第５章　一斉授業における数学的活動の社会的構成

第４章で提示した「社会数学的活動論」は二面性(記述性と規範性)を持っていた。一方で、それは学校数学の一斉授業において社会的に構成される数学的活動の実際の態様を記述し分析する枠組みであり、他方で、それは一斉授業において規範的な数学的活動を構想し、実現する手だてを示唆する処方的な枠組みでもあった。こうした社会数学的活動論の二面性に対応し、本章の第１節では実際の一斉授業の記述的研究を、第２節では規範的な教授実験をそれぞれ取り上げる。

第１節　社会数学的活動論に基づく記述的研究

１．観察研究の組織と分析の方法

本節では、初等教育段階の具体的な教室における算数の一斉授業を取り上げ、そこにおいて教師と子どもによって社会的に構成される数学的活動の実際を、「社会数学的活動論」の枠組みを視点として記述し、その特徴を示すことにする。

１．１．観察研究の組織

本論文の作成に関わって、小学校において営まれる算数の授業過程の調査研究が組織された。小学校での調査は、国立大学附属小学校第４学年の１クラスを対象として設定し、週３回の割合で非参与観察がなされた。実際の調査計画ならびにデータ収集の方法等についての詳しい内容は、「資料１．小学校における非参与観察研究」として、巻末に収めた。

この調査研究から得られた実際の授業過程のデータは、「社会数学的活動論」の枠組み、すなわち、ア)「大局的数学的活動への局所的参加」、イ）「社会的相互作用による数学的意味の発達」に照らして、記述され、分析された。それらは、次のようにまとめられる。

ア) 一斉授業において大局的な数学的活動に参加すること、すなわち、問題の定式化、解法の構成、解決の正当化といった一連の活動に参加する上で、教師と児童の間にどのような責任の配分がなされているか。さらに、数学的活動を遂行する責任が教師の側から児童の側にどのように移行していくか。本論では、社会数学的活動のこの側面を「数学的参加構造」とも呼ぶ。

イ) 一斉授業に参加する個々の児童の構成する数学的な意味が、異なる視野をもつ他者

との相互作用を通じてどのように発達するか。特に、教師や他の児童から提示される議論や反例によって、個々人の構成している数学的意味がいかに制約され、影響を受けるか。本論では、社会数学的活動の側面を「数学的意味の社会的構成」とも呼ぶ。

観察研究から得られた実際の一斉授業過程のデータを分析する過程で、当該のクラスにおいて特徴的な数学的活動が社会的に構成さていることがわかってきた。そのことを議論する際に、データの提示の方法に関して、筆者のとった立場を述べる。

本論文では、データから数学的活動の特徴的構造を抽象する過程がたどれるよう、また他に取りうる解釈ができるようにプロトコル・データを(巻末の資料に)示す。それは、調査研究の過程で収集された多量のデータの個別的検討から、数学的活動の本質的特徴が最も適切に現れている部分を適宜選択したものとなっている。また、本節では、小学校における特定の教室を研究対象として取り上げている。したがって、こうした特定の文脈から得られる知見は、当然のことながらそれらの教室において有効性を発揮するものである。しかしながら、本論文では、これらの具体的な教室から得られた特徴から、弱い一般化を試みたい。すなわち、実際の個別的な授業の具体性の中に、初等教育段階における一般的な傾向性をも示唆する事例として取り上げたい[1]。

１．２．分析の方法

ここでは、まず、当該のクラスにおける数学的活動の特徴的形態を端的に示している典型的なエピソード・データを取り上げるとともに、分析の方法論を交えながら検討することにしたい。但し、それ以降の議論では、プロトコル・データの引用は原則として巻末の資料で示すことにしたい。

本論文では、データ分析の方法として「構成的エスノグラフィー」(Mehan, 1979)[2]を用いる。これは、授業において反復して生起する組織的な数学的活動のパターンを記述するとともに、そのようなパターンが教師と児童の相互作用的作業によって安定した慣行(ルーティン)として社会的に構成される過程をも記述するものである。本論の社会数学的活動、例えば、数学的参加構造に関連付けていえば、この方法は、実際の授業過程のデータから、数学的参加構造に関する仮説的なパターンを帰納的に見いだすとともに、そ

---

[1] このことは、エスノメソドロジー研究が、特殊で具体的な状況における社会的相互作用のミクロな分析から、当該の社会的相互行為が埋め込まれているマクロな文化的構造を明らかにしようとしている点と共通している。例えば、山田富秋，好井裕明 (1991). *排除と差別のエスノメソドロジー: <いまーここ> の権力作用を解読する*. 新曜社.
[2] Mehan, H. (1978). *Learning lessons*. Harvard University Press.

