第６章

数学学習における

コミュニケーション連鎖の内化

－学習者個人の思考の連続性－

第６章では、学習者個人の思考の連続性という視点から、数学学習におけるコミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程を同定し、その特性を解明する。第１節では、認知過程を分析するための理論的枠組みを構築する。第２節では、事例を分析し、第３節では、認知過程を同定する。第４節では、認知過程の特性を解明する。第５節では、学習の起源としてのコミュニケーション連鎖の内化という視点から、第４章から第６章までの考察を整理する。

第１節　学習者の認知過程を分析するための理論的枠組み

第４章と第５章では、活動の連続性と学習者間の思考の連続性という視点から考察を行ってきた。そこで第６章では、コミュニケーションの連鎖に直接的、あるいは、間接的に参画している学習者個人の思考の連続性という視点から考察を行う。第６章の目的は、「学習者個人の思考の連続性という視点から、数学学習におけるコミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程を同定し、その特性を解明する」という第３の課題に答えることである。コミュニケーションへの参画が、学習者が行う知識の再構成と高位概念の形成に、どのように関与しているのかを明らかにすることが、第３の課題に込められた研究の意図である。この目的を達成するために、第１節では、学習者の認知過程を分析するための理論的枠組みを、Skemp[1)] による数学理解の研究を基に構築する。なお、本研究で述べる「認知過程」とは、メッセージを知覚・認識する過程、ならびに、メッセージを知覚・認識することにより活性化される思考の変容過程のことである。

第１項　数学理解に関する５相の認知過程モデル

Skemp(1971/1973,p.35) は、「何かを理解するとは、それを適切なシェマのなかに同化することである」と述べ、数学的概念の理解に関する研究の先駆けをなした。心的構造の意味で用いられる「シェマ」という用語は、Piaget の考え方を踏襲したものであり、Skemp (1971/1973,p.33) は、このシェマの２つの機能を、「既存の知識を統合すること」と「新しい知識を獲得するうえでの心的な用具となること」であると述べている。そして、Skemp (1971/1973,p.33) は、「シェマが新しいデータを同化したときには、以前とはまったく同一の存在ではなくなるから、同化 (assimilation) の働きとその反対の調節 (accommodation) の働きとは、ある程度まで不可分である」と述べ、同化と調節という機能が明確に分離されるものではないとしている。新しい知識を獲得するうえでの心的な道具として機能したシェマは、新しい概念を古い概念に同化させるという働きをなすが、新しい概念が結びつけられた古い概念は、新しい概念が結びつけられることによって、その構造を変容させる。この事が、Skemp(1971/1973,p.33) が言う、「シェマが新しいデータを同化したときには、以

1) 「用具的理解と関係的理解 (Skemp,1976)」という概念を示し、数学を理解するという人間の認知の問題に取り組んできた Skemp は、個人による理解深化の限界に気づき、他者とのコミュニケーションが認知変容をもたらすという問題にも取り組んでいる (cf. Skemp,1979,1982a)。

前とはまったく同一の存在ではなくなる」ということである。

新しい要素を加えるというシェマの機能は、その機能を遂行する過程で、自分自身の構造を変容させるという調節の機能を果たしながら、古い概念と新しい概念との再構造化を達成している。「新しい概念は、新しい経験の理解と適切なふるまい方を可能にするばかりではなく、古い概念を1つの特殊例としてその中に含んでいる。これは、調節の重要な特長である。もとのシェマは放棄されるのではなくて、新しいシェマの一部となる」と、Skemp(1971/1973,p.33)が述べる通り、私たちが新しい概念を学習するという過程は、古い知識を新しい知識に置き換えていく過程ではなく、古い知識と新しい知識を統合することにより、古い知識が新しい知識の一部として存続していくように、新旧の知識の相互関係を築きあげていく過程である。そして、Skemp(1979,pp.125-127)は、この考え方に到達した後、調節を拡張・分化・再構成に細分化し、同化の前に認識という相[2]を置くことで、認識 (realization)、同化 (assimilation)、拡張 (expansion)、分化 (differentiation)、再構成 (re-construction) という5つの相として、数学理解の認知過程を同定する。

これまでに述べてきたように、Skempが示した数学理解に関する5相の認知過程モデルは、その中心的な概念の多くをPiagetの認識論に依存している。しかし、Skempが研究の基盤としたPiagetの研究は、しばしば、他者との相互作用を無視した、個人レベルでの認知の変容を取り扱ったものであるとの誤解を受けている (Vygotsky,1956/1962a,pp.31-109)。こうした批判が起こる原因は、外部からの刺激を自ら変容させようとはしないと考えられがちな幼児を、Piagetが研究対象としてきたことに起因している (Piaget & Garcia,1987/1998,pp.170-187; cf. Piaget & Garcia,1987,1987/1991)。だが、このような誤解に対して、Piagetの研究は、私たちが考えている以上に、外部からの刺激に対し自らを変容させるという、認知変容の複雑さを追究し続けてきたものであるという認識を持つことは、Piagetが提起した「同化と調節」という認知機能の理解に重要な意味を持つことになる (cf. 江森,1998d)。Piagetが研究の対象としてきた幼児の認知行動には、他者を意識しない「中心化」という傾向が見られる (Piaget,1945/1988,pp.153-170. Vygotsky,1956/1962a,pp.79-84)。それゆえ、研究対象を幼児に限定した段階では、調節という機能をさらに深く研究することは困難だったと推察できるが、その事と、Piagetの研究には他者から

---

[2] 本研究では、認知過程は明確に分離できるものではないという、Dewey(1933/1950)以来の思想的伝統を引き継ぎ、「段階」という用語にかわって、「相」という用語を用いることにする。植田訳(Dewey,1933/1950,p.109)では、「側面もしくは局面 (phases or aspects)」と訳出されている。

の刺激を調節するという認識が欠けていたという批判を、直結させてはならない。私たちは、Piaget の研究にも調節という機能の重要性が十分に含意されていると読み解くことによって、Skemp が Piaget の研究を継承したときの思いを理解することができる。Skemp は、調節を拡張・分化・再構成という枠組みに変更し、分化という複数の人々の思考の差異化と、その再構成という枠組みを採り入れることによって、個人の認知変容の過程に他者との相互作用の過程を加味することができると考えたのである。

しかし、Skemp も認識していたように、この５つの相が容易に進行するわけではない。その理由として、Skemp(1971/1973,p.34) は、「シェマは、人間にとって重要なものであるから、それを変更するための抵抗はきわめて大きいだろうし、また、変更を強いる状況や人間は脅威と感じられ、そのように扱われる」と述べ、新しい概念を獲得する際に、私たちが直面する心的な抵抗の大きさとその起源に関する研究の必要性も強調している。Skemp(1971/1973,p.34) は、こうした心的抵抗の大きさを示す例として、「ピタゴラスが、直角三角形の斜辺の長さは、有理数では表すことができないことを発見したとき、彼は自分の学派の人びとに既成の概念を脅かすこの発見について沈黙を守るよう誓わせた」ことをあげている。ピタゴラスの逸話のように、数学の歴史には、新しい数体系への調節過程の難しさを示すいくつかの興味深い例が見られるが、新しい数学的概念がもたらす脅威は、いずれの場合も個人的に解決されてきたのではなく、数学者集団によるコミュニケーションによって乗り越えられてきた。例えば、非ユークリッド幾何学という従来の幾何学の常識を覆す幾何学的世界の出現は、数学という知識の再構成によって乗り越えられ、古い知識は新しい知識の特殊事例として位置づけられることになった。

こうした数学史上の逸話を参考にすると、Skemp が示した「認識・同化・拡張・分化・再構成」という５つの相は、個人が外部からの刺激に反応して、既存知識と新しい知識とを再構成していく過程だけではなく、数学者集団が互いにコミュニケーションしながら、新しい数学的概念を生成していく過程を描くモデルとしても使用することができると考えられる。そこで第２項では、「空間座標系」という数学的概念の生成過程を例として用い、新しい数学的概念の生成過程が５つの相によって記述可能であることを示すことにする。

第２項　数学的概念の生成過程に見られる５つの相

ライプニッツが導入した「平面座標」という考え方は[3]、平面上の位置や運動を数学的に処理する画期的な方法として人々に認識された。座標軸という基準の導入により、平面上のすべての点が、ｘ座標とｙ座標という２つの数を対とするシステムとして記述されることになった。このような２つの数を対とする記数法は、既に分数などに見られていたが、同様の考え方が平面上の位置を示す方法になるということに気づくには、多くの歳月が必要とされた。そして、２本の直交座標によって、平面上の位置を確定するという考え方に同化した人々は、平面座標という考え方を３本の座標軸を用いて、空間上の位置を表記する方法へと拡張する。２次元平面から３次元空間へ座標系を拡張することは、それ以前の努力に比べれば、それほど難しいことではなかった。こうした歴史的経緯は、平面座標系への同化から空間座標系への拡張が行われたことを意味しているが、この拡張が個別に行われたことは、平面座標系から空間座標系への拡張において、座標軸の位置関係が異なる「左手系（図6-1)」と「右手系（図6-2)」という２種類の座標系が生み出されたことに示されている。

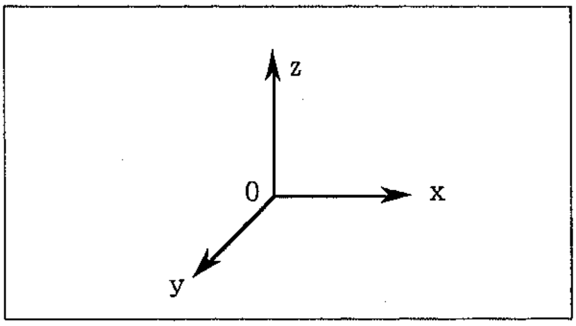


図6-1：左手系の座標軸

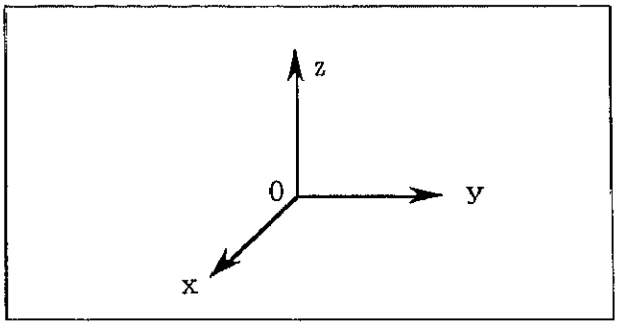


図6-2：右手系の座標軸

このような経緯をへて空間座標系が創出されたことは、平面座標系の思考に同化した人々が、平面から空間への拡張として、３本の座標軸で空間の位置が表記可能であるという考え方に到達したことを示している。そして、この２つに分化した空間座標系は統合される

[3] 現代数学小事典（寺阪編,1977,pp.128-129）によれば、Descartes(1596-1659）によって発明されたとされる「座標」という用語は、Descartesよりも後のLeibniz(1646-1716）の創作であると言う。また、その創始についても、DescartesよりFermat(1601-1665）の方がはるかに丁寧であり組織的であると言う。座標の考え方そのものは、紀元前200年のギリシャのアポロニオスまでさかのぼることができると言う。

こともなく、2つの座標系が並存していた時代があったことも知られている（西尾,1969, p.69. 窪田編,1950,p.410）。こうした歴史的経緯は、既存概念の拡張よりも、分化した概念の再構成の方が難しいことを物語っている。そして、左手系と右手系と2種類の空間座標系に分化された概念は、現在、国際的に右手系に統一されている。右手系に統一された経緯を、数学的知識も社会的に構成されると考える立場では、数学者のコミュニティが互いに同意を取り付けながら解決してきた例と考えるかもしれない。社会的構成主義者が言うように、表記の不統一がさまざまな問題を生じさせるという理由で、右手系に統一されたと考えることも可能だが、その選択がベクトルの外積という高位概念の導入により行われたと見ることは、数学的概念の形式化と再構成の問題を考えるときに重要な視点となる。

ベクトルの外積は、平行6面体の体積を求めるという問題を解決する中で生み出されてきたアイデアである。平行6面体の体積は高校数学の範囲内でも解答可能だが、困難な計算を必要とする。そして、高校数学の範囲内で平行6面体の体積を求めようとする限り、右手系座標と左手系座標の優劣は確定しない。なぜならば、いずれの座標系上で計算しても、同一の手順が必要となるからである。そこでGrassmannは、平行6面体を形成する3本のベクトルを用いて、体積の計算を導く方法を考え出した。この方法が、今日、3重積［abc］と呼ばれている方法である。3重積という方法を用いると、3本のベクトルa、b、cによって作られる平行6面体の体積Vは、$V=|[abc]|=|a\cdot(b\times c)|$となり、この時、内積と外積という考え方が必要となる。ここで特に、外積$b\times c$は、図6-3に示したように、bからcの向きに右ねじを回したときに、その右ねじが進む方向を持ち、かつ、bとcによってできる平面に垂直なベクトルで、その長さがbとcによってできる平行四辺形の面積Sと等しくなるものを意味する。

このように定義した外積という考え方を右手系座標系と左手系座標系に適用すると、図6-4と図6-5に示したように、x、y、z軸上の単位ベクトルをそれぞれi、j、kとして、2つの直交ベクトルiとjの外積を求めると、左手系では$i\times j=-k$となるのに対して、右手系では$i\times j=k$となり、この2つの座標系に差異が生じる[4)]。外積の使用を前提とすると、左手系では符号の処理に注意を払う必要が課せられ、右手系ではその負担が軽減されるという意味で、右手系の方が左手系より思考の経済性が高くなる。空間にお

[4)] この差異は、外積の向きを右ねじの進行方向であると定義したことにより派生する。この事は、新しい概念を表記する形式が、形式を採用する主体者の自由意思によって決められることを示している。Dieudonné(1978/1989,p.125)は、Grassmannが外積代数の創始者であると述べている。

ける位置の記述という考え方だけでは、差異が顕在化されなかった３本の座標軸の関係が、外積の導入により差異化され、表記の優劣が思考の経済性という点から定められることになる。

１つの表記や思考へ同化した人々は、それを利用する人々の独自のアイデアにより、さまざまな形式と思考を持った数学へと拡張する。その結果、初期のアイデアはさまざま形式と思考に分化されていくが、その差異はやがてより高次の数学的概念（新しい表記法と思考法）の出現により再構成される[5]。空間座標系という数学的概念の生成過程の分析は、数学者集団におけるコミュニケーションが、そこに参画する人々の認知を、認識・同化・拡張・分化・再構成という５つの相に変容させながら進行していることを示している。

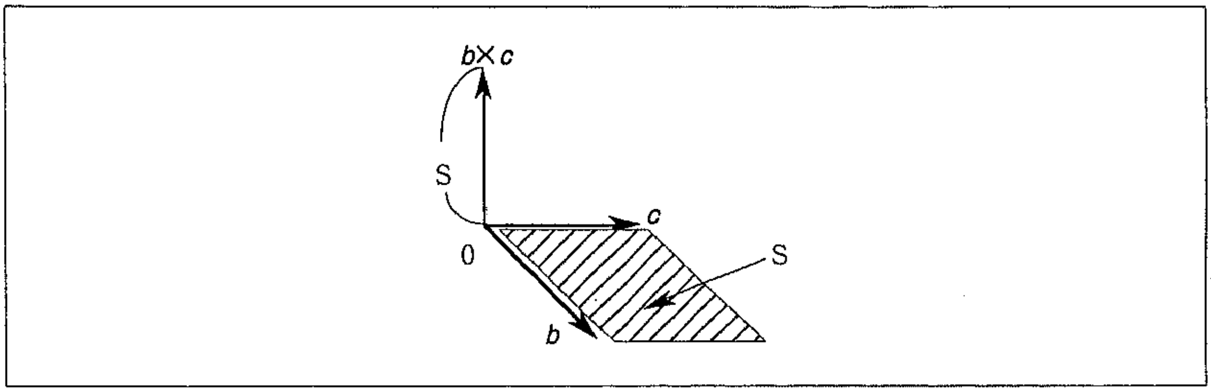


図 6-3：外積 $b \times c$ の幾何学的意味[6]

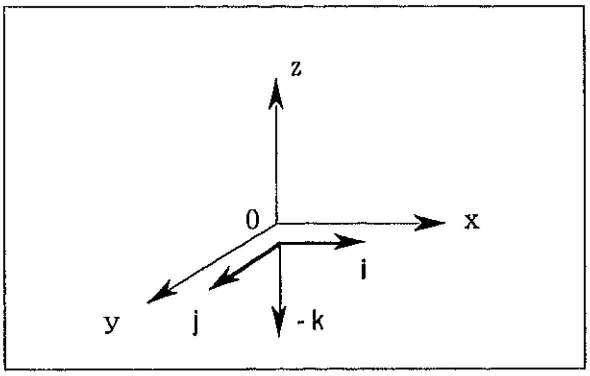


図 6-4：左手系「i × j ＝－k」

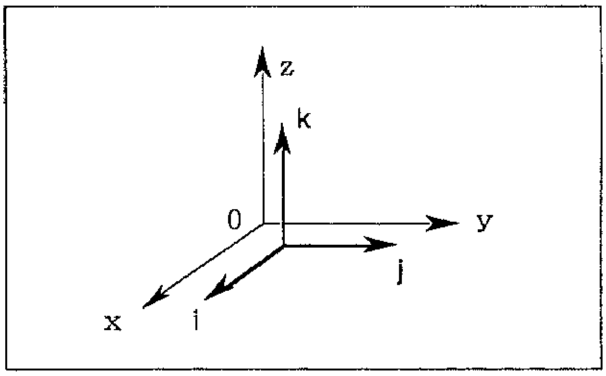


図 6-5：右手系「i × j ＝k」

[5] 形式と内容の両面を主体者が自由に決めることのできる数学は、内容の発展により先行の形式を変更することができる（Piaget & Garcia,1983/1996,p.19)。

[6] 定義より、$b \times c = -c \times b$ であることにも注意。

第３項　算数の授業構成に見られる５つの相

第２項で述べたように、数学的概念の生成過程は、生成に関与している人々による「認識・同化・拡張・分化・再構成」という認知過程の推移として捉えることが可能である。例えば、共通尺度を使って長さを測定するというアイデアは、様々な民族が類似の歴史的経緯を踏まえて発展させてきたことが知られている（ﾃﾞｯﾌﾟﾏﾝ,1965/1986,pp.260-264)。その過程では、まず、長さという量の認識が行われ、具体物を用いた素朴な測定方法に同化する段階があった。そして、素朴な方法は、個々人が定めた測定単位を用いた測定へと拡張され、地域ごとに異なる測定単位の分化という状態をもたらし、分化された測定単位は、やがてメートル法に再構成されることになる（ﾃﾞｯﾌﾟﾏﾝ,1965/1986,pp.264-275)。こうした歴史的経緯を踏まえ、小学算数で「長さ」が学習される場合にも、教師は、この５つの相を学習者たちに体験させるような授業構成を行っている。そこで第３項では、小学２年生の長さの授業の分析によって、学習者による数学的概念の生成過程も、Skemp の示した認識・同化・拡張・分化・再構成という５つの相で記述できることを示す。

小学２年生の長さの単元では、センチメートル（cm）という測定単位の導入は、いきなり天下り的に提示されることはなく、まずは、いろいろな物の長さの比較を通して、長さという概念を学習者に認識させることから始められる[7]。表 6-1 に示された場面が語っているように、「そことそこを比べるの」という児童Aの疑問に対し、教師は、「この本の中には、いろんな長さがあるね」と答え、長さという概念を捉えるとき、学習者が物体のどの部分に着目すればよいのかという選択的な知覚と、選択的に知覚された部分を測定対象として認識する必要があることを示している。

表 6-1：長さの認識

教師	：今度は、この本とこの本の長さを比べてみようか。どっちが長い。
児童A	：そことそこを比べるの？
教師	：そうだね。この本の中には、いろんな長さがあるね。 ここの長さとここの長さを比べてみましょう。こうやって手に感じるのは、重さだね。 （教師は、本を持った手を上下に動かしている。）

[7] 小学２年生の「長さ」の授業は、1996 年５月 31 日に収録されたものである。

次に表6-2に示した場面では、教師は、並べた鉛筆の本数を数えて、机の長さを測るという方法を示している。そして、小学2年生たちは、教師が示した測定方法をまねて、自分の机の長さを測定し始める。この場面で学習者たちは、教師のアイデアに同化している。学習者たちは、鉛筆の本数を数えるという既習体験が、机の長さを測るという新しい課題に適用できることを学んでいる。学習者たちは、教師の「これ、先生の鉛筆。これを使って、先生の机の端に、こうやって置いてみるよ。1本、2本、3本、4本、5本、6本。ほら6本置けたよ」という操作をまねることで、机の長さを測るという課題に取り組む方法を手に入れている。小学2年生は、鉛筆を並べるという操作と、並べられた鉛筆の本数を数えるという操作によって、机の端の長さが数値化されるという、教師が示した操作に同化している。そして、学習者たちは、こうした方法の同化によって、教師が用いた鉛筆とは異なる自分の鉛筆を使っても、机の長さが測れることを理解する。教卓と児童用の机という測定される対象の違いや、使用する鉛筆が違うということが、個々の学習者に認識されているならば、学習者が行っていることは、教師の行動に対する単純な模倣ではなく、教師が提示した測定方法への同化という、思考の同化として捉えることができる。

表6-2：教師が示した測定方法への同化

教師	：これ、先生の鉛筆。これを使って、先生の机の端に、こうやって置いてみるよ。 1本、2本、3本、4本、5本、6本。ほら6本置けたよ。 じゃ、みんなの机の上には鉛筆は何本並ぶかな。 （児童たちが、それぞれ自分の鉛筆を並べ始めている。）
児童B	：4本。

そして、表6-3に示した場面では、鉛筆を使って長さを測り始めた学習者たちに、教師は、「それでは、もっといろいろな物を測ってみましょう」と声をかけている。この場面では、児童Cによる「1本。ちょっと足りない」というつぶやきに見られるように、学習者たちは、鉛筆という基準の不便さに遭遇する。表6-2に示した場面において、基準単位を並べることで物の長さが測れるという考え方を導入した教師は、表6-3に示した場面において、いろいろな物を測るという課題を提起することで、鉛筆という基準の不便さを経験

させようとしている。教師は、余りや不足が出るという体験を踏ませることで、現在使用している鉛筆より短い物を単位とするというアイデアが、学習者たちから提示されることを期待している。しかし、教師の意図に反し、この授業では、学習者たちから自主的に鉛筆より短い物を単位とするというアイデアが提示されなかったので、教師は消しゴムで測るというアイデアを提示する。ここで教師は、「鉛筆じゃ、ちょっと長すぎるね。鉛筆じゃなくて、もっと短い物で測ってもいいですよ。例えば、消しゴムとか」という新たな提案を行っている。この教師の発言に対して、学習者たちは、一斉に、「わくわくランドのカードでもいい。ミニペンは」と声をあげ、測定単位は任意に選ぶことができるということを、彼らが認識するようになってきたことを示している。表 6-3 に示した場面は、「鉛筆で測る」という固定単位の使用から、任意の測定単位の使用というアイデアへの拡張の段階に、学習が進んでいることを示している。

表 6-3：鉛筆で測るというアイデアの拡張

教師	：それでは、もっといろいろな物を測ってみましょう。
児童C	：ふでばこ、１本。ちょっと足りない。
教師	：うんん。鉛筆じゃ、ちょっと長すぎるね。みなさん。はい、ちょっといいですか。 鉛筆じゃなくて、もっと短い物で測ってもいいですよ。例えば、消しゴムとか。
児童たち	：わくわくランドのカードでもいい。ミニペンは。・・・（いろいろな声が聞こえる。）

次に、表 6-4 に示した場面では、鉛筆や消しゴムやミニペンなど、いろいろな具体物を用いて長さを測るという作業を続けている学習者たちに、教師は、算数の教科書の長さを測るという課題を問いかける。教師は、「算数の教科書の長さ、何を使って測りましたか」と、児童Ｄと児童Ｅに問いかけ、消しゴム７個分と消しゴム６個分という差が表れる場面を引き出している。「消しゴム７個」と児童Ｄが答えた後に行われた、「Ｅ君は何で測りましたか」という教師の発問に対して、児童Ｅが、「僕も消しゴムを使いました。でも、６個」と小さな声で答えている場面は、７個と答えた児童Ｄの答えと異なってしまったという、児童Ｅの不安な気持ちが表れている。表 6-4 に抽出した場面では、同一の対象物に対する測定結果の差異が顕在化し、測定結果の分化という現象が起きている。

表 6-4：測定結果の分化

教師　：算数の教科書の長さ、Ｄさんは何を使って測りましたか。

児童Ｄ：私は、消しゴムを使って測りました。

教師　：Ｄさんの消しゴムで、この本の長さは何個分でしたか。

児童Ｄ：７個です。

教師　：それでは、Ｅ君。Ｅ君は何で測りましたか。

児童Ｅ：僕も消しゴムを使いました。でも、６個・・・・。（声が小さくなる。）

表 6-4 に示された場面では、教師は、同じ教科書の長さを測定したにもかかわらず、それぞれの測定結果が異なるという経験をさせることで、学習者たちから共通の尺度で測定する必要があるというアイデアを引き出そうとしている。そして、その直後に、表 6-5 に示したように、「Ｄさんの消しゴム、小さい」という児童Ｆの発言が、２人の答えがどうして違うのだろうかという教師の発問に答える形で出てきたことは、児童Ｆが、大きさの異なる尺度で測定すれば、その結果に違いが出ることを理解していることを示している。「誰の消しゴムって言わないと、長さが違っちゃうんだね」という教師の発言は、共通の尺度としての物差しという道具の提示を正当化する準備として機能している。

そして、教師は、ここで物差しという道具を提示し、「cm」という長さの単位の学習に移行している。基準となる単位を任意に選ぶことによって長さの測定ができるという、学習初期に獲得した知識の正当性が、測定結果の分化という事態によって覆されたとき、各自が任意に定めた測定単位の分化という状態は、共通単位（cm）の導入により、任意に決定可能な単位を共同で使用するというアイデアによって再構成される。この場面では、Skemp(1971/1973,p.33) も述べているように、古い知識は新しい知識の一部として存続するように、知識の再構成が行われている。

このように教師は、新しい数学的アイデアを一方的に導入するのではなく、人類がそのアイデアを生成してきた過程を疑似的に体験させるという意図を持って、授業を構成している。この授業の分析は、共通単位を使って長さを測るという数学的アイデアが、小学２年生の算数の授業の中で、長さを認識する相、教師の方法に同化する相、教師の方法を拡張する相、拡張した方法による測定結果が分化する相、そして、分化した状態を共通単位

