

# 第 1 章

## 数学学習における

### コミュニケーションの基礎的な考察

#### －研究の課題－

第1章では、先行研究の成果として示唆される今日的課題を整理し、本研究で取り組む3つの下位課題を定式化する。

## 第1節 先行研究の成果

第1節では、先行研究の成果として示唆される今日的課題を整理する。

### 第1項 協同学習の研究

Johnson, Maruyama, Johnson, Nelson, & Skon(1981)が122の量的研究の成果を整理し、協同学習法は教師主導型の一斉授業よりも効果的であると結論づけたように、統計学的方法論を駆使して行われた協同学習に関する研究の多くは、協同学習の成果を肯定的に評価していた。そして、いかなるグループ構成法が最良の学習形態になるのかという問題に対して、Webb(1980,1982a,1982b)やSlavin(1987a)は、量的研究の成果を整理して、均質のグループ構成法は、学習達成度が中位の学習者に適しており、また、能力の異なる混成グループによる協同学習は、上位と下位の学習者の学習を促進するという結論を出している。

こうした量的研究の成果に対して、Wilkinson(1988,pp.212-213)は、能力が異なる学習者によって形成されている混成グループでは、学習達成度の高い学習者がグループの活動を支配しているという観察結果を報告し、学習達成度が下位の学習者は、いかなるグループ編成の中においても、より高位の学習者に比べて、いつも適切な教育を受ける機会が少ない傾向にあると指摘している。また、Mulryan(1989,pp.199-202)は、小グループによる協同学習では、高位の学習者は相互作用に関する示唆や方向性を与える機会が多く、また、低位の学習者は高位の学習者に比べより多くの質問をしていたと述べている。

そして、Good, Mulryan, & McCaslin(1992,p.169)は、これらの質的研究の成果を整理して、協同学習に参加していた学習者は、クラス全体で授業を受けていた学習者よりも、多くの時間を活動の移行やその他の非数学的な活動に費やし、学習の質もクラス全体で授業を行っている方がグループでの学習よりも高かったと述べ、教師の指導が効かないグループ学習は、いかなるレベルの学習者にとっても、達成される学習効果は低いものであったと指摘している。それゆえ、私たちは、量的研究によって支持されてきた協同学習の学習効果をもう一度見直し、「協同学習法は必ずしも学習者の数学学習を促進する万能薬ではない(Good, Mulryan, & McCaslin,1992,p.167)」という質的研究の結論を受け入れる必要がある。本研究では、協同学習という学習の場を設定するだけでは、すべての学習者に生産的な対話に参画する機会を保障することにはならないということを前提に、これからの議論を進めていくことにする。

## 第2項 協同学習に関する諸問題

質的研究の進展により、協同学習において発生する学習者間の心的軋轢などの問題が議論されるようになると、学習者が互いに質問し合ったり、あるいは、教え合ったりすることが、研究者や教師が予測する以上に困難な問題を引き起こすことが明らかになってくる。例えば、Slavin(1987b,pp.8-9)は、グループの目標だけで個人の責任がない場合、学習者は、他者との相互作用を時間の無駄使いだと考え、問題を抱えている仲間のために、自分の活動を休止して説明することを嫌うようになると述べている。そして、このような状況下で、学習内容をよく理解している学習者が、他の学習者のために援助するという行為を続けるならば、援助されるメンバーは、相互作用からますます遠ざけられることになると、Slavinは警告している (cf. Slavin,1989)。

この問題に対して、Van der Meij(1988,p.404)や Newman & Goldin(1990,pp.97-98)は、学習者は、愚かさを表したくないとか、グループのメンバーから否定的な制裁や不適切な援助を受けたくないという理由から、助けを求めるのを躊躇していると述べ、自分自身が役に立っているという認識が、高位の学習者の参加意欲を高める一方で、自分自身が役に立っていないという認識は、協同学習での失敗体験を持つ低位の学習者の参加意欲を喪失させていると指摘している。Good, Mulryan, & McCaslin(1992,pp.181-182)が総括しているように、低位の学習者が高位の学習者に質問し、高位の学習者が低位の学習者に教えるという構図は、援助する者と援助される者という役割の差異化をもたらし、常に援助される側にいる学習者は、その役割認識から積極的に情報を与えることを思いとどまらせることになるという認識が、研究者の間で共有されている (cf. Mulryan,1989)。

また、Hoyle(1985,p.209)は、「討論における意見の相違は、よりよい解決方法を生み出すという利点があるものの、両方の考え方を混合した解答をもたらしたり、ある時には、権威によってその反目が解決されることもある」として、意見の相違はその相違が価値あるものとして守られない限り、通常は認められる反目しないことはよいことだという社会的な規範や権威に従う態度が、数学学習における討論の価値を下げることになると指摘している。Hoyle(1985,p.209)は、「学習者は、一緒に学習すること、反論に耐えること、互いに挑戦し合い、不十分な議論の終わり方を避けることを援助されなければならない」と述べ、学習者同士による討論が学習者の断片的な知識の統合に役立てられるためには、討論で発生した論理的矛盾を大切にすることが必要であると指摘した。Hoyleの指摘は、数学学習として生産的な対話が行われるためには、生産的な対話の発生を支援する社会的な規範の

確立が必要不可欠である、という認識を研究者にもたらすことになる。Wilkinson(1988, pp.214-216)が指摘しているように、すべての学習者が協同学習から得るものがあるようにするためには、自然に起こるグループ内での相互作用を変える方略を教師が持つ必要があるという認識が芽生えてくるのである。

