha h)^2\} E\left(\frac{\alpha h}{\alpha R}\right) \\ &= 8\alpha^3 R(R^2 - h^2) E\left(\frac{h}{R}\right) \\ &= \alpha^3 f(P) \end{aligned}$$

よって、2つの円領域の相対的に等しい位置の流動量は相似比の3乗になる。[証明終]

一般凸領域の場合の[性質1]に関する議論は第3.4節で行う。

### 3.4 微小線分を通過する流動量

ここまでで導出した地点流動量は第2.4節で述べたように、領域全体について足しあげたものが総移動距離になる面積積分要素という別の側面からの定義を持つものであった。もう少しわかりやすくいうと、地点流動量は交通工学的に表現したときにその単位が“台キロ”に相当する量ということになる。

これに対して、たとえば交通量調査で用いるコードンラインを通過する交通量のように、面積積分要素で与えた流動量の単位を用いた計算が馴染まないものがあることは容易に想像できる。

そこで本節では図3.20に示すような、ある特定の方向に固定された微小な線分を通過する流動量について調べる。

実はこの微小線分を通過する流動量の定式化は、第5.2節でおこなう曲線を通過する流動量に関する議論の準備になっている。

まず、一様な直線の集合  $G$  から取りだしてきた一本の直線で計算した結果を思い出そう。

地点  $P$  の流動量  $f(P)$  は、一様な直線の集合  $G$  を用いて、

$$f(P) = \int_{P \in g} f^g(P) \, dG. \quad (3.4.1)$$



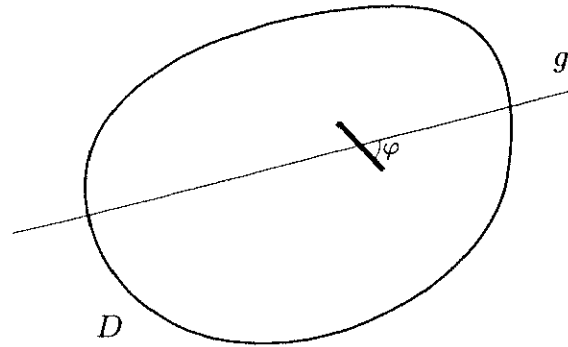


図 3.20: 領域内に固定された微小な線分

のように計算できた。

地点  $P$  自体を“一様な直線”を定める原点としても一般性は失われないので、第 2.3 節で述べた一様な直線の定義により、直線の集合  $G$  のうち地点  $P$  を通過する直線の (ある固定された方向となす) 角度の分布は一様になることがわかる。

このことから、 $f^g(P)$  は実は地点  $P$  に位置し、 $g$  に対して直交するような微小な幅をもつ線分を通過する流動量であるといえる。

さて一方で、この微小線分をある特定の方向に固定したうえで、この線分を通過する直線上の流動量を計算するには、図 3.20 で示した直線と微小線分がなす角度  $\varphi$  で重みをつけなければならない (たとえば、 $\varphi = 0$  の直線上では流動量が 0 になるようにしなければならない)。

本節で導こうとしているのは、この“固定された微小な線分を通過するあらゆる方向の流動量”であり、地点流動量  $f(P)$  とは違う (しかし関係は深い) 量であるという点はくれぐれも注意されたい。

また、微小線分を固定するときの方向については、前述のようにこの微小線分の流動量が、領域内の任意の曲線を通過する流動量を論じる上で重要な役割を果たすことから、あくまで任意方向の微小線分の流動量を厳密に議論する。

### 3.4.1 曲線と交わる直線の測度

さて、その微小な線分を通過する流動量の具体的な導出を行う前に、その導出過程で用いる“重み付け”の原理について解説しておく必要がある。

これに関する議論は、[腰塚, 1976b] で Crofton の公式の導出過程において詳しく示されているのでこれを引用しておくことにする。

図 3.21 のような連続平面上の長さが  $s$  の曲線を仮定する。

この曲線に対し図 3.21 のような座標系を考え、図中の  $p, \theta$  によって定められる直線を考える。この直線は先般から利用している一様な直線の集合  $G$  の一部である。