うした参加構造の暫定的なパターンが、教師と児童によって実際に社会的に構成されていることを保証しようとするものである。後者の方法は、いわゆる「違反・不履行研究法」(breaching study)(Garfinkel, 1967)[3]を用いる。これは、平常の状態においてあたりまえのようになされている相互作用が明らかになるのは、期待する相互作用が生じなかったり混乱していたりするときであり、人々は平常の状態に回復させようとする作業において、何が平常であったのかが明らかになるという点に着目するものである。本研究に則していえば、授業において期待する数学的参加構造が生じなかったときには、普段あたりまえのように行っている相互作用が何であるかを教えてくれると考えるのである。以下では、授業において平常な状況が失われつつある場面を取り上げることによって、当該の教室共同体において社会的に構成されている数学的活動を顕在化する。

（ア）データとその分析

ここでは、複数の児童が共同で課題を定式化する事例をとりあげる。ここで示すデータでは、不測の事態により教師が 1 時限目の始業に遅れてしまった。このクラスの担任は、片道約 45 キロの道のりを毎日自家用車で通勤しており、その日は折からの大雪に見舞われ、車が故障してしまったのであった。

このクラスでは始業時に教師が不在であることはまれな状況であった。先に、不測の事態と述べたのは、この意味においてである。しかし、始業の挨拶の後に、子どもたちが活発に挙手し、それを受けてその日の当番(浅川)が進行役となって授業が進められ、二人の児童(東条、石山)から提示された疑問が、解決を必要とする問題として定式化されたのであった。一般的に、授業において、課題は教師という他者あるいは教科書などから出てくることが多いが、このクラスでは、課題を定式化する責任を児童が負っていた。すなわち、児童は、課題を定式化する活動を通して授業に参加していた。以下は、そのことを示すプロトコル・データである。データを提示する際に、本論文では、会話分析において一般に用いられる表記記号を用いる。

(1) 発話者の表記(略記)

教師：	教師の発話
浅川：	浅川という児童の発話(児童名は仮名である)
児童：	不特定の児童の発話
複児童：	複数の児童の同時発話

(2) 会話表記記号

教師：・・・//	次の発話割り込み。この場合は教師の発話が中断された箇所。

[3] Garfinkel, H. (1967). *Studies in ethnomethodology*. Prentice Hall.

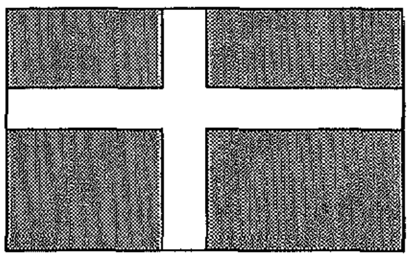
《n》	約n秒の間
(たぶん)	推測にもとづいて書き起こされた不明瞭な発話
(・・・)	聞き取れない発話や書き起こし不能な発話
?	うしろ上がり調子の発話
これは(下線)	強調
・・・	語尾の曖昧な発話
(↑)	挙手
[笑い声で]	発話や行動の様式

ここで、典型的なデータを取り上げることにしたい。

始業の挨拶の後、浅川は横田を指名し(005)、今日の授業の課題を述べさせる(006)。

001 児童：きおつけ、礼《1》着席。
002 複児童：（↑）はい、はい、はいっ。
003 児童：当番。
004 複児童：はい。はい。
005 浅川：横田さん。
006 横田：えっと、今日は、筒井君のやり方が(いい)かどうか確かめることです。
007 複児童：いいでーす。

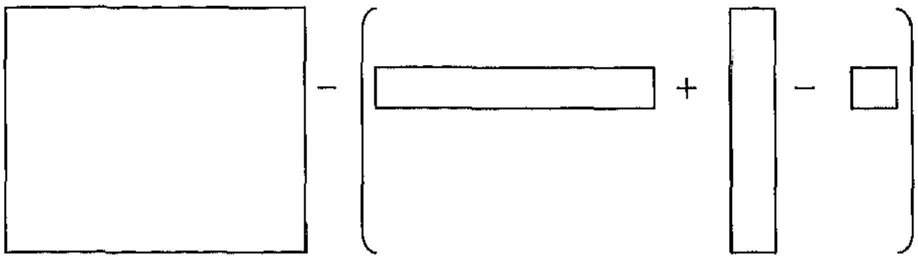
ここでは、面積の単元の学習をしていた。前時では、芝生の植わった長方形の公園に十字の道が通っており、芝生の面積(下図の灰色の部分)を求める方法が話題とされていた[4]。前の時間には、この問題に対して 5 種類の解決方法(後で述べられる)が提案されていた。そのうちの一つが、ここでいう「筒井君のやり方」(006)であった。



芝生の植わった部分の面積を求める問題

ここで「筒井君のやり方」とは、長方形全体の面積から、縦と横の道の面積を別々に引いて、さらに二つの交差部分を加えるというものである。前時の授業では、その方法は、次のような模式図で表されていた。