の導入によって再構成する相、という５つの相からなる学習者の認知変容過程を踏まえながら生成されていることを示している。

表 6-5：測定単位の再構成

教師	：２人とも同じ算数の教科書の長さを測ったのに、どうして答えが違うのかな。
児童Ｆ	：Ｄさんの消しゴム、小さい。
教師	：そうだね、Ｄさんは、いっぱいお勉強しているから、消しゴム使うんだね。
教師	：みんなが持ってる消しゴムも、少しずつ大きさが違うから、誰の消しゴムって言わないと、長さが違っちゃうんだね。そこで、こういう便利な物があります。（物差しを示す。）

第４項　メッセージの知覚と記憶の想起に関する基礎的な考察

第２項と第３項の考察により、新たな数学的概念の生成と獲得の過程は、Skemp が示した「認識・同化・拡張・分化・再構成」という５相の認知過程モデルによって記述できると、本研究では考えることにする。しかし、Skemp が考えた認知過程モデルは、個人の認知変容モデルとして考案されたものであるため、メッセージの送信と受信というコミュニケーション・プロセスにおける認知変容を記述することを意図してはいない。そこで第４項では、この欠陥を補うために、メッセージの知覚と記憶の想起に関する基本的な考え方を研究の前提として示すことにする。

物理的刺激物であるメッセージを知覚・認識する過程には、少なくとも２つの質的に異なる段階がある。まず最初の段階は、音や光、すなわち、聴覚的な刺激や視覚的な刺激を耳や目という感覚器官が知覚する段階である。下等動物では、こうした刺激に対して、即座の身体的反応が起こる。しかし、私たち人間の場合には、既存の知識や経験をもとに、第１段階で得た知覚情報を処理する第２の段階を設け、知覚した刺激に対する反応を遅らせている（知覚刺激に対する遅延反応）。

この知覚刺激に対する遅延反応が、内省という思考をもたらす。例えば、「ちょくせん（直線）」という音声（視覚）刺激が、紙の上に書かれた１本の黒い筋を思い起こさせることは、この刺激が意味するものを受け手に認識させることになる。私たちが刺激の交換によりコミュニケーションを可能にしている背景には、このように刺激の受信がある特定の

記憶を想起させるというメカニズムが働いているからである。

そしてさらに、１つの刺激は、ただ１つの記憶を想起させるだけではなく、それに関連するさまざまな知識を活性化させる。例えば、「ちょくせん（直線）」という音声（視覚）刺激は、図的なイメージばかりではなく、y=ax+b という方程式を思い起こさせることもある。こうした刺激の知覚と関連記憶の想起という一連のプロセスは、コミュニケーションが効率的に遂行されるためには必要不可欠なものである。ここでもし１つの刺激に対し、高々１つの記憶しか想起されないとしたら、私たちのコミュニケーションは今とはまったく異なるものになっていたに違いない。１つの刺激に対して１つの記憶だけが想起されるならば、私たちは、もっと多くの刺激を送らなければならないだろう。

こうした刺激の知覚と記憶の想起という問題に対して、Skemp(1979,p.134) は、「概念化された記憶は、刺激が与えられたときに複雑な波形を生じさせることができるように、調律された構造の中に貯蔵される」という考え方を基本テーゼとする、「共鳴モデル」を提案している。１つの刺激に対して複数の関連知識が想起される様子を、Skemp は共鳴という物理現象になぞらえて説明しようと考えたのである。そして、Skemp(1979,p.141) は、「共鳴モデルは、概念とシェマについて考察する際に、私たちに具体的なイメージを与えてくれる有益なモデルである。そして、この共鳴モデルは、選択的な知覚、高位概念の形成、内省、創造性というコミュニケーションに関わる諸事象をわかりやすく説明している。共鳴という物理現象とコミュニケーションとの関係は、コミュニケーションに関する説明が共鳴という現象を引用することで合理的にできるという、その合理性そのものに見出すことができる」と述べ、共鳴モデルの有効性を強調している。

しかし現段階では、私たちは、共鳴というアナロジーが知覚と記憶の想起というメカニズムを適切に説明しているのか否かを判定することはできないし、これにかわる代替モデルも持ち合わせてはいない。そこで本研究では、共鳴というアナロジーの使用を避け、Skemp の命題を「学習した事柄は、ある刺激が与えられたときに、関連する知識も同時に想起されるように、ある種の構造を保ちながら記憶される」という命題に書き替え、この命題を研究の前提として採用して、第２節以降で行う事例分析を支える基礎的な考え方とする。

第２節　学習者の認知過程の分析

第２節では、第１節で示した理論的枠組みをもとにして、コミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程を分析する。本節で用いる事例は、電話線の問題という共通課題に取り組む小学５年生、小学６年生、中学１年生と、大学３年生による４つの事例である。

第１項　小学５年生の事例

(1)　事例 6-1 の概要

第１項で分析する５年生による事例 6-1 は、その概要について、すでに第３章第３節と第５章第３節で示してきたものである（表 6-6：三輪,1990,pp.86-88）。繰り返しになるが、分析に必要となる事例の概要を簡単に述べる。小学５年生による事例では、「家と家の間を直接電話線で結ぶことにします。今、どの家とどの家の間にも、ちょうど１本ずつ電話線を取りつけます」という文章に対して、電話線の結び方に迷った児童Ａが、３軒の家を２本の電話線で結ぶという図 6-6 を黒板に書いたことに対して、児童Ｂと児童Cが、それぞれ図 6-7 と図 6-8 を示すというフィードバックを行っている。そして、児童Cの図に対して、数名の児童から、「なるほど、そうか」という賞賛の声があがっている。

表 6-6：小学５年生による場面 6-1 の発話記録（表5-15 再掲　一部省略）

１児童Ａ：これ、どうなるんだか、わからない。

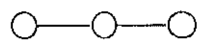


図 6-6：児童Ａの図

２児童Ｂ：家と家の間を１本ずつ結ばなくちゃいけないんだから、
　　　　　ここも結ばなくちゃいけない。

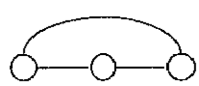


図 6-7：児童Ｂの図

３児童Ｃ：これじゃ、なんだか、変に見えるから、
　　　　　これを動かしてこうすればいい。

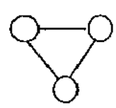


図 6-8：児童Ｃの図

４その他の児童：なるほど、そうか。（賞賛の声があがる。）

５教師　：いいですか、わかりましたね。家と家とを結ぶということはこういうことですよ。

(2) 事例６-１の分析

事例6-1では、問題構造の理解が具体的操作の提示によってもたらされることが示されている。Piaget(1964/1968,p.153)が言うように、「子どもの論理は、本質的に、操作的構造の形で現れる。つまり論理行為は、本質的に操作することからなる」と考えれば、学習者の思考過程とコミュニケーション行為がいずれも操作に依存しているのは当然のことかもしれない。しかし、児童Ｃが三角形状の図を示した背景には、４軒以上の場合への配慮が見られることを考え合わせると、小学５年生のレベルでは、３軒の場合に対する具体的操作に、４軒以上の場合に対する一般化されたアイデアが含意されていることを、送り手と受け手の両者が意識していたと考えられる。

例えば、児童Ｃのノートには、４軒の場合として、四角形の各辺とその対角線からなる６本の線が引かれた図が書かれていた。児童Ｃが児童Ｂの図（図6-7）を「なんだか、変に見える」と否定して、三角形状の図に書き換えた背景には、３軒、４軒、５軒と家の数が増えていくとき、直線状に家を並べ、その間を１本ずつ電話線で結ぶという作図方法では、多角形とその対角線という作図方法に比べ、線の引き落としが出やすいという意識があったと考えられる。そして、児童Ｃのアイデアを賞賛した学習者たちは、こうした児童Ｃの意図を理解していたと考えられる。つまり、児童Ｃと児童Ｃのアイデアを賞賛した学習者との間には、児童Ｃが示した３軒という具体的な場合に固定された、三角形状の図というアイデアに対する思考の交換だけではなく、４軒、５軒へと拡張された状態に対するアイデアの交換がなされていたと考えることができる。児童Ｃに対する賞賛を児童Ｃへの正のフィードバックと考えれば、児童Ｃが意図していた多角形と対角線という構造を内包する図を、４軒、５軒の場合の図として、瞬時に想起した学習者たちと、児童Ｃとのコミュニケーション連鎖は、共鳴連鎖であると言うことができる。しかし、児童Ｃが、問題解決の段階で、対角線の本数を求めるという方策を用いていないことを考え合わせると、児童Ｂのように、児童Ｃの意図よりもさらに深い解釈を、児童Ｃの図に対して行っていた児童がいることも確認されている。この場合には、児童Ｃの思考を超える解釈がなされたという意味で、こうしたコミュニケーション連鎖は超越連鎖であったと言うこともできる。

その一方で、本事例が展開された後に行われた、２０軒の場合の電話線の本数を求める個別学習の段階では、児童Ｃが示したアイデアが、４軒の場合には四角形とその対角線というアイデアを含んでいると、解釈できなかった学習者の存在も確認されている。この場合には、コミュニケーションは共鳴連鎖としての思考の連続性を維持することができず、

学習者間には問題解決方法のずれという現象が見出されることになる。

多角形とその対角線という一般化されたアイデアを持っていた児童Ｃも、その抽象的なアイデアを他者に伝達する際には、３軒の場合という具体的な例示に頼らざるを得ないという所に、アイデアを送信する側の困難さがあった。そして、そのアイデアを受け取る側にも、具体的な例示、あるいは、３軒の家を三角形状に並べ１本ずつ線を引くという操作によって伝えられた送り手の意図を、４軒、５軒の場合へと拡張し、送り手が伝えたかった一般化されたアイデアを汲み取らなければならないという困難さがあった。この事例は、数学的コミュニケーションには、送り手が直面する問題と受け手側が直面する問題という二重の困難さが内在していることを示している。

３人の児童が黒板に書いた図は、私たちが発表者の思考を捉える唯一の情報源であり、その意味においてコミュニケーションの対象である。児童Ａの疑問に対して、児童Ｂの図は明確な答えを提示していた。それゆえ、児童Ｃの発言には、「３本の線によって３軒の家が結ばれる」という情報を超える、何か別の情報が含まれているはずだと考えることにより、児童Ｂの図と児童Ｃの図の類似性と差異性への着目という、新たなコミュニケーションの展開がもたらされることになる。「3軒の場合には、２本の電話線を引くべきなのか、３本の電話線を引くべきなのか」という児童Ａの迷いに対する、「３本の線を引く」という同一の答えの提示は、「なぜ、２つの書き方が提示されるのか」という新たな問いを生み出し、２つの図のどこがどのように違うのかという考察は、２つの図を反省的思考の対象とする。そして、教師が児童Ｃの発言を最後に一連のコミュニケーションを中断させたのは、黒板に残された図が、さらなるコミュニケーションを喚起するものではなく、個々の学習者が問題構造の理解を深めるための対象となったと、教師が認識したことを物語っている。授業後の教師との面接で明らかになったように、教師の発言には、この図の解釈から、４軒以上の場合の問題の構造を捉えてほしいという願いが込められている。

この場面はすべての学習者の前で展開されたが、「２０軒の場合には電話線は何本必要か」という教師の問いに対する、各学習者の問題解決過程の分析を通してわかったことは、３人の児童の意見発表に対する捉え方の多様性である（cf.江森,1991a)。教室の中には、まず、第１のグループとして、児童Ｃが示した三角形状の図を書くという具体的な操作から児童Ｃの思考を推測し、４軒の場合には四角形とその対角線の図になるという作図法の拡張に成功し、その方法を多角形とその対角線というアイデアに一般化することにも成功している学習者がいた。この第１のグループの学習者には、多角形とその対角線というアイ

デアの下で書かれた３軒の図には、対角線が現れないという特殊事情も理解されている。このグループの特徴は、児童Ｃの操作を模倣するだけではなく、その操作を支える思考にも同化していることである。

そして、第２のグループは、児童Ｃが示した多角形状という表記法を模倣して、４軒の場合には四角形、５軒の場合には五角形という具合に、対角線のない図を書いていた学習者たちである。彼らは、三角形状の図を書くという操作を模倣しているだけで、４軒の場合には対角線が現れるということを、児童Ｃの図からは汲み取ることができなかった。

また、第３のグループでは、無秩序に家を位置づけ、その間を無計画に結ぶ図を書いていた学習者たちが、児童Ｂの直線状の図という作図法を模倣するという具合に、図の書き方を変容させていた。この第３のグループに類別される学習者も、第２のグループと同様に、児童Ｂの作図法がもたらす問題構造の把握には至っていない。第３のグループに類別される学習者は、児童Ｂの作図法が、最初の家から１９本の電話線が引かれて、次の家からは１８本という具合に、１本ずつ結べる電話線の本数が減っていくという構造を示しているということには気づいていなかった。これら第２と第３のグループの特徴は、模倣した作図法の背後にある思考への同化が見られない点である。

そしてさらに、第４のグループとして、今回の調査では、屋根と窓のある家を書いていた学習者が家を丸印で表すという表記法を採用するという変容を見ることもできる。一つひとつ丁寧に家の絵を書いていた学習者が、後半の問題解決過程では、丸印を用いて家を表すという表記法に同化していたことも観察されている。この第４のグループも、他者の表記法のみに同化しているという点で、第２と第３のグループと同一の特徴を有している。

その一方で、第５のグループとして、丸印で家を表すという表記法に同化せずに、最後まで屋根と窓のある家を１つずつ書いていた学習者が数名確認されている。この第５グループの特徴は、３人の児童のコミュニケーション場面の展開をまったく無視しているかのように、丸印で家を表すという表記法にも同化しない点にある。

３人の児童のコミュニケーション連鎖に対する他の学習者の認識の差異を、思考や表記への同化という観点からまとめると、①他者の思考へ同化している学習者や、②他者の表記法のみに同化している学習者、そして、③他者の表記法にも同化しない学習者、という３通りの差異が、事例 6-1 に付随した調査で確認されたと言うことができる[8]。

---

[8] 最初から児童Ｂや児童Ｃの作図法を用いていた学習者については、自分の作図法とその思考法の類似性を認識していたという意味で、「①他者の思考へ同化している児童」と見なすことにする。

第２項　小学６年生の事例

(1)　事例6-2の概要

事例6-1では、表記法の差異が顕在化されるだけに終わり、それぞれの図が含意している問題場面を捉える思考の差異が、明確に示されることはなかった。そこで第２項では、事例6-1と同じ電話線の問題に対して行われた、小学６年生による事例6-2[9]（三輪,1990, pp.127-129）の分析と考察を通して、問題解決の分化の様子を見ていくことにする。

小学６年生の授業では、２０軒の家と家との間を１本ずつ電話線で結ぶという問題に対する問題解決が個別に行われた後、４人の児童からそれぞれの解法が発表される。まず、児童Dから、「1軒の家から１９本引けて、それが２０軒あるけど、１本ずつ線がだぶってしまうので、割る２と考えて、１９×２０÷２＝１９０本としました」という解法と、児童Eから、「1軒目からは１９本、２軒目からは１８本となるので、１９＋１８＋１７＋・・・＋３＋２＋１とたしていって、これを計算すると、１９０本となりました」という２つの解法が示される。その後、２人の児童から２つの誤答が示される。そこで教師が、「自分で納得できる考え方は、この４つの中でどれですか（発言1)」と尋ねることにより、表6-7に示される事例6-2が、以下のように展開される。

事例6-2では、まず初めに、児童Ｆから、「Ｄさんのが一番わかりやすいと思います(発言2)」という意見が出される。ここで児童Ｆは、「どういう点でわかりますか（発言3)」という教師の問いに対して、「ほかのはみんな、式とか長いのもあるし、表に表さないと書けない図もあるんだけど、Ｄさんのだけは、式だけで答えられるから（発言4)」と、児童Ｄの解法を選択した理由を述べている。そして引き続き、児童Ｇは、「私もＤさんのが一番わかりやすいと思う（発言5)」と述べ、児童Ｆの意見を支持している。

ここで、児童Hは、「私は、みんなと違って、Ｅさんがやった１９たす１８とかの方がわかりやすいと思う。それは、Ｄさんのは割る２というのがよくわかんないけど、そうやってたしていけば、電話線もこじれないでよくできるし、ちょっと時間はかかるかもしれないけど、一番わかりやすい（発言6)」と述べ、これまでとは違う意見を発表する。

この児童Hの意見に対して、児童Ｉは、再度、「私は、Ｈさんとは違って、Ｄさんの方がいいと思います。わけは、Ｄさんの割る２というのは線が１本だぶってしまうから割る２とやったんだから、Ｄさんの方がいいと思います（発言7)」と述べ、児童Ｆと児童Ｇの意見を支持している。

---

[9] 事例6-2は、1989年10月9日に収録された小学６年生の授業の一部である。

表6-7：小学6年生による事例6-2の発話記録

1教師	：自分で納得できる考え方は、この4つの中でどれですか。
2児童F	：Dさんのが一番わかりやすいと思います。
3教師	：どういう点でわかりますか。
4児童F	：ほかのはみんな、式とか長いのもあるし、表に表さないと書けない図もあるんだけど、Dさんのだけは、式だけで答えられるから。
5児童G	：私もDさんのが一番わかりやすいと思う。
6児童H	：私は、みんなと違って、Eさんがやった19たす18とかの方がわかりやすいと思う。それは、Dさんのは割る2というのがよくわかんないけど、そうやってたしていけば、電話線もこじれないでよくできるし、ちょっと時間はかかるかもしれないけど、一番わかりやすい。
7児童I	：私は、Hさんとは違って、Dさんの方がいいと思います。わけは、Dさんの割る2というのは線が1本だぶってしまうから割る2とやったんだから、Dさんの方がいいと思います。
8教師	：2つ出ましたね。Hさんは、1軒から19本、次の家からは18本しかでない。こういうふうにたしていった考え方が自分にとってはよくわかるという考え方です。それに対して、ほかの人たちは、こちらの方が式が非常にすっきりしていて、割る2の意味もよくわかる、そういう意味で、こちらがいいという考えですね。

(2) 事例6-2の分析

他者から提示された問題解決の方法を評価することは、そこに内在する論理を反省的な思考により導き出すという思考操作を要求する。つまり、この評価過程は、問題解決者が具体的な操作を繰り返し行うことから導出してきた問題の構造化と同じ思考過程、すなわち、他者が提示した具体的な操作に対する解釈によって得られる初源的な構造を一般化し、送り手が想起した抽象的な構造を受け手自身の思考により導出するという過程をたどる。なぜなら、抽象的なアイデアは、再び具体的な操作の提示によって他者に示されることになるからである。しかし、数学学習におけるコミュニケーションでは、私たちは、必ずしも問題解決者がたどった具体的操作からの抽象という思考を同じようにたどる必要はない。

問題解決者が試行錯誤を通してたどり着いた認知状態へ、また、試行錯誤を経ながら到達する必要はないのである。

例えば、児童Ｅによる「加える数が１つずつ減っている」という構成原理の表出は、具体的な思考を形式的な思考に置き換えることにより、誰にでも同一の思考をたどることを可能にし、その妥当性の検証を容易にしている。そして、この思考の形式化が、個人の問題解決の時間に比べ、解法の発表は比較的短時間でなされるという算数・数学の授業の特徴を生み出している。複数の解法が短時間のうちに提示されるのは、具体的な操作を通して抽象化された問題解決のアイデアが、数学的な表記により形式化されているからである。

このように数学的表記を用いた思考の形式化は、互いの思考の差異を明確化させる。形式化されない思考の表出は、事例6-1では操作という方法で行われていた。事例6-1の分析で示されたように、操作にはさまざまな意味が含意される可能性があった。それに対し、事例6-2で明らかにされたように、形式化された数学的表記には、他者の思考をより厳密に解釈することが可能になるという利点を持っている。

しかし、事例6-2では、２人の児童Ｄと児童Ｅによって示された解法が、児童Ｆ、児童Ｇ、児童Ｈ、児童Ｉによって、「どちらの解法が自分にとってわかりやすいのか」という視点のみから議論されたことは、提示された２つの解法の相互の関係が吟味され、２つのアイデアが１つのアイデアへ再構成されるレベルにまで至らなかったことを示している。つまり、「１軒の家から１９本引けて、それが２０軒あるけど、１本ずつ線がだぶってしまうので、割る２と考える」という児童Ｄの解法と、「１軒目からは１９本、２軒目からは１８本となる」という児童Ｅの解法が、それぞれ、「１９×２０÷２＝１９０」という数式と、「１９＋１８＋１７＋・・・＋３＋２＋１＝１９０」という数式へ形式化されたものの、この形式化された思考が、具体的操作の翻訳でしかないために、小学５年生の事例6-1と同様に[10]、小学6年生の授業でも、２つの解法が含意する数学的な考え方のよさは、他者の思考との比較という観点から明確にされることはなかったのである。事例6-2の分析を通してわかったことは、２つの解法の再構成が行われないという個々人の思考レベルが、コミュニケーション連鎖の質を活動としての連続性の段階にとどめ、学習者間の思考の連続性という特性を持ったコミュニケーション連鎖として展開できなかった要因になっているということである。

---

10) 「事例6-1と同様に」とは、児童Ｂの図と児童Ｃの図が内包するそれぞれの表記法のよさが議論されなかったのと同じレベルで、という意味である。

第３項　中学１年生の事例

(1)　事例 6-3 の概要

２つの事例の分析で示されたように、小学５年生や６年生の思考にとって、具体的な操作は重要な役割を果たしていた。そこで次に、形式的かつ抽象的な思考ができるようになる中学生の事例を分析することによって、小学生から中学生への移行期に、具体的操作の役割にどのような変化が見られるのかという問題について考察する。事例 6-3[11] は、先の２つの事例と同じ電話線の問題に対して行われた、中学１年生の数学の授業の一部である(三輪,1990,pp.148-149)。表 6-8 に引用したのは、生徒Ｊが、直線状に家を並べた図を使って、電話線の本数を求める解法を説明している場面である。

事例 6-3 は、教師が、「図を書いてみて（発言 1)」と発言し、生徒Ｊの解法の説明に必要となる図を黒板に書くように求めたことから始められる。この教師の発言に応え、生徒Ｊは、「２０個書くと大変だから１０個にするけど（発言 2)」と述べ、黒板に１０個の四角印（□）を書く。そして、１０個の四角を書き終えた生徒Ｊは、「この四角いのが家だとすると、こうやって電話線がつながってて、こっちからは９本出て、今度こちらから出るときは、こっちから出てるからつなげる必要はないから、さっきと同じようにやると、１本減るから８本ってなって、ここは７本になって、同じようにやっていくと、６、５、４、３、２、１、０となってくから全部たせば（発言 3)」と述べ、黒板に書いた四角印の間を指し示しながら、１０軒の場合には「９＋８＋７＋６＋５＋４＋３＋２＋１＋０」という計算で求められることを示している。ここで教師は、「最後のいくつだって（発言 4)」と聞き返し、生徒Ｊは、「ゼロ（発言 5)」と応える。そして、教師の「ゼロってのは（発言 6)」という再度の問い返しに対し、生徒Ｊは、「だから、全部書いてみると（発言 7)」と言って、先ほどは直接書き込まなかった電話線を図の上に書き込もうとする。

この様子を見ていた教師は、「いい、最後の方だけ紹介してよ（発言 8)」と言って、すべての線を引こうとする生徒Ｊを制止している。この最後の方だけという教師の言葉に反応して、生徒Ｊは右側から３軒目の家を基点する図 6-9 を書く。その図に対して、教師は、「１本というのはどこなんですか（発言 9)」と質問し、図の見方を説明するように促している。そこで生徒Ｊは、「１本がこっちからここになっていて、ここは全部とつながっているから、どこへもつなげられないから、それで全部（発言 10)」と応え、右から３軒目の家を基点に引ける電話線の数が２本、２軒目から１本、そして、右端の家からは０本とな

---

[11] 事例 6-3 は、1989 年 9 月 18 日に収録された中学１年生の授業の一部である。

ることを示す。この生徒Ｊの説明に対して、教師が、「そこがゼロっていうわけね。なるほど（発言 11)」と述べた所で、生徒Ｊと教師の対話は終わっている。

表 6-8：中学１年生による事例 6-3 の発話記録

1 教師　：図を書いてみて。

2 生徒Ｊ：20 個書くと大変だから 10 個にするけど。

3 生徒Ｊ：この四角いのが家だとすると、こうやって電話線がつながってて、こっちからは９本出て、今度こちらから出るときは、こっちから出てるからつなげる必要はないから、さっきと同じようにやると、１本減るから８本ってなって、ここは７本になって、同じようにやっていくと、6、5、4、3、2、1、0 となってくから全部たせば。

4 教師　：なに、最後のいくつだって？

5 生徒Ｊ：ゼロ。

6 教師　：ゼロってのは。

7 生徒Ｊ：だから、全部書いてみると。

8 教師　：いい、最後の方だけ紹介してよ。

（Ｊが右側から３軒目の家を起点に線を書く。）

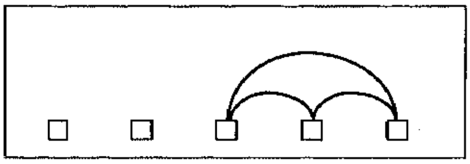


図 6-9：生徒Ｊの図

9 教師　：じゃ、１本というのはどこなんですか。

10 生徒Ｊ：１本がこっちからここになっていて、ここは全部とつながっているから、どこへもつなげられないから、それで全部。

11 教師　：そこがゼロっていうわけね。なるほど。

(2) 事例 6-3 の分析

事例 6-3 では、直線状に四角印が並べられた図から、１０軒の場合に必要となる電話線の本数は「９＋８＋７＋６＋５＋４＋３＋２＋１＋０」になる、という計算方法が導き出される。生徒Ｊにとって、直線状に並べられた四角印を結ぶという操作は、抽象化された思考の具現化に過ぎず、「９＋８＋・・・＋１＋０」という形式化された思考は、４５本の線を書かなければならないという困難さを問題としていない。生徒Ｊは、教師の「ゼロってのは」という問いに対して、「全部書いてみると」と言って、すべての線を書こうとした。

そこで、教師は、「いい、最後の方だけ紹介してよ」とすべての線を書こうとする生徒Ｊを制止している。この事は、生徒Ｊの具体的操作が「９＋８＋・・・＋１＋０」という形式化された思考の具現化であることが、教師にも理解されていることを示している。