そして、この社会規範の確立という問題は、その後の研究において、日常生活で重んじられている、意見を対立させない方がよい、あるいは、他者の邪魔をしない方がよいという社会規範にかわって、十分に議論する方がよい、あるいは、一緒に学習する方がよいという教室のルールに、教師がいかに切り替えていくことができるのか、という問題として議論されている。Good, Mulryan, & McCaslin(1992,p.169)が指摘するように、互いのグループ活動において非数学的な活動を抑制するという自己管理の技術は、情報を得るために仲間や他の情報源をいつ、どのように使うのかということを知ることより、他の学習者の邪魔をしないで自分の勉強をするという意味で用いられることが多い。こうした状況に対して、数学教師はどのような社会規範を教室の中に形成していけばよいのか、という問題が再度問われることになるが、この問題に対して、研究者たちは、数学の授業において新しいアイデアが生み出される時に機能している社会規範は何か、また、そのアイデアが教室の中でどのように共有された知識として承認されていくのか、という問題を解決することで応えようとしている (cf. Bishop,1985. Good, Grouws, Mason, Slavings, & Cramer, 1990. Richards,1991. Cobb & Bauersfeld (Eds.),1995)。

例えば、Cobb & Bauersfeld (Eds.)(1995)は、数学学習におけるコミュニケーションが学習者にとって新しい数学的意味を生み出す過程を「数学的意味の創発 (emergence of mathematical meaning)」と呼び、問題解決に結びつくアイデアが、教室におけるコミュニケーションを通して抽象化され、1つの数学的概念として意味が付加される過程を分析している。数学的意味の創発とは、数学の問題解決過程において、個々の学習者が行っている個別の具体的な操作を寄せ集め、それらの操作が含意する共通事象を探ることによって、抽象的な概念としての数学的意味が、教室という社会の中で形成されていくプロセスを解明するために、Cobb や Bauersfeld らが考え出した研究方法論上の概念である。

### 第3項 数学理解とコミュニケーション

数学学習として生産的な対話はいかにすれば派生させることができるのかという問題が、社会規範の確立という問題として議論されてきた一方で、すべての学習者が協同学習から

得るものがあるようにするためには、すべての学習者に、必要な情報を集めたり、提供したりする技能を習得させる必要があるという指摘も行われている (Wilkinson,1988,pp.214-216)。学習者間に生じる心理的軋轢などの問題のほかに、数学的概念を伝達すること自体が学習途上の子どもたちにとっては困難な仕事である、ということが指摘されている。

数学を理解するとはどのような認知過程なのかという問題に取り組んできた Skemp (1989,p.50) は、「数学は、同じ年に、学習者が習う他のいかなる教科に比べ抽象的である。そして、このことがコミュニケーションの特別な難しさを導いている。その人自身の思考レベルにおいて、この難しさを体験することは教育的である」と述べている。数学理解に関する研究に取り組む中で、Skemp は、コミュニケーションの難しさを体験することが、用具的あるいは直観的理解を関係的理解へと深め、習慣学習を知的学習へと変える契機になると考え、コミュニケーションがもたらす学習効果へ注目するようになる。このコミュニケーションが知的学習をもたらすという考え方は、「新しい概念<sup>1)</sup>は直接伝達されることはできない。学習者は、自分自身で、自分自身の心の中に、新しい概念を築き上げなければならない。新しい概念の伝達とは、新しい概念の伝達が直接的には行われないことを認識したうえで、受け手が新しい概念を作り上げていくことを、間接的に手助けすることである (Skemp,1989,p.70)」という、Skemp の研究成果によって導き出されたものである。

Skemp(1989,p.70) は、「新しい概念が、学習者が現在持っている利用可能なシエマにおける概念と同じオーダーまたは低位のものであるならば、説明という方法が適している。また、新しい概念が、学習者の持っているシエマの中の概念より高位のものであれば、注意深く選ばれた例を与える<sup>2)</sup>という方法が使われるべきである」と述べ、数学的概念の伝達には、説明と例示という2つの方法があると考えている。Skemp は、この2つの概念伝達の方法を明らかにすることによって、直接的な概念伝達の可能性を否定している。

そして、Skemp は、直接的な概念の伝達という考え方を否定することによって問われる、なぜ送り手の意図した概念が間接的な方法によって受け手に想起されるのかという問いに答えるために、共鳴モデルという概念伝達モデルを提案している (Skemp,1979,pp.131-

---

<sup>1)</sup> 概念とは抽象するという行為によって生み出されたものであり、それは分類を可能にするように学習されたものである。そして、概念はクラスの特徴を定義するものである (Skemp,1987,p.11)。

<sup>2)</sup> 「平行」という概念に対して、等間隔に並べられた7本の線分の絵を例として提示することは、平行という概念に含まれていない7本の線分、等間隔などという属性を「平行」という概念に含まれる属性として伝達してしまう可能性を含んでいる。良く選ばれた例を与えるということは、伝えたくない属性を排除するように、時には複数の例を示すことも含まれている (Skemp,1989,p.65)。

141.1987,pp.118-119)。Skemp が提案した共鳴モデルとは、物理現象として知られる共鳴という現象が、人と人との認知プロセスにおいて生じるとき、送り手の意図が受け手に理解され、概念伝達としてのコミュニケーションが成立する、と考える認知モデルである。このモデルは、伝達を意図された概念の持つ構造と、それを表象した記号システムから構成され、Skemp は、この記号認知モデルに対応した形で、記号の表層構造と深層構造という概念を定式化している。Skemp(1982a,p.285)は、「伝達されるものは、記号その物であり、その記号が知覚的に私たちを刺激するのは、記号の表層構造にあたる。しかし、私たちの知覚を直接刺激する表層構造より深層構造の方が、メッセージの受け手の中に所持されている概念を引き出す強い刺激 (attractor) になっている」と述べ、「深層構造が、初期の段階で形成されていないならば、記号システムと概念構造の関係は、明確な意味を持ち得ず、その概念を理解しないままに記号操作だけが行われてしまう (Skemp,1982b,p.60)」と考えている。Skemp の数学理解とコミュニケーションの研究によって、新しい概念の伝達は間接的にしか行われず、伝達手段としての数学記号は必ずしも伝達しようとする意味をすべて表現しているわけではないという、新しいコミュニケーション観が研究者の間に浸透していくことになる。