[4] ここでは、教師の配慮から、数値データは意図的に与えられていない。



「筒井君の方式」

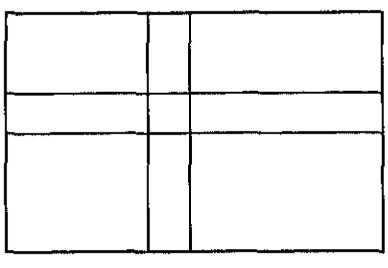
この授業での子どもたちの疑問は、「カッコの中の計算が、それ自体で公園の十字の道を求めていることになるのか」ということにあった。つまり、十字の道の面積を計算するのに、わざわざ重複する部分を作り、後でそれを引く方法が妥当かどうかを問題としていた。一つの道なのに、それをバラバラにした上で重ねて、さらに重複部分を引くことの意味が、児童には理解し難い様であった。それまでの子どもたちの経験において、複数の図形の共通する部分の面積を求めることはあっても、「重なる部分の面積」というものを考え、それを計算することが難しいようであった[5]。

その後、浅川は、周囲の友達を見わたし、筒井の方式について児童が持っている疑問点を引き出そうとする(008, 010)。そして東条に疑問点を発表させる(012)。

008 浅川：じゃ（・・・）何か言いたいことある人。
009 複児童：(↑)
010 浅川：（・・・）じゃ、まだ、はてなの人？
011 複児童：(↑)（意見）
012 浅川：どこがわからないか《3》〔東条と話す〕どこがわからないか《2》言える？じゃ、いえる。〔東条を指名〕

東条は黒板に出て自分の疑問点を発表する(013)。

013 東条：あの、ちょっと、私も、あの、となりの安木くんがやっているのを見て、できるかも知れないなって思ったんだけど、で、前に出て説明するんだけど、〔図を書く〕



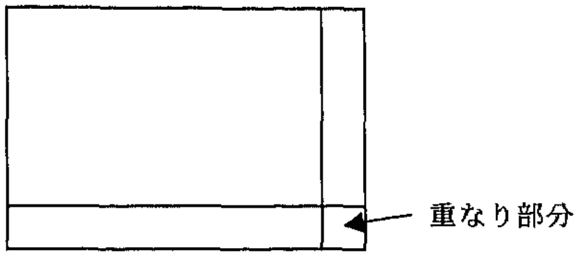
東条が描いた図

[5] 実際、面積を重ねた部分それ自体が面積であるかどうかも問題となっていた。

あの、わたしが思うのは、あ、わたしが悩んでいるのは、ここの、これ、ここのところだけで一つの道だから、なんか筒井君のはバラバラにしているので、ちょっとそこが分かりにくい。
014 児童：ばらばら方式（・・・）//
015 児童：ていうか、交わっとるから（・・・）

東条の説明を受けて、石山は浅川(日直)に何か話しかける。そこで浅川は石山を指名し(016)、疑問点を発表させる(017)。

016 浅川：〔石山を指名〕
017 石山：あの、私も、なんかよくわからなかった、〔黒板に出る〕なんか前の方法で、〔図を書く〕



石山が描いた図

こうやって重ねる方法があったんだけど、でも、ここ[重なり部分]も二つ重なっているし、あの、さっき東条さんが書いたように、ここ、こういうところ[東条の図中の交差部]も重なっているから、ここが本当に筒井君の方式が正しいのかちょっと分からない。

ここで教師が遅れて教室に入ってくる(018)。

018 教師：〔入室〕しーん。ごめんなさいね《2》どこまでいきました。
019 浅川：だから、わからない//
020 複児童：分からないとこを（・・・）聞いて、どこが分からないか
021 教師：（・・・）そこまで、聞いたところまで終わった？
022 複児童：終わった。
023 教師：それで。
024 複児童：（・・・）
025 浅川：で、わかる人に(聞けば)//

このように、教師は、どこまで話が進んだのかを確かめた後(018, 021)、浅川が「わかる人に(聞けば)」(025)と述べた際に急に割り込み、次のように発問する(026)。

026 教師：はっきりしていないって人、手をあげてごらん。ちょっと、なーんかおかしいなーって。
027 複児童：（↑）
028 教師：（きのう）家でも考えてきました。

029 複児童：うん。（考えてきた。）
030 教師：ちょっとまだすっきりしてないとこ、あるんですね。それ出しましたか、すっきりしてないところ。
031 複児童：うん。うん。出した。
032 教師：で、すっきりしてない人の、何すっきりしてないの、わかりました？
033 複児童：うん。はい。
034 教師：うん、何すっきりしないと言ってるの?
035 複児童：（↑）はい。はいっ！
036 教師：うん。そういうこと大事に考えようね。はい、後藤さん。〔後藤を指名〕
037 後藤：えっと、黒板に書いてある左の図の道は一つの道で、無理にばらばらにするから、何かわからないって言っているんだと思います。
038 国次：つけ足し!

