第２章

数学学習における

コミュニケーションの特性

－事例選択の視点－

第２章では、さまざまな発話行為が混在する数学学習におけるコミュニケーションの中から、どのような事例を考察の対象として選択し、その事象のどのような特性に着目するのかという事例選択の視点について考察する。

第１節　数学学習におけるコミュニケーション

数学の学習場面で派生するコミュニケーションには、直接的には数学的活動と結びつけることが困難な発話行為が混在している（cf. Good, Mulryan, & McCaslin, 1992）。それゆえ、どのような事例を選択し、考察を行うのかという問題は、研究の方法論として重要な問題となる。そこで第１節では、本研究における事例選択の視点について考察する。

第１項　先行研究における数学的コミュニケーションという概念の捉え方

全米数学教師協議会が「スタンダード」の中で掲げた数学的コミュニケーション能力の育成という教育目標は、数学的表現を駆使したコミュニケーション能力が、特定の専門家のみに必要とされる能力ではなく、社会生活を遂行するうえで、すべての人々にとって必要とされる能力であるという認識をもたらした。コミュニケーション手段としての数学という数学観の下で形成される数学的コミュニケーションという概念は、数学的表記法の使用によって情報伝達の厳密性と効率性が高まるという着眼点をもたらすことになる。また、情報伝達の厳密性と効率性という特性認識は、個人では解けない問題がコミュニケーションによって解決されるという意味での生産性という考え方と結びつき、数学的コミュニケーションは、厳密性、効率性、生産性という３つの特性で語られるようになる（cf. National Council of Teachers of Mathematics, 1989）。そして、社会的構成主義という認識論の台頭により、学級という社会の中で数学が創り出されるという考え方が強調されることにより、コミュニケーションの生産性という特性は、他者との対話を通して自ら新しい数学的概念を生み出すという視点から考えられるようになる（cf. Cobb & Bauersfeld (Eds.), 1995）。

全米数学教師協議会が1989年に発表した「スタンダード」を端緒とする数学的コミュニケーションの特性に関する議論は、これまでは、厳密性、効率性、生産性という視点から展開されている。この３つの特性は、数学の特性としても議論されてきたものであるが、これらの視点には、数学の特性として常に議論の中心になってきた自由性という項目が抜けている。古藤(1987, p.8)が言及するように、「数学的な思考の本質はその自由性、つまり、現実の制約に束縛されず自由に思考することが可能である点にある」ということを考慮するならば、私たちは、自由性という視点を数学的コミュニケーションという概念規定に加える必要がある。

しかし、数学的コミュニケーション能力の育成という教育目標の下で展開された多くの

研究では、非形式的なコミュニケーションは形式的なコミュニケーションへの移行形態であると捉えられ[1]、数学的なコードの使用を前提とする形式的なコミュニケーションをめざすという立場が強調されている。彼らが重視する数学的なコードの使用という条件が加えられることで、数学的コミュニケーションという概念に、自由性という特性が入る余地が閉ざされることになったのである。そして、数学的なコードの使用という条件が研究者の思考を制約していたということは、数学的表現を駆使し、かつ、相互に影響を及ぼし合うようなコミュニケーションは数学の学習場面ではほとんど観察されないという、Pirie & Schwarzenberger(1988,p.465) の授業観察報告によって明らかにされている。

こうした問題を是正するために、私たちは、自由性という視点を考慮に入れ、先行研究が排除してきた事象の中にも、見落とされてきた豊かな思考の交流場面があることを示す必要がある。何が数学的コミュニケーションなのかという問いは、分析する事例の選択に影響を及ぼす。数学的コミュニケーションという概念規定の不十分さは、数学の学習場面で展開されているコミュニケーションが内包する豊かさを見失う危険性をはらんでいる。そこで第２項では、厳密性、効率性、生産性という特性に、自由性という特性を加え、数学的という概念を捉える視点を構築し、数学学習におけるコミュニケーションの特性を分析するために必要となる基礎的な考察を行うことにする[2]。

第２項　数学的という概念を捉える視点

厳密性、効率性、生産性、ならびに、自由性という数学の特性は、古くから多くの学者たちが指摘してきたものである。例えば、哲学者が論証方法として数学を学んできたのは、数学の厳密性に対する絶対的な信頼からであった（cf. Benacerraf,1973. Kline,1980/1984a, 1980/1984b,1985/1987）。こうした厳密性に関する議論に対し、Polya(1953/1959,p.4) は「数学者の創造的仕事の結果は、論証的推論であり、証明である。しかしその証明は、蓋然的推論によって、推測によって発見されるのです。もしも数学の学習が、なんらかの数学の発明を反映するものならば、それは推測に対し、蓋然的推論に対し余地をもたねばなり

---

[1] 「幼い子どもは言語コミュニケーションを通して言語を学ぶ。それゆえ、彼らに数学を語る機会を用意することが大切である (National Council of Teachers of Mathematics,1989,p.26)」という記述は、数学の学習を促進する方法としてコミュニケーションを位置づけ、数学的な表現を駆使したコミュニケーションを遂行する能力はコミュニケーションに参画することを通して徐々に学んでいけばよいという、全米数学教師協議会の立場を表している。

[2] 第２項では、「数学的な考え方」に関する先行研究を参考にしながら考察を進める（cf. Becker, 1959/1988. Davis & Hersh,1982/1986. 中島,1982. 片桐,1988)。

