第2章　流動量分析のための理論的基礎

2.1　はじめに

本研究では流動量のモデルを設計およびこれを用いた分析手法の開発に際して，計算幾何学や積分幾何学における諸理論を援用している．そこで本章では本研究の最も基礎的な概念である「流動量」の理論的な定義に加え，[腰塚,1976a]，[腰塚,1976b] や [伊理, 腰塚,1986] その他を参照し，本論文で展開されている議論の理解を促すための主要な数学的基礎を解説する．

まず第 2.2 節で地点流動量に関する定義をおこなう．以後，論文全体を通じてこの定義にしたがって議論を進めることになる．つぎに第 2.3 節および第 2.4 節で 2 次元の有限な凸領域とこれをよぎる直線との間に成り立つ理論的関係について述べる．第 2.5 節では主として第 5 章で領域内の部分領域を通過する流動量に関する議論で用いる線積分に関してその数学的基礎をまとめておいた．

そもそも数学的基礎については，研究の直接の目的ではないことから文末に付録として掲載すべきところであるが，ここで述べる基礎的性質自体が本論文における論理展開の枠組みと密接に関連していることを理由にあえて論文の冒頭でこれらを概説しておきたい．

実際に論文中でなされる議論は “一様な直線” や “曲線と交わる直線の測度” などの基本的な性質を利用したものが多いので，その概念を理解しておくことが極めて重要である．

2.2　地点流動量の定義

まず，本論文全体を通じて議論の対象となる “流動量” を定義する．

いま便宜上，図 2.1 に示したような 2 次元平面上の有限な凸領域を都市内移動について考えるための基本的なモデルとして考える．

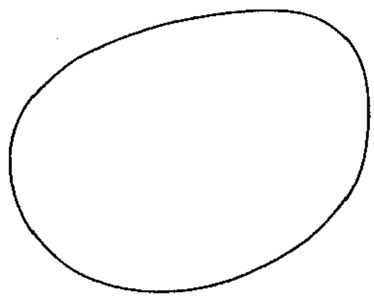

図 2.1: 平面上の有限な領域 (都市の基本モデル)

念のため述べておくが，ここで「便宜上」としたのは，原則として一般の次元において後述するような移動および流動の定義が可能であるからである．ただし，本論文では主として2次元平面を対象として分析するため，論文中で特に注意しないときは2次元空間を仮定することにする．

また領域についても，第4章で述べるように場合によっては無限領域を考えることもできるし，非凸領域の流動量分布を計算することもできる．ただしそれらを定式化したり計算したりするにはいくつかの条件が必要なので詳細は後述する．

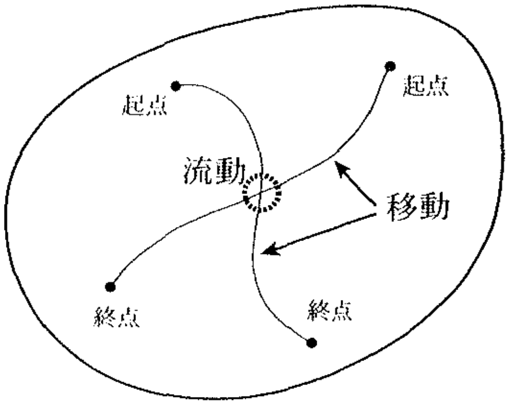

図 2.2: 2次元空間の移動と流動

まず，ある領域内の "移動" が領域内部の**一方を起点もう一方を終点とする相異なる2点のペアとその間を結ぶ経路**で図2.2に示すように定義され，2点間の移動がある確率にしたがって生起するとする．このとき領域内の任意の地点における "流動量" を，**その地点を経路の一部として含む移動ペアの総数**として定義する．

移動と流動に関するこのような概念的な定義を数学的に記述すると以下のようになる．

- D：平面上の有限領域
- $\boldsymbol{P}$：領域 D 内の任意の地点
- $\boldsymbol{P}_1$：移動の起点
- $\boldsymbol{P}_2$：移動の終点
- $\Re(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$：移動の経路
- $\mu(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$：2点間の移動生起確率