このように、教師は、「わかる人に聞く」という方法を暗に却下(026)し、目下どういうことが問題となっているのかを明らかにしようとする(030, 032, 034)、そして、児童がもっている疑問を授業において大切に取り上げることの価値を強調している(036)。

以下では、このデータを、「数学的参加構造」ならびに「数学的意味の社会的構成」に関して検討したい。

（イ）数学的参加構造

本研究で、数学的活動を「数学的参加構造」という視点から分析することは、大局的な数学的活動(問題の定式化・解法の構成・解決の正当化といった一連の活動)に参加する上で、教師と児童の間にどのような責任の配分がなされているかを検討することであった。

ここで典型例として取り上げたデータは、大局的数学的活動の最初の側面である「問題の定式化」に関するものである。このデータにおいて興味深いことは、教師不在という不測の事態において、児童たちが自主的に授業を開始し、その授業において解決を要する問題を定式化しようとしたことである。教師が不在であれば、何もしないで待つことも考えられるのである。そうした不測の事態において、子どもたちが協力して何らかの素朴な疑問を数学的問題として明確に定式化しようとしたことは、彼らが問題の定式化という活動に、できる限りの責任を請け負おうとしていると理解される。さらに、このことは、平素の授業においても、子どもたち自身が問題の定式化に責任を負うことが社会的規範として構成されていることを示唆する。

ここで、児童が問題の定式化に参加する際に、2つの特徴が見いだされる。一つは、一人では荷が重い問題を、複数の子どもたちが何らかの接点で支えあい、各人が応分の貢献をしながら相互補完的に、すなわち協働的に定式化することである。例えば、東条の

発話(013)や石山の発話(017)は、一人ではまだ自信が持てないが、何らかの点で他者と共感できる点について、自分なりの疑問を提示することで、問題の構成に参加しているものと理解される。また、国次の言葉(039「つけたし!」)も、この授業での慣用語であるが、それは、他者の意見を補完・補強する社会的行為であると理解される。このように、このクラスにおける問題の定式化の活動は、人と人との関係を媒介にした協働的なシステムにおいて遂行されているということができる。

もう一つは、児童たちは、教師が普段用いている談話の形態を模倣しながら、授業に参加していることである。このことは、上のエピソード・データにおいては、日直(浅川)の発言に明確に現れている。教師不在の状況で、当番の浅川は、「じゃ、まだ、はてなの人？」(010)、「どこがわからないか《2》言える？」(012)と、個々の児童の私的な疑問や問題意識を引き出すよう、他の児童と相互作用をしている。こうした浅川の発話は、教師の次のような発話、「はっきりしていないって人、手をあげてごらん。ちょっと、なーんかおかしいなーって。」(026)、「ちょっとまだすっきりしてないとこ、あるんですね。それ出しましたか、すっきりしてないところ。」(030)などと類似している。このように、当番の児童が組織する談話の様式は、教師が問題の定式化において組織する平素の談話の様式と類似しており、この児童が教師の声を「収奪する」(присвоить)(Леонтьев, 1965)[6]ことによって、社会的相互作用を組織化しているものと理解される。

(ウ) 数学的意味の社会的構成

本研究で、数学的活動を「数学的意味の社会的構成」という視点から分析することは、一斉授業に参加する個々の児童の構成する数学的な意味が、異なる視野をもつ他者との関わりにおいてどのように発達するかを検討することである。

上のプロトコル・データから、このクラスの一斉授業における数学的意味の社会的構成に関して、2つの特徴が見いだせる。それらは、先の数学的参加構造の二つの特徴にも関連している。

一つは、授業において児童が構成する「個人的」な意味に「他者性」が混在している点である。このことは、児童の発話から示唆される。実際、東条の発話(013)には、「となりの安木君がやっているのを見て」という他者性と「わたしが思うのは、あ、わたしが悩んでいるのは」という自己性が混在しているし、続く石山の発話(017)においても、「私も、なんかよくわからなかった」という私的な疑問の中に、「さっき東条さんが書

[6] Леонтьев, А. Н. (1965). *Проблемы развития психики.* Мысль.

いたように」という他者の活動が混在している。そして、これらは、ともに、筒井君の意味づけ(「筒井君の方式」(006))に対する疑問となっている。このように、児童の問題意識が他の児童の活動にもとづき構成されていることが示唆される。かくして、このクラスの一斉授業の社会的相互作用における数学的意味の発達は、複数の「声」(Wertsch, 1991: 53)[7]が混稀され、個々の児童の意味が重層的に組み込まれ、編み直されることにより、新しい意味が生成するような対話的な本性を持っているように思われる。また、こうした対話的な意味の発達は、教師が、ある児童の疑問をクラスの注意にのぼらせ、他の児童にそれを表現させせようとすること、「で、すっきりしてない人の、何すっきりしてないの、わかりました？」(032, 下線筆者)、「うん、何すっきりしないと言ってるの?」(034, 下線筆者)や、そうした相互行為の重要性を明示化すること、「うん。そういうこと大事に考えようね。」(036)にも支えられているように思われる。