ません」と述べ、蓋然性を含む自由な思考を許容することが数学教育において必要だと述べた。また、古藤(1986,p.1)は、集合論の創始者として知られるCantorが、数学の本性はその自由性にあると述べていたことなどを引用しながら、「数学の本質的な考えの一つは、その『自由性』にあるといえる」と述べている。現実の制約に束縛されず自由に思考することが可能であるという数学の特性は、数学を学習することにより考えることを学ぶという教育効果をもたらしている。そして、こうした自由性は思考の道具としての表現方法にも見られる。Putnam(1967/1995,p.277)が言及しているように、「数学には、ある意味で同じ事実（その命題が真なら）と言ってよいようなことがらを表現しているが、見せかけ上は同じ対象について語っているようには見えない表現方法が驚くほど多い」のである。

Benacerrafや Polyaが言及しているように、数学の厳密性と自由性は数学の発展に欠くことのできない特性であった。そして、数学の厳密性と自由性は厳密な思考によって結論の妥当性が常に保証され、再度の検証を必要としないという思考の効率性と、自由な思考が新しい数学的発見をもたらすという生産性に、深く関わりを持つ数学の特性として注目されてきた。こうした生産性に関する議論は、Hoyles(1985,p.207)が提起した「創造的相互作用」という数学学習におけるコミュニケーションの特性把握や、Cobb & Bauersfeld (Eds.)(1995)らが示した「数学的意味の創発」という概念提起に見出すことができる。

また、Balacheff(1997,pp.52-53)は、数学の特性は厳密性と経済性にあると述べ、効率性や生産性という用語に替えて、経済性という用語を使用している。Balacheffが述べる経済性という数学の特性は、証明という文脈の下で他者を説得する方法の効率性について論述したものであるが、証明というプロセスが新たな数学的知識を生産する過程であることを勘案すると、効率性という概念は生産性という概念とともに議論される必要があると考えることもできる。そこで本研究では、効率性と生産性という概念を経済性という概念に統合して議論する。なぜならば、最小労力の経済性、すなわち、コミュニケーションの効率性は、思考の負担を軽減させるという利点ばかりではなく、軽減された思考で余った力を複雑な問題解決のための思考に集中させるという意味で、生産性という特性も同時に含んでいるからである（cf.江森,1996)。

第3項　事例選択の視点

前項で述べた自由性という特性を採り入れることは、これまで多くの研究者が拠り所としてきた事例選択の基準の放棄を意味している。従来の研究者は、数学的表現を駆使した

コミュニケーションを数学的コミュニケーションと呼び、この基準に従って事例を選択し、分析するという方法を用いてきた。数学的表現の使用の有無という条件を加えた定義は、自由性という特性を犠牲にしたという点で、対象のもつ豊かさを損なうことになったが、研究者がどのような観点から分析対象となるコミュニケーションを選択するのかという基準を示すことは、研究の基本的な方法論に関わる問題として必要不可欠な議論であった。

そこで第３項では、先行研究による数学的コミュニケーションという概念規定が研究対象の持つ豊かさを損ねたという問題を改善するために、厳密性、経済性、自由性という３つの特性を考慮した新たな視点を提案する。この目的を達成するために、本項では、まず、数学は対象の構造を研究する学問であるという数学観について述べる。

Devlin(1994/1995,p.10) は、「『数学はパターンの科学である』という数学の定義が出現したのは、ここ 20 年ほどのことにすぎない。数学者たちが行っているのは、数のパターン、形のパターン、運動のパターン、行動のパターンなどといった『抽象的なパターン』の研究なのだ」と述べている。本研究では、この Devlin の論説をもとに、数学は具体的な諸事象をパターンという抽象的な概念に収束させる学問だと考える。そして、パターンという用語を数学教育で長年議論されてきた構造という用語に置き換え、数学は対象の構造を研究する学問であるという数学観を採用する。ここで、構造という用語を用いることには重要な意味がある。私たちは、上記の数学観を理解するために、まず第一に、構造は知覚するものであって、実在するものではないということを認識する必要がある。

建築というメタファーが用いられる構造という概念には、各構成要素間の関係が知覚可能であるという意味合いが含まれていた。こうした構造概念に対して、本研究で述べる構造という概念を把握するためには、要素間の関係性を認識するという認知的な行為が必要になると考えている。数学が構造という対象認識を研究する学問であるということは、数学的という用語が含意するものが認知活動の質、すなわち、思考の質で議論される必要があることを意味している。このことは、同時に、数学の学習場面で展開されるコミュニケーションには、音や光によって知覚された媒体物を通して、そこにある種の構造を見出すという認知活動を呼び起こすことによって達成される情報伝達があることを含意している。

例えば、「Σ log(tan5 θ°)　(但し θ=1 から 17)」という表記は、解答者が所持するΣ記号は総和を意味するという数学的知識と、θに１から１７までの数字を代入し、その和を求めるという操作によって、与式＝log(tan5°)＋log(tan10°)＋log(tan15°)＋・・・＋log(tan75°)＋log(tan80°)＋log(tan85°)（図 2-1）と書き出された、１７項の和という

初源的な構造認識を解答者にもたらすことになる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\theta=1}^{17} \log(\tan 5\theta^\circ) &= \log(\tan 5^\circ) + \log(\tan 10^\circ) + \log(\tan 15^\circ) + \log(\tan 20^\circ) \\
&+ \log(\tan 25^\circ) + \log(\tan 30^\circ) + \log(\tan 35^\circ) + \log(\tan 40^\circ) \\
&+ \log(\tan 45^\circ) + \log(\tan 50^\circ) + \log(\tan 55^\circ) + \log(\tan 60^\circ) \\
&+ \log(\tan 65^\circ) + \log(\tan 70^\circ) + \log(\tan 75^\circ) + \log(\tan 80^\circ) \\
&+ \log(\tan 85^\circ)
\end{aligned}
$$