Skemp の研究成果を踏まえて、Pirie & Schwarzenberger(1988,pp.465-468) は、学習者相互の働きかけが双方の学習者の数学学習にどのような効果をもたらすのか、という問題に取り組むために、Skemp(1976) が示した関係的理解と用具的理解という概念を用いて、学習者の発言を内省的発言と操作的発言に分類する方法を提案している。コミュニケーションをメッセージの送信とフィードバックという過程で捉え、その効果を社会的相互作用として捉えようとする彼らの試みは、メッセージの送信と受信という基本的なコミュニケーション・プロセスにおける、学習者の認知変容の問題という新たな問題を提起している。構成主義的認識論を受け入れ、意味は言葉の伝達とともに伝えられるという単純なコミュニケーション観を否定したとき、従来のような単なる数学的表現と意味との分析だけではなく、人と人が、メッセージの送信と受信を通して、どのような意味の構成過程をたどり、そのプロセスにおいて、どのような相互作用が働いているのかを解明する必要があるという問題が、Pirie と Schwarzenberger によって提起されたことになる。

こうした問題に対して、Pirie & Kieren(1989a,1989b,1991,1994a,1994b)は、コミュニケーションに参画している学習者の認知変容は、低位の理解レベルから高位の理解レベルに深化するものの、知識の再構成が必要な場面では、理解レベルは再帰的に、それよりも前の

相へと戻ることを実証している。彼らが示した認知変容の再帰性とは、学習者は、古い知識の想起というプロセスを経ることで、十分に熟知している理解レベルに戻りながら、個人の思考の連続性を維持し、新しい情報の処理を行っているということである。コミュニケーション過程の中で変動する学習者の認知変容は、必ずしも理解の深化として単線型の変化ではないが、行きつ戻りつする理解の深化過程は、個人の思考の連続性を保障していると考えることができる。また、Sigurdson & Olson(1992) は、数学的意味の学習が学習者の所有している知識や経験によって影響されることを示している。Pirie と Kieren や Sigurdson と Olson などの研究によって、意味作用の文脈依存性を重視する考え方が、数学教育学研究の中でも広く受け入れられるようになり、数学の意味理解と個人の認知変容に関する研究は、学習者の主観的な解釈を重視する研究へと発展していくことになる。

#### 第4項 数学的コミュニケーション能力の育成

Skemp らの研究成果を背景として、イギリス国内では、数学的概念の伝達に関する困難性を体験することが数学理解にとって重要である、という認識が芽生えてくるようになる。こうした数学的概念の伝達という考え方は、コミュニケーション手段としての数学という考え方を生み出すことになる。コッククロフト委員会で議論されるように、「私たちは、数学が有益であるという認識のすべてが、数学が力強く正確で明確なコミュニケーション手段を提供するという事実からきていると信じている。そして、私たちは、数学が強力なコミュニケーション手段として使われているという事実が、すべての学習者に数学を教える重要な理由になると信じている (Cockcroft,1982,p.1)」という考え方が、コミュニケーション手段として数学を学ぶという新たな教育目標論として議論されるようになる。

こうしてイギリスで示された数学的なコミュニケーション能力の育成という教育目標は、高度情報化社会の到来という時代背景のもと、1980年代後半より各国の数学教育関係者に急速に浸透していくことになる。こうした世界的な動向を決定づけたのは、1989年に全米数学教師協議会が発表した「学校数学に関するカリキュラムと評価の基準（以下、「スタンダード」と呼ぶ）(National Council of Teachers of Mathematics,1989)」という数学教育改革の指針である。全米数学教師協議会は、このスタンダードの中で、「他の学問分野における数学の使用は劇的に増加してきた。そして、こうした変化は、アイデアを正確に表現し、伝達することを可能にする数学の力がもたらしたものである (p.78)」として、数学的コミュニケーション能力の育成を1990年代のアメリカの数学教育の目標の1つとして掲げてい

る。全米数学教師協議会は、「①数学の価値を学ぶ、②自分の能力に自信が持てる、③数学的問題解決者になる、④数学的にコミュニケーションすることを学ぶ、⑤数学的に推論することを学ぶ (pp.5-6)」という教育目標を掲げ、問題解決、推論とともにコミュニケーション能力の育成をアメリカの数学教育の教育目標として初めて<sup>3)</sup>採用している。

ここで全米数学教師協議会が、問題解決や推論という数学的な活動とともに、コミュニケーションを重視する姿勢を採っていることは、イギリスで示された考え方と一線を画すものとして注目する必要がある。全米数学教師協議会は、「数学におけるコミュニケーションとは、アイデアとその関係を表現し理解するために、数学用語、数学的表記、そして数学の構造を使うことができることを意味している。この意味で、数学のコミュニケーションは、数学を知ることと数学をすることとを統合することである (p.214)」と述べ、数学学習に付随するすべての社会的過程を統合するものとして、コミュニケーションを位置づけている。コミュニケーションは数学を知ることと数学をすることとを統合することであるという認識は、数学表記の使用を促進させることは数学理解に役立つという、コッククロフト委員会の考え方と同一のものであるが、全米数学教師協議会が問題解決や推論などの数学的活動を統合する過程としてコミュニケーションを位置づけた点は特筆に値する。Lappan & Schram(1989,pp.14-15) が、「全米数学教師協議会が、スタンダードに込めた数学教育改革の指針として重要な指摘は、問題解決能力や推論能力の育成という、従来の教育目標を数学的コミュニケーション能力の育成という目標に置き換えることではなく、これまでうまく統合されてこなかった問題解決と推論と数学的な情報伝達をコミュニケーションという社会的な活動の中に統合することである」と述べているように、数学学習におけるコミュニケーションは、さまざまな数学的活動を統合する活動として位置づけられることになる。そして、こうしたコミュニケーション理解が、その後の研究に重要な影響を与えることになるのである (cf. Moynihan,1994)。