もう一つは、このクラスの一斉授業における数学的意味の発達は、間主観性の基盤により、すなわち複数の人々が共通に理解しうる事柄を基礎として展開することである。このことは、「はっきり」(026)や「すっきり」(030)といった、授業における慣用的表現の使用と関連しているように思われる。このクラスにおいて、児童たちは、「はっきり」もしくは「すっきり」していることを共通の基盤として、「はっきりしない」もしくは「すっきりしない」ことを意味づけようとしている。数学的意味の発達の基盤となるこうした相互作用のパターンが社会的に構成されていることは、先のデータにおいて、浅野の発話「わかる人に(聞けば)」(025)に教師が即座に割り込み、各児童にとって理解可能な意味(「はっきり」もしくは「すっきり」していること)を対人的相互行為の共通の基盤としていることからも示唆される。

このクラスの児童にとって「はっきり」(「すっきり」)していることは、次の 5 つの方法であった。それらは、

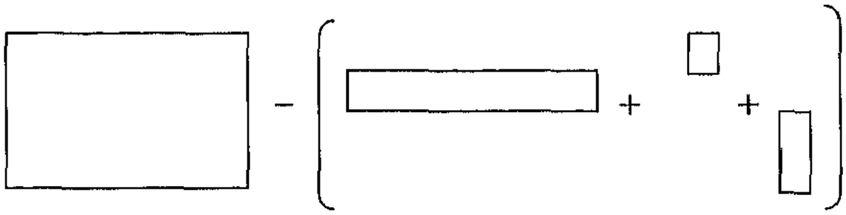
方法 1 :芝生の植わった部分の面積を直接求めるもの。すなわち、4 つの長方形の部分の面積を個別に求め、合わせる方法。

方法 2 ：十字の形をした道を分解せずに計算し、全体の面積から引き去る方法。

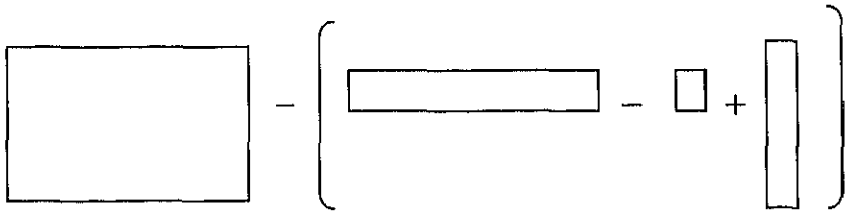
方法 3 : 石山が述べたように、十字の道を公園の上下・左右の縁へ平行移動する方法。

方法 4 と 5 ：これらは、十字の道を分解するもので、何れも山田という児童が提出した方法であり、それぞれ「山田君の方式 1」、「方式 2」と呼ばれていた。

[7] Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the mind*. Harvard University Press.

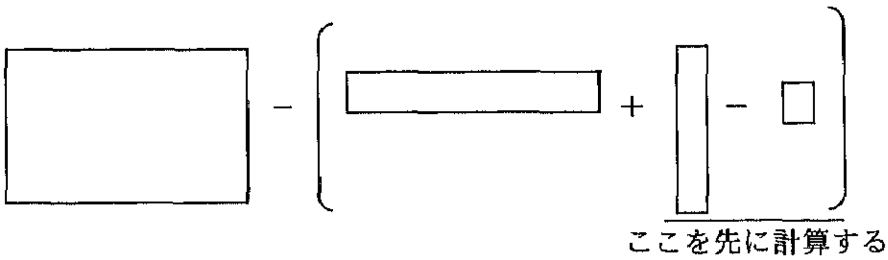


方法４：「山田君の方式 1」



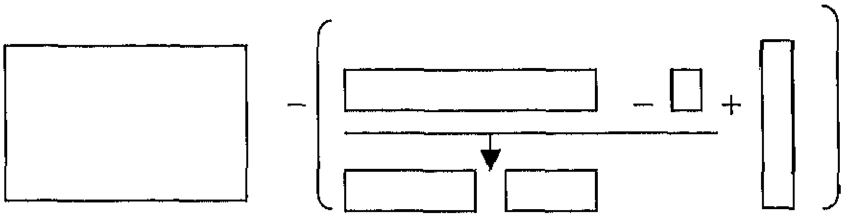
方法４：「山田君の方式　２」

このクラスにおいて問題とされた「筒井君の方法」は、こうした「はっきりしている」方法、特に、似よりの「山田君の方式」に基づき検討されていった。特に、「筒井君の方式」と似よりの「山田君の方式２」が注目された。これに関して、岩木という児童が、数と計算における「交換・結合法則」(具体的には、3＋3－1＝3－1＋3)を取り上げ、筒井君の方式と山田君の第二の方式が同じことを表していると述べたのであった。この岩木君の意見により、「筒井君の方式」において道の重なりを作らなくてもよいことが理解され、もって、「山田君の方式２」との結びつきが打ち立てられることとなった。



交換・結合法則に基づく「筒井君の方式」の新しい意味づけ

さらに、国次という児童が、「山田君の方式２」は「山田君の方式１」と「ほとんど同じ」であるという説明がなされることにより、筒井の方法と山田の方法が新しい意味のもとで統一されていった。すなわち、「方式２」と「方式１」の違いは、十字の道を縦から見るか横から見るかの違いであるとされた。