図 2-1：初源的な認識に基づいて顕在化された問題の構造

そして、異なる１７項の和という構造認識（「a+b+c+・・・+o+p+q」）は、「$\tan\theta=\sin\theta/\cos\theta$」という知識と「$\log(M/N)=\log M-\log N$」という知識の活用によって、「$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)+(c_1-c_2)+\cdots+(o_1-o_2)+(p_1-p_2)+(q_1-q_2)$（図 2-2)」という構造認識に変容する。そしてさらに、$(\alpha_1-\alpha_2)$という２つの項の差が１７組あるというこの構造認識は、余角公式「$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$（但し、$0^\circ<\theta<90^\circ$）」を用いた問題の再構造化によって、「$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)+(c_1-c_2)+\cdots+(c_2-c_1)+(b_2-b_1)+(a_2-a_1)$（図 2-3)」という構造の認識に深化する。

$$
\begin{aligned}
\sum_{\theta=1}^{17} \log(\tan 5\theta^\circ) &= \{\log(\sin 5^\circ) - \log(\cos 5^\circ)\} + \{\log(\sin 10^\circ) - \log(\cos 10^\circ)\} \\
&+ \{\log(\sin 15^\circ) - \log(\cos 15^\circ)\} + \{\log(\sin 20^\circ) - \log(\cos 20^\circ)\} \\
&+ \{\log(\sin 25^\circ) - \log(\cos 25^\circ)\} + \{\log(\sin 30^\circ) - \log(\cos 30^\circ)\} \\
&+ \{\log(\sin 35^\circ) - \log(\cos 35^\circ)\} + \{\log(\sin 40^\circ) - \log(\cos 40^\circ)\} \\
&+ \{\log(\sin 45^\circ) - \log(\cos 45^\circ)\} \\
&+ \{\log(\sin 50^\circ) - \log(\cos 50^\circ)\} + \{\log(\sin 55^\circ) - \log(\cos 55^\circ)\} \\
&+ \{\log(\sin 60^\circ) - \log(\cos 60^\circ)\} + \{\log(\sin 65^\circ) - \log(\cos 65^\circ)\} \\
&+ \{\log(\sin 70^\circ) - \log(\cos 70^\circ)\} + \{\log(\sin 75^\circ) - \log(\cos 75^\circ)\} \\
&+ \{\log(\sin 80^\circ) - \log(\cos 80^\circ)\} + \{\log(\sin 85^\circ) - \log(\cos 85^\circ)\}
\end{aligned}
$$

図 2-2：２つの公式を導入することにより顕在化された問題の構造

$$
\begin{aligned}
\sum_{\theta=1}^{17}\log(\tan 5\theta^\circ) = {} & \{\log(\sin5^\circ)-\log(\cos5^\circ)\} + \{\log(\sin10^\circ)-\log(\cos10^\circ)\} \\
& + \{\log(\sin15^\circ)-\log(\cos15^\circ)\} + \{\log(\sin20^\circ)-\log(\cos20^\circ)\} \\
& + \{\log(\sin25^\circ)-\log(\cos25^\circ)\} + \{\log(\sin30^\circ)-\log(\cos30^\circ)\} \\
& + \{\log(\sin35^\circ)-\log(\cos35^\circ)\} + \{\log(\sin40^\circ)-\log(\cos40^\circ)\} \\
& + \{\log(\sin45^\circ)-\log(\cos45^\circ)\} \\
& + \{\log(\cos40^\circ)-\log(\sin40^\circ)\} + \{\log(\cos35^\circ)-\log(\sin35^\circ)\} \\
& + \{\log(\cos30^\circ)-\log(\sin30^\circ)\} + \{\log(\cos25^\circ)-\log(\sin25^\circ)\} \\
& + \{\log(\cos20^\circ)-\log(\sin20^\circ)\} + \{\log(\cos15^\circ)-\log(\sin15^\circ)\} \\
& + \{\log(\cos10^\circ)-\log(\sin10^\circ)\} + \{\log(\cos5^\circ)-\log(\sin5^\circ)\}
\end{aligned}
$$

図 2-3：余角の公式を導入することにより顕在化された問題の構造

ここで、同形項の差の和「$\{a_1-a_1\}+\{a_2-a_2\}+\{b_1-b_1\}+\{b_2-b_2\}+\cdots$(図 2-4)」という構造を見出し、9 項目の $\log(\sin45^\circ)-\log(\cos45^\circ)$ が残ることに気づけば、与式＝ $\{\log(\sin5^\circ)-\log(\sin5^\circ)\}+\{\log(\cos5^\circ)-\log(\cos5^\circ)\}+\{\log(\sin10^\circ)-\log(\sin10^\circ)\}+\{\log(\cos10^\circ)-\log(\cos10^\circ)\}+\cdots+\{\log(\sin40^\circ)-\log(\sin40^\circ)\}+\{\log(\cos40^\circ)-\log(\cos40^\circ)\}+\{\log(\sin45^\circ)-\log(\cos45^\circ)\}$ と式変形が可能になり、解答者は「$0+0+0+0+\cdots+0+0+\{\log(\sin45^\circ)-\log(\cos45^\circ)\}$ (図 2-5)」という構造を認識する。そして、最終項 $\log(\sin45^\circ)-\log(\cos45^\circ)$ が「$\sin45^\circ=\cos45^\circ$」という知識の活用によって 0 だとわかれば、この問題は与式＝0 と解答される。

$$
\begin{aligned}
\text{与　式} = {} & \{\overset{a_1}{\underline{\log(\sin5^\circ)}}\ \overset{-a_2}{\underline{-\log(\cos5^\circ)}}\} + \{\overset{b_1}{\log(\sin10^\circ)}\ \overset{-b_2}{-\log(\cos10^\circ)}\} + \cdots \\
& + \{\underset{b_2}{\log(\cos10^\circ)}\ \underset{-b_1}{-\log(\sin10^\circ)}\} + \{\underset{a_2}{\underline{\log(\cos5^\circ)}}\ \underset{-a_1}{\underline{-\log(\sin5^\circ)}}\}
\end{aligned}
$$