事例 6-3 と小学生の事例とを比較すると、直線状に並べられた図の評価に違いがあることがわかる。小学生の事例では、直線状に並べられた家と家とを結ぶという具体的操作は、多角形状に並べられた家と家とを線で結ぶという操作に比べ、いずれの学年においてもその評価は低いものだった。それゆえ、小学生の事例では、多角形状に家を並べる表記の方が他の表記よりも優れていると考える思考への同化が広く行われていた。しかし、中学生による事例 6-3 では、多角形状の配置よりも直線状の配置の方が、生徒Ｊの形式的な思考には適合していることが示されている。小学５年生の事例 6-1 において、児童Ｃが多角形状の図を見やすさという点から評価していたのとは異なり、中学１年生の事例 6-3 では、加法による解法（19+18+17+・・・+3+2+1=190）には、直線状の配置がその思考を説明するのに適しており、乗法による解法（19×20÷2＝190）ならば、多角形状の配置がその思考を説明するのに適しているという、操作と思考との密接な関連が意識されている。

小学生の事例では、他者の表記や思考への同化は具体的操作への同化であり、具体的操作に依存し過ぎた思考は、それを形式的な思考へと高めることが難しく、十分に抽象化されていない思考は、具体的な操作の提示というコミュニケーションの段階では、さらに他者の思考を反省的に捉えることを困難にしていた。その困難性が、数学的アイデアの再構成が学習者自身の手で達成できない要因ともなっていた。その一方で中学生の事例では、具体的な操作の抽象化によって導き出された形式的な思考が、具体的な事例として示されているにもかかわらず、生徒Ｊが１０軒の場合で示したことは、１０軒の場合の電話線の本数を構成的に数える方法そのものであり、この形式的な思考への同化は、その思考を容易に２０軒の場合へと拡張することを可能にしていた。

私たちのコミュニケーションでは、抽象的なアイデアはそのままの形では伝達されることはない。抽象的なアイデアは、具体的操作の提示や形式化された数式等の提示によってしか伝達されない。この点に着目したとき、小学生では、具体的操作への同化が行われるのに対し、中学生では、コミュニケーション手段として用いられた具体的操作に惑わされずに、具体的操作に含意されている形式的な思考が同化の対象となっている点に、差異が見られる。

第４項　大学３年生の事例

⑴　場面の設定

中学生の授業では、数式を用いたアイデアの表出とともに、その数式をｎ軒の場合へ拡張する一般化の試みがなされていた。しかし、他者の解法を評価し、複数の解法をさらに１つの解法へと再構成することは試みられていなかった。そこで事例 6-4 では、大学３年生に、中学１年生によって提示された６つの解法（表 6-9）を見せ、それらの解法を再構成するという課題を与え、互いにその方法について話し合わせるという場面設定を行った。この調査で学生たちに与えられた課題は、「電話線の問題に対する異なる６つの解法を整理せよ」というものであったが、「整理せよ」という指示に疑問が出され、調査者は、「６つの解法の関係、例えば、類似性や差異性などについて話し合えばよい」という指示を付け加えることにした。

表 6-9：大学生に示された６つの解法

（注：括弧内は、中学１年生が行った説明の概要である。）

解法１：19+18+17+・・・+3+2+1＋０＝190

（生徒Ｊの説明：6、5、4、3、2、1、０となってくから全部たせば。）

解法２：19+18+17+・・・+3+2+1＝190

（生徒Ｋの説明：一つひとつの家を基点として、それから、あと 19 の家に結ぶと考えて。）

解法３：(20−1)×20÷2＝190

（生徒Ｌの説明：２つの家を結ぶには２つの線じゃなくて、１本しか線がいらないから、19 軒を全部枝みたいにして、それから割る２にします。）

解法４：20×19×1/2＝190

（生徒Ｍの説明：自分の所から他の所までいく線が 19 になってて、だけど相手からも自分の所へ同じ線をたどってきちゃうから。）

解法５：20+(20−3)×20×1/2＝190

（生徒Ｎの説明：対角線の問題にして。）

解法６：1+2+3+・・・+17+18+19＝190

（生徒Ｏの説明：多いから少ない場合を考えて、１から６までとすると。）

（生徒Ｐの説明：４軒の図を書いて、公式を見つけて。）

(2) 事例６-４の概要

表6-10は、４人の大学生が、事例6-3を採録した授業において中学１年生が示した、６つの解法を比較し再構成するという課題に取り組んでいる場面の発話記録である[12)]。ここではまず、学生Ｑによって、「１９+１８+１７（+・・・+3+2+1の省略）というのも１＋２＋３（+・・・+17+18+19の省略）というのも、数える方向が違うだけだから同じだと思う（発言1)」という発言がなされ、「１９＋１８＋１７＋・・・＋３＋２＋１＝１９０」という解法２と「１+２+３+・・・+１７+１８+１９＝１９０」という解法６の類似性が、「加法順序の違いだけだ」という点から指摘される。

この学生Ｑの発言に対して、学生Ｒはさらに付け加えて、「それに、たす０（１９＋１８＋・・・＋２＋１の省略）というのも、最後に０本を意識するか、しないかだけの違いだから、同じと考えてもいいんじゃない（発言2)」と述べ、「１９＋１８＋１７＋・・・＋３＋２＋１＋０＝１９０」という解法１も「＋０」が付いているだけだから、解法２や解法６と同じ解法と考えてもよいだろうと発言する。

この学生Ｒの発言に対して、学生Ｓは、「でも、０を加えておく方が、丁寧な感じがするんだけど（発言3)」と述べ、学生Ｒが、「＋０」という計算が答えに変化を与えないという点から、＋０と明記されている解法１も、明記されていない解法２も同じだと応えたことに異議を唱える。この学生Ｓに対し、学生Ｒは、即座に、「なんで。そんなの無駄じゃない（発言4)」と述べ、学生Ｓの意見を否定する。否定された学生Ｓは、学生Ｒの発言に対して、「無駄っていえば確かにそうなんだけど（発言5)」と力なく応え、０を加えるよさを明確には意識していない様子を示す。

ここで生じた学生Ｒと学生Ｓの対立に対して、学生Ｕは、「僕も０があった方がいいと思う。例えば、最初の０を加えていない方は、シグマを用いれば、（ｋ＝１から１９のΣｋ）と書けるだろう。でも、この式に出てくるのは、１と１９で、２０という数字が出てこない（発言6)」と発言し、学生Ｕは、学生Ｓが示せなかった０を加えるよさに対する根拠を自分は持っているということを表明する。学生Ｒの「それなら、０をたすと２０っていう数字が出てくるの（発言7)」という発言に対し、学生Ｕは、「０をたした式は、この順番をひっくり返して（学生Ｕは紙の上に、0+1+2+・・・+17+18+19と書いている)、だから、全部で項が２０あるだろう。ここで、ｋを（ｋ－１）にすれば、（ｋ＝１から２０のΣ（ｋ－１)）と書ける。ほら、これなら２０という数字がここに出てくる（発言8)」と説明

[12)] 事例6-4は、1998年9月10日に収録されたものである。

している。学生Ｕの説明に対し、学生Ｒは、「＋０を書かないと、項の数が２０にならないというわけね（発言9）」と納得した表情を示す。学生Ｕは、＋０を意識することによって、かつ、その考え方をΣという総和記号を用いて表すことにより、２０軒の場合という問題固有の数字が、式の中に出てくることを指摘している。学生Ｕの発言「Σなんて記号を持ち出すような問題じゃないけど、そう考えないと、一般化できないから（発言10）」に見られるように、６つの解法を再構成するためには、具体的操作を一般化する数列の和という数学的概念と、Σ記号という書記法が必要になることを、この発言は示している。そして、この学生Ｕの発言により、学生たちは、２０軒の場合という問題状況から、ｎ軒の場合を意識した解法の再構成という方向に向かうことになる。

学生Ｕの発言によって、ｎ軒の場合という一般化を意識し始めた学生たちは、次に、多角形の辺の数と対角線の数の和という解法５に着目する。ここで学生Ｓは、「この対角線の方は（発言12）」と言って、他の解法に関する議論へ討論の方向性を変えようとしている。この発言が解法５に関するものであると、他の学生たちに理解されているのは、「２０＋(２０－３)×２０×1/2＝１９０」という解法５の式が、第１項の「２０」という数が２０角形の辺の数を表し、第２項の「(２０－３)×２０×1/2」という式が２０角形の対角線の数を表していることを、他の学生たちが理解していたからである。学生Ｓの発言は直接解法５を指し示してはいないが、ｎ角形の対角線の本数を求める公式という共有された数学的知識を前提にすることによって、「この対角線の方は」という言葉が解法５をさすという意味が、各学生のメンタル・スペース上に創発されている。

この学生Ｓの発言に対し、学生Ｕは、「ｎ多角形の辺の数はｎで、対角線の数は、１か所から出る対角線の数がｎ－３本だから、ｎ軒の場合には、ｎ＋ｎ(ｎ－３)／２（発言13）」と述べている。学生Ｕの発言は、学生Ｕが２０軒の電話線の問題を２０角形の辺の数と対角線の数の総和で求めるという解法の構造を想起し、コミュニケーションを継続するのに必要な知識を準備していることを、学生Ｓにフィードバックしていると考えることができる。このように考えると、学生Ｓの発言に対する学生Ｕのフィードバックは、第５章で述べた共鳴連鎖になっていると言うことができる。

そして、学生Ｒは、学生Ｕが提示した「ｎ＋ｎ(ｎ－３)／２」という式を計算し、「これを計算すると、やっぱりn(ｎ－１)／２（発言14）」と述べているが、この「やっぱり」という言葉が意図していることは、事例後のインタビューで確認されたように、解法５を変形すると解法３と解法４の形式が出ることを考慮に入れた発言であった。学生Ｒの「やっ

ぱりn(n－1)／2」という発言に反応した学生Sが、「そうだよ。だって同じ問題じゃないか（発言15)」と述べていることは、６つの解法が同じ問題に対する解法である限り、形式化された最終的な式は、いずれも同じn(n－1)／2になるという意味で発言されていたと考えることができる。事後のインタビューでも、学生Sは、解法５を変形した式は解法３と解法４と同形の式になることが、学生Uの発言に含意されていることは理解できていたと述べている。この事は、学生Sから学生Uと共鳴連鎖していたコミュニケーションが、学生Rから学生Sへとさらに共鳴連鎖として継続していたことを示している。

表6-10：大学３年生による事例6-4の発話記録

1学生Q：19+18+17（+・・・+3+2+1の省略）というのも1+2+3（+・・・+17+18+19の省略）というのも、数える方向が違うだけだから同じだと思う。

2学生R：それに、たす0（19+18+17+・・・+3+2+1の省略）というのも、最後に０本を意識するか、しないかだけの違いだから、同じと考えてもいいんじゃない。

3学生S：でも、０を加えておく方が、丁寧な感じがするんだけど。

4学生R：なんで。そんなの無駄じゃない。

5学生S：無駄っていえば確かにそうなんだけど。

6学生U：僕も０があった方がいいと思う。例えば、最初の０を加えていない方は、
シグマを用いれば、(k=1から19のΣk）と書けるだろう。
でも、この式に出てくるのは、１と19で、20という数字が出てこない。

7学生R：それなら、0をたすと20っていう数字が出てくるの。

8学生U：0をたした式は、この順番をひっくり返して、(0+1+2+・・・+17+18+19と書く。)だから、全部で項が20あるだろう。ここで、kを(k-1)にすれば、(k=1から20のΣ(k-1))と書ける。ほら、これなら20という数字がここに出てくる。

9学生R：＋0を書かないと、項の数が20にならないというわけね。

10学生U：まあ、Σなんて記号を持ち出すような問題じゃないけど、
そう考えないと、一般化できないから。
(学生たちは、Σ(k-1)＝n(n+1)/2−n＝n(n−1)/2（k=1からn）と計算をしている。)

11学生Q：でもさ、この19+18+17（+・・・+3+2+1の省略）というのも、
1+2+3（+・・・+17+18+19の省略）というのも、中学生が考えたときには、

＋０っていうのはちゃんと意識していたと思うよ。例えば、この＋3＋2＋1という場合だって、最後に、どことも結べなくなるから、これで終わりと思ったんだろうし、だから、この３つは、同じ解法と考えてもいいんだよ。

12 学生Ｓ：この対角線の方は。

13 学生Ｕ：ｎ多角形の辺の数はｎで、対角線の数は、１か所から出る対角線の数が n−3 本だから、ｎ軒の場合には、n+n(n−3)/2。

14 学生Ｒ：これを計算すると、やっぱり n(n−1)/2。

15 学生Ｓ：そうだよ。だって同じ問題じゃないか。

(3) 事例 6-4 の分析

事例 6-4 では、数式へと形式化された６つの解法の関係について議論が行われている。数式という形式化されたアイデアをシグマ記号（Σ）を用いて同一視するという行為は、それぞれのアイデアが生み出されたときに行われた具体的な操作を一切捨象している。中学１年生が提示した「１９＋１８＋１７＋・・・＋３＋２＋１」という解法をもたらした操作と「１＋２＋３＋・・・＋１７＋１８＋１９」という解法をもたらした操作とは、まったく別の操作であったはずである。しかし、学生たちの対話の中では、電話線を結ぶという具体的操作についての配慮は一切行われておらず、形式化された数式そのものが考察の対象となっている。この対話の中で学生たちが行ったことは、２０という数を数式の中に表出させる工夫を話し合い、その考察をもとに一般項ｎの場合へと数式を拡張することであった。対角線に着目した解法でも同一の数式が得られることを確認した学生たちは、ｎ軒の場合の電話線の本数を「ｎ(ｎ－1)/２」という数式で表現することにより、中学１年生が示した６つの解法がすべてこの形式のもとで再構成されると考えている。

事例 6-4 は、具体的な操作による思考が形式化され、さらに抽象化・一般化される中で、同化・拡張・分化・再構成という認知過程が、コミュニケーションのプロセスとして観察されたことを示している。事例 6-4 に見られるように、分化したアイデアの再構成のためには、シグマ記号と数列の和という考え方が必要であった。この事例は、数学的アイデアの再構成には、再構成を促す新しい表記とそれを駆使する新しい考え方が必要となることを示している。このことは、同時に、高位の数学的概念の習得が、表記と思考の両面からコミュニケーションの質をより高いものへと変容させることも示している。

第3節　コミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程

第1項　認識

第3節では、第2節で行った4つの事例の分析を基に、第1節で準備した認識・同化・拡張・分化・再構成という5つの相によって、コミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程を同定する。第1項では、まず、認識という相について考察する。

コミュニケーションの始まりに気づくことから、私たちのコミュニケーションは始まる。この一見当たり前な命題は、別の命題「他者から送られてきた物理的刺激物であるメッセージを、私たちは、まず、それが人為的にある意図を持って作られた記号であることを認識する必要がある。そして、他者がある意図を持ってメッセージを送信してきた背景を、コミュニケーションの文脈として認識する必要がある」と言い換えると、言い換えられたこの命題は重要な意味を含んでいる。この命題が含意する重要な点とは、コミュニケーションの始まりを認識するとき、メッセージを受ける側には、ある刺激に意識を鋭敏化させ、また、別の刺激には無関心になるという、選択的知覚の鋭敏化が求められているということである。私たちのコミュニケーションには、常にノイズが含まれてしまう（cf. Pierce, 1980/1988,pp.191-215)。それゆえ、送り手が伝えたいと考える情報はどんなメッセージに託されているのか、また、解釈されたくないノイズは何かという、メッセージに対する選択的知覚が受け手に求められる[13]。

第5章では、「教師によるフィルター効果」について述べてきたが、「受け手のフィルター効果」というものを想定すれば、同一のメッセージが個々の学習者に個別の作用をもたらすという現象は、受け手が所有する知識の差とともに、何に着目し、何を無視するのかという受け手によるフィルター効果が起因していると述べることもできる（cf. 江森,1991b. Emori & Nohda,1993)。第5章の考察を発展させれば、フィルター効果とは、選択的知覚によってもたらされたコミュニケーション効果である、と言い換えることもできる。

Skemp(1989,pp.62-67)が述べているように、抽象的な数学的概念は直接他者に伝達することはできず、具体化あるいは形式化という操作が必要となる。それゆえ、ここで問題となるのは、具体物を用いた具体的な操作や、数や数式を用いた形式化された操作を、そのまま具体的操作として認識するのか、あるいは、抽象的な思考が具現化された行為として

---

13) 例えば、「２本の直線が交差する」という概念を伝達するときに示される「＋」という図は、「２本の直線が直交しているように見える」というノイズを含んでいる。

認識するのかによって、メッセージの解釈が異なるということである。第2節の事例分析においても、具体的な操作としてもたらされた視覚メッセージに対して、ある児童は、それを具体的な操作としてのみ認識し、別の児童は、その具体的な操作を抽象的な思考の具現化された行為として認識していたことが示されていた。送り手が提示する具体的操作を、①具体的操作としてのみ認識する受け手と、②抽象的思考の具現化された行為として認識する受け手との間で、メッセージに対する認識の差異が生じることになる。

第2項　同化

同化には、表記の同化と思考の同化がある。第2項では、この2つを個別に論じる。

(1)　表記の同化

表記の同化には、①模倣と②コミュニケーション手段の選択という2つのケースがある。模倣は無反省な同化であり、自己固有の表記を持たない受け手が、他者の表記を借用する場合である。この場合、受け手は、自己の表記と他者の表記との差異を調整し、いずれを採用するのかという調節を行う必要がない。

コミュニケーション手段の選択として他者の表記へ同化することには、自己の表記との比較検討の結果、自己の表記を棄却して他者の表記を採用するという調節が含まれる。自己の表記を固持することにより、他者とのコミュニケーションが阻害されることが、コミュニケーションの継続によって得られる効果を消失させてしまうと判断された場合、受け手は、送り手の表記に同化することで、コミュニケーションを成立させようと努力する。自己の表記が他者の表記より勝ると判断されれば、受け手は同化せずに、その優劣を議論するという選択肢も残されている。いずれにせよ、コミュニケーションに参画する学習者は、コミュニケーションを成立させ、さらに高次の目的を達成させるために、学習者間で使用される表記の統一を図るように、互いに同化し合うことになる。

コミュニケーション手段の選択として、他者の使用している表記に同化するということは、その表記を採用することによって、自らの思考が以前のものと変わらないという認識が必要となる（自己同一性の確保）。例えば、小学5年生の事例6-1では、家を表す表記として丸印（○）が用いられ、また、中学1年生の事例6-3では、四角印（□）が用いられていた。この2種類の表記法の表出が物語っているように、個々の学習者は必ずしも彼らの提示した表記と同じ方法で家を表していたわけではない。しかし、受け手は、表記への固執よりコミュニケーションの成立という目標を優先させ、○や□という表記法を受け

入れていた。なぜならば、受け手には、他者の表記へ同化しても、自らの思考が以前のものと変わらないという認識があったからである。

(2) 思考の同化

他者が採用している表記への同化は、意識的な情報の価値づけと、自分が採用してきた表記とのずれを認識することから始められる。そして、このずれを調整する行為として、自分の表記を棄却し、他者の表記を採用するという判断が下される必要がある。このように反省的な思考が働く場合、表記の同化には調節という認知活動が伴っていると考えると、表記の選択には、思考の選択という概念が必然的に含まれることになる。例えば、小学６年生の事例 6-2 で見られたように、「１９＋１８＋・・・＋２＋１」という表記と「２０×１９÷２」という表記のいずれがよいかという問題は、それぞれの表記を受け入れる側に思考の同化を伴うことになる。どちらの表記を採用するかという選択には、その表記に含意されている思考の比較をも伴うので、他者が使用する表記への単純な同化ではなく、その表記を用いて展開される思考への同化という認知活動が含まれることになる。

しかし、表記の同化は同一の表記を用いたという観察可能な事実から同定できるものの、思考は直接他者に伝達することができないという意味において、第三者が思考の同化を厳密な意味で同定することは不可能である。そこで私たちは、同一の思考が共有されているならば、他の問題場面にその思考を適用したとき、類似の問題解決行動を示すという前提に基づき、思考の共有を判断することにした。この前提を受け入れると、第２節での事例分析は、思考の同化に、①他者の思考を誤解した形で模倣する場合、②他者の思考を無反省に借用する場合、③他者の思考に同化し取り込んだうえでさらに自分の思考を発展させる場合、という３つのケースがあることを示していた。

例えば、小学５年生の事例 6-1 で見られたように、３軒の場合には三角形状の図になって、電話線の数は３本になるという思考を模倣した学習者の中には、４軒の場合として四角形を書き、電話線の数を４本と誤答していた者もいた。彼らは他者の思考を模倣したつもりでいたが、その模倣は、他の問題場面への拡張という段階で、誤りであることが露呈する。自己の思考を持たずに他者の思考を模倣する場合、自己の思考との調節の必要性がないために無反省な同化が行われ、無反省な思考の同化は他者の思考を誤解した形で模倣するという結果をもたらすこともある。また、４軒の場合には正方形とその対角線の図が書けるとして、児童Ｃの思考に同化した学習者の中にも、児童Ｃの思考を無反省に借用し、

多くの図を書くだけに終止した学習者と、その図からヒントを得て、新たな解法を見出した学習者がいたことが観察されていた。

認識の項では、送り手の具体的操作を具体的操作としてのみ認識する受け手と、抽象的な思考の具現化された行為として認識する受け手との間で、メッセージに対する認識の差異が生じると述べた。そして、この認識の差異が、思考の同化においても、他者の思考を無反省に借用する受け手と、他者の思考に同化しそのアイデアを取り込んだうえでさらに自分の思考を交えながら発展させる受け手、という差異をもたらすことになる。

第3項　拡張

抽象的な思考は、具体的な操作や形式的な操作の提示という、間接的な方法でしか伝達できないと考えると、抽象的な思考の伝達を確認する方法も、また、間接的な手段に頼らざるを得ない。第２節で行った事例分析は、類似の構造を持つ他の問題場面に、受け手が伝達された思考をいかに拡張するのかを観察し、送り手の行動と比較することで、思考の伝達の正否が確認されることを示していた。例えば、小学５年生の事例6-1の分析では、３軒という具体的な場面を用いて示された家と電話線の構成方法が、児童Ｃから他の学習者にどのように伝達されたのかを知るためには、４軒という拡張された場面で、児童Ｃと他の学習者がいかなる問題解決行動を採るのかを観察すればよいということが明らかにされた。３軒の場合を例示することによって伝達しようとした児童Ｃの思考も、４軒という拡張された場面での問題解決行動を観察することなくしては理解できないのである。

観察者から見れば、拡張は、送り手の思考と受け手の思考との差異が表れてくる相である。メッセージは、まず、コミュニケーションの対象として知覚・認識されるが、すでに送信されたメッセージは、送り手と受け手にとって反省的思考の対象となる。それゆえ、送り手もメッセージの送信によって、思考を一次的に中断するのではなく、送信したメッセージを反省的思考の対象とすることにより思考を深化させる。一方、受け手は、送り手からの刺激を取り入れることにより、自分の思考を調節する必要性に迫られる。他者とのずれが明確になるとき、自分と他者との思考のずれは、受け手に認知的不協和をもたらす。

第４章の考察では、この認知的不協和状態の解消法には、①認知的不協和をもたらす情報を意図的に回避する、②他者の解釈ならびに知識構造の変容を促す、③自己の解釈ならびに知識構造を変容する、という３つの方策があると述べた。ここで第４章の考察と第６章の考察とを再構成すると、認知的不協和をもたらす情報を意図的に回避するという第１

の方策は、他者の表記や思考への同化をもたらさない場合として位置づけることができる。また、第3の自己の解釈ならびに知識構造を変容するという方策は、本章で考察してきた拡張という相の中に位置づけることができる。自己を変容する拡張という相にもさまざまな場合が考えられるが、第2節の事例分析によって明らかにされたのは、①誤った方法による拡張、②具体的操作による拡張、③抽象化・一般化を伴う拡張の3つのケースである。

第4項　分化

拡張によって生じる差異は、個人が持つ経験や知識の差異を表すだけではなく、メッセージ解釈の差異も示すことになる。メッセージを知覚・認識することによって活性化した個々人の思考が異なることを認識することによって、私たちは個人では変容させることが難しい自己の思考を変容させる契機をつかむことができる（cf.江森,1997a）。認識の項でも述べたように、拡張された思考の差異をいかに認識するかということで、コミュニケーションの意味づけが異なる。拡張の仕方によって生じる差異を認識する相が分化である。

小学6年生の事例6-2では、授業の始めに教師が示したおもちゃの電話という2軒の場合の具体例（三輪,1990,p.122：2軒の場合には1本の電話線が必要というモデル）に同化した学習者たちが、「家と家との間を1本の電話線で結ぶ」という問題文に対する個別の解釈を3軒や4軒の場合に拡張し、そうした操作を通じて見出した解法を他者に伝達することによって、互いの思考の差異を認識する過程が示されていた。他者のアイデアを拡張する方法の差異は、小学5年生による事例6-1の児童Bと児童Cの間にも見られたが、事例6-2に見られた解法を式で表すという形式化された思考の表出は、2軒の場合からの拡張方法が異なることによって生じる問題解決方法の差異をより明確なものにしている[14]。

他者との違いを認識する分化という相には、他者との差異を、①具体的操作の差異としてのみ認識する場合と、②抽象化・一般化された思考の差異として認識する場合の2つのケースがある。分化はコミュニケーションに参画する学習者間の思考の差異の表出であり、集団思考における分化は、個人にとって未知の表記や思考が出現する契機である。しかし、事例6-2の分析でも指摘したように、分化した表記や思考を再構成するためには、それらを統合するための高位の概念と新たな表記法が必要となる。そのため、分化から再構成への移行は容易ではない。

---

[14] 事例6-2において、児童Dと児童Eのいずれの解法がよいかという討論が行われたことは、学習者たちの間で2つの解法の差異が認識され始めたことを示している。

第５項　再構成

大学３年生の事例6-4で示されたように、電話線の本数を数え上げるときに用いられたさまざまな表記と思考は、シグマ記号（Σ）という表記と数列の和という考え方によって構成される高位概念の出現により再構成された。一つひとつの丸印の間を線で結ぶという具体的な操作によってもたらされた解法は、丸印の配置や結ぶ線の意味づけの差によって、さまざまな方法に分化していたが、こうして分化したアイデアは、具体的な操作を捨象した数式の変形という作業により再構成された。家と家との間を１本ずつ電話線で結ぶという操作が、家の配置や電話線の引き方に依存せずに、常に同相構造を持つという問題構造の一般化は、このように具体的な操作からの脱却によって達成される。学生たちが、「Ｒ：やっぱりｎ(ｎ－1)／２。Ｓ：だって同じ問題じゃないか」と言っていたように、すべての図表記が同じ位相を持つという認識は、小学生や中学生が具体的な操作に基づいて考え出してきた解法を同一のものとみなす見方をもたらしている。