「山田君の方式２」と「山田君の方式１」との結びつき

このように、このクラスの一斉授業における数学的意味の発達は、一定の特徴を持った社会的相互作用に位置づけられる。先ずは、教師から提示される何らかの課題に対して児童から複数の異なる視野が提示される。そして、一方で、それらの個別の視野についてクラス全体で共有(すなわち「はっきり」「すっきり」する事柄を確立すること)が図られる。他方で、共有の過程で生ずる素朴な疑問がクラス全体で解決を要する問題として定式化され、その問題がすでに共有された事柄と結びつけられることにより解決され、新しい数学的意味が構成されていく。このように、このクラスの一斉授業における数学的活動は、複数の視野の提示、共有、問題解決の力動的な関係のもとで展開していると言える。

さて、これまでの議論は、社会数学的活動論を視点とした数学的活動の分析を例示するために、ある授業での断片的なデータを取り上げてきた。そこで、次には、一つの単元(直方体と立方体)を取り上げ、その単元を通じて展開される数学的活動の実際の態様を記述し、分析することとしたい。

１．３．単元「直方体と立方体」の目標と授業の実際

この単元に関しては、前学年までに、「箱の形」をしたものを観察したり作ったりして、立体図形の構成要素(頂点・辺・面)に着目することが指導されている(2 学年)。この(第 4)学年では、最も基本的な立体図形である直方体や立方体について、構成要素の個数や面の形、辺や面の平行や垂直などの観点に着目させ、これらの特徴をつかみ、図形を構成したり分解したりして理解を深めることを基本的なねらいとしている。その際、平面図形との関連にも配慮し、見取り図や展開図を通して、辺や面のつながり、それらの位置関係などについて理解できるようにしている[8]。

この単元の授業で、筆者が観察を行ったのは次の 6 時間である。

第 1 時　1 月 26 日(木)　立体図形（積み木の見方１）
第 2 時　1 月 30 日(月)　立体図形（積み木の見方２）

[8] 文部省 (平成元年), *小学校指導書算数編*(pp.124-125). 東洋館.

第3時　2月　2日(木)　立体図形（積み木の見方3）
第4時　2月　6日(月)　直方体（構成要素）
第5時　2月　7日(火)　直方体（性質の記述）
第6時　2月　9日(木)　直方体（定義）

これらの授業は、概ね、次のように展開された。

第1時では、立体図形の模型(木製の積み木)が入った箱が準備され、児童は班毎のグループ活動によって、中に入っている積み木の特徴を記述した。その結果、3種類の異なる見方が提出された。

第2時と第3時では、児童が提出した3種類の見方について、個別的に詳しく検討が加えられた。特に、3つの内の2つの見方について、その適否が問題とされた。

第4時と第5時では、紙で作られた大きな長方形が黒板に張られ、それらから直方体を構成する方法を教室全体で議論した。そして、6枚の長方形(正方形)から直方体を組み立てるための原型(展開図とは逆のもの)が構成されるとともに、他の原型を構成する可能性も検討された。

最後の第6時では、直方体の特徴を言葉によって表現することが試みられた。
この単元の学習期間中、この学級では集団風邪が蔓延し、児童の出欠が不規則な状況であったが、教師の丁寧な誘いと児童の積極的な参加によって授業が展開されていった。
以下では、これら6時間にわたって収集された授業データを用いて、このクラスにおいて社会的に構成されている数学的活動の特徴を、社会数学的活動論の2つの枠組みに照らして記述し、分析することにしたい。

2．大局的数学的活動への局所的参加

観察研究を通じて、このクラスの一斉授業における大局的な数学的活動の構造は、基本的に連続する3つの相(「複数の視野の提示」，「個別の視野の検討と洗練」，「一定の視野の定式化と制度化」)からなっていることが示唆された。すなわち、このクラスの6時間の授業では、大局的な数学的活動が3つの相に組織的に区分されており、児童は、各相での特徴的な数学的活動に局所的に参加していることがわかってきた。

大局的数学的活動の相	授業時数
複数の視野の提示	第1時・(第2時)[9]
個別の視野の検討と洗練	(第2時)・第3時
一定の視野の定式化と制度化	第4時・第5時・第6時

当該のクラスにおける大局的な数学的活動の相

このクラスにおける大局的な数学的活動は、教師から提示される素朴な課題に対して、児童から、その課題に接近するための複数の視野が提示されることにより開始される。こうした視野は、それを提示する当人にとって漠然としており、未分化なものでもあるが、ある程度有望であり、他者との議論を通じて、やがて洗練されていくことが予期されている。複数の児童から提示された複数の視野の中には、クラスの中で賛同を得られるものもあるが、同時に、論駁(異論や反論)を招くものも含まれている。こうした論駁に照らして個別の視野を検討していく過程で、クラス全体として解決を要する新たな問題が生まれ、それを解決することを通じて個々の視野が拠って立つ条件や仮説が精緻化されていく。さらには、クラス全体で検討され共有された複数の視野の中から、有望で価値あるものが選択され、一層系統的かつ分節化されたものとして定式化され、学級共同体において制度化される。