このとき地点 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ 間で発生する移動ペアは，

$$\mu(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)\ \ \mathrm{d}\boldsymbol{P}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{P}_2 \tag{2.2.1}$$

となるから，地点 $\boldsymbol{P}$ の流動量 $f(\boldsymbol{P})$ は，

$$f(\boldsymbol{P}) = \int_{P_1, P_2 \in D, \Re(P_1, P_2) \cap P \neq \emptyset} \mu(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)\ \mathrm{d}\boldsymbol{P}_1\, \mathrm{d}\boldsymbol{P}_2 \tag{2.2.2}$$

のように定式化して定義することができる．

さて，以上の記述的および数学的定義に基づいて，実際の流動量分布モデルをつくる際にはつぎの 2 つの仮定が必要となる．

1 つ目は移動経路 $\Re$ に関する仮定である．前提条件として経路を与えるにせよ何らかの条件で動的に選択するにせよ，経路に関する何らかのルールをきめてやらなければならない．

たとえば，[Holroyd,1968] や [Vaughan,1987] などでは放射方向の移動や環状方向の移動などを組み合わせた様々な経路条件について，それぞれの特性を計算して比較するようなモデルが提案されている．本研究では原則として経路は起終点を結ぶ直線分で実現できると仮定して議論を進めるが，この条件は最も単純でモデル化および解析的な取り扱いが容易であることに加え，つぎのような解釈を与えることができる．

想定した領域が移動に関して均質 (つまり高速道路や交差点などの装置が存在しない条件) であれば，直線移動は起終点間を結ぶ最短 (時間) 経路である．よって総移動距離に関して直線移動モデルは下限値に相当する量を実現するものである．

またこのことは，実は領域内のすべての地点の流動量の総和が最小であることとも同義である．詳細は第 2.4 節で解説する．

2 つ目は移動の発生密度 μ に関する仮定である．本論文では，重力モデルに代表される空間相互作用モデル [日本建築学会,1992] に倣って移動の発生密度を仮定することにする

その他，特に第 3 章で展開する流動量分布の理論的導出仮定では領域形状などにいくつかの強い条件が必要である．また発生確率に関しても移動経路のとき同様，「重み無し」の状態で議論しておくことが重要である．

なぜなら重み無しのモデルは，解析的な取り扱いが容易であることに加え，本論文の冒頭で論じたように「流動量の分布を決定する要因は何か」について考察するときに基準となるものとして意味を持つからである．以上により μ についても定数として計算したものを基本モデルとして取り扱うことにする．

2.3　2次元領域と直線の関係

2.3.1　一様な直線について

積分幾何学の基礎的な原理・定理群の中でも“一様な直線”あるいは“一様にランダムな直線”は重要な概念であり，本論文においてもこの一様な直線は極めて重要な役割を果たしている．一様な直線に関する議論は [腰塚,1976a] に詳しいので，本論文では簡単な定義と性質を述べるにとどめる．

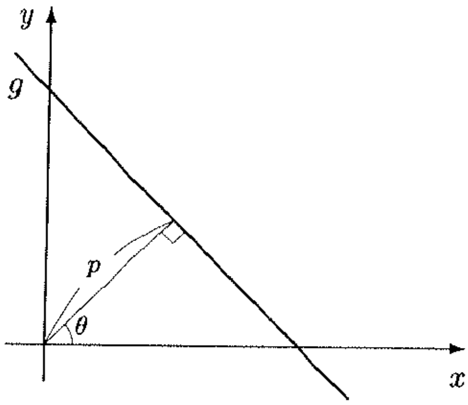

図 2.3: p と θ できめられる直線

図2.3のように任意に定めた直交座標系において，ある任意の直線 g に対し原点から垂線をろし，図示したとおり原点から直線までの距離を p，垂線と x 軸が成す角度を θ とする．
このとき直線 g は次の方程式で表される．