知識の再構成が必要となる状況は、分化という差異化されたメッセージの表出により顕在化されるが、他者とのコミュニケーションによりその差異化が再び統合されることは難しい。空間座標系に関する考察や事例6-4の分析で示したように、分化された数学的アイデアは、より高位のアイデアの出現により再構成される。再構成の場面では、具体的な操作において必要とされた文脈への配慮が薄らぎ、数式など形式化された対象そのものの扱いが重視される。その意味で、脱文脈化ということが、再構成の相では重要な概念となる。

第３節では、コミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程を、認識・同化・拡張・分化・再構成という５つの相として同定してきた。相という概念の定義でも述べてきたように、これら５つの相は分断された個別の段階ではなく、認識という認知活動を基底とする再帰的な理解の深化過程である（Pirie & Kieren,1991,p.80. cf. Pirie & Kieren,1989b, 1994a）。５つの相が再帰的な過程であるという指摘の重要性は、学習者の認知活動が、コミュニケーション連鎖として創出される新たなメッセージに対する認識や、既に受信している古いメッセージ（反省的思考の対象）に対する新たな解釈の発見など、私たちのコミュニケーション理解が、常にメッセージへの認識という相への折り返し（Folding back : Pirie & Kieren,1991,p.169）を含みながら、再帰的に行われることを示している点にある。第３節で同定した認知過程は、認識から再構成という過程が直線的に進むものではなく、同化や拡張や再構成という相においても、認識以降の相が絶えず繰り返されながら進展していることを含意している（cf. 江森,1999a）。

第4節　コミュニケーション連鎖の内化と高位概念の形成

第１項　内化過程の特性を分析するための４つの指標

第４節では、数学学習において、個々の学習者が知識の再構成と高位概念の形成を行っていくコミュニケーション連鎖の内化過程に見られる、いくつかの特性について考察する。この目的を達成するために、第１項では、Skemp が提起した課題を再構成して、特性分析のための４つの指標を整理する。

Skemp の時代、コミュニケーション理論の多くは、電信をアナロジーとするネットモデル（net analogy model）が主流であった。Skemp は、こうしたモデルでは、知能の活性化という現象を説明できないとして、共鳴というアイデアに基づくモデルを提案した。Skemp(1979,pp.131-132) は、ネットモデルでは、「①例と例ではないものとの区別ができるようにさせること、②高位概念の形成に貢献すること、③必要性の結果として選択的に知覚を鋭敏にすること、④反省的思考やコミュニケーションの対象になること」が、なぜ可能なのかという問題について、適切な説明を与えることができないと批判し、共鳴モデルならば、それが可能だと考えた。Skemp が構築した共鳴モデルが、上記４項目に対する十分な解答を与えているとは考えられないが、Skemp が共鳴モデルによって解明しようとした４つの特性は、今日の問題としても重要な視点になっている。

そこで本研究では、この４項目を数学学習に参画している学習者の認知過程の特性を分析する指針として用いることにするが、Skemp が定式化した項目には、若干の修正が必要だと考える。まず、「①例と例ではないものとを区別させること」という問題の定式化では、概念形成は例と例ではないものとを区別することからなされるという、Skemp(1987,p.11) が提起した集合論に基づく概念観が強調されているものの、こうした定式化では、コミュニケーション・モデル構築の視点としては十分とは言えないことを指摘する必要がある。なぜならば、Skemp(1989,p.70) が強調したように、抽象的な概念の説明には、伝達すべき概念より下位の概念を例として提示することが必要だとするならば、私たちは、どのような方法で例や例ではないものが提示され、また、提示されたものをどのように解釈することによって、送り手から受け手へ抽象的な概念の伝達が可能になるのかという、送り手と受け手との相互作用がもたらす概念形成の問題を、コミュニケーションという視点から考察する必要があるからである。

例えば、送り手がある概念を示す例として提示したものを、受け手はそれを必ずしも例

として認識しないかもしれない。それゆえ、複数の参画者による異なる事例の提示は、それぞれの受け手に、さまざまな事例分類の可能性と、それに対応するさまざまな形での概念形成をもたらすと考えられる。こうした点が解明されることによってこそ、「②高位概念の形成にコミュニケーションがいかに貢献するのか」という問題が解明されるのであり、その意味において、「①例と例ではないものの区別」という問題と「②高位概念の形成」という問題は、課題設定の段階から切り離すことができない問題となる。

また、問題項目の順位という点を顧慮するならば、項目④を詳しく書き換えた「④'メッセージをコミュニケーションの対象としていかに認識するのか、また、既に受信した古いメッセージを反省的思考の対象としていかに再認識するのか」という問題を、第１に採り上げる必要があると言える。なぜならば、コミュニケーションという認知過程は、他者から送られてきた音声などの物理的刺激物を、コミュニケーションに参画するために意識を集中させる認識の対象とすることから始められるからである。

そして、メッセージの認識に関して、「③選択的知覚の鋭敏化がいかになされるのか」という問題が、２番目に議論される必要がある。なぜならば、私たちは、コミュニケーションの対象として認識した音声などの物理的刺激物に対して、一様に反応するのではなく、ある部分は聞き流し、また、別の部分には意識を集中させるという選択的な知覚を行っているからである。こうした点を考慮し、本研究では、「数学学習におけるコミュニケーション連鎖を内化する学習者は、いつ、いかにして、①メッセージをコミュニケーションや反省的思考の対象と認識するのか、②選択的に知覚を鋭敏にすることができるのか、③事例の分類を概念形成に結び付けるのか、④高位概念の形成を行っているのか」という４項目を、コミュニケーション連鎖の内化過程の特性を分析するための指標とする（表6-11)。

表6-11：内化過程の特性を分析するための４つの指標

数学学習におけるコミュニケーション連鎖を内化する学習者は、いつ、いかにして、
①メッセージをコミュニケーションや反省的思考の対象と認識するのか。
②選択的に知覚を鋭敏にすることができるのか。
③事例の分類を概念形成に結び付けるのか。
④高位概念の形成を行っているのか。

第２項　コミュニケーションと反省的思考の対象としてのメッセージ認識

第３節における事例分析では、コミュニケーションに参画している学習者が、意識を集中させる対象として、また、自分自身の思考を深化させるために活用する反省的思考の対象として、メッセージは数度にわたり解釈の対象になると述べてきた。そこで第２項では、第３節の分析を踏まえながら、コミュニケーションと反省的思考の対象として、メッセージが再帰的に認識されることについて考察する。

私たちが互いの考えていることを知ることができるのは、言語のおかげである。「それは言語を表出する側と、それを聞いている、あるいは読んでいる側で、似たような脳内過程が生じているからである。言語の場合、その類似性の厳密性は数学よりも弱い。したがって、数学はより明確に脳の機能を反映する」と養老(1989,pp.115-116)が指摘するように、数学的表記を情報伝達手段として用いる利点は、送り手と受け手の認知過程の類似性の検証が、他の言語表記を用いた場合に比べ、高い厳密性の下で行われるという点にある。

しかし、厳密な情報伝達を可能にすると考えられている数学的表記も、物理的刺激物としてのメッセージであることに変わりはない。それゆえ、数学的コミュニケーションにおいても、私たちはいかにメッセージをコミュニケーションの対象として、また、思考の対象として認識するのかという考察が必要になる。

聴覚や視覚に対する刺激物としてのメッセージは、学習者が他者との意思伝達のために使用できる唯一の媒体であり、学習者がコミュニケーション行為を遂行するために意識を集中させる対象である。また同時に、メッセージは、送り手の思考を表出する段階において、送り手の思考を反省的に捉える対象として加工されている。どのような方法で自分の意図を他者に伝達するのかという内省は、メッセージを生み出す過程で起こる。そして、受け手は、コミュニケーションの対象としてメッセージを認識した後、自分の思考過程にその情報を加味させる段階において、今度は反省的思考の対象として、必要に応じ、そのメッセージを思い起こす。私たちは、記憶とその想起というメカニズムに助けられ、コミュニケーションの対象と反省的思考の対象という２つの用途の下で、同一のメッセージを何度も活用することができる。コミュニケーションの対象は、瞬時に移り変わるが、私たちの記憶というメカニズムは、コミュニケーションの対象を反省的思考の対象として繰り返しよみがえらせる。

小学５年生の事例6-1では、児童Ｂと児童Ｃが送信したメッセージは、児童Ａに対して、３軒の場合には３本の線で結ばなければならないという情報を伝えていた。３人の児童に

よるコミュニケーションの第１の目的は、児童Ａの不確定性を低減させることにあった[15]。この意味で、児童Ａは、児童Ｂと児童Ｃの発信したメッセージをコミュニケーションの対象として知覚・認識していたことになる。しかし、反省的思考の対象として、児童Ａは、その後の問題解決の段階で、児童Ｃの提示した図に着目し、児童Ａ自身の解釈を加えることで、より多くの情報を得ようとしていた。この事は、３本の線で結ばなければならないという、児童Ａの疑問に答えるために遂行されたコミュニケーションの目的を既に果たしてしまったメッセージが、問題解決のための思考を活性化させる道具として、反省的思考の対象となっていたことを示している。メッセージは、まず、コミュニケーションの対象として知覚・認識され、その後は、反省的思考の対象として、必要に応じて再解釈されるのである。

第３項　選択的知覚とその鋭敏化

雑踏の中での会話を録音したものを再生すると、そこにはさまざまな音がすべて録音されていて聞きにくい。あるいは、細かな点の集合として描かれた点描画も、一つひとつの点にこだわっていては、何の絵が描かれているのかわからない。雑踏の中で会話ができるのも、点描画を芸術として鑑賞できるのも、私たちが、ある刺激には注意を集中させ、他の刺激は無視するという、選択的な知覚を行っているからである。Skemp(1982a) は、このような選択的知覚がもたらすコミュニケーション効果について早くから着目し、いくつかの考察を行っている。しかし、その議論は、選択的知覚の差が思考の差異を誘発するという、コミュニケーションと思考の活性化に関する問題の解明までには至っていない[16]。そこで第３項では、選択的知覚とその鋭敏化という問題について考察する。

小学５年生の事例 6-1 では、３つの丸印と３本の線によって提示された図をいかに知覚するかで、問題解決の方法がさまざまに分化していたことが示されていた。児童Ｃの図に対して、下の丸印から上の２つの丸印に向かって２本の線が引かれていると見る児童Ａの知覚は、丸印と線の役割を区別しながら意味づけしていたことを示していた（図 6-10)。

---

[15] 「不確定性を低減させるものが情報である」という定義は、このようなコミュニケーションの分析に有効に働く（cf. 金子,1990,p.1：但し、金子では「不確実性」という用語が用いられている)。児童Ａは、３軒の家を結ぶのに２本でよいのか、３本必要なのかを確定できなかった。この不確定な状況が児童Ｂや児童Ｃにより確定されたという意味で、２人の児童は児童Ａの不確定性を低減させる情報を与えていたことになる。

[16] Skemp(1982a) の議論は、数字の位置が位取りを表すという基本的な表記の問題に終止している。

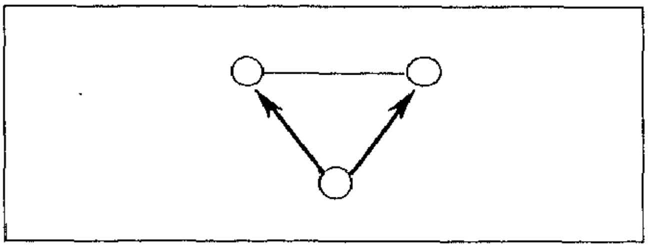


図 6-10：児童Aによる選択的知覚

私たちが図形を認識する場合には、図に書かれているすべての線を完全に同一の仕方で知覚するのではなく、例えば、図 6-11 に書かれた中央の図を、三角形の中に平行四辺形がはめ込まれている図と見たり（図 6-11 の左の図）、２つの三角形がはめ込まれている図と見るように（図 6-11 の右の図）、図形を構成する線分や面を選択的に組み合わせながら知覚している。私たちは、二等辺三角形や平行四辺形という知識を使って、図 6-11 の中央の図をいくつかの線分の集合として選択的に知覚している[17]。そして、この異なる知覚を組み合わせることによって、私たちは、動点Pの位置に関わりなく、２つの小さな三角形の辺の和が、外側の大きな三角形の辺の和に等しくなるという、図 6-11 の中央に描かれた図形の数学的属性に気づくようになる（MB+BP+PM+NP+PC+CN＝AB+BC+CA）。また、逆に考えれば、図 6-11 の中央の図形が持つ数学的属性を理解するためには、図 6-11 の左右の図として示したような複数の層を持つ知覚ができる必要があるとも言える。

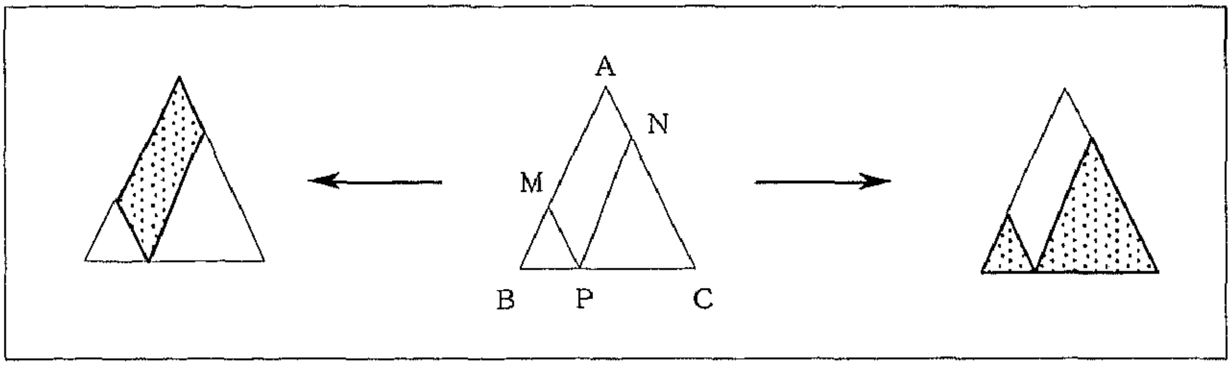


図 6-11：幾何図形に対する選択的知覚の例

（注：△ABC は二等辺三角形、MP は AC に平行、NP は AB に平行である。）

[17] ここで用いられている知覚様式は、隣接する構成要素（線や点）が１つの構造物の要素になっているという見方である。

本研究では、さらにもう１つの事例を示すことで、問題解決と関連した選択的知覚の例を考察する。例えば、図 6-12 に示したように、直角をはさむ両辺の長さが３と４の直角三角形に対して、「頂点Ａから下ろした垂線ＡＤの長さを求めよ」という問題を考える。

私たちは、この垂線の長さを求める問題に対して、少なくとも２通りの方法で解答することができる。その第１の解法は、図 6-13 に示したように、与えられた直角三角形を「縦３と横４の直角三角形」と知覚する三角形認識と、三平方の定理を用いて底辺の長さを５と計算した後に、図 6-14 に示した「縦ｘと横５の直角三角形」と知覚する２通りの三角形認識を利用するものである。この２つの三角形認識に基づいて導いた「３×４÷２＝ｘ×５÷２」という関係式を立てることにより、ｘ＝12/5 と答えるのが第１の解法である。この第１の解法では、垂線の長さｘは三角形の高さとして認識されている。

一方、第２の解法は、図 6-15 に示した相似の三角形が２つあるという認識に基づくものである。第２の解法では、直角三角形 ABC と直角三角形 DAC が互いに相似の関係にあると認識することにより、ＡＢ：ＤＡ＝ＢＣ：ＡＣとなり、この関係式にそれぞれの長さを代入することにより「３：ｘ＝５：４」と立式され、ｘ＝12/5 という解答が得られる。

この２つの解法の比較によって示されたように、垂線の長さｘを求めるという同一の問題場面において、垂線と他の線分との関係認識は、垂線をどのように認識するかによって、２つの解法という異なる思考をもたらす。そして、解法１に基づき解答した人には、垂線ＡＤは三角形の高さとして知覚されるし（図 6-14)、解法２に基づき解答した人は、垂線ＡＤを相似な三角形の１辺と見る知覚を選択的に行うようになる（図 6-15)。私たちは、自分が選択した初期の図形認識を反省的に捉え、他の解法を見出そうとするとき、第１の選択的な知覚を変容し、他の図形認識に到達できるような知覚を探し出すことになる。

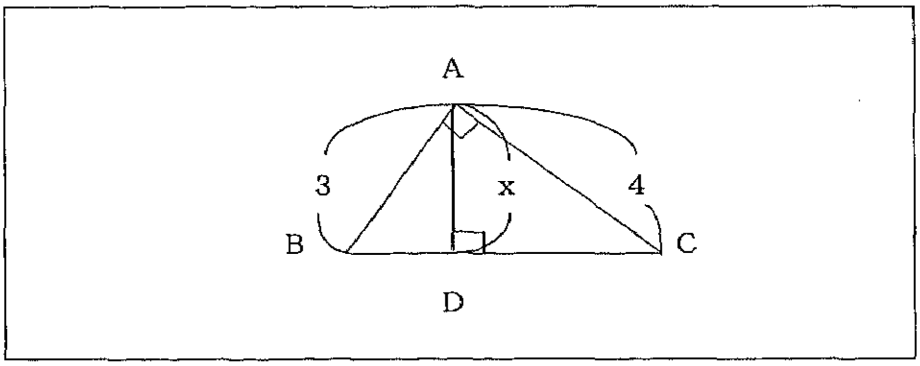


図 6-12：「垂線ＡＤの長さｘを求めよ」という問題に添付された図

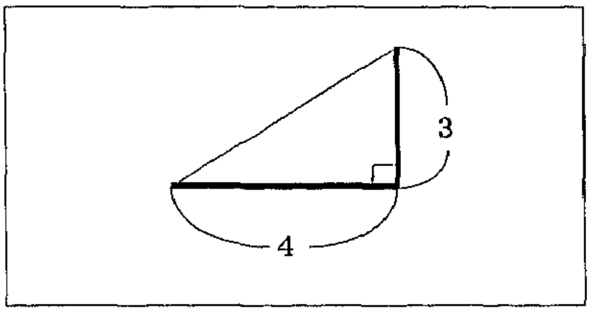


図 6-13 :「縦３と横４」と見る認識

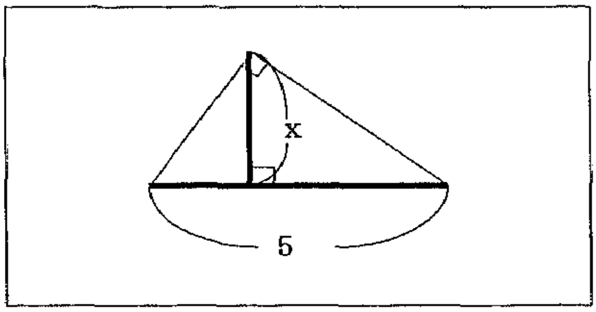


図 6-14 :「縦ｘと横５」と見る認識

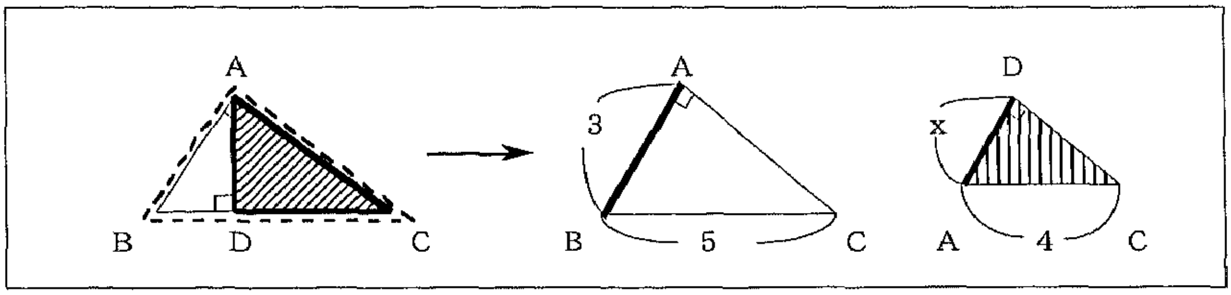


図 6-15 : 相似に着目した図形認識

図 6-12 は、垂線の長さｘを求めよという問題場面を取り除けば、さらに異なる知覚をもたらすこともできる。Polya(1953/1959,p.17) は、この図に関する別の知覚方法として、三平方の定理の特殊化という見方が可能だと述べている。つまり、直角三角形の各辺上に書かれた相似図形の面積の間に成立する、「$\lambda a^2 = \lambda b^2 + \lambda c^2$（図 6-16）」という三平方の定理の拡張という知識を用いれば、図 6-12 は、三平方の定理の特殊化された図として、上述してきた２つの知覚様式とは異なる知覚をもたらすことになる。

私たちは、既に図 6-15 において、直角三角形 ABC の中に、この三角形と相似な２つの直角三角形 DAC と DBA があるという図形認識を確認してきた。この３つの直角三角形をそれぞれの辺上に外側に折り返してみると、図 6-17 に示したように、図 6-12 は、直角を挟む２つの辺上に折り返された相似な直角三角形の面積の和が、斜辺上に折り返された直角三角形 ABC の面積に等しいことを示していると認識することができる。一度このような認識が得られれば、私たちは、Polya が指摘するように、図 6-12 を３つの直角三角形が１つの直角三角形の中に収納されている図（$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DAC} + S_{\triangle DBA}$）として、知覚することができるようになる。

図 6-12 が三平方の定理の拡張を経済的に示した図になっているという認識は、実際に

は見えていない折り返された三角形を図 6-17 のように見る知覚をもたらす。静的な知覚では認識されない情報が、折り返すという動的な知覚によって認識されることもあることをこの事例は示している。このように１つの図形は学習者にさまざまな知覚をもたらすが、学習者が選択的に行う知覚は、学習者の所有する知識に依存している。Polya による図 6-12 を媒介とする情報伝達は、多くの学習者にとって補足説明を必要とする、数学的情報が凝縮された経済性の高いコミュニケーションになっている（cf. Emori,1996)。

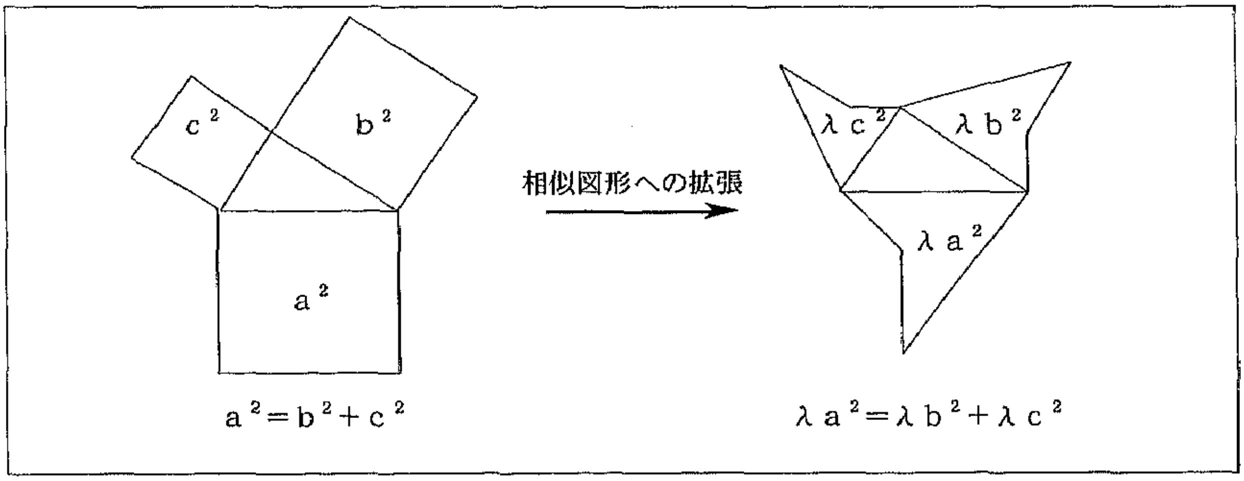
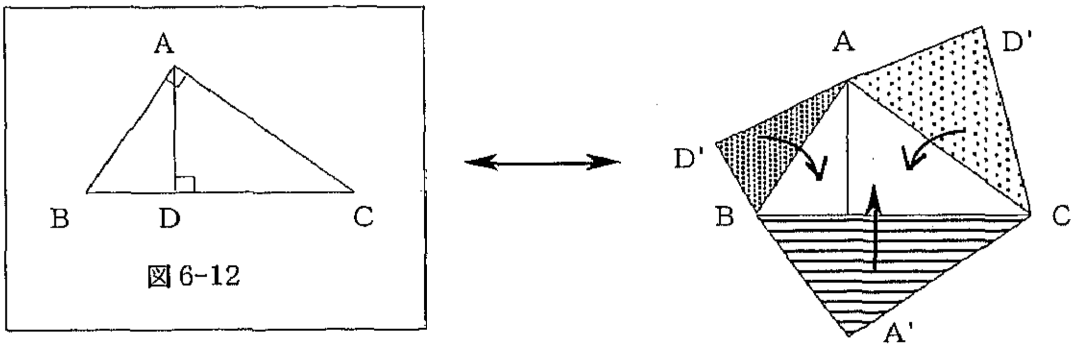


図 6-16：三平方の定理の相似図形への拡張（Polya(1953/1959,p.17) より引用）



$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ とすると、$AD=bc/a$, $DC=b^2/a$, $BD=c^2/a$ より、

$bc/2=b^3c/2a^2+bc^3/2a^2$, $(bc/2a^2)\,a^2=(bc/2a^2)\,b^2+(bc/2a^2)\,c^2$

となり、$\lambda=bc/2a^2$ として、拡張された三平方の定理「$\lambda a^2=\lambda b^2+\lambda c^2$」が、

直角三角形ＡＢＣの各辺上に折り返した△A'ＢＣと△D'ＡＣと△D'ＢＡの間で成立している。

図 6-17：三平方の定理の特殊化と見る図 6-12 に対する選択的な知覚の解説

上述してきたように数学の問題解決では、ある図形の知覚に際し、すべてを同一に捉えるのではなく、ある部分には注意を集中し、他の部分については無視するという認知活動が必要である。こうした認知活動は、図形認識ばかりではなく、数式を認識するときにも必要となる。そこで本項では、幾何図形に関する選択的知覚の例に引き続き、代数領域における選択的知覚の例を２つあげておくことにする。私たちは、これら２つの事例が示しているように、数式の配列の一部を意識的に構造化して知覚することがある。