図 2-4：余角の公式を導入することにより顕在化された問題の構造

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \{\log(\sin 5^\circ)-\log(\sin 5^\circ)\} + \{\log(\cos 5^\circ)-\log(\cos 5^\circ)\} \\
&\quad + \{\log(\sin 10^\circ)-\log(\sin 10^\circ)\} + \{\log(\cos 10^\circ)-\log(\cos 10^\circ)\} \\
&\quad + \{\log(\sin 15^\circ)-\log(\sin 15^\circ)\} + \{\log(\cos 15^\circ)-\log(\cos 15^\circ)\} \\
&\quad + \{\log(\sin 20^\circ)-\log(\sin 20^\circ)\} + \{\log(\cos 20^\circ)-\log(\cos 20^\circ)\} \\
&\quad + \{\log(\sin 25^\circ)-\log(\sin 25^\circ)\} + \{\log(\cos 25^\circ)-\log(\cos 25^\circ)\} \\
&\quad + \{\log(\sin 30^\circ)-\log(\sin 30^\circ)\} + \{\log(\cos 30^\circ)-\log(\cos 30^\circ)\} \\
&\quad + \{\log(\sin 35^\circ)-\log(\sin 35^\circ)\} + \{\log(\cos 35^\circ)-\log(\cos 35^\circ)\} \\
&\quad + \{\log(\sin 40^\circ)-\log(\sin 40^\circ)\} + \{\log(\cos 40^\circ)-\log(\cos 40^\circ)\} \\
&\quad + \{\log(\sin 45^\circ)-\log(\cos 45^\circ)\} \\
&= 0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0 \\
&\quad + \{\log(\sin 45^\circ)-\log(\cos 45^\circ)\}
\end{aligned}
$$

図2-5：最終的に到達した問題の構造

この事例の分析で示したように、知覚可能なΣやlogという記号の位置関係が即座に構造を与えるのではなく、情報を解読する人間の思考活動により構造化されるのが数学である[3]。それゆえ、感覚器官を通して知覚された情報だけが他者に伝達されるのではなく、知覚された情報を認識し解読することによって、より豊かな情報の交換が行われている事象を考察の対象として捉えていく必要がある。

従来の研究者は、数学的コミュニケーションという概念を実体概念[4]として捉えようと試みてきた（cf. Cockcroft,1982. Pimm,1987. National Council of Teachers of Mathematics, 1989)。それゆえ、彼らは、どのようなコミュニケーションをその範疇に含めるのかという基準の構築に専念してきた。しかし、本研究では、厳密性、経済性、自由性という３つの視点に基づき、豊かな思考の交流を含んだ事例を選択するという考え方を示すことによって、数学的という概念は他の事例との比較によって規定されるものであるという立場を採ることにする。実体概念として規定された数学的コミュニケーションは、そこに参画する

[3] 情報を解読する人間の思考活動に依存するということは、「$\tan\theta=\sin\theta/\cos\theta$」という知識の代わりに、「$\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$　（但し、$0^\circ<\theta<90^\circ$）」と「$\cot\theta=1/\tan\theta$」という別の知識を活用すれば、図2-2以降の構造化が異なることを示している。

[4] 「実体概念」という用語は、Cassirer(1910/1979)に基づいて使用している。

学習者の発達段階に依存することなく、たとえそれが小学生の事例であっても、あるいは大学生の事例であっても、すべてが客観的な基準によって、数学的コミュニケーションとして認定されるのに対して、本研究で規定した事例選択の視点は、現象としての同一性にとらわれることなく、そのコミュニケーションに参画している学習者の思考の質を検討し、数学的と呼び得るか否かを判断するという立場である。

数学的コミュニケーションとは何かという問いは、単独ではほとんど意味を持たない。本研究では、数学の学習場面で展開されているさまざまなコミュニケーション事象の中から、厳密性、経済性、自由性という数学の特性が、参画者の思考として抽出される事象を考察の対象としていくことにする。自然科学の研究が数々の実験を繰り返しながら考察を進めていくように、参画者の思考の質を前提とする事例の選択方法は、研究者が選択的に接触する事例の分析と、そうして行われたいくつかの事例の分析結果との比較検討を経て、考察の対象が選択されるというものである。

また、本研究で考察の対象とする事例では、先に示した事例のように、対象の数量形に関する構造（論理構造も含む）の交換が行われていると考える。ここで構造の交換ということに注意するのは、構造という概念があるからこそ、私たちの情報交換は効率的に行われるのであり、構造化された情報の交換が新たなアイデアを生み出す生産性をもたらすことになると考えるからである（cf. 江森,1998c）。Berlo(1960/1972)が言うように、メッセージは意味をもたない物理的刺激物に違いないが、「Σ log(tan5 θ°)（但しθ=1から17)」という表記が、図2-1に示した初源的な問題の構造や、図2-2から図2-5に示した構造の伝達を可能にするように、送り手は単純なメッセージに豊かな数学的構造を託すことも可能である。Σ記号を用いて与えられた表記が、図2-1から図2-5までに示した複数の層をなす構造の伝達を可能にしているということは、「Σ log(tan5 θ°)（但しθ=1から17)」という表記が高度に凝縮された数学的メッセージ（highly condensed mathematical message）であることを示している。そして、この「高度に」という用語には、順次、その構造の変形が可能である数学的メッセージの特質が含意されている。こうした事例は、私たちが行うコミュニケーションが単なる物理的刺激物の交換ではなく、目や耳などの感覚器官を通して行う刺激の交換以上の意思の交流が存在することを示している（cf. Emori,1996）。