---

<sup>3)</sup> 前回提出された Basic Skills に関する報告書では、「表、図、グラフを読み、解釈し、作る (National Council of Supervisors of Mathematics,1977,p.20)」という項目が見られるが、コミュニケーションやそれに代わる概念は目標の中には加えられてはいない。基礎技能に関する諸提言は、米国教育連盟 (National Institute of Education) の基礎技能グループ主催のユークリッド会議 (1975, Euclid, Ohio) にまで、さかのぼることができる (National Institute of Education,1975)。



## 第5項 先行研究が示唆する課題

協同学習の研究では、コミュニケーションの成立を活動の連続性と学習者間の思考の連続性によって捉えてきた (cf. Good, Mulryan, & McCaslin, 1992)。また、数学理解とコミュニケーションの研究では、コミュニケーションの成立を学習者個人の思考の連続性として捉えるという考え方が示された (cf. Pirie & Kieren, 1994a)。そして、数学的諸活動を統合する活動としてコミュニケーションを捉えるという考え方によって、これまで個別に論じられてきた研究成果の統合という問題が提起されることになった (cf. Moynihan, 1994)。先行研究の成果をこのように体系化すると、先行研究が示唆する今日的課題は、問題解決、推論、情報伝達、あるいは、数学的知識を関連づけるという諸活動を統合する活動としてコミュニケーションを捉えるという考え方に基づき、活動の連続性、学習者間の思考の連続性、そして、学習者個人の思考の連続性という3つの視点を統合し、これまで個別に論じられてきた問題を再定式化することであると言える。

そしてさらに、主観的な解釈を重視する研究の成果を加味して課題を整理するならば、学習者Aから学習者B、そして、学習者Cへと続く継続的な発話行為は、これらの行為を解釈する学習者本人が、この事象をコミュニケーションの連鎖として認識することによって、これらの発話行為の連続性が3つの視点から統合されることを強調する必要がある。個々の学習者がコミュニケーションの連続性を認識することにより、コミュニケーションという事象は、それを解釈する学習者の数学学習に深くかかわるものとして意味を持ってくる。また、Skemp(1989) や Sigurdson & Olson(1992) によって示された、他者が発信したメッセージは直接の意味伝達をもたらさないという研究成果を考慮すれば、一つひとつの発言の意味を理解するというだけではなく、一連のコミュニケーション行為によってもたらされるものを自分の中で再構成するという問題が、コミュニケーションの連鎖という問題の中でも議論される必要がある。それゆえ、次節第3項で考察する Waschescio(1998, p.226) が「内化」と呼ぶこうした認知過程のメカニズムの解明が、先行研究が示唆する重要な課題の1つであると言える。

そこで本研究では、数学学習におけるコミュニケーション連鎖を、活動の連続性、学習者間の思考の連続性、学習者個人の思考の連続性という視点から考察するという方法を採用し、数学学習におけるコミュニケーションはいかに連鎖し、学習者は自分自身の思考の連続性を維持しながら、他者のメッセージ送信をコミュニケーションの連鎖として、どのように内化しているのか、という問題について考察していくことにする。

## 第2節 コミュニケーション連鎖に関する3つの課題

第2節では、数学学習におけるコミュニケーション連鎖の問題を、活動の連続性、学習者間の思考の連続性、学習者個人の思考の連続性という視点をもとに、本研究で考察する3つの下位課題として定式化する。

### 第1項 活動の連続性としてのコミュニケーション連鎖

Skempの研究は、私たちに、メッセージ解釈が個人の所有する知識や経験によって異なることを示してきた。いわゆるメッセージ解釈の主観性が、Skempの研究によって実証的に示されてきたのである (Skemp,1979,1982a,1982b,1987,1989)。しかし、筆者は、主観的な解釈によってもたらされる情報が、そのまま学習者の概念形成に寄与するとは考えない、ということも必要だと考えている。なぜならば、主観的な解釈によって形成される概念は、学習者にとって受け入れやすい形として歪曲される可能性が強く、既存知識の再構成をもたらすものとしてではなく、すでに形成されているスキーマ (心的構造物) に同化する形で付加されるにとどまると考えられるからである。つまり、他者との交流が学習者のスキーマの再構造化を強要することがない状態では、各学習者は、自分にとって都合のよい概念形成のみを優先させてしまうことになると考えられるという点に、私たちは注意する必要があると言える (cf. 原田,1991)。

自分なりの論理の整合性の中で構築した、自分に都合の良い概念形成の誤りを認めようとしない学習者たちは、数学の自由性を自己弁護の手段として用いている。彼らが主張するように、数学の特性の1つである自由性は、いかなる思考もいかなる形式も許容することで、数学を発展させてきた。それゆえ、学習者であろうとも、自らの思考を優先させて、従来の数学を別な形で発展させていくことが許されるはずである。このようにミスコンセプションと認定されている考え方が、いつの日か、正当な数学的概念として再評価される日が来るかもしれないという幻想は、19世紀にもたらされたいくつかの数学的発見によって、より現実的なものになりつつある。