$$x \sin\theta + y \cos\theta \;=\; p \tag{2.3.1}$$

また，図2.4のように $p\theta$ 平面上の点と xy 平面上の直線が一対一対応することがわかる．

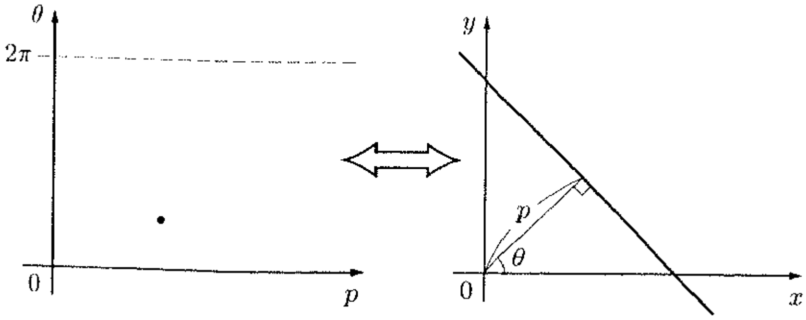

図 2.4: $p\theta$ 平面の点が表す xy 平面の直線

$p\theta$ 平面において一様に分布する点に対する xy 平面の直線の集合 G を一様な直線と呼び，一様な直線は領域内のあらゆる点で線密度が等しくなるという性質を持つことがわかっている([腰塚,1976a]，[腰塚,1976b] など).

$p\theta$ 平面の格子点 (一様にレギュラーな点) に対する直線と，p，θ それぞれ独立に一様乱数を発生させて定めた点 (一様にランダムな点) に対する直線は図 2.5 のようになる．

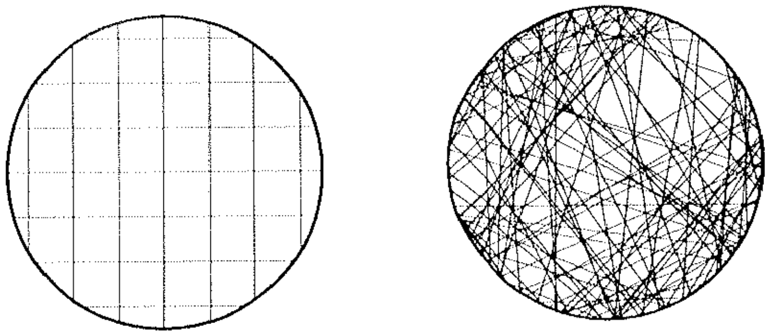

図 2.5: 一様な直線の例

2.3.2 領域内の 2 点間の関係 ～ Crofton の第 3 定理 ～

[腰塚,1976c] において便宜的に名付けられた Crofton の第 3 定理とは，凸領域の内部において，任意の 2 点間の (直線) 距離と領域をよぎる直線の領域に切り取られる部分の長さとの関係において成り立つ定理である．

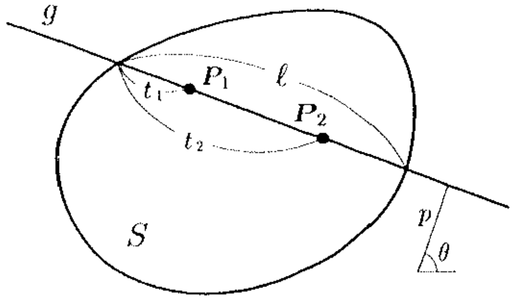

図 2.6: 領域をよぎる直線

平面上の任意の直線とこの直線上の 2 点 $\boldsymbol{P}_1(x_1, y_1), \boldsymbol{P}_2(x_2, y_2)$ を図 2.6 のように定める．[腰塚,1976c] によれば，このとき 2 点 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ 間の距離 $|t_2 - t_1|$ を用いて以下のような関係

が成り立つ (ただし，$[\cdot,\cdot]$ は外積演算を表す).

$$[\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}y_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}y_2] = |t_2 - t_1| \, [\mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2, \mathrm{d}p, \mathrm{d}\theta]$$

これは $\mathrm{d}G = [\mathrm{d}p, \mathrm{d}\theta]$ とおいて，以下のように整理できる.

$$[\mathrm{d}\boldsymbol{P}_1, \mathrm{d}\boldsymbol{P}_2] = |t_2 - t_1| \, [\mathrm{d}t_1, \mathrm{d}t_2, \mathrm{d}G]. \tag{2.3.2}$$

いま領域内の 2 点間の距離を r，直線が領域に切り取られる部分の長さを ℓ としたときに成り立つつぎのような関係が，Crofton の第 3 定理と呼ばれるものである.