例えば、第１の例として、級数の和「１－１＋１－１＋・・・＝」について考えてみる。この級数の和を０と考えるとき、私たちは、この級数を「１－１」という隣り合った２つの数を一組として、それが無限に続いているという見方をしている。一度、こうした見方が身についてしまうと、この級数の和が１になるという別の見方が見えにくくなる。答えが0だという認識が、「１－１」をくくり出す第１の知覚を固定化させてしまうことになるからである。それゆえ、私たちは、１つの知覚に無意識のうちに固執してしまうことにより、最初の１を別にして、それ以降の隣り合った２つの項「－１＋１」をセットとして見るという別の知覚に気づかないこともある。あるいは逆に、級数の和が１だと認識した人にとって、その認識を覆す知覚に気づかないということも考えられる。

いずれにしてもこの２つの見方は、「１－１＝０」または「－１＋１＝０」という知識が、私たちの知覚に影響を与えていることを示している。和が0になるという知識に縛られている限り、私たちはその枠組みを変えようとはしない。それゆえ、この級数の和が0だと考えている人の前に、この級数の和は1だと言う人が現れることは、何度この級数を見てもその和が0だと考えていた人に、他者の見方というものを与えたことになる。１になるという情報が与えられると、その見方を細かく説明されなくても、人は、図と地の反転というゲシュタルト的転回により、最初の１をくくり出す見方や、あるいは、最後に1が残るという見方をするようになる。

この他にもさまざまな見方が可能であるにも関わらず、他の見方を棄却して、私たちは、通常、和が０か１になるという意味で、この級数を構造化している。こうした特定の方法で知覚しているということが、本研究で言う「選択的知覚」である。この２つの見方が選択された見方であることを示すためには、先の級数の和が2になる見方が存在することを示せばよい。図6-18に示した級数の和が２になるという構造化の例（志賀,1995,p.30）は、私たちが、このように見ても良いものに対して、そのようには見ずに、他の構造を見ているという意味で、私たちの知識や経験が、「１－１＋１－１＋・・・＝」という数式に対し

て、選択的な知覚を行っていることの証拠である。

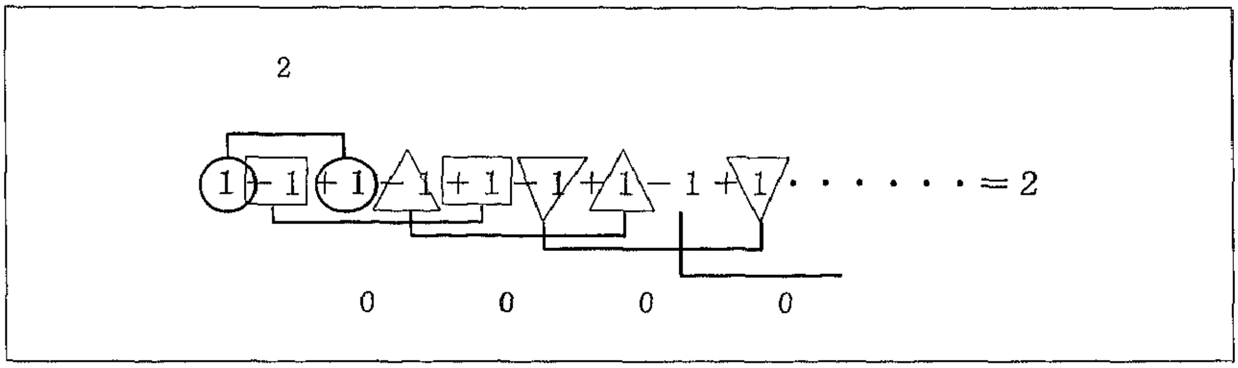


図 6-18：級数の和を２と見る選択的知覚の例（志賀(1995,p.30)より引用）

第２の例として、2000 年８月に千葉幕張で開催された第９回数学教育世界会議（The 9th International Congress on Mathematical Education）において、カナダの幾何学者 Whiteley が示した事例を引用する（cf. 江森,in press)。Whiteley は、幾何学の教育的意義は人間の視覚を鍛えることにあると述べる。Whiteley は、物をどのように知覚するかは、学習という訓練によって築き上げられる能力であり、知識や経験が物の視知覚に大きな影響を与えていると述べている。特に、図形を多用する幾何学では、学習者が図形をいかに見るかということが教育上とても重要だと述べている。そして、この講演にて、さまざまな幾何図形に対する知覚の問題を採り上げた Whiteley は、同様のことが代数の領域でも見られるとして、積の微分を行うときの知覚を例としてあげている（図 6-19)。

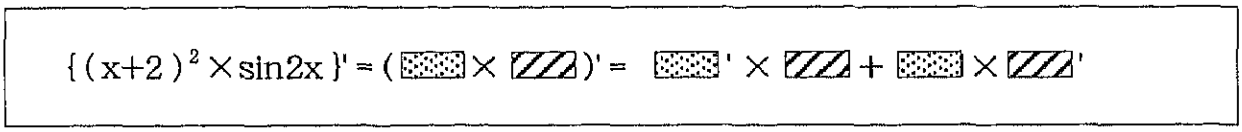


図 6-19：積の微分に用いる選択的な知覚

図 6-19 に示したように、$(x+2)^2$ と sin2x の積の微分を考えるとき、私たちは、まず、$(x+2)^2$ と sin2x という式の細部にこだわるのではなく、$(x+2)^2$ を１つの固まりと見て、sin2x をもう１つの固まりと見るようにしている。 $x+2$ という式が括弧の中に入っているとか、指数２が肩についているという細部を無視して、私たちは、第１項を と見

るように、そして、第2項を と見るように訓練される。それは、積の微分を考えるときに、まず第1段階として、『「(第1項の微分) と (第2項) の積」と「(第1項) と (第2項の微分) の積」の和』という構造を認識する必要があるからである。このように数式のある部分を1つの固まりと見て、その他の部分を別の固まりとみる見方の重要性は、数式を構成している項を選択的に知覚することが、数式の構造を捉えるうえでも重要な能力であることを示している。

選択的な知覚には、その知覚を支持する対象認識が働いている。これまでの事例分析が物語っているように、図形あるいは数式を選択的に知覚している学習者は、特定の知覚様式を安定化させる数学的な構造を認識している。それゆえ、知覚と認識は、明確にその差異を区別するような認知過程ではなく、選択的な知覚がなされているときには、認識という認知活動がすでに機能し始めていると言うことができる。

第2節で分析した事例6-1でも、小学5年生の児童たちは、電話線の問題解決において、実際にいくつかの丸印を書き、それを線で結ぶという操作的な行為から入っていた。小学5年生が個別にノートに書いていた図は、それぞれに似たようなものであったが、似たような図を書いている学習者が、必ずしも類似した解法を見出すとは限らなかった。また、黒板に書かれ教室内で共有されたと見なされた図の解釈も学習者ごとに異なり、すべての学習者が知覚した図の効果も異なっていた。小学5年生の事例6-1は、図に対する知覚と認識は学習者ごとに個別のものであり、選択的な知覚は学習者の経験や知識に依存していること、そして、1つの知覚がその後の問題認識に影響を及ぼし、問題認識の深まりによって知覚が変容していくことを示していた。人間の外部刺激に対するこうした遅延反応は、知覚と認識という過程を分離することのできない複雑なプロセスにしている。

本節第2項にて、メッセージはコミュニケーションの対象として受信時に解釈され、また、その後の認知過程において反省的思考の対象として再解釈されると述べたように、選択的知覚も2つの段階で行われる。まず、受信時に、メッセージは選択的に知覚され、第1の解釈をもたらす。そして、その後の認知過程において、先に解釈されたメッセージは必要に応じて想起され再解釈されるが、この時には、別の知覚様式を発見することもある。それまで何度も見たり聞いたりしていたことが、別の構造を持った情報体として認識されることもある。別の知覚様式に気づくことが、新たな思考を活性化させ、思考の活性化が、対象の一部にさらなる意識の集中をもたらす。ある知覚に対する意識の集中が、選択的知覚の鋭敏化ということである。

第４項　事例の分類と概念形成

抽象的な数学的概念の伝達において、例示という方法が用いられる場合、その概念を伝達する例なのか、例になっていないのかという区別のつけ方は、選択的知覚という概念の理解にあたり重要になる。例えば、家と家との間を電話線で１本ずつ結ぶという構造を考えるとき、私たちは、図 6-20 で示された２つの図を、問題の構造を示す例（図B）と例ではないもの（図A）とに分類することができる。３軒の場合の結び方として、図Aを書いた児童Aは、図Bが自分のモデルと異なっていると気づくことによって、上に加えられた線にその意識を集中させる。この意識の集中が選択的知覚であり、意識の集中がさらにその意識を明確にさせるということが、前項で選択的知識の鋭敏化と呼んだ現象である。

図Ｂ：例となる　　　　図Ａ：例ではない

図 6-20：例と例ではないもの

次に、事例の分類と概念形成の問題を考えるために、図Aと図Bに、新たに図Cが書き加えられたとき、例と例ではないものという区別がどのように変化するのかを考えてみる。図 6-21 に整理したように、図A、図B、図Cという３つの図が示されたとき、私たちは、図Cと図Bを与えられた問題状況を示す例として、図Aだけを例ではないものと考えることもできるし、あるいは、別の捉え方として、図Cを例として、図Bと図Aを例ではないものと考えることもできる。この２番目の捉え方によれば、図Cの提示は、これまで例と考えてきた図Bを例ではないものとして区分するという着想の転換を迫るものになる。３つの図を例と例ではないものという２つの範疇に分類する判断の違いが、図Cが提示された意味合いを変えることになる。

小学５年生の事例 6-1 では、児童Cは「(直線状に３つの丸印が並べられた児童Bの図に対して）これじゃ、変に見える」として、三角形状に丸印を並べ替えた図Cを提示した。この場面で児童Cは、図Aと図Bを適切な例ではないとして、図Cを３軒の場合の例として強調していた。しかし、児童Bは、児童Cの提案を無視し、図Bと図Cは同じことを意味していると解釈して、両方の図を例とする立場を採った。この児童Bの認識を図に表し

たものが、図 6-21 の内側の枠組みである。一方、児童Aは、児童Cのこだわりに着目し、図Cのみを例とする立場を採った。この児童Aの認識を図に表すと、図 6-21 の外側の枠組みとして、先程の二分法とは異なる枠組みが現れてくる。そして、児童Bが採った内側の二分法という認識と児童Aが採った外側の二分法という認識の差異が、その後の解法の差異として表れることになる。児童Aは、図 6-21 で示された内側の分類と外側の分類という２つの二分法を顕在化させることで、問題構造の理解を深めていったと考えられる。

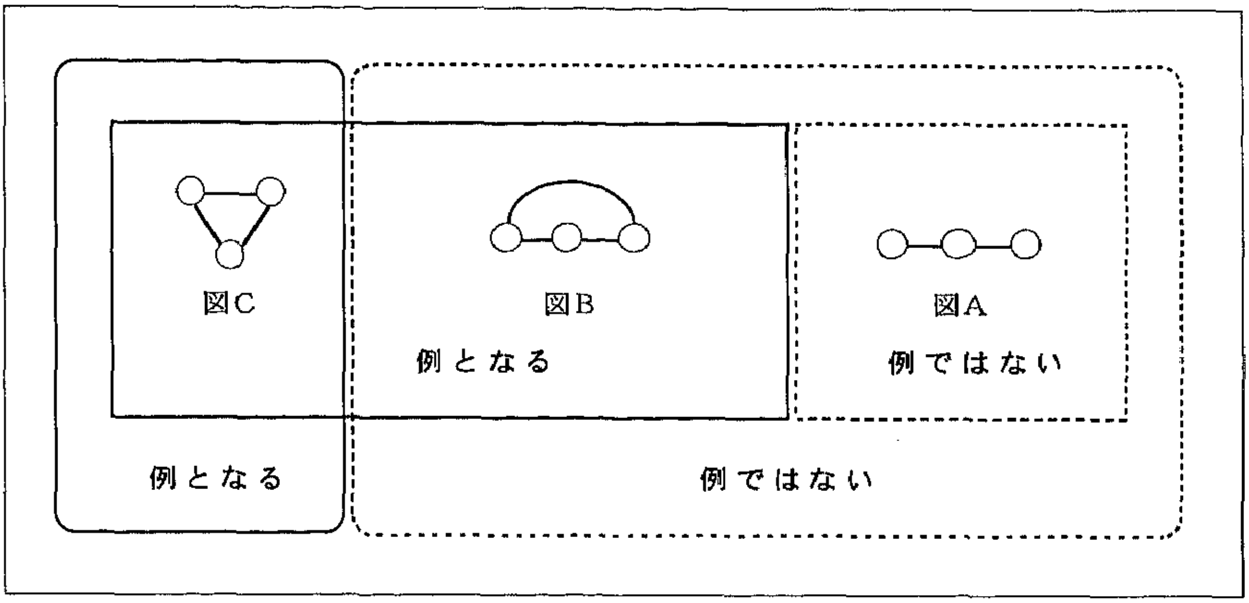


図 6-21：複層二分法（注：３つの図の分類の差異を２つの層で表している。）

Piaget(1949,pp.107-111) は、「vicariances（「複層二分法」と訳す。cf. Piaget & Garcia, 1987/1998,p.180）」という論理構造を示すことで、図 6-21 に示した複数の二分法の被覆によって達成される概念理解の深まりを説明しようとしている[18]。Piaget は、高位の概念は低位の概念を例として利用することによってしか示すことはできないと考えた。そして、Piaget は、低位の概念の単なる寄せ集めとして、高位の概念が形成されるのではなく、低

[18] Piaget (1949,pp.107-111) は、"vicariances" という論理構造の説明に、人類という概念を例として用いている。人類は、フランス人とフランス人から見た外国人の和集合でもあるし、中国人と中国人から見た外国人の和集合でもある。フランス人の集合を A_1、中国人の集合を A_2、人類を B とすれば、$B = A_1 \cup$ 非 $A_1 = A_2 \cup$ 非 A_2。ここで、$A_1 \subset$ 非 A_2、$A_2 \subset$ 非 A_1 である。１つの集合に対し、A_i と非 A_i（この例では i = 1, 2）という二分法がさまざまな層を形成することで、被覆される概念がより複雑で豊かな特質を持つことになる。

位の概念を用いた例と例ではないものという概念規定が複雑に構造化されることによって、抽象性の高い概念が形成されると考えた。Piaget は、１つの高位概念を低位概念Ａと非Ａという二分法が覆い、さらに、別の低位概念Ｂと非Ｂという二分法が異なる範疇を形成しながら被覆することで、低位概念を用いた複数の二分法の層として覆われる高位概念が、より複雑で豊かな特質を持つことになると考えたのである。

小学５年生の事例 6-1 では、３軒の場合には３本の電話線が必要だとする当初の目的達成のために提示された、図Ｂと図Ｃのどちらも同じ範疇に含まれる例として、児童Ａに受け入れられていたと考えられる。しかし、児童Ａの問題解決過程を分析していくと、図Ｂを棄却し、もっぱら図Ｃの解析を行っていることが確かめられた。こうした意識の変容は、児童Ａが、図Ｂを例として見る分類構造と、例ではないものとして見るという２つの分類構造を持っていたことを意味している。児童Ａは、児童Ｂや児童Ｃのどちらか一方が提示した表記への単純な同化によって、認知的不協和状態を解消するという方法を選択せずに、図Ｂを例とする場合と例としない場合では、問題の解決にどのような情報がもたらされるのかを考えることにより、新しい問題解決法を見出したのである[19)]。

ここで Piaget が提示した複層二分法という論理構造を用いれば、小学５年生の事例 6-1 では、児童Ａによる複層二分法的な対象の捉え方が、誰も見出し得なかったアイデアの創造をもたらしたと言うことができる。但し、このアイデアの創造は、３人の児童による相互作用から生じたものであり、誰か１人だけによって生じたものではないと判断できるので、こうしたアイデアの創造を「創発的なアイデアの創造」と呼ぶことにする（江森, 1997a,pp.40-42）。コミュニケーションは、互いに異なる個性を持った学習者が、共通の意味を見出そうとする過程である。この過程は、小学５年生の事例 6-1 の分析でも示されたように、知覚と認識の差異により、一度築かれた関係が次の情報提供により変わりゆく関係でもある。複層二分法という複雑な関係の顕在化による概念形成は、関係が変わると新しい情報が発生し、新しい情報の出現が関係を変え、それがまた新たな情報を生むというように、互いが互いを誘発する形で思考枠組みが再構成されながら進んでいく過程である。

[19)] 図Ｂの提示により、児童Ａは認知的不協和状態を解消する。しかし、児童Ｃが図Ｂを修正し、図Ｃを提示することにより、児童Ａは２つの図のいずれを受け入れるのかという認知的不協和状態へと再度追い込まれる。そこで児童Ａは、２つの図の模倣に頼るのではなく、新たな枠組みを模索することによって、認知的不協和状態を解消しようと試みる。その結果、児童Ａは、ｎ＋１軒の場合には「ｎ軒の電話線の数＋ｎ本」になるという問題の構造を捉える方法を創発することになる。

第５項　高位概念の形成

私たちのメッセージ解釈は、メッセージを構成する諸記号に結びつけられている貯蔵記憶の検索によって始められる。例えば、黒板に三角形の絵が書かれれば、３本の線分によって構成される閉じた図形という知覚をもとに、私たちは「三角形」という言葉を想起する。これは、視覚刺激（△）が三角形という言葉に結びつけられて記憶されていたから可能となることである。そして、三角形という言葉の想起（第１次検索）は、その言葉に結びつけられた三角形という図形の特性を次々に想起させる（第２次検索）。Skemp は、三角形の絵という視覚的な刺激が受け手の頭脳を刺激し、その刺激に反応するように、既に貯蔵されていた記憶が想起される過程を共鳴というアイデアを用いて説明したが、上述したように、記憶の想起には質的に異なる２つの段階がある。そこで本研究では、Skemp の研究において区分されてこなかった直接的な記憶の想起と関連記憶の想起とを分けるために、直接的な記憶の想起を「記憶の第１次検索」、第１次検索によって想起された記憶に関連する記憶の想起を「記憶の第２次検索」と呼んで、２つの段階を区別する。

本章第１節では、「学習した事柄は、ある刺激が与えられたときに、関連する知識も同時に想起されるように、ある種の構造を保ちながら記憶される」という前提を置いた。この事は、ある人の学習歴がわかれば、その人に対して、どのような刺激を与えれば、どのような記憶の想起がもたらされるかが予想できることを示している。学習が人間の社会化の過程であるというのは、知識が記憶される方法の共有化を意味している。私たちは、こうしたメカニズムを利用して、他者に自分が意図している情報を想起させている。

しかし、こうしたメカニズムを共鳴という現象で説明してしまうと、メッセージ解釈のプロセスは、すべて刺激と反応モデルで解決されてしまうことになる。刺激Ｓに対して効果Ｅが得られるという刺激・反応モデルでは、Skemp がコミュニケーションのモデルは選択的知覚という現象を説明するものでなくてはならないと述べた問題を、受動的なプロセスとして説明してしまうことになる。さらに、刺激Ｓに対して効果Ｅが得られるという受動的なモデルでは、２つの刺激が同時に与えられると、別々に与えられたときの効果の和が得られること、すなわち、コミュニケーションが線形モデル「$S_1+S_2 \rightarrow E_1+E_2$」(Scott,1995/1997,pp.211-212) として記述可能だということを含意してしまう[20)]。

私たちの選択的知覚は、複数の刺激の組合せに対しては、その刺激の組合せ自体も刺激

[20)] 行動主義の立場にたつコミュニケーション研究として、Flament(1963/1972) がある。また、行動主義と現象学に関する論考として、Rogers, C. R.(1964/1980) がある。

の一部として反応することにより、刺激の和が効果の和となるようなことはない。コミュニケーションが非線形であるということは、刺激の組合せと、それを受け取る人との相互作用により、思いがけない効果を生み出すコミュニケーションの創発性を意味している。あるメッセージには強く反応し、他のメッセージは無視されるという選択的知覚の問題は、共鳴という受動的な反応として記述されるのではなく、学習者の能動的な反応として記述される必要がある。そして、この能動的な反応という問題は、学習者が選択したいくつかのメッセージが、どのように意味のある１つのまとまりとして関係づけられるのかという、「メッセージ間の結束性」という問題をもたらすことになる。Halliday & Hassan(1985/1991,p.158) が、「教育において大事なことは、結束性のある談話を作り出すことである[21]」と述べたように、第５章の考察では、数学学習におけるコミュニケーションはメッセージの連鎖に意味を見出す活動であることを示してきた (cf. 江森,1994. 橋本,1997,p.42)。しかし、もし、私たちのメッセージ解釈が、記憶の想起、つまり、これまでに述べてきた記憶の第１次検索と第２次検索だけで行われるとしたら、既に構造化され結びつけられた記憶だけが、検索の結果として想起されるにとどまる。メッセージの受信と関連記憶の想起という共鳴モデルの方法で、コミュニケーションが進行するならば、私たちは、それぞれのメッセージに共鳴した個別のメンタル・スペースを頭の中に抱え込み、これらのメンタル・スペースを一群の意味のあるまとまりとすることができなくなってしまうことになる。

メンタル・スペース理論を提唱している Fauconnier(1994,pp.4-5) は、言語を理解するとはメンタル・スペースを構築することであると述べ、さらに、このメンタル・スペースは構造を持った増加可能集合として表されると述べた (p.22)。Faucounnier が述べるように、個別の言語刺激に対して、私たちの頭脳は、個別のメンタル・スペースを何の結束性もつけないまま無造作に生み出すわけではない。なぜならば、図 6-22 に示したように、２つの言語刺激に対して構成された２つのメンタル・スペースが分離したままの状態では、私たちは認知的に不協和な状態に置かれることになってしまうからである。この認知的に不協和な状態を解消するために、私たちは自らの認知構造を変革しようとする。刺激S_1

---

[21] Halliday & Hassan(1985/1991,p.160) は、「『結束性の仮定』は、人類の言語が結束性を示す力をもっているから、こんなによく保持されているのである。他方、そうした力を持つものとしての言語は、共同体の要求に応えなければならなかったがために、特殊な形で発達をとげてきたのである」と述べている。本研究では、Halliday や Hassan と同様の立場から、数学学習において結束性のある談話を作り出すことができるのは、人類が作り上げてきた数学という知識体系が結束性を示す力を持っているからだと考える。そして、そうした力を持つものとしての数学は、新たな数学的知識が既存の体系にうまく結びつけられるように構造化されてきたと、筆者は考えている。

により検索された関連記憶群１と刺激S_2により検索された関連記憶群２が、個別にメンタル・スペース１とメンタル・スペース２を構成したとき、コミュニケーション連鎖を１つの意味のある作用とするために、私たちはメッセージ間の結束性を自らの手で作り出す必要がある。私たちは、分離している２つのメンタル・スペースの存在を認識した段階で、この２つのメンタル・スペースを統合するか、いずれか一方を棄却するか、あるいは、分離したままの状態でも問題のないことを確かめなければならないのである。

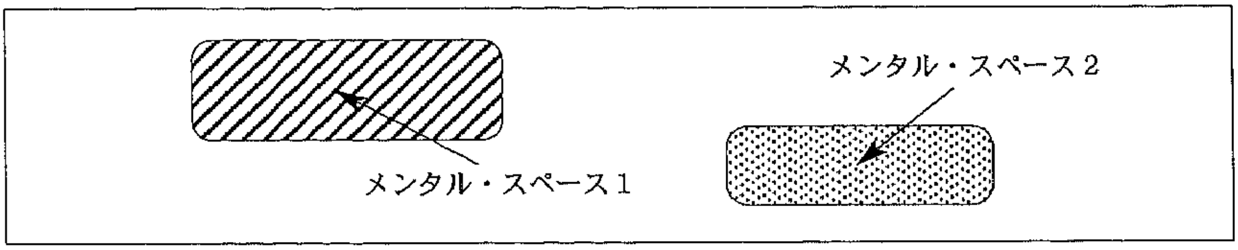


図 6-22：分離している２つのメンタル・スペース

例えば、小学５年生の事例 6-1 では、分離した２つのメンタル・スペースを１つに統合した例、一方を棄却した例、互いに不協和な関係にないことを確認し分離したままの状態を容認した例が、それぞれに確認されている。まず、２つのメンタル・スペースを１つのメンタル・スペースに統合した例として、児童Ａのケースを示すことができる。児童Ａは、児童Ｂと児童Ｃのメッセージによってもたらされた２つの図を複層二分法という論理構造を導入することによって、「３軒の場合には、１本＋２本の電話線が引ける」という認識に統合させていた。図 6-23 に示したように、直線状の図と多角形状の図という２つの図の解釈をもとに構築されたメンタル・スペース１とメンタル・スペース２は、「ｎ＋１軒の場合には、ｎ軒の図にｎ本の電話線が書き加えられる」という認識によって統合され、新たなメンタル・スペースの一部に組み込まれることになる。図 6-23 では、分離されていた２つのメンタル・スペースが統合される初期段階として、２つの集合が共有部分を形成し始める様子を積集合として描き出している。しかし、この過程をより正確に述べるならば、分離していた２つのメンタル・スペースの統合は、２つの集合の積集合の形成という形で進行するものではなく、古い知識が新しい知識の一部として再構成され、古いメンタル・スペース１とメンタル・スペース２は、新たに創出されるメンタル・スペースの一部として存続することになる。つまり、分離していた２つのメンタル・スペースの統合は、統合

されない部分を残すことなく、まったく新たなメンタル・スペースとして生まれ変わることによって達成されるのであり、類似性に着目して結束された2つのメンタル・スペースは、新たな構造化によって1つのメンタル・スペースに置き換えられる（図6-24）。