弧  $AB$  上の点  $P$  の座標  $(x, y)$  は  $A$  から  $P$  までの弧の長さ  $s$  によって表されるとする。

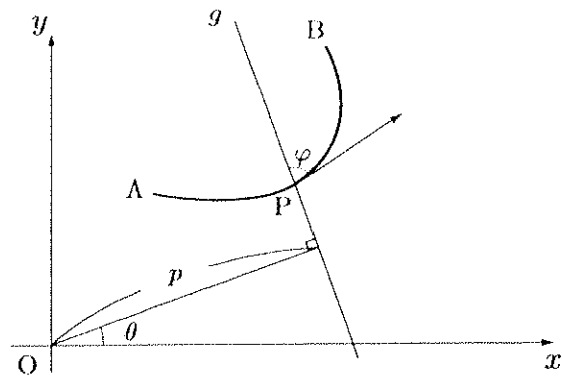


図 3.21: 曲線と交わる直線の測度

$$x = x(s), \quad y = y(s).$$

弧 AB と交わる直線を  $g$  として，図のように点 P における弧の接線と  $g$  との成す角度を  $\varphi$ ，接線と  $x$  軸の成す角度を  $\lambda$  とすると以下が成り立つ．

$$\theta = \lambda + \varphi - \frac{\pi}{2}. \quad (3.4.2)$$

また P は直線  $g$  上の点でもあるから，

$$p = x \cos \theta + y \sin \theta$$

となり，

$$dp = \cos \theta \, dx + \sin \theta \, dy + (-x \cos \theta + y \sin \theta) \, d\theta.$$

ところが，式 (3.4.2) と  $\lambda$  の定義から，

$$\frac{dx}{ds} = \cos \lambda, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \lambda$$

であり，

$$\begin{aligned} \cos \theta \, dx + \sin \theta \, dy &= (\cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda) \, ds \\ &= \cos(\theta - \lambda) \, ds \end{aligned}$$

となるから，次式が導かれる．

$$dp = \cos(\theta - \lambda) ds + (-x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta.$$

したがって外積の計算により,

$$[dp, d\theta] = \cos(\theta - \lambda)[ds, d\theta]$$

となる. さらに式 (3.4.2) から,

$$\cos(\theta - \lambda) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \varphi.$$

また,

$$d\theta = d\lambda + d\varphi.$$

ところが,  $\lambda$  は  $s$  のみにより,  $d\lambda/ds$  は曲率を表すからこれを  $\lambda'$  とおいて,

$$d\theta = \lambda' ds + d\varphi.$$

よって, つぎの関係式が導かれる.

$$[dp, d\theta] = \sin \varphi [ds, d\varphi] \quad (3.4.3)$$

### 3.4.2 線分の方角によって重み付けされた流動量

式 (3.4.3) の導出過程で示された重み付けの原理を用いて, 領域内の地点  $P$  で任意の方角に固定された微小線分を通過する流動量について調べてみよう.

微小線分の方角を表す単位ベクトルを  $t(P)$  とし, 点  $P$  を通過する直線  $g$  と  $t(P)$  が成す角度を  $\varphi_t$  とする.

先ほどの重み付けは, あらゆる直線のうち, ある微小な線分を通過する直線の測度を交わる角度で調整されたものであった. われわれが知りたい流動量はその直線上で測ることができるから, 結局前節で示した一様な直線を用いた流動量計算の過程で, この重み付けを採用すればよいことがわかる.

したがって式 (3.3.11) から, 地点  $P$  の微小線分を通過する  $g$  上の流動量を  $f_s^g(P)$  とすると,

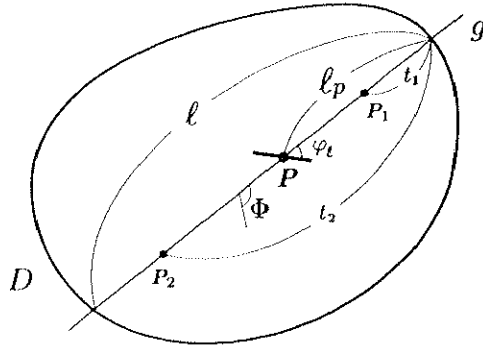


図 3.22: 微小線分と直線 (流動) が交わる角度

$$\begin{aligned}
 f_s^g(\mathbf{P}) &= \sin \varphi_t \int_{P \in \overline{P_1 P_2}} |t_2 - t_1| \, dP_1 dP_2 \\
 &= 2 \sin \varphi_t \int_{0 \leq t_1 \leq \ell_p, \ell_p \leq t_2 \leq \ell} (t_2 - t_1) \, dt_1 dt_2 \\
 &= \ell \cdot \ell_p (\ell - \ell_p) \cdot \sin \varphi_t
 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

と記述できる.