例えば、千数百年もの間、人々に固く信じられてきたユークリッド幾何学だけが唯一の幾何学であるという信念は、非ユークリッド幾何学の誕生とともに打ち崩され、数学の基礎として君臨してきた幾何学が基礎学としての地位を失うことになったことは、一見すると誤っていると判断される発想も、新たな数学を生み出す原動力になることを歴史的に示

すことになった。また、19世紀の解析学の発展は、至るところ微分不可能な連続曲線<sup>4)</sup>という、私たちが依拠してきた幾何学的直感がまったく機能しない世界を生み出した。このように人間の知識の確実性を保証してきた幾何学の動揺は、数学の世界における絶対的真理とは何かという問題を再提起することになった (Davis & Hersh, 1982/1986, p.320)。

私たちは、Cantorが「数学は自由だ」と述べた意味において、個々の学習者が数学を主観的に解釈し、新たな数学的概念として発展させていくことを阻害することはできない。しかし、19世紀の数学界が経験した数学の基礎への懐疑という問題を、20世紀の数学者たちが長い数学の歴史を堅持しながら解決してきたように、私たちは、数学教育という場においては、数学を正しい形で継承していく道を選択する必要がある。学習者が独自に形成してしまうミスコンセプションの一つひとつを19世紀にもたらされた非ユークリッド幾何学のような数学的発見をもたらす概念として許容することはできない。私たちは、個々の学習者の主観的解釈を尊重するとともに、他者との相互作用による誤った概念形成の修正と、より豊かな形での既存知識の再構成がいかに達成されるのかという問題として、数学学習におけるコミュニケーションの問題を考える必要がある。

それゆえ、数学学習におけるコミュニケーションの問題として、私たちが取り組まなければならない第1の課題は、これまで素朴にその成立を前提としてきた、数学学習におけるコミュニケーションの成立メカニズムを考察することである、とすることができる。そして、このコミュニケーション・プロセスの基本的なメカニズムの解明は、一人ひとりの独語としての発話行為が継続するという立場からではなく、誤った概念形成の修正と既存知識の再構成を相互に行う活動が継続するという立場から、メッセージの送信とそのフィードバックという活動の連続性という枠組みの中で考察される必要がある。ある学習者の発言に対するフィードバックが、その学習者にどのように解釈され、その学習者自身の認知変容にいかに関与するのかという考察を行うことによって、メッセージ解釈の主観性という問題が、コミュニケーションの問題として重要な意味を持つことになる。

そこで本研究では、第1の課題として、「活動の連続性という視点から、数学学習におけるフィードバックがもたらす認知変容の基本的なメカニズムを解明する」という課題を設定し、第4章でこの問題に取り組むことにする。

<sup>4)</sup> すべての点で微分不可能な関数は、1872年にWeierstrassによって与えられた (Monna (1986/1993, p.123) の訳者注を参照)。例として、 $f(x) = \sum 2^{-n} \sin(2^n \pi x)$  ( $n=0$  から  $\infty$ ) などがある。

**第2項 学習者間の思考の連続性としてのコミュニケーション連鎖**

1つの発言に対して関連のある発言を連ねていくという行為は、他者の発言の解釈をもとに他者の思考を推論し、自分の思考との関連づけを必要とする行為である。この行為を遂行するにあたり、学習者には、慣れ親しんでいる習慣的な思考とは異なる他者の思考を受け入れること、そして、受け入れた他者の思考と自分の思考との関連づけを行うという認知的な活動が要求される。他者の発言に対するフィードバックという行為が自分の意思表示だけに終わらないためには、他者の思考と自分の思考との関係づけを行いながら、活動としてのコミュニケーション連鎖を学習者間の思考の連続性という視点から成立させる必要がある。その意味で、私たちは、活動の連続性という視点の次に、コミュニケーションに参画する学習者間の思考の連続性という視点を導入する必要がある。

かつて Skemp(1989,p.50) は、「数学は、同じ年に子どもたちが習う他のいかなる教科に比べてかなり抽象的である。そして、このことがコミュニケーションの特別な難しさを導いている。その人自身の思考において、この難しさを体験することは教育的である」と述べた。Skempが述べる数学学習におけるコミュニケーションの難しさとは、自分自身にとっては当たり前と認識していた事を他者に伝達する際に直面する困難さであり、その場面では通常想起しないような情報もたらされることに対する自分自身の思考との調節という情報処理の困難さである。そして、この2つの困難さに直面することによって、私たちの用具的あるいは直観的理解は関係的理解へと深化し、習慣学習は知的学習へと変容することになると、Skempは考えている (Skemp,1989,pp.1-17)。

コミュニケーションの困難さを体験させることが、概念理解の不十分さを自覚させることになるという Skemp の考え方は、コミュニケーションを数学教育にもっと積極的に取り入れるべきだと主張する人々の理論的根拠になっている。例えば、「生徒たちは、彼らのインフォーマルで直観的な概念と、抽象的な言語や数学の記号体系との結びつきを構成することができなければならない (National Council of Teachers of Mathematics,1989,p.26)」という全米数学教師協議会の言葉は、抽象的な言語や数学の記号体系を駆使したコミュニケーションへの参画が直観的理解を関係的理解へと進めることになるという、Skemp の立場を継承している。また、「コミュニケーションは、学習を構成するものを最もよく結びつけ、統合するものと見ることができる (Moynihan,1994,p.31)」という Moynihan の言葉は、Skemp の立場を引き継ぐ形で、コミュニケーションという活動が学習者の数学理解を飛躍的に高める特効薬のような印象を私たちに与えてきた。だがしかし、Moynihan が言