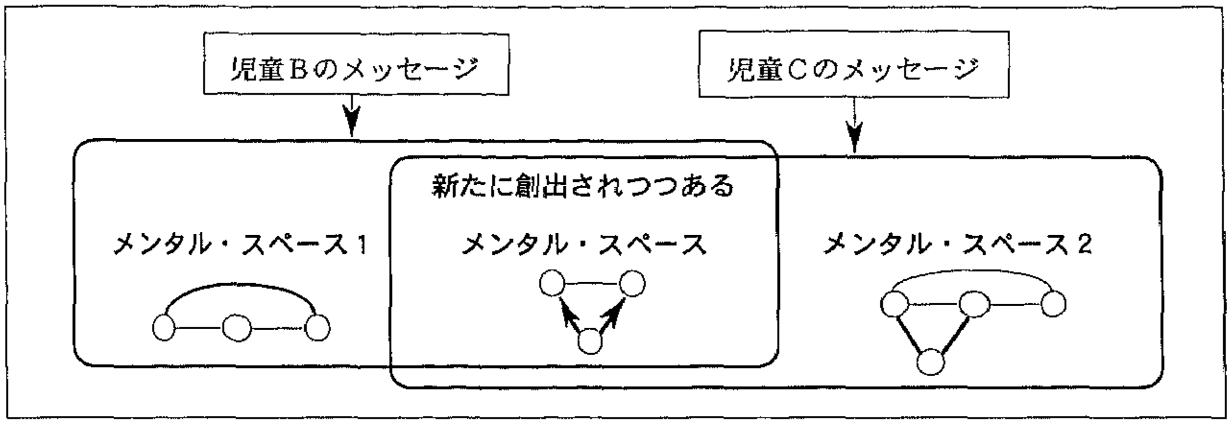


図6-23：分離した2つのメンタル・スペースの統合（初期段階）

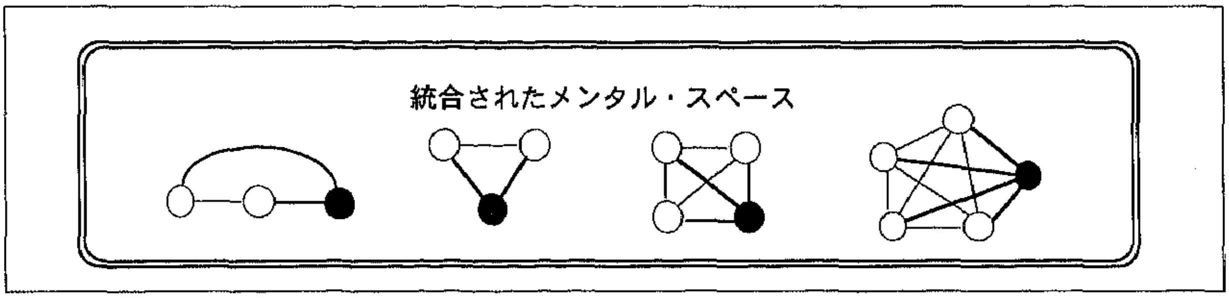


図6-24：統合されたメンタル・スペース

次に、分離した2つのメンタル・スペースが、互いに不協和な関係にならないことを確認したうえで、分離した2つのメンタル・スペースの存在を容認していた例として、児童Bのケースをあげることができる。個別学習において、まず、児童Bは、教師が発信した「家と家との間を1本ずつ電話線で結ぶ」というメッセージに対し、糸電話で遊んだ経験や丸印を結ぶという関連記憶を想起して、2軒の家を1本で結ぶという表象や児童B自身が黒板に示した直線状の図という表象を頭の中に思い浮かべていた。本研究では、ここで構築された表象と想起されていた関連知識をメンタル・スペース1と呼ぶことにした。また、第2節の分析では、児童Cが送信したメッセージ（▽の図）は、「三角形」や「四角形」という多角形に関する関連知識の想起とともに、丸印を結ぶという経験によって修正を加え

られた四角形と２本の対角線という表象を児童Ｂにもたらしたと考えた。児童Ｃが送信したメッセージによってもたらされた表象は、多角形の対角線の公式という知識を児童Ｂに想起させ、こうして構築された表象と関連知識は、図 6-25 に示したメンタル・スペース２を形成することになる。そして、このように形成された２つのメンタル・スペースが統合されずに分離したままであったことは、表 6-12 に引用した児童Ｂの２つの解法の併記という方策に示されている。児童Ｂは、分離している２つのメンタル・スペースを１つのメンタル・スペースとして再構成することには成功していないが、２つのメンタル・スペースが協和すること、すなわち、それぞれのメンタル・スペースに基づいて行われた解法が、いずれも同一の解答をもたらすことを確認することで、２つのメンタル・スペースが分離したまま存在しているという、認知的に不協和な状態を解消していたと考えられる。

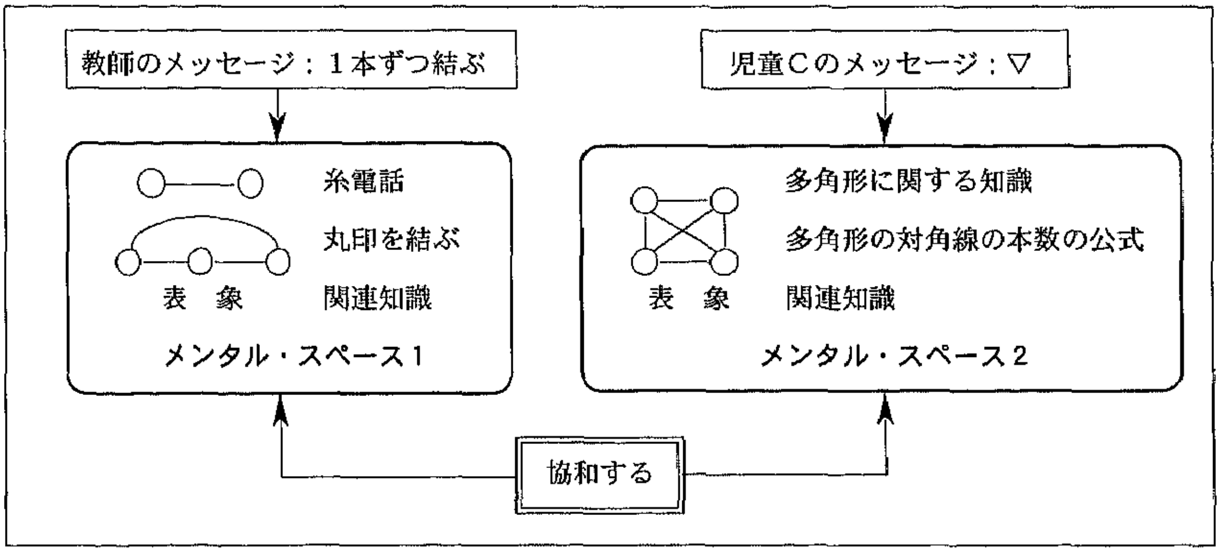


図 6-25：分離した２つのメンタル・スペースの容認

表 6-12：児童Ｂの解答（表 3-4、表 5-16 再掲）

①まず、間の数を求めます。２０角形になるから、自分ととなりはむすべないから、
（２０－３）×２０になる。とちゅうで、むすべる数が半分になるから、
（２０－３）×２０÷２＝１７０それに２０をたして１７０＋２０＝１９０（本）
②この場合はとなりの家の数も入るので、１けんから出る電話線は、２０－１で１９本。
それが２０けんあって、とちゅうで半分になるから、１９×２０÷２＝１９０（本）になる。

最後に、２つのメンタル・スペースの一方を棄却することによって、分離した２つのメンタル・スペースが存在するという、認知的に不協和な状態を回避している例として、児童Ｃのケースをあげることができる。児童Ｃは、児童Ｂの図によって想起されたメンタル・スペースが、すでに構築されていた自分自身のメンタル・スペースと一致しないことによってもたらされる認知的不協和状態を、「②他者の解釈ならびに知識構造の変容を促す」ことにより解消していた（図6-26）。ここで他者変容という方略に対し、「なるほど」という他の学習者による賛同を得た児童Ｃは、児童Ｂの図を棄却し、自分自身のメンタル・スペースを変容することなく、その後の問題解決に取り組むことになる。その結果、他者の解釈や知識構造を変容させることで、認知的不協和状態の解消を試みた児童Ｃは、他者からの賛同という正のフィードバックを受けることで、自らの知識構造を再構成する機会を失うことになる。他者変容を促すことによって、対立する一方のメンタル・スペースを棄却するという行為が、他者とのコミュニケーションによってもたらされる学習効果を抑制することになるのである。

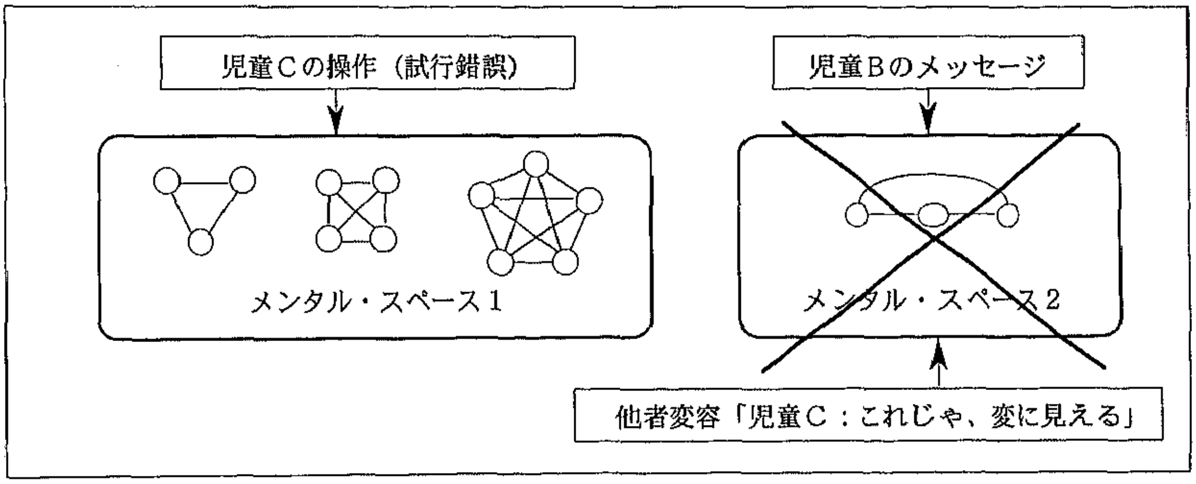


図6-26：一方のメンタル・スペースの棄却

児童Ｃのケースのように、他者からもたらされた情報を意図的に回避することで、他者の考え方と自分自身の考え方の対立を避けるという方策は、私たちが自分自身の認知状態の安定性を維持するうえでは重要な戦略である。しかし、本研究で注目してきたコミュニケーションが数学の学習場面で展開されていることを考慮するとき、こうした方略は必ずしも学習者自身のためにならない場合が多い。例えば、小学５年生による事例6-1におい

ても、児童Ｂによる直線状の図や児童Ｃによる多角形状の図という情報がもたらされたにもかかわらず、２０軒の問題解決において、相変わらず無作為に家を位置づけ、解法を見出せなかった学習者たちは、「①認知的不協和をもたらす情報を意図的に回避する」という方略を選択し、他者の考え方を理解しようとすることが認知的不協和状態の源泉となっているという判断から、他者の思考を理解しようとする認知的な努力を回避していた。これらの学習者にとっては、児童Ｃが自らの考え方の優位さを誇り、他者の考え方を却下したのと同様に、自らの学習機会を放棄していると言える。

他者とのコミュニケーションが、学習者本人の数学学習に効果的な機能を果たすためには、他者の解釈変容を促したり、他者の考え方を意図的に回避したりするのではなく、「③自己の解釈ならびに知識構造を変容する」ことにより、認知的不協和状態の解消を試みることが大切である。第２章にて、「数学的コミュニケーションとは、対象の数量形に関する構造（論理構造も含む）を他者と交換することである」と定義したように、数学学習で重要なことは、分離したメンタル・スペースを取捨選択して整理することではなく、既存の知識を新たな数学的構造体として再構成し直すことである。分離した２つのメンタル・スペース間の結束性を構築するという行為は、他者との思考の連続性と自らの思考の連続性を維持するという点からだけではなく、数学の授業において経験するさまざまな事柄を統合し、自らの学習として内化するという意味において重要な行為となる。

私たちの記憶は、複雑に構造化されている。第１次検索や第２次検索では、その複雑に構造化されているすべてが想起されるわけではない。１つのメッセージ解釈に際し、常にすべての記憶をその複雑な構造の形で想起するのでは、認知的に負担が大き過ぎるので、私たちの頭脳は、適当な部分だけの記憶の想起で済ませている。しかし、２つの記憶群が想起され、それをさらにうまく構造化させなければならないとき、その間隙を埋めるために第３次の検索が行われる。この第３次検索は２つの言語刺激の関連性という認知によりもたらされると、Sperber & Wilson(1986) が提唱する関連性理論では説明している。そこで本研究でも、関連性という新たな知識のネットワーク作りが知識間の結束性を促すことにより、知識の再構成がもたらされることになると考える（江森,1997a,p.35)。

例えば、「ｎを２ｎ＋１が平方数であるような正の整数であるとするとき、ｎ＋１は２つの連続する整数の平方の和であることを示せ（秋山,1987,p.163)」という問題を考えてみる。この時、私たちは、問題文中に含まれているさまざまな言語刺激によって、それぞれ個別の知識を想起する。私たちは、文頭で目にする「ｎ」という記号が「エヌ」と読まれ

る文字であり、「数学では自然数を表す」という知識を想起する。「ｎ」という記号が「エヌと読む文字」であると認識することが第１次検索だとすれば、「ｎは自然数である」という記憶の想起が第２次検索である。この第２次検索が行われるのは、数学学習における経験が、私たちに、ｎという文字と自然数という知識を結束して記憶させていたからである。以下同様に、私たちは、「２ｎ＋１」という記号の固まりを文字式であると認識し、この文字式は「ある自然数の２倍に１をたした数を表している」こと、そして、この数は「奇数」と呼ばれるものであることを想起する（図6-27）。このように私たちは、一つひとつの記号に対し、第１次検索と第２次検索を通して関連する知識を想起することにより、意味を創発していくことになる。

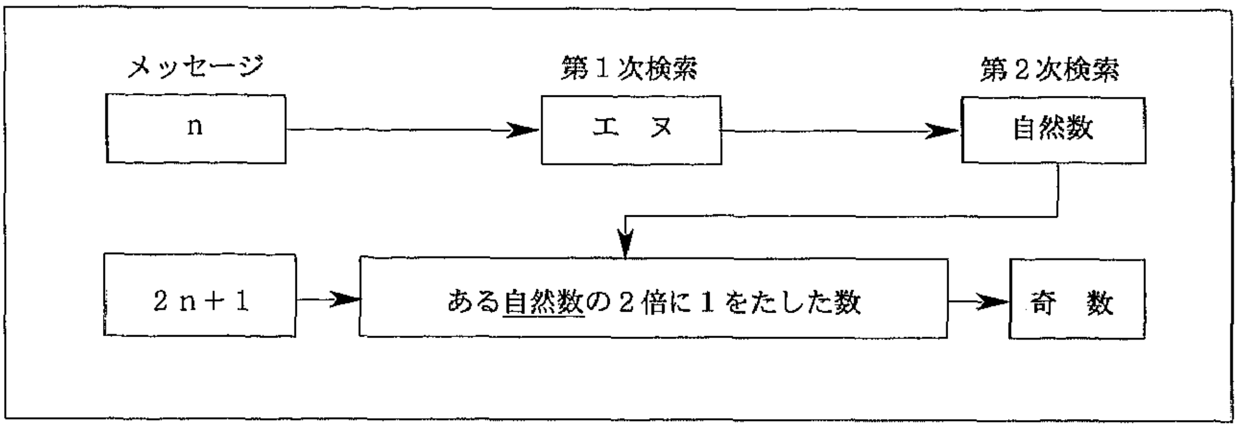


図6-27：第１次検索と第２次検索

しかし、先にも述べたように、第１次検索や第２次検索と呼ばれる直接的な記憶の想起だけでは、「ｎを２ｎ＋１が平方数であるような正の整数であるとする」というメッセージが、読み手に想起させようとしている数学の構造は理解することはできない。この条件文を理解するために、私たちは、一つひとつの文字解釈として想起されたさまざまな関連知識を結束させ、１つの有意味な情報を引き出す必要性に直面する。つまり、私たちは、上記の条件文が自然数ｎの形を制限していることを理解するために、２ｎ＋１が平方数であるという手がかりをもとに、自然数ｎの特性を探る手だてとして、さらなる知識の検索を行うことになる。本研究では、この関連知識の構造化を促す知識の想起を「記憶の第３次検索」と呼ぶことにする。第３次検索によってもたらされる知識が、いくつかの貯蔵記憶の再構成によって想起される知識であるということは、数学的コミュニケーションにおけ

るメッセージ解釈が、問題解決能力や推論能力、あるいは、数学的知識を関連づける能力に依存していることを示している。

この問題では、私たちは、「ｎは正の整数である」という情報と、「２ｎ＋１が平方数である」という情報をもとに、「$2n+1=s^2$、ｓは自然数」という形式化を試みる。この時、「２ｎ＋１は奇数である」という第２次検索で想起された知識を活用することに気づけば、私たちは、「s^2が奇数ならばｓは奇数である」という第２次検索で想起された知識を関連づけるために必要となる知識を想起することができる。この知識の想起が、本研究で言う第３次検索である（図6-28)。このように第３次検索によって想起された知識は、第１次検索や第２次検索で想起された知識とは異なり、メッセージの受け手が分離したメンタル・スペースを結束させるために必要とした知識であり、第３次の検索に成功するか否かが、問題解決に影響を及ぼすことになる。

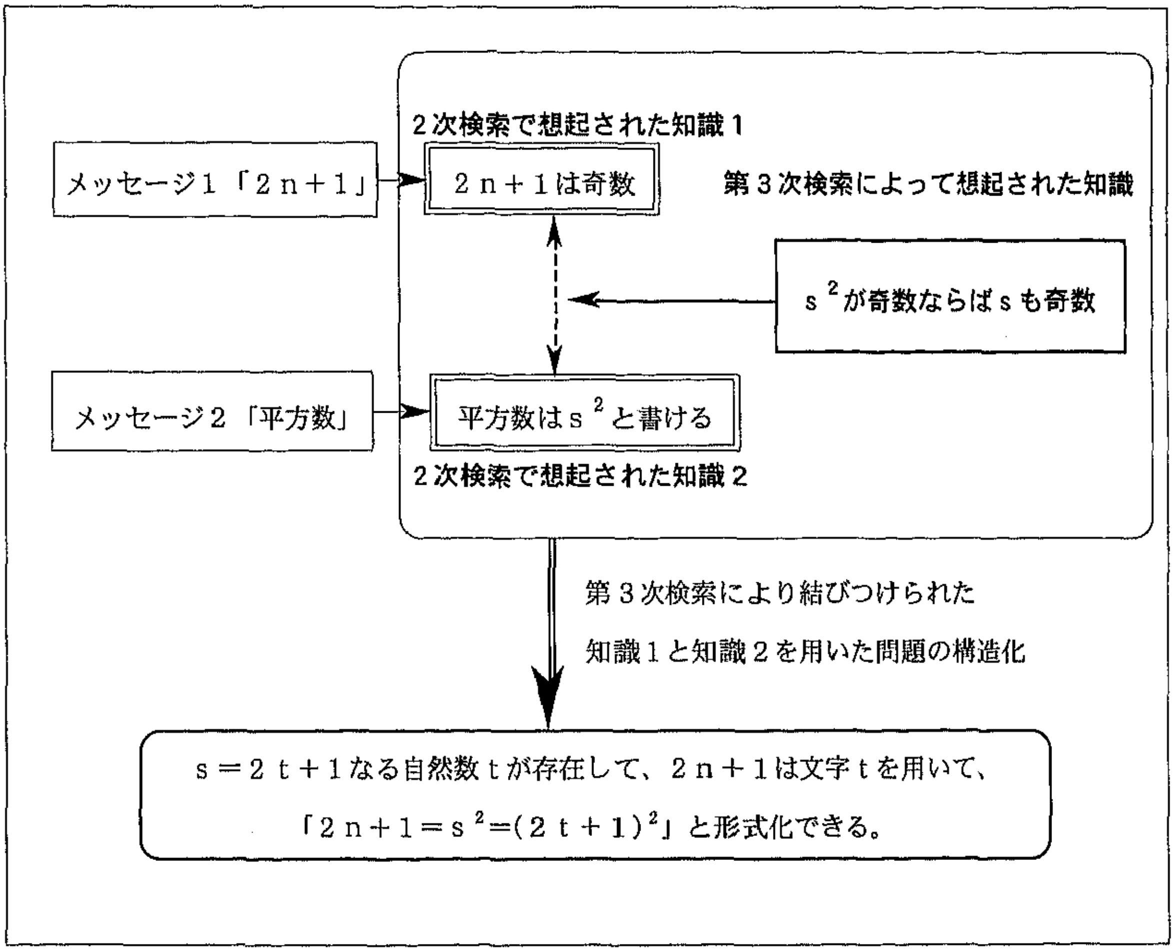


図6-28：第３次検索（第２次検索で想起された知識を結束させる関連知識の想起）

数学の問題解決は、与えられたメッセージの数学的な解釈の構成によって順次導かれる。例えば、上記の問題は、「$2n+1=s^2$、sは自然数」という形式化と、「s^2が奇数ならばsは奇数である」という理解に基づいて、「$s=2t+1$なる自然数tが存在する」と考えられる。そして、$2n+1$は文字tを用いて、「$2n+1=s^2=(2t+1)^2$」と形式化され、その後はこの数式を操作することによって、「$n+1$は2つの連続する整数の和である」という命題が証明される。私たちは、問題の条件として示された正の整数nの特性を解読していくことによって、表6-13に示したように、「$n+1=\{(2n+1)+1\}/2=\{(2t+1)^2+1\}/2=(4t^2+4t+2)/2=2t^2+2t+1=t^2+(t+1)^2$」という記号操作を行い、「nを$2n+1$が平方数であるような正の整数であるとするとき、$n+1$は2つの連続する整数の平方の和である」という命題を証明する。

ここで考察した事例のように、数学的コミュニケーションでは、記号がたくさんの情報を含んでいるかのように振る舞うことがある。「$2n+1=s^2$」という形式化は、その後の問題解決過程において、さまざまな情報を提供する母体となったが、これまでの考察でも繰り返し述べてきたように、形式化された記号の固まりがどのような情報を私たちにもたらしてくれるのかという問題は、あくまで受け手の主観的解釈に依存している。その意味で、問題解決をもたらす第3次検索が、すべての学習者によって可能というわけではない。数学的コミュニケーションに参画する際に要求される、この第3次検索という段階の存在は、第1次検索や第2次検索の段階で想起される記憶によって、他者の意図を理解するだけではなく、問題解決能力や推論能力、あるいは、数学的知識を関連づける能力などが、数学的コミュニケーションへの参画には必要不可欠な能力であることを示している。

表6-13：問題の解答例

$2n+1$が平方数ならば、$2n+1=s^2$となる自然数sが存在する。

ここで、$2n+1=s^2$よりs^2は奇数となり、s^2が奇数ならばsも奇数となる。

それゆえ、$s=2t+1$なる自然数tが存在すると考えれば、$2n+1=s^2=(2t+1)^2$

であるから、$n+1=\{(2n+1)+1\}/2=\{(2t+1)^2+1\}/2$

$=(4t^2+4t+2)/2=2t^2+2t+1=t^2+(t+1)^2$　となる。

よって、与えられた条件を満たすnに対して、$n+1$は2つの連続する整数の平方の和となる。

以上の考察で明らかになったことは、第1次検索と第2次検索は、Skempの共鳴というアナロジーによって説明が可能であるものの、共鳴というアナロジーでは、メッセージ間の結束性を生み出すメカニズムの説明が困難だということである。本研究では、この結束性の問題に対して、第3次検索は、メッセージという物理的な刺激が原因ではなく、分離した複数のメンタル・スペースによってもたらされた認知的不協和という、受け手自身の中で発生した不安定性が直接の原動力であると答えた。本研究では、メッセージという物理的刺激に共鳴することにより、第1次検索や第2次検索が起こり、初期のメンタル・スペースが構築され、複数の送り手によるメッセージの連鎖が、個別のメンタル・スペースを次々に構築していくと考えた。そして、本研究では、こうした個別のメンタル・スペースを再構成して、1つのまとまりのある構造体とするために、既存の知識体系が組み替えられることになると考える。

共鳴は、まず同じ構造間で起こる（第1次検索）。そして、共鳴により活性化された認知空間の隣接部分が、その振動により活性化される（第2次検索）。この活性化に続き、分離されたままの状態に置かれているメンタル・スペースの構造化のために、これまでの段階では想起されていなかった貯蔵記憶が想起される（第3次検索）。本研究では、この記憶の第3次検索を共鳴という現象では説明できないとする立場から、「誘発」と呼ぶことにする。この誘発という現象は、小学5年生の事例6-1の児童Aなどに見られるが、コミュニケーションに参画しているすべての学習者において観察されるわけではない。

認知的不協和状態の解消において、何の疑問も持たずに他者に同化してしまうと、低いレベルの理解で安定してしまうことになる。この状況は、外部から判断すれば、望ましい状態にあるとは言えない。低いレベルでの安定性に満足してしまわないためには、内省(reflective thinking）という認知的な活動が必要となる。より深い理解へと向かうためには、低いレベルといえども本人にとって認知的に安定した状態を打ち破る必要があるからである。第3章において、「情報とは不確定性を低減するものである（cf. 金子,1990,p.1)」という定義を与えてきたように、私たちは、ある種の不確定性が低減された段階で、情報処理を中断してしまうことが多い。

例えば、小学5年生の事例6-1において、1軒ずつ屋根と窓のある家を書いていた児童Yは、3人の発表を聞いた後、家を丸印で表すという表記に同化しただけで、丸印を直線状や多角形状に並べずに、以前と同様に不規則な位置に並べていた。この観察が意味することは、児童Yにとって丸印の提示は、家をどのように書いたらよいのかという迷い、す

なわち、家の表記法に関する不確定性を低減させるための情報でしかなく、丸印の結び付き方を示した3つの図は、その他の情報を何ももたらさなかったということである。児童Yに見られるように、低いレベルでの認知的不協和状態の解消は、さらなる不確定要素を認識するまで、低いレベルでの安定性をもたらし、さらに多くの情報を引きだすことを妨げてしまうことになる。

本研究では、当初より、数学学習におけるコミュニケーションの問題は、コード化とコード解読という情報伝達技能の問題ではないと述べてきた。数学的表現を駆使したコミュニケーションを重視することは、本項で述べてきた第1次検索や第2次検索の問題として、従前と変わらぬ議論を繰り返すことを意味している。それゆえ、第6章では、数学的表現を駆使したコミュニケーション能力の育成を最終目標とする先行研究とは異なる立場から、分離したメンタル・スペースを結束させる第3次検索をいかに効果的に行い、分離した情報をいかに構造化できるのかという問題について考察してきたのである。学習者個人の思考の連続性という視点から、数学学習におけるコミュニケーション連鎖の内化過程について考えてきたこれまでの考察を要約すれば、その結論は以下のように述べることができる。