したがって, 図3.22 に示した微小線分を通過する流動量  $f_s(\mathbf{P})$  は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}
 f_s(\mathbf{P}) &= \int_0^{2\pi} f_s^g(P) \, d\varphi_t \\
 &= \int_0^{2\pi} \ell \cdot \ell_p (\ell - \ell_p) \cdot |\sin \varphi_t| \, d\varphi_t \\
 &= 2 \int_0^{\pi} \ell \cdot \ell_p (\ell - \ell_p) \cdot \sin \varphi_t \, d\varphi_t. \quad (0 \leq \varphi_t \leq \pi)
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

式 (3.4.5) の  $\ell, \ell_p, \varphi_t$  はいずれも領域の形状と直線  $g$  に依存する量であるから, 領域  $D$  不定形であるとき  $f_s(\mathbf{P})$  は単純な関数型で表すことは出来ない. そこで図3.23 のような円領域における環状方向の微小な線分を考えこの線分を通過する流動量を計算してみよう.

この微小な線分と領域の中心との距離を  $h$  とすると,  $\ell, \ell_p$  は  $h$  の関数として以下のように表される.

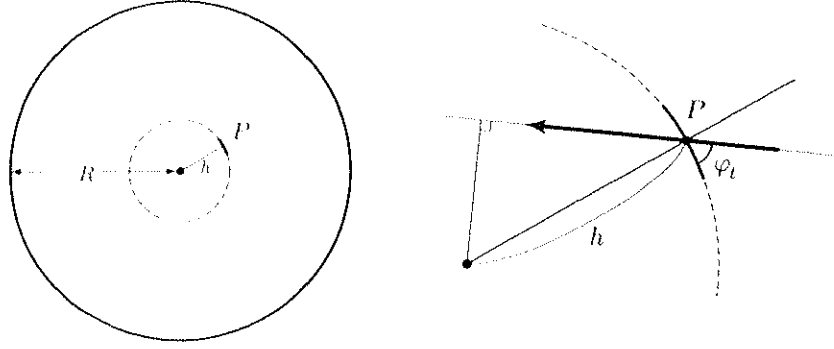


図 3.23: 円領域の内部の微小な線分

$$\begin{aligned}\ell &= 2\sqrt{R^2 - h^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right)} \\ \ell_p &= \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right)} - \left|h \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_t\right)\right|\end{aligned}$$

よって,  $f_s(P)$  は式 (3.4.5) より,

$$f_s(P) = 2R^3 \left\{ \left(1 - \frac{h^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1 - \frac{h^2}{R^2}}{\frac{h}{R}} \arcsin \frac{h}{R} \right\} \quad (3.4.6)$$

と計算することができる.

$h$  を 0 から  $R$  まで変化させたときの  $f_s(P)$  の分布を図 3.24 に示す.

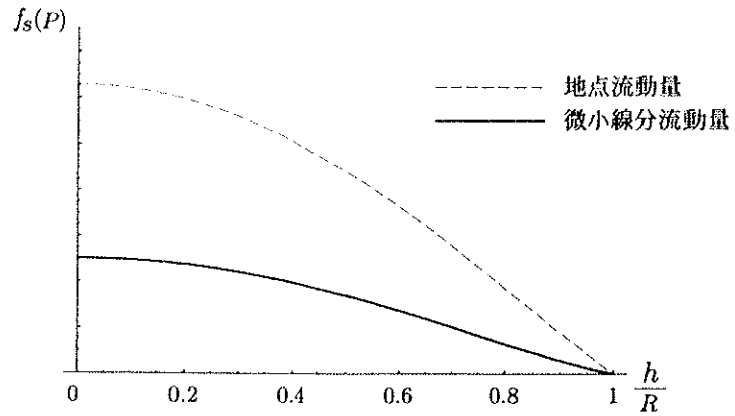


図 3.24: 微小な線分を通過する流動量

微小線分の流動量は, その導出過程の式 (3.4.4), (3.4.5) から, 地点流動量よりも少なくなる

ことがわかる。また式 (3.4.6) は、円領域の同心円で表される境界を通過する量をその境界の円周の長さで除すことで導くこともできる。

### 3.5 第3章のまとめ

本章では2次元平面上的円領域内で移動が一様に発生するモデルを仮定し、領域内の流動量分布を理論的に導出した。これらを整理すると結局、

- 任意地点 (方向) に固定した微小な線分に直交する流動量
- 任意地点をあらゆる方向から通過する流動量 (地点流動量)
- 任意地点 (方向) に固定した微小な線分にあらゆる方向から通過する流動量