第２節　数学学習におけるコミュニケーションの特性

第２節では、数学学習におけるコミュニケーションの特性について、思考への着目の必要性、ならびに、厳密性、経済性、自由性の視点から考察する。

第１項　思考への着目

先行研究の多くは、数学的コミュニケーションという用語に対して、数学固有の表現方法を駆使したコミュニケーションという定義を与えてきた。しかし、第１節で示した視点は、数学表記を多用したコミュニケーションが、必ずしも数学的であるわけではなく、日常言語を用いた対話の中にも、数学的であると評価する必要のあるコミュニケーションが存在していることを示唆する、新しいコミュニケーション観である（cf.江森,1995)。

例えば、「Ａ：この問題わかる。Ｂ：２だろう」という数学の学習場面で頻繁に観察される、最も基本的な対話（問題の提起と解答）について考えてみる[5)]。この対話を評価するとき、提示された問題が数学の問題で、かつ、その答えが２という数字で述べられているという点で、数学的コミュニケーションと規定することもできる。しかし、こうした視点で評価するのでは、あまりに実りのない議論を展開することになる。提示された問題がどのような問題であり、その問いに２と答えた問題解決者の思考について議論がなされない限り、上記の対話を数学的か否かと問う議論は意味をもたない。すなわち、１＋１という問題に関して行われた対話も、$(5^{1/3}-1)^{1/2}(5^{2/3}+5^{1/3}+1)^{1/2}$ という問題に関して行われた対話も、同様の評価を与えられるということになれば、私たちは、数学学習におけるコミュニケーションの議論をそこに参画する学習者の思考を無視した形で進めることになってしまう。もし、この２人の対話が1＋1という問題について行われたものであるならば、Ｂに負荷される思考はそれ程重くはないが、$(5^{1/3}-1)^{1/2}(5^{2/3}+5^{1/3}+1)^{1/2}$ という問題によって引き起こされた対話であるならば、出題者Ａの意図と解答者Ｂの思考が、瞬時の間にいかに交換されているのかを議論することは、重要な論点となると考えることにより、コミュニケーション研究は数学学習そのものにかかわることになる。

この事を理解するためには、２人の対話にＣという役で、自分自身が加わった状況を想定してみるとよい。一度この対話に自分自身を参画させてみれば、「Ａ：この問題わかる。Ｂ：２だろう」という対話の持つ意味合いが、１＋１という問題では、１＋１＝２という

5) 「この問題」という発話行為には、「１＋１＝」などの問題の提示行為が付随している。

知識の交換に過ぎないが、$(5^{1/3}-1)^{1/2}(5^{2/3}+5^{1/3}+1)^{1/2}$ という問題場面では、「Ｃ：２だって、どうして、こんな複雑な計算の答えがすぐに出るんだ」という、別の反応を引き起こすことによって意識化されるに違いない。そして、「どうして」という認知的不協和状態に対する認識が、複雑な数式の構造への着目をもたらし、このＡとＢの対話が自分自身に対して教育的な対話となる。$(a-1)^{1/2}(a^2+a+1)^{1/2}=(a^3-1)^{1/2}$ という構造に着目すれば、$(5-1)^{1/2}=4^{1/2}=2$ という暗算ができると考えられるとき、ＡとＢの対話は、もう１人の学習者に、$(a-1)(a^2+a+1)=(a^3-1)$ という展開公式に関する知識の新たな活用方法を学習させる。

$(5^{1/3}-1)^{1/2}(5^{2/3}+5^{1/3}+1)^{1/2}$ という問題では、５という具体的な数字が、上述の展開公式の想起を妨害している。具体的操作の可能性は、構造という数学の持つ抽象化・一般化という特性を隠蔽することがある。本研究では、数学学習におけるコミュニケーションを数学的な構造の交換と位置づけた。この考え方は、抽象的な見方としての構造の伝達の方が、具体的な操作の伝達よりも困難で、かつ、数学として価値が高いものであることを含意している。５という具体的な数字によって提示された計算問題は、$(a-1)(a^2+a+1)=(a^3-1)$ という構造の発見により、一段高い思考活動をもたらすことになる。

本研究では、「Ａ：この問題わかる。Ｂ：２だろう。Ｃ：あっ、そうか」という対話を、そこに隠されている思考を丹念に描き出すという手法を用いて評価していくことにする。$1+1$ という問題について交わされた対話を、数学の問題解決に関する対話であるという視点から数学的コミュニケーションだと評価するのではなく、また、$(5^{1/3}-1)^{1/2}(5^{2/3}+5^{1/3}+1)^{1/2}$ という問題に関する対話を、日常的な言葉しか使用されていないという視点から数学的コミュニケーションではないと評価するのでもなく、どのような思考が学習者の頭の中で展開されているかという評価視点を持つことこそが重要である。

第２項　数学学習におけるコミュニケーションの厳密性

数学の表記法が駆使されたコミュニケーションへ着目するだけではなく、思考にも着目する必要があるという本研究の主張が含意する意図を、さらにもう１つの事例を示すことによって考えてみる。次の事例を示すことによって、形式的にいかに数学的表記の使用が見られても、表記をめぐる思考の交流が数学の厳密性を損なうものであっては、私たちはそれを数学的コミュニケーションと呼んではいけないという点を確認しておくことにする。