$$\begin{aligned} \int r^n \ \mathrm{d}\boldsymbol{P}_1 \, \mathrm{d}\boldsymbol{P}_2 &= \int |t_2 - t_1|^{n+1} \ \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}G \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)} \int \ell^{n+3} \ \mathrm{d}G. \qquad (n \geq -1) \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

式 (2.3.3) に $n = 0$ を代入すると，領域の面積 S と一様な直線群との間につぎのような関係が成り立つ.

$$S^2 = \frac{1}{3} \int \ell^3 \ \mathrm{d}G. \tag{2.3.4}$$

式 (2.3.4) は Crofton 自身が導いたものとして [腰塚,1976c] に紹介されている.

2.4　流動量分布と距離分布の関係について

さて，都市空間の性質を移動という視点から見て距離 (分布) という指標と流動量 (分布) という指標に注目することは第 1 章で述べた．そこでは加えて距離分布と流動量分布が実は全く別のものではなく "移動の起終点ペア" を基本単位とする極めて深い関係にあるものであることを説明した.

いま，凸領域 D と一様な直線の集合 G から取り出した一本の直線 g が，図 2.7 のような関係にあり，また領域内で移動が一様に発生すると仮定する.

まず前節で紹介した Crofton の第 3 定理を導出する過程から導かれる系を示す．つぎに距離分布と流動量分布がいずれも計算可能な円の領域において，これらを実際に計算して両者の関係を確かめる.

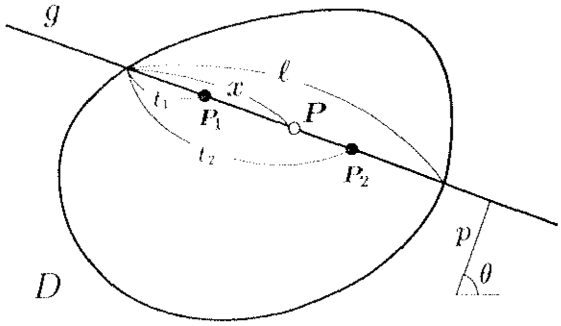

図 2.7: 凸領域 D と一様な直線の集合 G から取りだした 1 本の直線

2.4.1 Crofton の第 3 定理から導かれる系

前節の最後で式 (2.3.3) で表される Crofton の第 3 定理に $n=0$ を代入して得られる関係式が，領域の面積と一様な直線の領域に含まれる部分の長さとの間に成り立つ関係を表すものであることを示した．

ここでいう流動量と距離分布の関係は，式 (2.3.3) において $n=1$ のときに導かれる系によって表される．

[系]： 2 次元平面上の有限な凸領域において，領域内部のあらゆる 2 点間の距離の総和と，領域内すべての地点の流動量の総和は等しい．

[系] の証明

式 (2.3.3) に $n=1$ を代入すると，

$$\int r \;\, \mathrm{d}\boldsymbol{P}_1 \, \mathrm{d}\boldsymbol{P}_2 = \frac{1}{6}\int \ell^4 \;\, \mathrm{d}G \tag{2.4.1}$$

となる．

ところで，このとき一様な直線の集合 G から取りだした一本の直線 g に注目すると，以下が成り立っている．

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{P}_1 \, \mathrm{d}\boldsymbol{P}_2 = \int \; |t_2 - t_1| \;\; \mathrm{d}t_1 \, \mathrm{d}t_2.$$

この直線上の点 $\boldsymbol{P}$ におけるこの直線上の (この直線で測ることができる) 流動量 $f^g(\boldsymbol{P})$ は，

$$
\begin{aligned}
f^g(\boldsymbol{P}) &= \int_x^\ell \int_0^x \mathrm{d}\boldsymbol{P}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{P}_2 \\
&= 2\int_x^\ell \int_0^x (t_2 - t_1)\ \mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 \\
&= \ell \cdot x(\ell - x)
\end{aligned}
$$