以下では、実際の授業データを用いて、これら 3 つの相における児童の数学的活動への参加の態様を記述し、分析することにする。

2．1．複数の視野の提示

最初の授業で、教師は、子どもたちに様々な立体図形の模型(木製の積み木)が入った箱を見せ、彼らの注意を引きつけようとする。そして、「どんなつみ木」という主題のもとで、中に入っている積み木について記述する課題を出した。これは、幾通りもの見方が可能な未完結な問題状況を構成することになっている。この状況に対して、児童は、班(小集団)活動を通じて、立体図形の見方を複数提示していった[No.1: p.7][10]。

教師は、箱の中の積み木についての関心を高めつつ、黒板に「どんなつみ木」と授業の主題を書きながら、児童に活動をする時間についての目安を自主的に設定させ、児童

[9] 大局的な数学的活動の各相に対して一定の授業時が割り振られているが、それは厳密に対応づけられない。実際、第2時は「複数の視野の提示」と「個別の視野の検討」とに関わっている。
[10] プロトコルは巻末の資料におさめる。ここで、[No.1: p.7]は、第1番目のプロトコルが資料の7頁に掲載されていることを示す。

に活動の責任を請け負わせていく[No. 2: p.8]。予定の活動時間をやや超過した後、いくつかの班から積み木を特徴づける 3 つの見方が提示された。第一の見方は、「何々のような」という概形を形容する見方であり、第二の見方は、立体図形の構成要素の形と数に着目するものであり、後の「形の中身」と呼ばれた。そして、第三の見方は、見取り図に関連する見方で、児童たちは「あるところから見たら」と名付けた。

積み木を特徴づける視野	数学的な側面
何々のような	概形の比喩的形容
形の中身	構成要素(頂点・面・辺)
ある所から見たら	見取り図的な見方

児童が提示した複数(3 つ)の視野

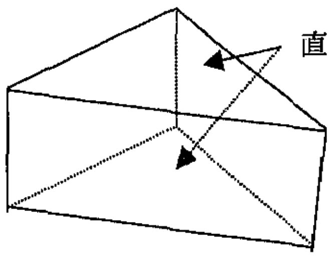
第一の見方について、教師の問いかけに応え、清川という児童は次のように述べている(085)

085 清川：えーと、僕のグループは、あの、ちょっと二つ言うんだけど、あの、この一、一つ、四角形に対して正方形みたいなものが、（見つかったん）だけど、こっちはキャラメルみたいな、キャラメルみたいな形で。こっちは、あの、サイコロの様な形が(見つかりました)。

教師は、班から提示された個別の意見を、教室全体に広め、その意味を共有することに主眼を置いている)[No. 3: p.8]。また、他の班の児童も、自分の班において見いだされた似よりの見方を提案しようとしている。実際、他の班からは「とんがり帽子のような」(円錐) (120)、「ピラミッドのような」(四角錐) (129)という意見が「つけ加え」られている。このように、活動のこの相においては、一定の見方を受け入れることや、似よりの見方を「つけ足し」することが奨励されている。しかし、この相では、提案された見方に対して異論や反論が述べられることは奨励されず、むしろ消極的に扱われる。すなわち、教師は、「複数の視野を提示する」ことと「提示された視野を検討する」ことを、異なる活動の相として区別しようとしている。実際、この授業では、「サイコロのような積み木」という意見に対して東条という児童が異論を唱えているが、教師はそれを回避している[No. 4: p.9]。こうしたことは、鬼塚という児童が、第二の見方「形の中身」(図形の構成要素)を提示したときにも見られた。鬼塚は、三角柱について(それを提示せずに)次のように述べている。

148 鬼塚：三角形の積み木なんだけれども。それで・・[中略]・・面が 5 つの《2》、最初が、面が 5 つの積み木で、もう一つが、えーと、直角が、12 個ある積み木

このように、鬼塚の提示した第二の見方には、図形の構成要素として「平面角」の数が含まれている。教師は、鬼塚の意見を取り上げ、クラス全体で理解しようとするが、この見方は、他の児童にとっては分かりにくいようであった。実際、国次は、直角が 12 個あることを問い正しているが、先程と同じように、教師はそうした異論や反論には立ち入らないよう、議論を一端打ち切り、他の見方を提示するように問うている[No. 5 (193): p. 10][11]。こうしたことは、このクラスの授業において首尾一貫して現れている。実際、他の班から異なる視野が提示された後に、鬼塚と同じ班の他の児童が、一端取りやめにされた見方について再度説明し始めた。先の説明では、三角柱に直角が 12 個あると述べていたが、今度は、それが 14 個あると主張し始めた[No. 6 (278): p.10]。実際、彼らが検討していた三角柱は正四角柱を二等分したもので、底面が直角二等辺三角形であった。



鬼塚の提示した積み木

直角の数についての話が始まると、クラスは再び騒然としてきた。しかし、教師は、議論を制止させ、これまで出された複数の積み木の見方に関して、クラスの児童がどの程度同意しているか(「はっきり」しているか)を確認していった(294)。