うように、コミュニケーションへの参画がすぐに何らかの学習効果をもたらすというほど、数学学習におけるコミュニケーションは単純なものではない。本来、コミュニケーションは個人の概念を再構成しながら進むものであり、コミュニケーションの進行に合わせて概念の再構成ができない学習者に対しては、コミュニケーションは相互作用の場として学習効果を及ぼすことはない。それゆえ、他者の影響を受けたり、他者に影響を及ぼす社会的相互作用としてのコミュニケーションの問題は、コミュニケーション連鎖の過程の中で解明される必要がある。本研究では、第1の課題として、メッセージ解釈の主観性について考察することにしたが、互いにそれぞれの主観性を主張し合っているだけでは、学習者の思考は互いに結びつくことなく、それぞれの発話行為はただの独り言になってしまう。

数学教育では、個別の学習者の発言を結びつけ、連結性のある学習者の発言を生み出すさまざまな指導方略が考案されてきた。その結果、数学の学習場面では、教師からの働きかけ (Initiation)、学習者の応答 (Response)、教師による学習者へのフィードバック (Feedback) というIRF型のコミュニケーションが定着してきている (Pimm,1987,p.27)。そしてさらに教師たちは、教師主導型のコミュニケーションに満足せずに、学習者間の思考の結びつきを求め、教師からの働きかけによって生じた学習者の反応に、他の学習者が反応するコミュニケーションの連鎖が派生するような指導方略を模索している。教師たちは、学習者相互のコミュニケーションによって、数学的概念が構築される授業を目指しているので、偶発的に派生する2人あるいは3人の学習者による発言の連鎖は、学習者の積極的な学習参加の表れとして、いずれの場面でも高い評価を受けることになる。

しかし、こうした評価が教師や研究者による直観的な評価であるということは、学習者の発言の連鎖がいかなる思考の連続性の下で成立しているのかを、私たちが理解していないことを物語っている。私たちは、コミュニケーション連鎖という現象を他者の思考と自分の思考との関連づけを行う中で、学習者自身の思考がいかに調整されるのかということを理解したうえで、複数の発言が連鎖しているコミュニケーションを評価する必要がある。学習者相互の思考がどのように結びつくことによって、どのようなコミュニケーション連鎖が派生するのか、これまで直観的に評価してきたコミュニケーション連鎖をさらに詳しく分析することが求められている。

そこで本研究では、第2の課題として、「学習者間の思考の連続性という視点から、数学学習におけるコミュニケーション連鎖の類型を整理する」という課題を設定し、第5章でこの問題に取り組むことにする。

### 第3項 学習者個人の思考の連続性としてのコミュニケーション連鎖

教師と数人の学習者によって展開される数学的意味の練り上げが、そのコミュニケーションに直接的には参画していない学習者にも、数学的概念の再構成をもたらすのは、個々の学習者が学級という社会が収束させた意味を自分の中に内化することによって達成されるという立場から、Waschescio(1998,p.226)は、数学的思考の発達にとって、他者とネゴシエーションする過程が意味を持つのは、「ネゴシエーション (negotiation) された相互主観的な意味が内化され、個々の生徒の概念構造の一部になるという状況においてのみである」と述べている (cf. 布川,1999)。Waschescio(1998)は、社会的構成主義の議論では、個人での意味のレベルと学級で捉えられている意味のレベルが、それぞれ閉じたシステムとして存在し、学級で展開されるコミュニケーションが個々人の概念発達にどのように貢献しているかという問題には答えていないと言う。かつて、Von Glasersfeld(1987,p.4)は、「言語コミュニケーションは、指導に深く依存する基礎的なプロセスでありながら、私たちは、通常は単にそれが成立するのが当然なものとして扱ってしまっている」と、従来の研究を批判した。Waschescioが提起した問題は、Von Glasersfeldの批判と同質のものである。しかし、Waschescioの主張は、社会的相互作用という研究方法論上で措定された概念が、個々の学習者の知的発達にいかに関与しているのかということを中心に説明していないと指摘した点で、より厳しいものになっている。

そもそも社会的相互作用という概念は、西洋文化をベースとするコミュニケーション観から派生してきたものである。ネゴシエーションという概念の定義で明らかになったように、西洋の思想家にとって、コミュニケーションとは、他者を説得し、自分も説得されることを許容し、互いの利害の均衡を保ちながらコミュニケーションを収束させていくことを意味している。つまり、コミュニケーションとネゴシエーションという Bishop(1985)によってもたらされた対話の類別化は、アイデアの共有と説得という西洋的なコミュニケーション観に立つ考え方であり、コミュニケーションはアイデアの収束過程であるという収束モデルを前提にしていると言える。それゆえ、社会的構成主義者にとって、個人の認知過程は、コミュニケーションとネゴシエーションという過程の中で、社会が合意したものに変容されるものであったとすることができる。

例えば、Voigt(1995)の研究には、こうした傾向が色濃く見られる。Voigtは、教室におけるネゴシエーションによって、個々の学習者が自分の考え方を他者の考え方に合わせていく様子を描き出し、このプロセスを教室という集団が生み出してきた社会規範の機能と

して捉えている。こうした研究に対して、Waschescio(1998,p.226)は、意味をネゴシエーションするという観察可能な事象が、個々の学習者の数学的概念の再構成をもたらすのは、個々の学習者が学級という社会が収束させた意味を自分の中に取り込むかどうかであると指摘し、Voigtの研究を批判している。