となる．また，領域内のすべての点における流動量の総和はつぎのように変形することができる．

$$
\begin{aligned}
\int_{P\in D} f(\boldsymbol{P}) &= \int_{P\in D}\left\{\int_{P\in g} f^g(\boldsymbol{P})\,\mathrm{d}G\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{P} \\
&= \int_{g\cap D\neq\emptyset}\left\{\int_{P\in g} f^g(\boldsymbol{P})\,\mathrm{d}\boldsymbol{P}\right\}\mathrm{d}G. \qquad (2.4.2)
\end{aligned}
$$

式 (2.4.2) の括弧内は，往復を考えずに，

$$
\int_0^\ell \ell\cdot x(\ell - x)\ \mathrm{d}x = \frac{\ell^4}{6}
$$

と計算でき，領域内総流動量はつぎのように示される．

$$
\int_{P\in D} f(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{6}\int \ell^4\ \mathrm{d}G. \qquad (2.4.3)
$$

式 (2.4.3) と式 (2.4.1) をあわせると，結局以下のような関係式が導かれる．

$$
\int_{P\in D} f(\boldsymbol{P}) = \int r\ \mathrm{d}\boldsymbol{P}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{P}_2 \qquad (2.4.4)
$$

この式は左辺が領域内流動量の総和，右辺が領域内距離の総和を示しており，これらが一致する量であることを表すものである．[証明終]

2.4.2　領域内総流動量と領域内総距離

式 (2.4.4) で演繹的に示した流動量分布と距離分布の関係を具体的な計算を用いて確認してみよう．式 (2.3.3) は一般の凸図形について成り立つものであるが，式 (2.4.1) や式 (2.4.3) を明示的に計算することは出来ないので，ここでは図 2.8 のような半径 R の円の領域について考えることにする．

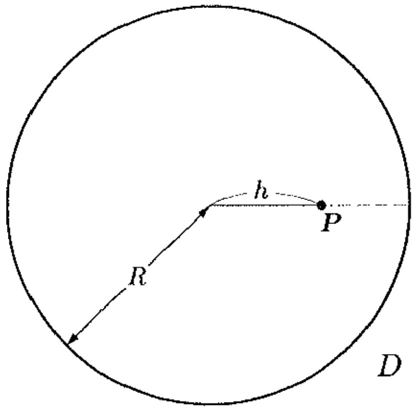

図 2.8: 円形の領域

領域内の移動が D の内部のあらゆる2点を結ぶ線分で表されるとする.

このとき，領域内の地点$\boldsymbol{P}$の流動量 $f(\boldsymbol{P})$ は，地点$\boldsymbol{P}$と領域の中心との距離を h を用いて，以下の式 (2.4.6) で与えられることを利用する.

$$f(\boldsymbol{P}) \;=\; 8R(R^2-h^2)\,\boldsymbol{E}\left(\frac{h}{R}\right). \tag{2.4.5}$$

(ただし,$\boldsymbol{E}$は第2種完全楕円積分を表す.)

総流動量を $F(R)$ とおくと，$F(R)$ は各地点における流動量 $f(\boldsymbol{P})$ を領域全体について積分した以下の式 (2.4.6) で表される.

$$\begin{aligned} F(R) &= \int_{P\in D} f(\boldsymbol{P})\ \mathrm{d}\boldsymbol{P} \\ &= \int_0^R 2\pi h\cdot 8R(R^2-h^2)\ \boldsymbol{E}\left(\frac{h}{R}\right)\mathrm{d}h \\ &= \frac{256\pi}{45}R^5 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

つぎに領域内の距離の総和 $H(R)$ を計算する.

[腰塚, 他,1986] や [栗田,1988] などによると，半径 R の円の領域内に一様に分布する2点間の直線距離 r の分布 $h'(r)$ は，Crofton の微分方程式を用いるなどして以下のように求めることができる.

$$h'(r) = \frac{4r}{\pi R^2}\ \arccos\frac{r}{2R} - \frac{r^2}{\pi R^4}\sqrt{4R^2-r^2}.$$

ただし $h'(r)$ は標準化された確率密度分布式であるから，実際の分布量 $h(r)$ はこれに $\left(\pi R^2\right)^2$ を乗じた，

$$h(r) = 4r\pi R^2 \ \arccos\frac{r}{2R} - \pi r^2\sqrt{4R^2 - r^2} \tag{2.4.7}$$