例えば、「今年度の第１四半期の経済成長率は２％でした。これを年間の成長率に直すと

８%の成長率になります」というアナウンサーの発言は、経済成長を割合で表すという考え方と、%記号などの表記方法を駆使しているという意味で、これまで多くの研究者たちが数学的コミュニケーションのモデルとしてきたものである（cf. National Council of Teachers of Mathematics,1989)。しかし、この発言を数学的と感じ受けとめている人の多くは、通常この言葉の含意する計算過程を２×４＝８と認識している[6)]。もし、受け手が、このような認識のもとに、アナウンサーの発言を理解した場合、この送り手と受け手との間に成立したコミュニケーションは、数学的論理のもつ厳密性を裏切ることになる。通常、私たちの生活では、このように形式的には数学的表現を用いながら、その背景にある思考が数学として厳密でないものが多い。コミュニケーションの評価が、コミュニケーションに参画する学習者の思考に基づいて行われる必要がある、という意味がここにもある。

Heidegger(1950/1962,p.11) は、「(近代物理学が数学的なのは、) 単にある数学を使用しているから、ということだけではなくて、数学的ということは、人間が、存在するものを観察し交渉することにおいて、それをすでに予め知っている、ということを意味する」と言っている。Heidegger の言うように、$(5^{1/3}-1)^{1/2}(5^{2/3}+5^{1/3}+1)^{1/2}$ という問題は、数学を知っている人にとって、すでに２になる必然的情報がすべて織り込まれている表記であり、「今年度の第１四半期の経済成長率は２%でした。これを年間の成長率に直すと８%の成長率になります」というアナウンサーの発言には、$(1.02)^4=1.08243216$ より約８%の成長率であるという問題の構造が前提として含意されている。アナウンサーの送ったメッセージのように、単なる音声刺激が受け手に確実な情報をもたらすのは、「数学的なものを通じて、何ものかが、すでによく知られたものとして、予め構成されていることを意味するからなのである（黒崎,1997,p.236)」。私たちは、数学的な表記を用いて他者に情報を伝達する場合、その表記によって構成される構造化された意味を、送り手と受け手がともに共有できることを想定している。アナウンサーは、年率換算の方法を聞き手が既に知っていることを想定しているのであり、逆に、そうした数学的知識のない人が２×４＝８と誤解しても、おおむね問題ないと考えて、特別な解説を付さずに情報の発信を行っている[7)]。

[6)] 第１四半期の経済成長率が３%のとき、年率換算が 12.6%（$\neq 3\times4=12$%）になり、ずれが顕在化される（$(1+0.03)^4=1.12550881$）。年率換算については日本経済新聞 (1999) を参照。
[7)] $(1+0.02)^4 \geqq 1+4\times0.02$ より、約８%の増加という見積もりをすることのよさを認める態度も必要である。

第３項　数学学習におけるコミュニケーションの経済性

数学学習におけるコミュニケーションの特性分析として、論理的な推論における第３の例についても考えておく必要がある。例えば、A、B、Cの３人に帽子を被らせ、この順番に前から縦に１列に並ばせ、C、B、Aの順に後ろから、自分の帽子の色がわかるかと尋ねる場面を考える（野崎,1995,p.52[8]）。ここで自分の帽子を直接見ることは許されないと考えれば、３人はいずれも「わからない」と答えるだろう。そこで、「皆さんの被っている帽子は、赤か白です。そして、少なくとも１つは赤です」という情報を与えることにする。この条件が加えられても、CとBには自分の帽子の色を定めることはできないので、CとBは「C：わからない。B：わからない」と答える。しかし、この「わからない」という言語メッセージが、Aに「自分の帽子の色は赤だ」と推論させることを可能にしていると見るコミュニケーションの分析が、本研究で重視する視点である。

そこで、「わからない」と答えたときのCの思考を探ることにする。もし、AとBの帽子が2つとも白ならば、少なくとも１つは赤い帽子であるという条件より、Cは自分の帽子の色が赤だとわかったはずである。しかし、Cは「わからない」と答えた。それゆえ、Cの「わからない」という発言は、BとAに、２人とも白だということはないという情報を与えたと解釈できる。そして次に、この情報を受け取ったBの思考を探れば、Cのメッセージによって、(A，B) ＝ (白，赤)、(赤，白)、(赤，赤) という３通りに、その可能性が絞られた状況に対して、Bが「わからない」と答えたことは、Aの帽子の色が赤であることを伝えたことになる。なぜならば、上記の３つの場合を精査すればわかるように、Aが白ならばBは赤に決まってしまうし、その一方で、Aが赤の場合には、Bには白または赤の２通りの可能性が残されるからである。

このようにCとBの「わからない」というメッセージは、何もわからないという情報ゼロを伝達したのではなく、２人の推論過程を十分に伝達していたことになる。「わからない」という日常言語の伝達は、少なくとも１つは赤い帽子であるという情報によって設定された、(A，B，C) ＝ (白，白，赤)、(白，赤，白)、(白，赤，赤)、(赤，白，白)、(赤，白，赤)、(赤，赤，白)、(赤，赤，赤) という7通りの可能性から、(A，B) ＝ (白，赤)、(赤，白)、(赤，赤) という３通りに、そして、(A) ＝ (赤) という１通りにと、不確定性の低減をもたらす情報として機能していったと言える。

---

[8] この論理ゲームの原案は、1933年に「新しい形式の原子理論の発見」により、ノーベル物理学賞を受賞したPaul Adrien Maurice Dirac（イギリス）の作と言われている（cf. 上野,2000,p.203）。

この第３の事例が示すコミュニケーションの特性は、「わからない」という発言が含意する数学的推論の豊かさにある。上述したように、７通りの可能性から、３通り、１通りとその不確定性が低減されるという状況の説明には、多くの記述が必要であった。これだけ多くの情報を「わからない」という５文字の言葉が伝えていたということは、この場面で展開された情報伝達の経済性を示している。また、その一方で、「わからない」という発言の背後に、本論で推測したような数学的推論が本当にあったかどうかという点は不明のままである。本項では、「わからない」という言葉が、数学的推論の結果として、自分の帽子の色を確定できないという認識の下で発信された言葉であると、仮定した議論を行ってきたのである。