こうした点で、CobbはVoigtより慎重な姿勢をとっている。Cobb(1995a,1995b)は、小グループ活動を学習の機会を与えるものとは見ていても、学習の起源としては見ておらず、学習の起源はあくまでも個人の中にあると考えている。しかし、概念発達の起源を個人の中に求めるとするならば、社会的相互作用の機能が何なのかが再度問われる必要がある。Cobbの研究により、ある種の相互作用が学習にとって生産的であることがわかったとしても、そのメカニズムについては不明のままである。その意味で、Waschescioは、VoigtやCobbの研究では、個人の意味のレベルと学級で捉えられている意味のレベルとが互いに閉じたシステムになっている、という結論を導き出している。Waschescioは、こうした問題が構成主義的認識論と社会・文化論との融合という問題に帰着される必要があると述べているが、根本的な問題は、構成主義的認識論と社会・文化論という異なる研究方法論をいかに融合することができるのかという問題ではなく、私たちが問題にすべき課題は、Waschescioが研究課題の統合という視点から提起した「内化 (internalization)」という用語がどのような現象をさす言葉なのかを明確にするという問題である。

Wertsch(1998/2002,pp.51-64)は、社会・文化論の立場から内化という用語を、「習得 (mastery)」と、自分のものにするという意味を込めた「専有 (appropriation)」という用語に置き換えることができると述べている。「個体発生において文化的道具がどのようにして個人によって習得されるか」ということの分析は、しばしば、内化という用語によって定式化されている (Wertsch,1998/2002,p.53)」という Wertsch の言葉が示しているように、「(個人や社会への) 還元主義と二律背反に対しては、『中間に身を置く』道を求めるという形で応答していきたい (Wertsch,1998/2002,p.199)」という Wertsch においても、社会・文化論の立場では、道具が人間の行為に制約をかけてくるという側面が強調されることになる。つまり、Waschescioが指摘した問題は、単なる研究方法論の差異という問題ではなく、コミュニケーションという事象を内化するという問題に対して、何を内化するのかという視点の差異の問題であることを、私たちは認識する必要がある。CobbやVoigtに対するWaschescioの批判は、文化的道具の内化という問題よりも、ネゴシエーションされた相互主観的な意味の内化という問題の方が重要であることを指摘しているのである。

私たちが他者とコミュニケーションするときに欠かせない言語体系が、社会・文化論で考察されている文化的道具であることを認めるならば、コミュニケーションに参加するために学習者は文化的道具をいかに内化するのかという、CobbやVoigtにより行われてきた考察は必要不可欠な議論であったと言える。その一方で、Waschescioのように意味の内化という考察が必要だとする議論にも説得力がある。しかし、文化的道具の内化や、ネゴシエーションによって収束された意味を内化するという議論だけでは、コミュニケーションが内包する豊かさは十分に描きだすことは難しいと考えられる。なぜならば、人々が他者とコミュニケーションする目的は、文化的道具の内化や社会が収束させた意味の内化によって、社会に順応しようとするばかりではないからである。

私たちは、社会規範や言語ルールに従わずに他者とコミュニケーションすることはできないが、数学学習という特殊な状況では、コミュニケーションの目的は、必ずしも上述してきたような社会順応という目的を達成することばかりではない。数学学習におけるコミュニケーションの目的が数学的概念の構成にあるならば、数学教育の研究では、数学的概念がいかに構成されるのかというプロセスそのものを捉える視点が必要不可欠なものとなる。それゆえ本研究では、このプロセスをコミュニケーション連鎖と呼び、学習者が自分自身の数学学習をコミュニケーションの理解とともに成立させる過程として、コミュニケーション連鎖の内化という視点を導入するのである。従来の研究者が試みてきた文化的道具の内化や意味の内化という視点にかえて、コミュニケーション連鎖の内化という視点を導入することは、教師と学習者の間で、あるいは、学習者間で生じる緊張関係をそのどちらの要素にも還元せずに考察する道を模索することを意図している。

こうした考察を踏まえ、本研究では、第3の課題として、「学習者個人の思考の連続性という視点から、数学学習におけるコミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程を同定し、その特性を解明する」という課題を設定し、第6章でこの問題に取り組むことにする。ここで、内化という用語が一種のメタファーでしかないことを認めるならば、コミュニケーション連鎖の内化とは何かという問いに対する答えは、内化という用語を他の用語に置き換えるという作業ではなく、具体的な事例の分析と考察を通して示していく必要があると、筆者は考えている<sup>5)</sup>。

<sup>5)</sup> Wertsch(1998/2002)も、「内化という比喩(メタファー)があまりにも強力すぎるので、そこで生じないことまでもこの用語で言及してしまうということを言いたい(pp.55-56)」と述べ、「内化について議論しようとするとき、心に描いている見本例を特定しないままではその議論は挫折し、実りのないものに終わってしまう(p.55)」と指摘している。



## 第1章のまとめ

第1章では、先行研究が示唆する課題を整理し、本研究で考察する3つの下位課題を定式化した。

### (1) 先行研究が示唆する課題

先行研究が示唆する課題は、コミュニケーション連鎖を、活動の連続性、学習者間の思考の連続性、学習者個人の思考の連続性という3つの視点から考察し、数学学習におけるコミュニケーションはいかに連鎖し、学習者は自分自身の思考の連続性を維持しながら、他者のメッセージ送信をコミュニケーションの連鎖としてどのように内化しているのか、という問題である。