数学学習におけるコミュニケーションは、メッセージという物理的な刺激に反応するだけではなく、分離した複数のメンタル・スペースを意味のある新たな構造体として結束させる活動である。そして、数学学習において展開されるさまざまな発話の一つひとつを理解するだけではなく、複数の発話をコミュニケーションの連鎖として内化することが、数学の授業を理解することである。数学学習におけるコミュニケーション連鎖の内化とは、数学の授業の中で、教師や学友から具体的な操作を介して提示される断片的な数学的知識や経験を、新しいアイデアを創発する基盤となる知識体系に構造化する、学習者の認知的な活動である。

第５節　学習の起源としてのコミュニケーション連鎖の内化

本研究では、第４章から第６章までの考察において、活動の連続性、学習者間の思考の連続性、そして、学習者個人の思考の連続性という３つの視点から、数学学習におけるコミュニケーションの連鎖という事象について考えてきた。事例を分析するためには問題の焦点化を図る必要があるという研究方法論上の制約から、これまでの考察では、密接に関わり合っている３つの視点を個別に論じてきたのである。そこで第５節では、第４章から第６章までの考察を学習の起源としてのコミュニケーション連鎖の内化という視点から再構成する。本節の目的は、数学学習に付随するすべての数学的活動を統合する活動としてコミュニケーションを考えるという立場から、数学教師は数学学習におけるコミュニケーション連鎖をいかに把握すればよいのか、という本研究の課題に答えることである。

第１項　数学学習におけるコミュニケーション連鎖

教師から学習者に一方的に情報が提供される講義形式の授業では、教師から学習者への一方向線形モデル型のコミュニケーションが行われている。講義形式の授業における情報伝達では、常に教師が情報発信源として特定され、学習者は教師の説明を聞く受信者の役割を果たすのみである（図 6-29）。そして、同一のメッセージを受信することによってもたらされるコミュニケーション効果、すなわち、講義形式の授業に出席して得られる学習効果は、教師の説明を理解する受け手の能力に依存することになる。学習の進んでいる学習者は、これまでに蓄えた知識や経験をもとに、教師の説明から多くの事柄を学ぶことができる。その一方で、学習の遅れている学習者にもたらされる効果は、理解力の不足によって、メッセージ解釈が十分に行われないときには、低いものと成らざるを得ない。

しかし、メッセージが常に教師から発信されるという、同一のコミュニケーション・プロセスに参画していることは、学習者の能力に関わらず、すべての学習者が同一の学習起源を共有しているという利点も含んでいる。教師の説明が、新しい数学的概念を見出す契機になるように、講義形式の授業では、学習は、教師が発するメッセージに反応するという形で進められる。異なる個性を持った学習者集団の中でも、学習者たちが教師の言葉をよく聞き、教師の指示に従うという条件を満たせば、学習の起源は他の授業形態に比べ共有しやすいと言える。

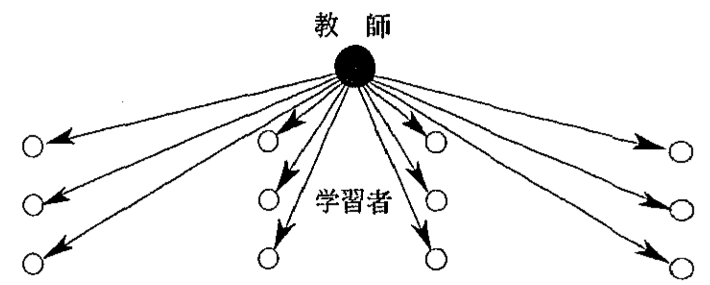


図6-29：講義形式の授業におけるコミュニケーション

例えば、中学１年の正負の数の授業において、教師が、「東に５m歩くことを＋５mと書いて、西に３m歩くことを－３mと書くと、いちいち東とか西とか言わなくてもいいですね。反対方向へ進むと言うとき、このマイナスという記号を用いると便利です」と説明して、負の数の学習を始めようとするとき、この説明を聞いている学習者は、「西に３m歩くことを－３mと書く」というメッセージに反応することによって、負の数という新しい数の学習を始めることになる。この場面で、温度計の－３°という表記になじみのある学習者は、そうした既存の知識を想起しながら、教師が意図しているマイナスという数を理解しようと考え始めるし、その一方で、初出の記号に戸惑いながら説明を聞いている学習者も存在することになる。通常の授業では、ここで教師から学習者へさまざまな問いかけがなされ、学習者の理解度が確認されることになる。

しかし、教育実習生など経験の浅い教師の授業では、教師の説明が一方的に続けられることもある。こうした授業を本研究では講義形式の授業と呼んでいるが、その典型的な例として、学生Ｚは模擬授業[22]において－３mの意味を説明した後、「－（－３）m」という表記を黒板に示し、「西に３m歩くことを－３mと書きましたが、－（－３）mというのは、西に３m歩くことの反対を示す、マイナスという記号が、もう１つ括弧の外側についています。この－（－３）というのは、東に３m歩くということと同じ意味になります。マイナスの外側に、もう１つマイナスがついているときは、反対の反対で元に戻ることになります」と説明している。学生Ｚが行った模擬授業では、学習者は、教師の説明が新しい数の学習の起源となることを認識したのちに、教師が示した「－３」という表記に同化

[22] この模擬授業は、2002年5月16日に行われたものである。

し、反対方向に進むことをマイナスの数で表すという思考に同化することで、負の数という新しい数を習得していくことが想定されている。

ここに引用した事例のように、教師が説明を一方的に続ける授業では、教師の発言と発言とが連鎖していくことになる。それゆえ、講義形式の授業に出席している学習者には、西に３ｍ歩くことを－３ｍと書くという説明を、その次に行われた「負の数×負の数」という演算の説明に結びつけることが求められる。講義形式の授業では、新しい表記や思考に同化すること、そして、同化した知識間の関係づけを行うことが、学習の起源となる。新しい表記と思考が教師から提供される場合、学習者は、それを学習の対象として、受け入れるしかない。なぜ、そうした表記や思考が必要なのか、あるいは、別の表記や思考は考えられなかったのか、という疑問を挟む余地が残されていないとき、学習者の思考過程は、教師の説明に同化するだけで、拡張、分化、再構成という相に発展することはない。

そこで数学教師は、講義形式の授業を改善するために、学習者自身が主体的に考える授業の展開を模索している。こうした模索の結果として、現在用いられている授業方略の１つが、学習の契機となる素朴な考え方に同化させた後に、学習者自らがそのアイデアを拡張し、拡張したアイデアを多様な考え方として分化させ、分化した考え方を再構成することにより、学習の契機となった素朴なアイデアを数学的に精錬させていく授業展開を企画するという方法である[23)]。そして、こうした授業改善の方法として用いられているのが、教師と特定の学習者との間で展開されるＩＲＦ型のコミュニケーションである（cf. Sinclair & Coulthard,1975,p.21. Pimm,1987,pp.27-28）[24)]。

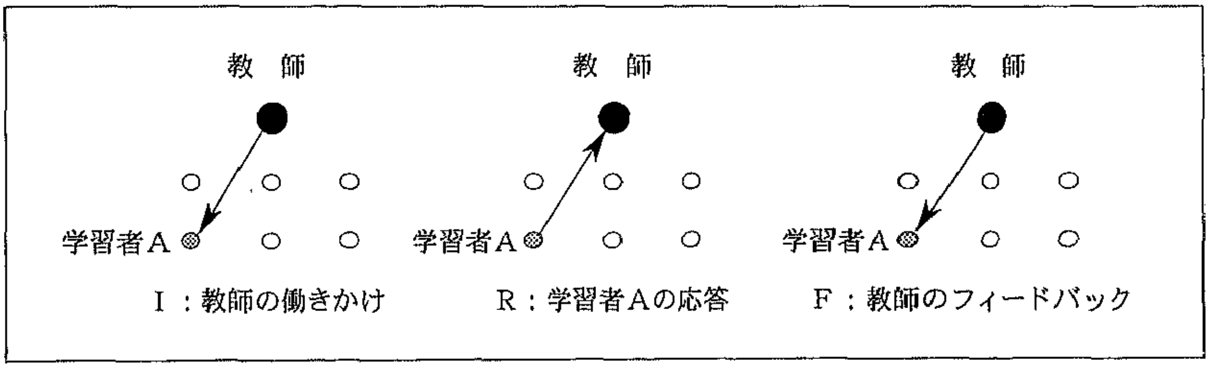


図6-30：ＩＲＦ型のコミュニケーション

[23)] 具体的な適用例としては、第６章第１節第３項の小学２年生の長さの授業がある。

[24)] IRF型に対して、Mehan(1979,pp.52-54)のIRE型（Initiation-Reply-Evaluation）という捉え方もある。Cazden(1988,p.29)、Richards(1996,p.73)、Wertsch(1998/2002,p.134)などを参照。

ＩＲＦ型のコミュニケーションは、図 6-30 に示したように、教師が、ある学習者を選定し、その学習者に対する働きかけ（Initiation）を行うことにより始められる。教師は、学習者からの反応を引き出すために、学習達成度の高い学習者に質問したり、あるいは、学習者の理解度を見るために、学習達成度の中位や低位の学習者に質問することにより、教師と学習者との対話を開始する。教師からの働きかけにより始められた一対一の対話は、その後、質問を受けた学習者Ａから教師への応答（Response）と、その応答に対する教師から学習者Ａへのフィードバック（Feedback）へと発展していくことになる。

例えば、第５章で分析した中学２年の連立方程式の授業では、教師と生徒Ａとの間で、ＩＲＦ型のコミュニケーションが展開されていた。事例 5-1 では、「ｘ＋３ｙ＝－１・・・①、２ｘ＋ｙ＝－７・・・②」という連立方程式の解法として、①の式から②の式を引いて得られた式に、もう一度①の式をたすことで、文字ｘを消去して、ｙ＝１という答えを求めた生徒Ａに対して、教師から「なんで、①から②を引こうと思ったの？（発言 13）」という問いかけがあり、ＩＲＦ型のコミュニケーションが始められている。この場面で生徒Ａは、教師からの働きかけに対して、「引いてやったら、うまくいった（発言 16）」と応答し、教師は、「たまたまうまくいったの、そうじゃないよね（発言 17）」というフィードバックを行っている。事例 5-1 に見られるＩＲＦ型のコミュニケーションでは、教師の発言が特定の学習者に直接向けられているという意味で、指向的なコミュニケーションが行われていると言える。そして、教師と特定の学習者との対話は、他の学習者に開かれているものの、教師の発言は他の学習者全員を対象としてフィードバックされているわけではないという意味で、非指向的なコミュニケーションでもある（図 6-31）。

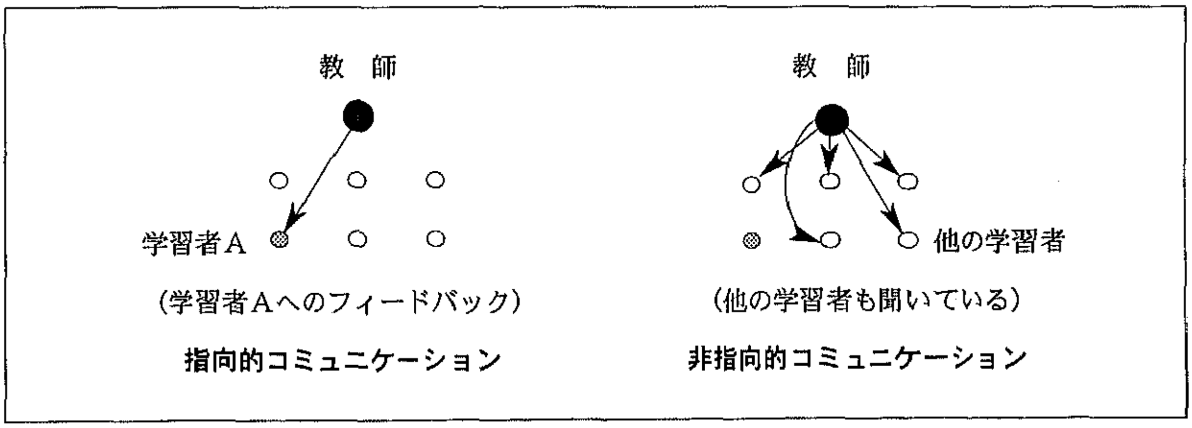


図 6-31：指向的コミュニケーションと非指向的コミュニケーション

講義形式の授業では、教師は、すべての学習者に向けた指向的なコミュニケーションを行っている。しかし、学習者からの反応を授業へのフィードバックとして採り入れようと試みると、これまで一様に行われていたコミュニケーションが、特定の学習者へ向かう指向的なコミュニケーションと、他の学習者への非指向的なコミュニケーションという、２つの構造を持ったコミュニケーションへと変容していくことになる。そこで教師たちは、次の段階として、特定の学習者とのＩＲＦ型のコミュニケーションに、他の学習者を参画させようと試みるが、第５章の事例分析が示してきたように、こうした再構造化は容易ではない。

例えば、事例5-1において、教師は、「Ａ君。でもこれ数学的に間違ってないよね。計算も間違ってないし、正しいよね（発言18の前半部分）」と、生徒Ａに対するフィードバックを行いながら、「ほかの人はどう思いますか（発言18の後半部分）」と、他の学習者たちに同じ言葉を投げかけていた。そして、教師は、生徒Ａとの対話を他の生徒たちにも開くために、生徒Ｓを指名し、「Ｓ君。どうかな（発言19）」と新たな働きかけを行っている。教師は、生徒Ｓを対話に参画させることによって、教師と特定の生徒との一対一の対話を教師と複数の生徒との対話へと、コミュニケーションの再構造化を図りたいと考えていた。しかし、教師の意図に反し、生徒Ｓは、「答えは同じだけど（発言20）」と言ったまま沈黙してしまい、結果として、この場面で意図された教師の働きかけは失敗してしまうことになる。学習者Ａと教師の対話を教室全体の学習者を巻き込んだコミュニケーションへと発展させようという教師の試みは、この場面ではうまくいかなかったのである。

また、第５章第５節で行った中学２年の授業分析で示したように、教師の努力は、時として、フィルターの役割を果たさないばかりか、学習者同士のコミュニケーションを疎外することもある。教師が学習者に語らせようとする努力が、発言しようとする学習者の思考を本人の意図しない方向へ変容させるということが、実際の授業場面ではしばしば観察される。事例5-7では、教師からの働きかけに応えた生徒Ｊに対して、教師は、生徒Ｊへのフィードバックを行う前に、他の学習者たちに、「質問ない？わかった？言葉が足りないと思うよ（発言5）」と述べて、他の学習者に対してコミュニケーションへの参画を促していた。しかし、この場面では、他の学習者からの応答がなかったので、教師は、問題の所在を明確にするために、「半円になるって、どこにくるの？どこにくるのＡとＢ（発言6）」と発言している。他の学習者が生徒Ｊの発言に対して、何らかのフィードバックをしやすくするために、教師は、問題点の焦点化を試みようとして、発言６を行っているのだが、

こうした教師の試みは、結果としてさらなる混乱を招くことになった。「どこにくるのＡとＢ」という教師の発言が、生徒Ｊの思考を乱し、教師と生徒Ｊとの対話を教室全体でのコミュニケーションへ再構造化しようとした教師の努力は、失敗することになってしまったのである。

事例5-1や事例5-7のように、ＩＲＦ型のコミュニケーションから学級全体を巻き込んだコミュニケーションへと展開させることは容易ではない。しかし、本研究では、コミュニケーションの再構造化に成功した例についても分析を行ってきた。例えば、小学５年生の事例（事例5-6；事例6-1）では、机間指導中に交わされた教師と児童Ａとの対話が、教室全体でのコミュニケーションへとうまく発展している。「Ａさんがね、家の結び方がわからないって悩んでいます。ちょと聞いてください」という、教室全体に向けられた教師の発言によって始められたこの場面では、教師が行った「３軒の場合について考えてごらん」という児童Ａへのフィードバックが、他の学習者への伝達を意図した指向的なコミュニケーションに変わることによって、教師と児童Ａとの間で展開されたＩＲＦ型のコミュニケーションに、他の学習者を直接参画させるものとして機能している（図6-32）。この場面で教師は、自らの役割を、児童Ａが抱える問題の所在を明確にして、他の学習者へ伝達する役割、いわゆるフィルターとしての機能を果たすことにとどめることで（図6-33）、学習者Ａから他の学習者へのコミュニケーション連鎖の発生を働きかけている（図6-34）。

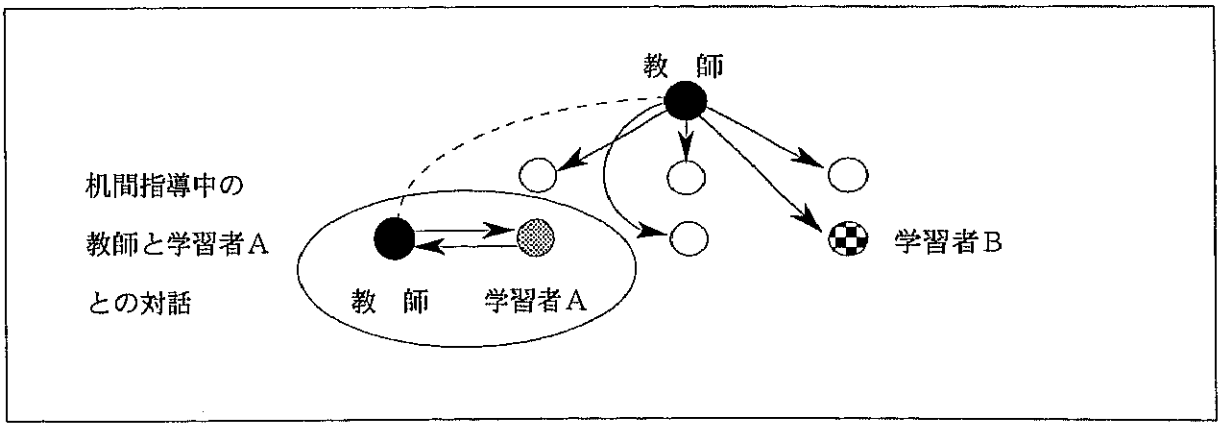


図6-32：学習者Ａの応答を他の学習者へ還元する教師

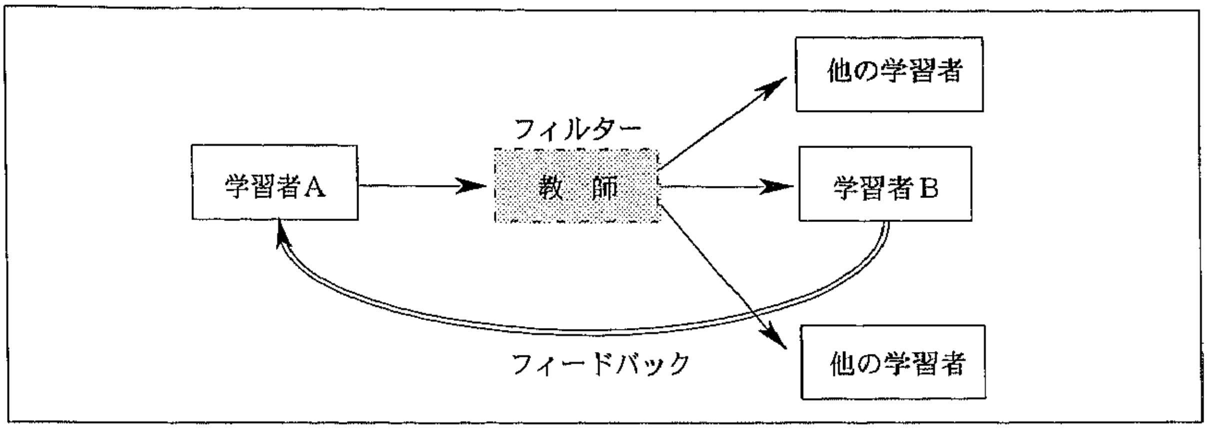


図 6-33：教師のフィルター作用によってもたらされたフィードバック

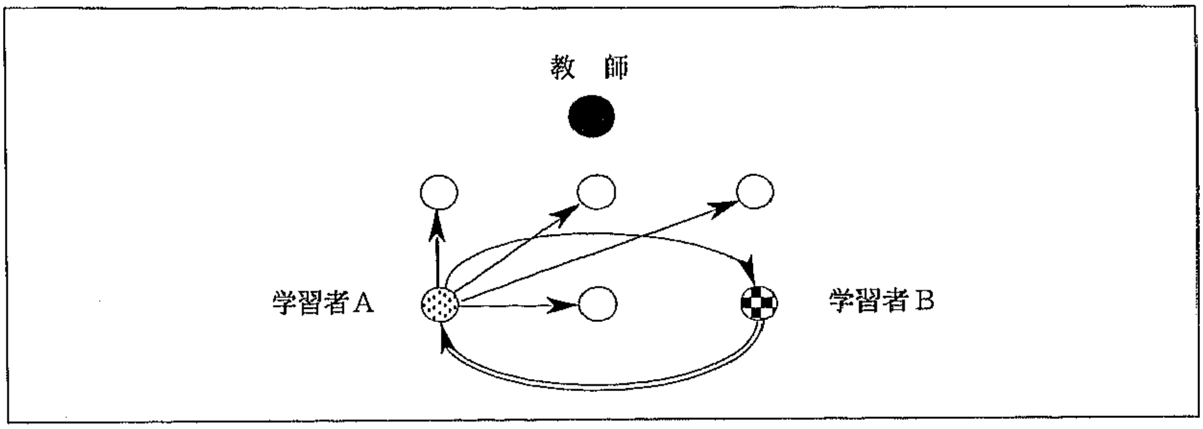


図 6-34：教師のフィルター作用によって再構造化されたコミュニケーション

そして、第6章で示してきたように、コミュニケーションの再構造化に成功した授業では、再構造化されたコミュニケーションが、個々の学習者に対して、さまざまな学習の起源を提供していることが明らかになった。特に、事例 6-1 の分析では、3人の児童が発信したメッセージのどこに着目し、それをいかに解釈するのかという、コミュニケーション連鎖の内化過程の差異が、個々の学習者に異なる学習を展開させていることが示された。

例えば、丸印が家を表すという表記法の出現によって、それまで屋根と窓のある家の絵を苦労しながら書いていた児童Yが、家を丸印で表しても問題の構造を変えることはないということを学んでいたことは、既に同様の表記を用いている学習者に対しては、新たな学習の起源にならないことが、そうした表記法を思いつかなかった学習者に対しては、新たな知識を構成する学習の起源となることを示している。児童Yにとって、家を丸印で書

くという表記と思考への同化は、黒板に書かれた丸印と教師の発言によって、位相同型という数学的な考え方が、児童Ｙの頭の中に派生していることを意味している。この場面では、教師が、児童Ａが書いた３つ目の丸印を指し示し、「これ家だよ」と発言したことが、児童Ｙに対して、１つの学習の起源として機能している（表6-14）。

表6-14：家を丸印で表す表記法の出現（表3-1の一部を再掲）

児童Ａ：２軒の場合は、こうやって１本引けて、３軒の場合は、ここにもう１つ家を加えて。

教師　：これ家だよ。（３つ目の丸印を指す。）

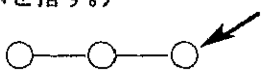


図6-35：教師の動作（注：矢線は教師の動作を示している。）

その一方で、児童Ａにとっては、児童Ｂと児童Ｃが示した図と動作が、その後の問題解決過程に影響を与えたという意味で、１つの学習の起源となっていると言える。児童Ａのように、自分自身の発言に対して発生した連鎖的フィードバックというコミュニケーション連鎖の意味づけは、フィードバックを受ける学習者と他の学習者とでは、まったく別のものになる可能性を秘めている。自分自身に対するフィードバックとして、コミュニケーションが連鎖していると捉える立場にある学習者と、そのフィードバックを実際に行っている学習者、あるいは、一連のコミュニケーション連鎖を間接的に受け入れている学習者では、その意味づけが自ずと異なってくるのである。また、コミュニケーション連鎖の類型論が示してきたように、コミュニケーション連鎖を類似の立場で解釈している学習者も、解釈の基盤となる所有知識や経験などの差により、他者の思考の連続性を推測し、自分の思考の連続性を維持するという認知過程が異なり、その結果、コミュニケーション連鎖の意味づけが変わってくることになる。

そして、こうしたコミュニケーション連鎖に対する認識の多様性は、その渦中にある教師にも、その全貌を理解することは不可能である。なぜならば、異なるコミュニケーション事象をそれぞれの学習の起源とする学習者が、そのコミュニケーション連鎖を内化する過程において、再度、異なる学習を始めることになるからである。それゆえ、私たちは、教師による制御されたコミュニケーションが、等しくすべての学習者に、同一の刺激を与

えるという幻想をうち払い、ある学習者の発言に共鳴する学習者が、それぞれの場面で観察できないサークルを結成して、そのサークルがサークルの構成員にとっての新たな学習の場となると考える、学習コミュニケーションのモデルを考える必要がある。

この目に見えないサークルの存在は、学習者Ａから学習者Ｂへという２人のコミュニケーションの連鎖を共鳴連鎖として認識するのか、協応連鎖、あるいは、超越連鎖と捉えるのか、という認識の差が存在することを示している。学習の起源を共有する学習者同士は、その時点において、似たようなコミュニケーション解釈を行っている。学習者Ａの発言に共鳴した学習者Ｂの発言は、学習者Ａの発言に共鳴できた学習者と、共鳴できずにいる学習者では、その受けとめられ方が異なっている。あるサークルに所属する学習者にとって意味のある発言と、意味のない発言があることにより、こうしたコミュニケーション連鎖の認識の差異が、個々の学習者の学習をそれぞれ別々の方向へ深化させることになる。

それぞれの学習者の達成度の違いは、教師の意図とはかけ離れたところで、学習者にとって新たな気づきとなる個別の学習の起源を派生させている。教師はこうした学習者の思考過程を逐次認識しながら授業を進めることはできないが、教師がなすべき役割は、さまざまな場面で派生するコミュニケーション行為が、多様な学習の起源となる可能性があることに注意を払うことである。そして、できるならば、そうした学習の起源としてのコミュニケーション連鎖の発生を、それに気づいていない学習者に知らせることである。

教師の働きかけに応答するＩＲＦ型のコミュニケーションに慣れている学習者たちは、教師が期待するほどに、教師と他の学習者との対話を注意深く聞いているわけではない。「先生はＧ君と話をしているのだ」という認識により、他の学習者の発言は聞き逃されることが多く、他者がもたらした解答は、その結果が自分の解答と等しい場合、自分と同じような知識を使って、同じような考えの下で導かれたのだと受けとめられることが多い[25]。しかし、教師と他の学習者との対話に聞き手として加わることが、自分自身の学習を深化させるのだという態度を持ち、他者の発言に自分の理解とは異なる点があることに気づくことにより、聞き手は、その気づきを起点として、新たな学習に取り組むことができる。