第４項　数学学習におけるコミュニケーションの自由性

コミュニケーションにおいて重要な要素となる発信者の意図を無視して、数学的推論や問題解決という視点のみから、私たちは３つのコミュニケーション場面を分析してきた。そこで第４の例として、本研究では、送り手の概念理解という立場から数学学習におけるコミュニケーションの特性を考えていくことにする。

例えば、教育学部の数学教育専攻の学生に正八面体の説明をさせてみると、彼らは、「合同な８つの正三角形を面に持つ立体です」と言葉で説明することもできるし、平面上に立体の投影図を書いて説明することもできる。あるいは、正八面体の立体モデルを作ってきて、それを相手に持たせて観察させ、「これが正八面体です」と言うこともできる。数学用語を駆使し図表現などをうまく取り入れた学生たちのコミュニケーション行為は、これまでの研究において数学的と評価されてきたものである。

しかし、従来の研究者たちが数学的であると評価する情報伝達ができる学生たちに、「正八面体を横から（１つの頂点が中心に見えるように）見たとき、どのような形に見えるか(図2-6)」と問いかけると、数学教育専攻の学生の多くが「ひし形」と答える現象はどのように考えるべきなのだろうか。数学学習の場で慣れ親しんできた正八面体の投影図が作り出すイメージと、各辺の長さは等しいという知識に基づいて、学生たちは正八面体を横から眺めるとひし形に見えると考える。そしてさらに、こうした学生たちも、上から眺めるとどのように見えるかという問いに、「正方形」と答える。正四角錐が２つ合わさった形という正八面体に対するイメージが、学生たちにそのように答えさせている。上から見ると正方形、横から見るとひし形と答える学生たちは、どの面も正三角形でできているとい

う知識の含意する意味を理解してはいない。彼らは、正八面体の立体モデルを手のひらに乗せ、ごろごろと転がした感覚を忘れている。正八面体という概念の伝達を行っている送り手が、この立体が持つ対称性という特性を忘れ、繰り返されてきた方法の反復として概念伝達を試みている。それゆえ、私たちは、数学的と評価される表現を用いていても、数学的な思考の伴わない形式的な表現の模倣と反復による、こうしたコミュニケーションを数学的なコミュニケーションと評価するわけにはいかないのである。

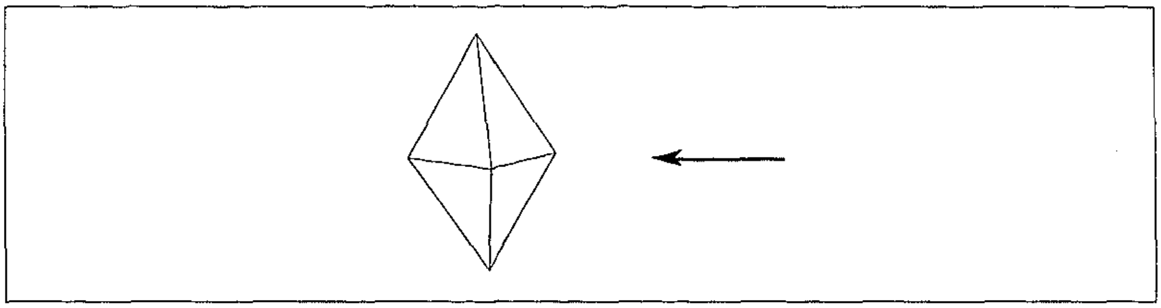

図2-6：正八面体を横から見るとどのように見えるか？

（注：図2-6は、学生が書いた図に、筆者が矢印を書き込んだものである[9]。）

情報伝達の方法の共有化や固定化は、効率的なコミュニケーションを可能にする。しかし、常に固定化された方法で情報の交換が行われると、用いられる数学的表現のよさに対する意識が低下し、言葉や図や具体物という物理的刺激物としてのメッセージに置き換えられることにより生ずるフィルター効果によって、伝達される情報がもつ豊かな特性の消失という現象が引き起こされる。つまり、効率的なコミュニケーションは、一方で、情報の劣化をもたらすことになると言える。

「正八面体とは合同な８つの正三角形の面をもつ立体である」という言葉の発信による情報の伝達は、厳密な情報の伝達を可能にし、実物を指し示す必要もないという意味で効率的である。だがしかし、こうした効率的な情報伝達は、２６文字の言葉が含意する数学的属性に対する考察がない限り、音声刺激としての模倣と反復は、私たちのコミュニケーションを非数学的なものにしてしまう。それゆえ、私たちは、この２６文字の記号が含意する情報を自由な思考に基づいて引き出す必要があると言える。私たちは、正八面体のも

[9] 学生が書いた図は、ひし形に見えるというノイズを含んでいる。正八面体はどの頂点から見ても、４つの頂点は正方形になっている。

つ数学的属性を顕在化させる表現、例えば、対称性という数学用語などを用いて、正八面体を再度説明し直す必要がある。他者とのコミュニケーションが、知識の再構成や高位概念の形成をもたらすという、コミュニケーションの生産性を向上させるためには、固定化された方法に束縛されずに、自由に考え、自由に表現することを大切にする必要がある。

数学学習におけるコミュニケーションという問題を考えるとき、私たちは、コミュニケーションが展開されている場面が数学学習の場であるということを常に考慮していなければならない。日常場面でのコミュニケーションとは異なり、数学学習におけるコミュニケーションは、本節で議論してきたように数学的である必要がある。そして、その意味は、従来の研究者が規定してきた発話の内容や表現方法が単に数学的であるということではなく、コミュニケーションに参画している学習者の思考が数学的であるということである。