である．

2点 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ の直線距離を $\|\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\|$ とする．半径 R の円内の最も離れたペアの距離は $2R$ だから，往復を考慮した領域内の総移動距離 $H(R)$ は，

$$\begin{aligned} H(R) &= 2\int_{\|P_1P_2\|=r} r \ \mathrm{d}\boldsymbol{P}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{P}_2 \\ &= 2\int_0^{2R} r\cdot h(r)\mathrm{d}r \\ &= \frac{256\pi}{45}R^5 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

となる．式(2.4.6)と式(2.4.8)より，領域内流動量の総和と領域内距離の総和が一致することが示された．

ここでは計算例として2次元連続平面上の円領域を用いたが，この関係は一般の空間で成り立つものである．たとえば[腰塚,1999]では，放射状と格子状のネットワーク空間でこの総流動量と総距離を厳密に計算し上で示したような関係が成立していることを示している．

2.5　線積分に関する数学的定義

領域内の任意の曲線に沿って測った流動量を定式化しさらに計算するためには，流動量を場のポテンシャルと見なした経路積分をする必要が生じる．この経路積分で用いる線積分要素については第3章で厳密に議論することにして，本節では線積分を利用する上で必要となる数学的な基礎知識を整理しておくこことにする．

まず平面上の任意の曲線についてその長さを定義した後，この曲線に沿った積分すなわち線積分の一般的な記述をする．また閉曲線状の積分である周回積分につても言及する．

2.5.1　平面上の曲線分の長さ

いま2次元平面上において $x_1 - x_2$ 直交座標系を仮定する．このとき，図2.9のような滑らかな曲線分 $C : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\sigma) \in C^1((x_1, x_2) = x_1(\sigma), x_2(\sigma)), (a \le \sigma \le b)$ を考える．

C の長さ s を定めるために C を点 $P_0 = A, P_1, \cdots, P_m = B$ によって m 分割し，$P_0 = \boldsymbol{x}(a)$, $P_m = \boldsymbol{x}(b)$, $P_j = \boldsymbol{x}(\sigma_j)$ とする．

P_{j-1} と P_j の間の弧長を，弦の長さ $\overline{P_{j-1}P_j}$ で近似する．

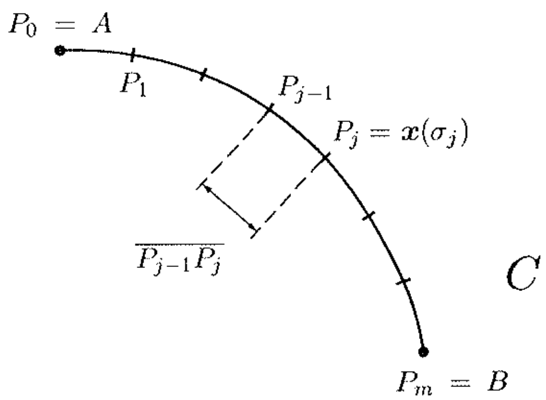

図 2.9: 曲線の長さの定め方

$$
\begin{aligned}
\overline{P_{j-1}P_j} &= |\boldsymbol{x}(\sigma_j) - \boldsymbol{x}(\sigma_{j-1})| \\
&= \sqrt{\{x_1(\sigma_j) - x_1(\sigma_{j-1})\}^2 + \{x_2(\sigma_j) - x_2(\sigma_{j-1})\}^2} \qquad (2.5.1)
\end{aligned}
$$

$\Delta\sigma_{j-1} = \sigma_j - \sigma_{j-1}$ とおいて，$\boldsymbol{x}$ の成分ごとに $n = 1$ とした Talar 展開を施せば，式 (2.5.1) は，

$$
\overline{P_{j-1}P_j} = \sqrt{\{x_1'(\sigma_{j-1}^{x_1})\}^2 + \{x_2'(\sigma_{j-1}^{x_2})\}^2}\,\Delta\sigma_{j-1} + o(|\Delta\sigma_{j-1}|) \qquad (2.5.2)
$$

$$
\left(\text{ただし}, \sigma_{j-1}^{x_1}, x_2'(\sigma_{j-1}^{x_2} \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j)\right)
$$