形式化されていない発言も、その発言の裏に隠されている他者の思考を推測するとき、そこに自分自身の思考を変革する学習の起源が広がっている。数学の学習場面には、一つひとつの発言は形式化されていない未熟な思考によって導かれたものであっても、そうし

---

[25] 第５章第１節第４項の考察では、約半数の生徒たちが、教師と生徒Ｇとの対話を聞き逃したまま、自分自身の考え方で生徒Ｇと同一の判断を行っていると受けとめている様子が示されている。

た発言を構造化することによって見えてくる学習の起源というものが無数に存在している。コミュニケーション連鎖の類型論によって見えてくるものは、こうした学習の起源そのものである。そして、こうした学習の起源を認識することにより、個々の学習者の数学学習がどのように深化するのかということが、これまでの考察によって示されたコミュニケーション連鎖の内化過程である。

数学学習におけるコミュニケーションは、各学習者の学習態度や意欲、あるいは、所有している知識や経験などの諸要因により、さまざまな解釈を派生させている。図6-36に示したように、第6章の事例分析によって描き出されてきたことは、教師の働きかけに児童Aが応え、そこに児童Bと児童Cのコミュニケーションが連鎖していくという過程において、その中で派生するさまざまなメッセージの解釈を契機に、新たな表記法や思考に出会い、そこで獲得した情報をもとに、自分自身のアイデアと再構成しながら問題を解決していこうとする、学習者の思考の多様性である。そして、この思考の多様性がさまざまなメッセージ解釈を契機としてもたらされるということが、数学学習におけるコミュニケーション連鎖の内化過程に見られる学習の起源の多様性なのである。

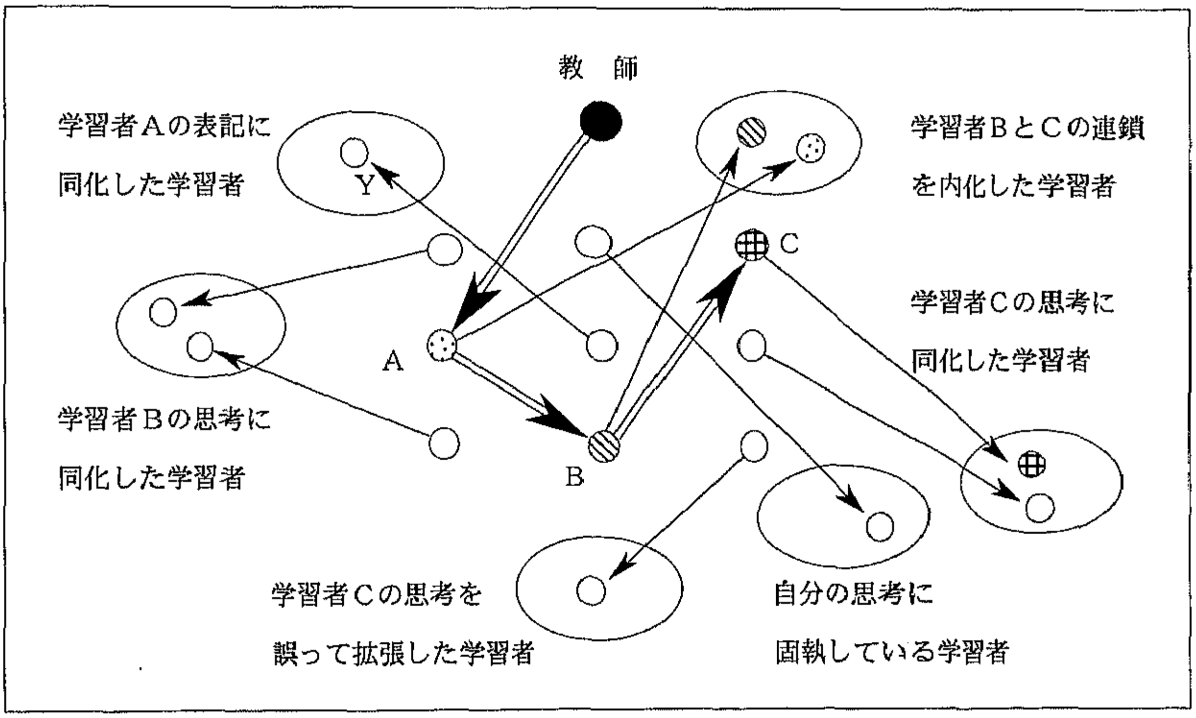


図6-36：学習の起源の多様性

（注：二重矢線は発言の順序を、楕円はサークルを示している。）

ここで私たちは、上述した「数学学習におけるコミュニケーション連鎖の内化過程が多様な学習の起源となる」という記述が、すべての学習者の数学学習を同じレベルで深化させることを含意しているわけではない、ということを再度確認する必要がある。

例えば、家を丸印で表すという児童Ａの表記法の提示は、児童Ｙにとって、電話線の問題では丸印と曲線の関係だけに注目すればよいという、位相という数学的な考え方を習得する学習の起源となっていた。しかし、初歩的な位相という概念の習得に関する意識の集中が、その後の展開から児童Ｙの関心を遠ざけ、結果として、児童Ｙの学習は、教師が意図する学習レベルにまで深化することはなかった。この事は、授業の中で派生する多様な学習の起源の１つが、児童Ｙに関しては、教師が意図した本来の学習の深化を疎外するものとして機能していることを示している。

また、他者から提示された表記法や思考を無視して、自分の思考に固執している学習者や、児童Ｃが示した三角形状の図で問題状況を表すという思考を誤った形で拡張した学習者などの存在は、多様な学習の起源が、必ずしも数学的に好ましい形で、個々の学習者の学習を深化させているわけではないことを示している。これらの事例が物語るように、コミュニケーション連鎖の内化過程において、特定のメッセージに対する選択的接触や選択的知覚、そして、それ以外のメッセージを意図的に忘れ去ってしまうという選択的忘却など、他者からもたらされた情報の選択と回避は、学習の起源を見出した学習者が、ある時点から再度、自分の思考世界に閉じこもってしまうことを示している[26)]。

他者との社会的相互作用は、学習者に多様な学習の起源をもたらしている。しかし、社会的構成主義者が主張するほど、学習者は学習の起源としての社会的相互作用に常に注意を払っているわけではなく、また、急進的な構成主義者が主張するように[27)]、学習者は閉ざされた個人の思考世界だけで学習を進めているわけでもない。学習者は、自分自身の気づきに応じて、他者の思考に耳を傾けるときもあれば、その気づきをもとに自分自身の思考世界に閉じこもることもある。それゆえ、数学学習におけるコミュニケーションが、より多くの学習者の数学学習を深化させるものとして機能するためには、コミュニケーションの社会的過程と個々人の認知過程とが、互いに開かれたシステムとして、有機的に結びつけられる必要がある。そこで第２項では、この２つのシステムを連結させるコミュニケーション連鎖の内化過程について、本研究の考察を整理しておくことにする。

[26)] 情報の選択と回避については、第４章第３節第２項を参照。

[27)] 急進的構成主義については、Von Glasersfeld(1990,1995) と 中原 (1995,pp.57-64) を参照。

第２項　学習の起源としてのコミュニケーション連鎖の内化過程

第１章で述べたように、社会的構成主義者にとって、個人の思考は、コミュニケーションとネゴシエーションという過程の中で、社会が合意したものに変容されるものであった。Voigt(1995) は、教室におけるネゴシエーションによって、個々の学習者が自分の考え方を他者の考え方に合わせていく様子を描き出し、このプロセスを教室という集団が生み出してきた社会規範の機能として捉えていた。一方、Cobb(1995a,1995b) は、小グループ活動を学習の機会を与えるものとは見ていても、学習の起源としては見ておらず、学習の起源はあくまでも個人の中にあると考えていた。しかし、概念発達の起源を個人の中に求めるならば、社会的相互作用の機能が何なのかが再度問われる必要がある。Cobb の研究により、ある種の社会的相互作用が数学学習にとって生産的であることがわかったとしても、なぜ、そうした社会的相互作用が生産的に機能するのかというメカニズムが明らかにされているわけではない。その意味で、Waschescio(1998) は、Voigt や Cobb の研究では、個人の意味のレベルと学級で構成された意味のレベルとが互いに閉じたシステムになっている、と批判している。

Waschescio が批判するように、他者とのコミュニケーションが新しい数学的概念の学習には不可欠だと主張してきた研究者たちも、個人の思考レベルとコミュニケーション・プロセスとを融合させる理論的枠組みを構築することはできていない。そして、こうした事態を批判する Waschescio(1998,p.226) は、意味をネゴシエーションするという観察可能な事象が、個々の学習者に数学的概念の再構成をもたらすのは、個々の学習者が学級という社会が収束させた意味を自分の中に取り込むかどうかであると指摘しているが、この指摘には、コミュニケーションの進行によって、学級という社会がどのように数学的意味を形成していくのかということを見守った後でないと、個人の学習が成立しないことを認めているという点で、Waschescio が Cobb らを批判する問題点そのものが内在することになる。

社会的構成主義という考え方の背景には、数学学習の場では、数学も多くの人々の社会的合意によって作り出されてきたものであることを疑似的に体験させる必要がある、という教育観がある。しかし、数学学習の場で展開されるコミュニケーションでは、必ずしもすべての学習者に発言の機会が保障されているわけではない。このような場で数学的意味の社会的構成が行われるとき、その過程に直接参画している学習者と、他者の意見を聞いている間接的な参画者では、コミュニケーションの持つ意味が異なっているということに、私たちは注意を払う必要がある。なぜならば、数学的意味の社会的構成に直接関与できな

い多くの学習者にとって、その過程はまさに閉ざされた世界となるからである。間接的な参画を余儀なくされる学習者にとって、教師と一部の学習者によって構成された数学的意味は、受け入れなければならないものであり、個人がそれを自らの判断で調節することはできない対象となる。それゆえ、間接的に参画している学習者は、社会的な過程を経て創出された数学的意味に同化する一方で、その同化に伴って派生する問題を自分が所有していた既存知識を棄却したり変容することで、調節していかなければならない。

先行研究が描き出してきた社会規範とは、社会が構成した数学的意味に同化することが、社会の構成員となるためには必要であるということである。間接的な参画者は、社会が構成した数学的意味に同化し、共有された考え方と表記法を使用することで、社会の一員として迎え入れられる。社会が構成した思考と表記法に従うことで、間接参画者にも社会参加の機会が開かれる。しかし、すべての学習者がこうした社会規範を受け入れたとしても、数学的意味の構成に直接的な関与を果たせない学習者にとって、同化しなければならない数学的意味が形成されるまでの間は、まさに閉ざされたシステムとしての社会的な過程が存在することになる。コミュニケーションに参画している教師と一部の学習者たちが、こうした間接的な参画者の思考の調節過程を考慮しないままに、いわゆる数学的意味の社会的構成というプロセスを遂行していくならば、間接的な参画者の認知過程は閉じたシステムとなる。数学学習におけるコミュニケーション過程を数学的意味の社会的構成過程であると捉える立場では、社会的意味の構成過程と個人の意味の調節過程とを互いに開かれたシステムとして有機的に結びつけることは困難なのである。

数学的意味の社会的構成という立場では、社会的に構成された数学的意味は、コミュニケーションに直接的に参画しない学習者に対しても、外部からもたらされた学習の起源として受け入れなければならない学習の対象であると考えている。そして、もし、受け入れることが困難ならば、学習者は、数学的意味の社会的構成過程に直接参画し、自分の考え方に合う数学的意味が構成されるように、他者を説得する必要があり、学級が形成する社会規範は、どのような考え方や疑問でも受け入れることを約束していると、社会的構成主義者たちは考えている。自己開示による社会参加と、開示された個人の意味を社会が考察の対象として受け入れることにより、個人の意味と他者の意味とは互いに調節され、そうした調節が学習の起源になるというのが、社会的構成主義者の考え方である。

このように社会的に構成された数学的意味に対して同化するのか、あるいは、自己を開示したうえで、他者変容を働きかけるのかという社会参加型のモデルは、いずれにしても、

コミュニケーション過程を数学的意味を構成する手段と捉えている。先行研究の中で示されてきたこうしたモデルでは、数学学習におけるコミュニケーションは、複数の意味が比較検討され、その結果として、多者に承認された数学的意味が構成される過程である、と考えられることになる。しかし、こうした考え方は、数学的意味の構成過程を観察可能な事象として扱い、直接参画者に対して開かれている社会的過程が、自分の考え方が反映されることのない間接参画者からは、閉ざされた世界として認識されているということを、仕方のないことだと容認する態度をもたらすことになる。その結果、数学的意味の社会的構成を重視する考え方の下では、数学学習におけるコミュニケーションは、そこに直接的に参画できない多くの学習者に対して、十分な学習の機会を保障するものとは成り得ない。

また、仮にすべての学習者が直接的な参画者に成り得たとしても、一言ずつの発言の機会がそれだけで十分な学習を保障しているとも考えがたい。数学も社会的な合意を経て創り出されるものであるということを学習者に体験させることだけが、コミュニケーションの機能ではない。コミュニケーションに直接的に参画するか、しないかという視点ではなく、数学的意味の社会的構成過程と見なされるコミュニケーションを，一人ひとりの学習者が、いかに既存知識と新しい知識との再構成のプロセスとして内化しているのかという視点で、コミュニケーションに関する問題を議論することこそが重要である。

先行研究の範囲内では、コミュニケーションは情報伝達として捉えられていた。それゆえ、学習者の発言は記述可能な固定化された事象として考えられ、数学学習におけるコミュニケーション活動に直接参画しない限り、複数の発言の累積というコミュニケーション事象は、他者によって形成されたものになってしまうという認識を容認せざるを得なかった。こうしたコミュニケーション観に対して、本研究では、コミュニケーション連鎖という社会的な過程は、記述可能な発言の累積という固定化された現象ではなく、その社会的過程の豊かさは、それをどのようなコミュニケーション連鎖と見るかという判断が、個人に委ねられていることにより派生すると考えてきた。一面的に捉えられてきたコミュニケーション事象を解釈し、自分自身にとって意味のある局面をコミュニケーション連鎖と捉えることにより、間接参画者にとっても、数学的意味の社会的構成過程は開かれたものになる。

コミュニケーション連鎖という社会的過程は、各個人が解釈することにより顕在化される現象であり、その解釈は固定化されたものではなく、時間の経過とともに変容可能なものである。連続的な発話はそのままでは単なる物理的刺激物の累積にほかならないが、その物理的産物をコミュニケーション連鎖として捉えることは、コミュニケーション連鎖と

いう現象が、連鎖を解釈する人間の思考によって創り出されるという意味で、一人ひとりの認知過程に対して開かれていると言える。

そして、コミュニケーション連鎖の内化過程は、他者が送信したメッセージのどの部分を選択的に知覚するのかという認識によって変容する。個人の思考は、予知し得ない他者の刺激を受け入れる準備ができているという意味で、社会的な過程に対して開かれたシステムである。また、外部で展開されているコミュニケーション現象を認識し、同化、拡張という認知過程を経ることで深化させた自分の思考を分化の相として他者に開き、再構成の必要性を認識し合うという意味で、個人の認知過程は他者に対して開かれる必要がある。

数学学習は、外部からもたらされた数学的概念を学習者が同化するだけの過程ではない。また、同化した概念を単純にたし合わせるだけで、数学的知識が構成されるわけではない。私たちは、情報として収集した多くの知識を構造化し、既存知識との整合性を保ちながら、古い知識が新しく構造化された知識の一部として存続していけるように、新旧の知識群を再構成することで、新たな思考世界を切り開いていくことができる。個々人が所有している意味の単純な比較によって、数学的意味が構成されるとき、最良の意味と評価されるアイデアを提示した学習者は、自分の思考の限界を超える学習を展開することがない。それゆえ、私たちは、コミュニケーションという活動をアイデアの比較検討の場として捉える、従来の考え方から脱却する必要がある。他者から学ぶということは、自分より優れている他者から学ぶというだけではない。他者が意図しないメッセージの中にも、自分の思考を広げる契機となるものがあると考えることにより、私たちは、ともに学ぶことの意義を明確に意識することができる。

他者が意図しないメッセージ解釈を契機に、閉ざされた個人の思考だけでは超えることのできない限界を切り開くという意味で、コミュニケーション連鎖の内化過程は、学習者自身の認知過程を数学的意味の社会的構成過程に対して開いていくことになる。コミュニケーションという事象は、さまざまなコミュニケーション連鎖という解釈を許容するし、個々の学習者自身が創り出したコミュニケーション連鎖という現象を内化することは、個人の思考世界をさらに押し広げることになる。どのようなメッセージが誰にとっての学習の起源になるのかという問いは、これまでの事例分析で示してきたように、多様な解答として開かれている。数学学習におけるコミュニケーション連鎖の内化過程は、一人ひとりの学習者に多様な学習の起源をもたらし、個々の学習者の数学学習をそれぞれのレベルで深化させることになるのである。

第６章のまとめ

第６章では、学習者個人の思考の連続性という視点から、数学学習におけるコミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程を同定し、その特性を解明するという第３の課題について考察した[28)]。

(1) 第３の課題に対する結論

数学学習におけるコミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程は、認識・同化・拡張・分化・再構成という５つの相からなる。メッセージは、まず、コミュニケーションの対象として知覚・認識され、その後は、自らの思考を調節するための反省的思考の対象となる。このメッセージの知覚に際して、選択的知覚がもたらす個々人の認識のずれが、拡張や分化という相をもたらす。分化された事例の提起に際し、複層二分法による概念理解は、私たちの知覚を意識的に変えることを要求する。この知覚変革への要求が、これまで所有していた知識の再構成をもたらすことになる。

(2) 数学教育への示唆

数学学習におけるコミュニケーションは、メッセージという物理的な刺激に反応するだけではなく、分離した複数のメンタル・スペースを意味のある新たな構造体として結束させる活動である。そして、数学学習において展開されるさまざまな発話の一つひとつを理解するだけではなく、複数の発話をコミュニケーションの連鎖として内化することが、数学の授業を理解することである。数学学習におけるコミュニケーション連鎖の内化とは、数学の授業の中で、教師や学友から具体的な操作を介して提示される断片的な数学的知識や経験を、新しいアイデアを創発する基盤となる知識体系に構造化する、学習者の認知的な活動である。

[28)] 第６章の考察は、江森（1998a,1998b,1999b,2000）に基づいて行われた。

第６章引用文献

秋山仁 (1987). 数学講義の実況中継（下）. 東京：語学春秋社.

Cazden, C. B. (1988). Classroom Discourse: The language of teaching and learning. Portsmouth: Heinemann Educational Books, inc..

Cobb, P. (1995a). Cultural tools and mathematical learning: A case study. Journal for Research in Mathematics Education, 26(4), 362-385.

Cobb, P. (1995b). Mathematical learning and small group interaction: Four case studies. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in classroom cultures (pp.25-129). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

デップマン, И(イー). Я(ヤー). (1965/1986). 藤川誠訳. 算数の文化史. 東京：現代工学社.

Dewey, J. (1933/1950). 植田清次訳. 思考の方法. 東京：春秋社.

Dieudonné, J. (1978/1989). 上野健爾・金子晃・浪川幸彦・森田康夫・山下純一訳. 数学史 1700-1900 Ⅰ. 東京：岩波書店.

江森英世 (1991a). 学校数学におけるコミュニケーションに関する一考察－数学的な話合い活動をめざしてー. 平成２年度筑波大学修士論文 (pp.1-102). 筑波大学大学院博士課程教育学研究科.

江森英世 (1991b). 図表現の「フィルター効果」に関する一考察. 筑波数学教育研究, 10, 13-23.

江森英世 (1994). 数学の学習場面におけるコミュニケーション連鎖のメカニズム. 筑波大学教育学系論集, 18(2), 57-71.

Emori, H. (1996). A case study of analyzing highly condensed mathematical messages. Journal of Science Education in Japan, 20(3), 180-193. 日本科学教育学会.

江森英世 (1997a). 数学コミュニケーション. In 日本数学教育学会編. 日本の算数・数学教育 1997 学校数学の授業構成を問い直す（yearbook 第３号, pp.33-47）. 東京：産業図書.

江森英世 (1998d). ピアジェはまだ生きている－「意味の論理学の構築」を読むー. 数学教育'98 12 月号, 105-108. 東京：明治図書.

江森英世 (1998a). 数学的コミュニケーションにおける同化と調節. 日本科学教育学会年会論文集, 22, 263-264. 東京：日本科学教育学会.

江森英世 (1998b). 数学のコミュニケーションにおける認識・同化・調節. 第31回数学教育論文発表会論文集, 229-234. 福岡：日本数学教育学会.

江森英世 (1999a). 超越的再帰モデルによる数学の問題解決過程の分析. 関東学院大学工学部研究報告, 42(2), 17-31. 関東学院大学工学部.

江森英世 (1999b). コミュニケーションにおける高位概念の形成と複層二分法. 第32回数学教育論文発表会論文集, 89-94. 横浜：日本数学教育学会.

江森英世 (2000). 数学的コミュニケーション参画者の認知過程. 数学教育学論究, 73・74, 27-56. 日本数学教育学会.

江森英世 (in press). 数学における視覚的表現：思考、コミュニケーション、学習. In 日本数学教育学会編, 日本の算数・数学教育 2001 (yearbook 第７号). 東京：産業図書.

Emori, H. & Nohda, N. (1993). Communication gap and filter effect in learning mathematics. Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 12B, 57-64.

Fauconnier, G. (1994). Mental Spaces: Aspects of meaning construction in natural language. New York: Cambridge University Press.

Fauconnier, G. (1994/1996). 坂原茂・水光雅則・田窪行則・三藤博訳. メンタル・スペース－自然言語理解の認知インターフェース－. 東京：白水社.

Flament, C. (1963/1972). 佐藤信夫訳. コミュニケーション過程. In P. Praisse & J. Piaget (Eds.), 佐藤信夫他訳, 現代心理学IX (pp.245-312). 東京：白水社.

Halliday, M. & Hassan, R. (1985/1991). 筧壽雄訳. 機能文法のすすめ. 東京：大修館書店.

橋本良明編著 (1997). コミュニケーション学への招待. 東京：大修館書店.

金子郁容 (1990). 〈不確実性と情報〉入門. 東京：岩波書店.

窪田忠彦編 (1950). 数学事典. 大阪：大阪書籍.

Mehan, H. (1979). Learning Lessons. Massachusetts: Harvard University Press.

三輪辰郎 (1990). 数学の問題解決の授業についての日米比較研究. 平成元年度・筑波大学・学内プロジェクト研究・助成研究研究成果報告書.

中原忠男 (1995). 算数・数学教育における構成的アプローチの研究. 東京：聖文社.

西尾和弘 (1969). 教養線形代数学. 東京：新評論.

Piaget, J. (1945/1988). 大伴茂訳. 表象の心理学. 東京：黎明書房.

Piaget, J. (1949). Essai de Logique Opératoire. Paris: Dunod. par deuxim édition (1972).

Piaget, J. (1964/1968). 滝沢武久訳. 思考の心理学. 東京：みすず書房.

Piaget, J. & Garcia, R. (1983/1996). 藤野邦夫・松原望訳. 精神発生と科学史. 東京：新評論.

Piaget, J. & Garcia, R. (1987). Vers une Logique des Significations. Genè v e: Murionde.

Piaget, J. & Garcia, R. (1987/1991). P. M. Davidson & J. Easley (Eds.), Toward A Logic of Meaning. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

Piaget, J. & Garcia, R. (1987/1998). 芳賀純・能田伸彦監訳, 原田耕平・岡野雅雄・江森英世訳. 意味の論理. 東京：サンワ出版.

Pierce, J. R. (1980/1988). 鎮目恭夫訳. 記号・シグナル・ノイズ. 東京：白揚社.

Pimm, D. (1987). Speaking Mathematically: Communication in mathematics classrooms. London: Routledge & Kegan Paul Ltd..

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1989b). A recursive theory for mathematical understanding. For the Learning of Mathematics, 9(3), 7-11.

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1991). Folding back; Dynamics in the growth of mathematical understanding. In F. Furinhetti (Ed.), Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3, 169-176. Assisi.

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1994a). Growth in mathematical understanding; How can we characterise it and how can we represent it?. Educational Studies in Mathematics, 26, 165-190.

Polya, G. (1953/1959). 柴垣和三雄訳. 帰納と類比. 東京：丸善.

Richards, J. (1996). Negotiating the negotiation of meaning: Comments on Voigt (1992) and Saxe and Bermudez (1992). In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Geer (Eds.), Theories of Mathematical Learning (pp.69-75). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

Rogers, C. R. (1964/1980). 人間の科学をめざして. In T. W. Wann (Ed.), 村山正治編訳, 行動主義と現象学 (pp.161-204). 東京：岩崎学術出版.

Scott, A. (1995/1997). 伊藤源石訳. 心の階梯. 東京：産業図書.

志賀浩二 (1995). 無限のなかの数学. 岩波新書 405. 東京：岩波書店.

Sinclair, J. McH. & Coulthard, M. (1975). Towards an Analysis of Discourse. London: Oxford University Press.

Skemp, R. R. (1971/1973). 藤永保・銀林浩訳. 数学学習の心理学. 東京：新曜社.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding.

Mathematics Teaching, 77, 20-26.
Skemp, R. R. (1979). Intelligence, Learning, and Action. Chichester: John Wiley & Sons.
Skemp, R. R. (1982a). Communicating mathematics: Surface structures and deep structures. Visible Language, 16(3), 281-188.
Skemp, R. R. (1987). The Psychology of Learning Mathematics, Expanded American edition. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.
Skemp, R. R. (1989). Mathematics in the Primary School. London: Routledge.
Sperber, D. & Wilson, D. (1986). Relevance: Communication and cognition. Massachusetts: Harvard University Press.
寺阪英孝編 (1977). 現代数学小事典. 東京：講談社.
Voigt, J. (1995). Thematic pattern of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in classroom cultures (pp.163-201). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.
Von Glasersfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: Why some like it radical. Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 4, 19-29.
Von Glasersfeld, E. (1995). Radical Constructivism: A way of knowing and learning. London: The Falmer Press.
Vygotsky, L. S. (1956/1962a). 柴田義松訳. 思考と言語　上. 東京：明治図書.
Waschescio, U. (1998). The missing link: Social and cultural aspects in social constructivist theories. In F. Seeger, J. Voigt, & U, Waschescio (Eds.), The Culture of the Mathematics Classroom (pp.221-241). Cambridge: Cambridge University Press.
Wertsch, J. V. (1998/2002). 行為としての心. 京都：北大路書房.
養老孟司 (1989). 唯脳論. 東京：青土社.