の3つの量を計算したことになる。

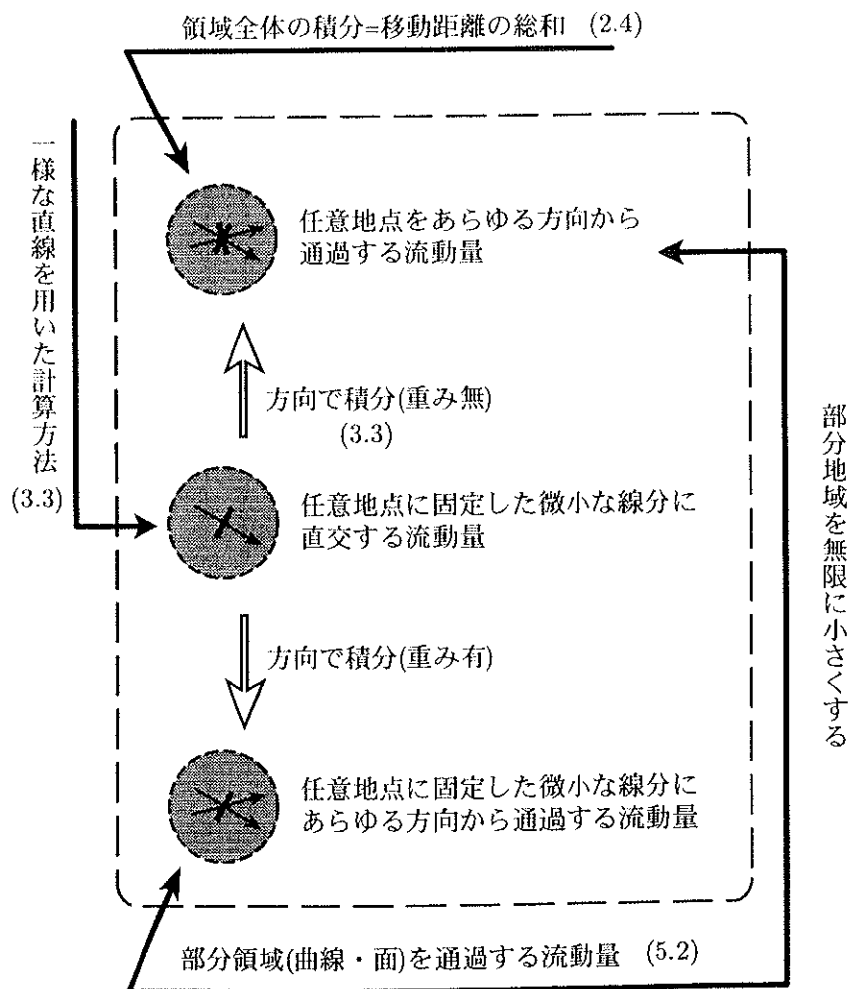


図 3.25: 2次元平面上における流動量の理論的關係

これらの量は、図 3.25 のような相互関係を持つことがわかった。図中の節番号は本論文でその内容について述べた箇所である。論文の構成の都合上やや分散して説明しているが、それぞれの関係および全体としての理論体系についてはこの図 3.25 を参考にされたい。

その他、第3節で議論した領域内の地点流動量分布は、数値計算やシミュレーションを用いても求めることができる ([西野,1994]) し、より現実的な条件下での分布を知ることができるが、条件を単純化して導かれた結論から有限な領域内の流動に関する基本的な性質を知ることができたといえる。

また、[腰塚,1992] では交通手段の性能が発達し距離や時間を克服するにつれて一地点の通過交通量がしだいに領域の規模に依存することが数理的に明示されており、地域全体を考慮した議論の重要性を示唆している。筆者は領域の規模を考慮した動的な量としては、式 (3.3.13) に示した流動量分布が最も基礎的なものであると考えている。

この式 (3.3.13) は、ある地点の流動量が領域の規模と中心地からの距離にどのように依存しているかという関係を端的に示すものである。この式から読みとることができるその他の知見については第 4.2 節で論じることにする。

ところで、円領域の流動量分布を表す式 (3.3.13) と同じものがすでに [Holroyd,Miller,1966] で、前述した微小円を利用する導出方法と一様な直線を用いる導出方法のいずれとも異なる過程で導出されている。

しかし本論文が明らかにした一様な直線を用いる方法は、領域内流動量の理論的導出にも数値的な計算にも有益な貢献を果たす、いわば 2 次元平面上の 2 点の関係を 1 次元的演算に変換するような作用をもつものであり、移動の発生確率や領域形状に関する一般化を行うときに [Holroyd,Miller,1966] が用いた方法に比べて明らかに有利であることがわかる。

また図 3.16 や図 3.18 に示した流動量分布を見ると、閉じた領域内では起終点が一様に分布していてさえ中心部が混み合うという興味深い性質があることがわかる。筆者はこの知見は有限な都市平面が原理的に (運命的といってもよいだろう) 持っている性質としてもっと広く認識されるべきであると考ええる。