第２節では、４つの事例を用いて、本研究で規定する「数学学習におけるコミュニケーション」という言葉が含意する意味を考えてきた。ここで本章の考察を要約すれば、本研究で用いる基本的な研究の方法論は、コミュニケーションに参画する学習者の思考から、数学の厳密性、経済性、自由性という特性のいずれかが抽出される事例を選択し、事例の分析と考察を通して、思考の交流の豊かさを顕在化させるという方法である、と言える。コミュニケーションに参画する学習者の思考に着目するという枠組みでは、いかなる思考も形式をも許容するという意味で、数学の自由性を尊重する必要があるし、また、互いが知り合えていることは言わないという経済性とともに、思考を節約することによってさらなる生産性と効率性が高まるという意味で、数学の経済性を尊重する必要がある、そしてさらには、論理的思考であるという数学の厳密性を堅持する必要があるのである。

第２章のまとめ

第２章では、事例選択の視点を示し、これらの視点から数学学習におけるコミュニケーションの特性について考察した。

(1) 事例選択の視点

本研究では、数学の厳密性と経済性と自由性という特性に注目し、これらの特性がコミュニケーション参画者の思考から抽出される事例を考察の対象とする。

(2) 事例の特性分析

数学的な表現を駆使したコミュニケーションでも、そのメッセージ解釈が数学的に厳密でない場合もある。その一方で、日常言語を用いたコミュニケーションにも、数学的な思考の交流がなされる場合もある。また、固定化された方法に基づくコミュニケーションは効率的ではあるが、情報の劣化をもたらすこともある。

第２章引用文献

Balacheff, N. (1997). 岸本忠之訳. Improving proof learning: A theoretical framework for the improvement of practice. 数学教育学論究, 67·68, 52-62. 日本数学教育学会.

Becker, O. (1959/1988). 中村清訳. 数学的思考. 東京：工作舎.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. Journal of Philosophy, 70(19), 661-679.

Berlo, D. K. (1960/1972). 布留武郎・阿久津善弘訳. コミュニケーション・プロセス. 東京：協同出版.

Cassirer, E. (1910/1979). 山本義隆訳. 実体概念と関数概念－認識批判の基本的諸問題の研究－. 東京：みすず書房.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

Cockcroft, W. H. (Chairman) (1982). Mathematics Counts. London: Her Majesty's Stationery Office.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1982/1986). 柴垣和三雄・清水邦夫・田中裕訳. 数学的経験. 東京：森北出版.

Devlin, K. (1994/1995). 山下純一訳. 数学：パターンの科学－宇宙・生命・心の秩序の探求. 東京：日経サイエンス社.

江森英世 (1995). 数学の学習場面におけるコミュニケーションをどのように評価すればよいのか. 第 28 回数学教育論文発表会論文集, 125-130. 広島：日本数学教育学会.

Emori, H. (1996). A case study of analyzing highly condensed mathematical messages. Journal of Science Education in Japan, 20(3), 180-193. 日本科学教育学会.

江森英世 (1996). 数学コミュニケーションの経済性原理と構造. 第 29 回数学教育論文発表会論文集, 415-420. 筑波：日本数学教育学会.

江森英世 (1998). 「数学的コミュニケーション」を数学的にしているものは何か？－数学的コミュニケーションの暫定的定義をめざして－. 第 31 回数学教育論文発表会テーマ別研究部会発表収録, 57-62. 福岡：日本数学教育学会.

Good, T., Mulryan, C., & McCaslin, M. (1992). Grouping for instruction in mathematics: A call for programmatic research on small-group processes. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.165-196). New York: Macmillan Publishing Company.

Heidegger, M. (1950/1962). 桑木務訳. 世界像の時代. 東京：理想社.

Hoyles, C. (1985). What is the point of group discussion in mathematics?. Educational Studies in Mathematics, 16, 205-214.

片桐重男 (1988). 数学的な考え方の具体化. 東京：明治図書.

Kline, M. (1980/1984a). 三村護・入江晴栄訳. 不確実性の数学（上）. 東京：紀伊國屋書店.

Kline, M. (1980/1984b). 三村護・入江晴栄訳. 不確実性の数学（下）. 東京：紀伊國屋書店.

Kline, M. (1985/1987). 雨宮一郎訳. 何のための数学か. 東京：紀伊國屋書店.

古藤怜 (1986). 学校数学における多様性とその指導. 数学教育研究, 1, 1-9. 上越教育大学.

古藤怜 (1987). 個性化・多様化のポイントー中学校・数学科ー. 指導と評価 11 月号, 8-11. 日本教科評価研究会.

黒崎政男 (1997). 決定論的カオスの思想. In 黒崎政男編, サイエンス・パラダイムの潮流 (pp.205-240). 東京：丸善.

中島健三 (1982). 算数・数学教育と数学的な考え方　第2版. 東京：金子書房.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, inc..

日本経済新聞 (1999). きょうのことば「年率換算」. 6 月 11 日刊 12 版, 第 40771 号, 3 頁.

野崎昭弘 (1995). まるさんかく論理学. 東京：増進会出版社.

Pimm, D. (1987). Speaking Mathematically: Communication in mathematics classrooms. London: Routledge & Kegan Paul Ltd..

Pirie, S. E. B. & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. Educational Studies in Mathematics, 19, 459-470.

Polya, G. (1953/1959). 柴垣和三雄訳. 帰納と類比. 東京：丸善.

Putnam, H. (1967/1995). 戸田山和久訳. 基礎づけのいらない数学. In 飯田隆編監訳, 数学の哲学ゲーデル以降 (pp.273-299). 東京：勁草書房.

上野富美夫 (2000). 数学パズル事典. 東京：東京堂出版.