### (2) 本研究で考察する3つの課題

本研究では、先行研究が示唆する課題に対する基礎的な考察として、以下の3つの課題に取り組むことにする。

第1の課題：活動の連続性という視点から、数学学習におけるフィードバックがもたらす認知変容の基本的なメカニズムを解明する。

第2の課題：学習者間の思考の連続性という視点から、数学学習におけるコミュニケーション連鎖の類型を整理する。

第3の課題：学習者個人の思考の連続性という視点から、数学学習におけるコミュニケーション連鎖を内化する学習者の認知過程を同定し、その特性を解明する。

第1章引用文献

- Bishop, A. J. (1985). The social construction of meaning -A significant development for mathematics education?. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 24-28.
- Cobb, P. (1995a). Cultural tools and mathematical learning: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(4), 362-385.
- Cobb, P. (1995b). Mathematical learning and small group interaction: Four case studies. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in classroom cultures* (pp.25-129). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.
- Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.
- Cockcroft, W. H. (Chairman) (1982). *Mathematics Counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Davis, P. J. & Hersh, R. (1982/1986). 柴垣和三雄・清水邦夫・田中裕訳. 数学的経験. 東京: 森北出版.
- Good, T., Grouws, D., Mason, D., Slavings, R., & Cramer, K. (1990). An observational study of small-group mathematics instruction in elementary schools. *American Educational Research Journal*, 27(4), 755-782.
- Good, T., Mulryan, C., & McCaslin, M. (1992). Grouping for instruction in mathematics: A call for programmatic research on small-group processes. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.165-196). New York: Macmillan Publishing Company.
- 原田耕平 (1991). 学校数学における子どもの misconception の同定と克服. *数学教育学論究*, 55, 3-16. 日本数学教育学会.
- Hoyles, C. (1985). What is the point of group discussion in mathematics?. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 205-214.
- Johnson, D. W., Maruyama, G., Johnson, R. T., Nelson, D., & Skon, L. (1981). Effects of cooperative, competitive, and individualistic goal structures on achievement: A

- meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 89, 47-62.
- Lappan, G. & Schram, P. W. (1989). Communication and reasoning: Critical dimensions of sense making in mathematics. In P. R. Trafton & A. P. Schulte (Eds.), 1989 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp.14-30). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, inc..
- Monna, A. F. (1986/1993). 鶴見和之・新井理生訳. 現代数学発展史 現代数学の進展—方法・概念・思想の変遷. 東京：東京電機大学出版局.
- Moynihan, C. M. (1994). A model and study of the role of communication in the mathematics learning process. A dissertation for the degree of Doctor of Philosophy. Boston College. University microfilms international dissertation information services order number 9428784. Michigan: A Bell & Howell Company.
- Mulryan, C. (1989). A study of intermediate grade students' involvement and participation in cooperative small groups in mathematics. A dissertation for the degree of Doctor of Philosophy. University of Missouri - Columbia. University microfilms international dissertation information services order number 9019662. Michigan: A Bell & Howell Company.
- National Council of Supervisors of Mathematics (1977). National council of supervisors of mathematics position paper on basic skills. *Arithmetic Teacher*, 25(1), 19-22.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, inc..
- National Institute of Education (1975). The NIE conference on basic mathematical skills and learning (Euclid, Ohio, October 4-6, 1975). Vol. II ; Reports from the working groups. ERIC ED125 909.
- Newman, R. & Goldin, L. (1990). Children's reluctance to seek help with schoolwork. *Journal of Educational Psychology*, 82, 71-80.
- 布川和彦 (1999). 論文批評 「Waschescio(1998). The missing link: Social and cultural aspects in social constructivist theories」. 上越教育大学数学教室 (数学教育ミニ情報) , <http://www.juen.ac.jp/math/ie/waschescio.html>
- Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. London: Routledge & Kegan Paul Ltd..

- Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1989a). Through the recursive eye; Mathematical understanding as a dynamic phenomenon. In G. Vergnaud (Ed.), Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3, 119-126. Paris.
- Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1989b). A recursive theory for mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 7-11.
- Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1991). Folding back; Dynamics in the growth of mathematical understanding. In F. Furinetti (Ed.), Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3, 169-176. Assisi.
- Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1994a). Growth in mathematical understanding; How can we characterise it and how can we represent it?. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.
- Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1994b). Beyond metaphor; Formalising in mathematical understanding within constructivist environments. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 39-43.
- Pirie, S. E. B. & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 459-470.
- Richards, J. (1991). Mathematical discussion. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp.13-51). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sigurdson, S. E. & Olson, A. T. (1992). Teaching mathematics with meaning. *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 37-57.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, Learning, and Action*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Skemp, R. R. (1982a). Communicating mathematics: Surface structures and deep structures. *Visible Language*, 16(3), 281-288.
- Skemp, R. R. (1982b). Symbolic understanding. *Mathematics Teaching*, 99, 59-61.
- Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics, Expanded American edition*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

- Skemp, R. R. (1989). *Mathematics in the Primary School*. London: Routledge.
- Slavin, R. E. (1987a). Ability grouping and student achievement in elementary schools: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research*, 57, 293-336.
- Slavin, R. E. (1987b). Cooperative learning and the cooperative school. *Educational Leadership*, 45(3), 7-13.
- Slavin, R. E. (1989). Cooperative learning and student achievement. In R. Slavin (Ed.), *School and Classroom Organization* (pp.129-156). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.
- Van der Meij, H. (1988). Constraints on question-asking in classrooms. *Journal of Educational Psychology*, 80, 401-405.
- Voigt, J. (1995). Thematic pattern of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in classroom cultures* (pp.163-201). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.
- Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp.3-17). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.
- Waschescio, U. (1998). The missing link: Social and cultural aspects in social constructivist theories. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp.221-241). Cambridge: Cambridge University Press.
- Webb, N. M. (1980). Process-outcome analysis of learning in group and individual settings. *Educational Psychologist*, 15, 69-83.
- Webb, N. M. (1982a). Group composition, group interaction and achievement in cooperative small groups. *Journal of Educational Psychology*, 74, 475-484.
- Webb, N. M. (1982b). Peer interaction and learning in cooperative small groups. *Journal of Educational Psychology*, 74, 642-655.
- Wertsch, J. V. (1998/2002). *行為としての心*. 京都：北大路書房.
- Wilkinson, L. C. (1988). Grouping children for learning: Implications for kindergarten education. In E. Rothkopf (Ed.), *Review of Research in Education* (Vol.51, pp.203-223). Washington, D. C.: American Educational Research Association.