となる．すべての区間に対する弦の長さの和

$$
\sum_{j=1}^{m} \overline{P_{j-1}P_j} \qquad (2.5.3)
$$

をつくり，$m \to \infty$, $\max|\Delta\sigma_{j-1}| \to 0$ とすると，s は，

$$
\begin{aligned}
s &= \int_a^b \sqrt{\{x_1'(\tau)\}^2 + \{x_2'(\tau)\}^2}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_a^b |\boldsymbol{x}'(\tau)|\mathrm{d}\tau \qquad (2.5.4)
\end{aligned}
$$

となる．以下，曲線の長さを式 (2.5.4) で定義することにする．

2.5.2　線積分の定義

平面上で連続関数 $f(x)$ が定義されているとする．また先ほどと同様にして C を m 個の微小な弧 $\Delta C_j\ (1 \leq j \leq m)$ に分割する．曲線 C の長さは式 (2.5.4) で定義されるものとする．

弧 ΔC_j に対する弦の長さを Δs_j とし，ΔC_j 上の任意の点 $P_j = \boldsymbol{x}(\tau_j)\ (\tau_j \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j])$ をとって，

$$\sum_{j=1}^{m} f(P_j)\Delta s_j \tag{2.5.5}$$

をつくる．分割を細かくして $m \to \infty$, $\max\Delta s_j \to 0$ としたときの極限値を以下のように記述する．この極限値を一般に曲線 C に沿う弧長に関する線積分という．

$$\begin{aligned}
\int_C f(P)\mathrm{d}s &= \int_a^b f(\boldsymbol{x}(\sigma))\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma}\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_a^b f(\boldsymbol{x}(\sigma))\sqrt{\{x_1'(\sigma_{j-1}^{x_1})\}^2 + \{x_2'(\sigma_{j-1}^{x_2})\}^2}\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_a^b f(\boldsymbol{x}(\sigma))\sqrt{\{x_1'(\sigma)\}^2 + \{x_2'(\sigma)\}^2}\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

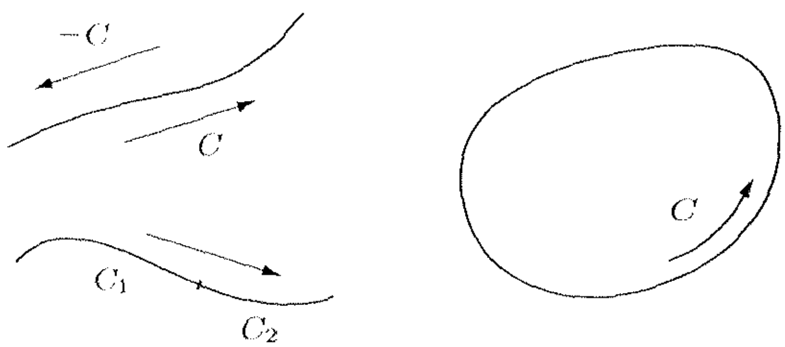

図 2.10: 線積分の性質

さらに，定義より以下が成り立つことがわかる (図 2.10).

$$\begin{aligned}
\int_C f(P)\,\mathrm{d}s &= -\int_{-C} f(P)\,\mathrm{d}s. \\
\int_C f(P)\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} f(P)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(P)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

特に C が閉曲線のとき，C に沿い正の向き (C が囲む面の放線ベクトルに対する右ねじの向き，図 2.10) に 1 周する積分を周回積分と呼びつぎのよう記号を用いて表す．

$$\oint_C f(P)\,\mathrm{d}s \tag{2.5.7}$$

2.6 第2章のまとめ

本章では研究の前提を為す諸定義や数学的基礎についてまとめた．

第 2.2 節でおこなった地点流動量の定義は本研究を通じて最も基本的な仮定である．

第 2.4 節で示した流動量分布と距離分布の関係は本論文の他の分析と直接の関係はないが，論文の最初で論じた移動から見た都市空間分析のための重要な知見であると考えられるので詳しく解説した．

その他この章で説明した内容は従来の諸知見を本研究の基礎とすべく整理したものに過ぎず，ここではじめて明らかにしたものではないから，特別に議論の分かれる点はないと思われる．