こうした一連のデータから、「複数の視野の提示」という第一の相では、異なる複数の視野を提示すること自体が奨励され、似よりの見方が「つけ足される」ことは受け入れられるが、提案された見方に対して異論や反論が述べられることは奨励されず、むしろ消極的に扱われることが示唆される。すなわち、この活動の相では、複数の視野が、曖昧な部分を含みつつも、提示され、補足されることに力点がおかれているのである。こうした活動を経て、このクラスにおける数学的活動は、次なる相、すなわち「個別的視野の検討と精緻化」へと移行していく。

2．2．個別的視野の検討と精緻化

活動の第二の相では、第一の相で提示された複数の視野について批判的に検討し、よ

---

[11] ここで(193)は、プロトコル・データの発話番号をさす。

り明確な視野として洗練していくことを目指して一斉授業が組織される。この相では、まず、複数の視野についての確実な想起がなされる。すなわち、第二の相が開始され、首尾よく展開されるには、既に提示された複数の視野が確認[12]されることが前提とされる。したがって、クラスの児童は、第一の相において、他の児童が提示した見方を確実に記憶しておく責任がある。

第二の相は第二時から始まった。この授業は、集団風邪と学校行事の関係で、5日ぶりであった。こうした配慮もあってか、教師は、前時でなされた積み木の見方を児童から提示させるとともに、欠席した児童にそうした見方に適合する積み木を提示させている[No. 7: p.11]。教師の問いかけに対して、児童は「とんがり帽子のような」(杉原：023)、「キャラメルのような」(仁志：029)、「サイコロのような」(森：033)、「ピラミッドのような」(棚本：037)と、前時で例示された例が完全に想起されている。

第一の見方について児童が想起していく過程で、他の児童(松畑)から、第二、第三の見方が言及される[No. 8 (062): p.11]。松畑は、前時で提示された見方を、その提示者(清川, 鬼塚)に言及しつつ、想起している。さらに、前の時間に棚上げになった鬼塚の見方を、筒井という他の班の児童が想起するとともに、東条という児童が「形の中身方式」という名称を指摘している[No. 9 (110), (115): p.11]。これは、前時に、浅川という児童が、鬼塚の説明を補って「形の中身」と表現したことを想起したように思われる。この意味で、このクラスの児童は、他者の発言にたいして優れた保持をしているように思われる。こうした筆者の判断は、松畑の発言によっても支持される[No. 10 (134), (136): p.12]。実際、前時では、第二の見方として2つのもの(鬼塚と浅川)が提示されており、松畑は、そのうちの浅川による見方(面の形と数による特徴付け)を正しく想起したのであった。これら一連のデータは、5日前の授業で出された個別的な見方がすべて漏れなく想起されたことを示しており、このクラスの児童が、他者の意見に対して優れて敏感であり、記憶にも優ってもいることが示唆される。

さて、これまでの授業で、複数の積み木の見方が確認された。そこで、教師は、個々の見方に関する検討に移っていった。「何々のような」という第一の見方に対しては、すべての班が同意することができた。しかし、「あるところから見たら」という第二の見方に関しては、それが不十分であるという指摘がなされた。そして、この見方に対する批判的検討が児童主体で展開されていった。実際、小沼という児童は大小二つの立方体を参照し、次のように批判する(200)。

---

[12] ここで、確認という意味は、理解されたことを意味するものではなく、そうした見方が提案されているという事実が確認されたということである。

200 小沼：あの、どっから見ても正方形と言っても、大きさがあるから、ち、小さいので、（どっから見ても）正方形とか大きいので、正方形とかあるからわからない

教師は、小沼の意見がクラスに共有されるよう、他の児童に丁寧に確認していくとともに、小沼が参照した大小二つの立方体の積み木を具体例として議論を組織化していく[No.11 (225): p.13]。小沼の問題提起に対して、岩木という児童は、辺の長さを指定することにより、両者は区別できるという解決策を提案する(238)。

238 岩木：例えば、それが、縦10センチ横10センチだったら、あの《1》その場合、縦10センチ横10センチの正方形がどっから見てもあるっていって、たとえばその2倍で、20《2》あの、縦20センチ横20センチの正方形がどっから見ても(あるっていう)

これまでのデータは、このクラスにおいて、個別の見方を批判的に検討する活動は、児童による責任ある参加に基づいていると考えられる。それに関して、教師の側の役割は、児童の批判的な意見を整理するとともに、クラス全体の議論がスムーズに展開されるよう一定の文脈を定めている(この場合は大小2つの立方体を取り上げ、それについて議論をさせている)点にその特徴が見いだされる。

さて、児童による責任ある参加には、ある程度考えられた批判だけではなく、素朴な疑問を提示することによっても成される。すなわち、たとえ些細で未分化な疑問であっても、敢えてクラスに提示することが、論議を誘発し、理解を深めるうえで重要であるとみなされている。実際、「ある所から見たら」という見方に大多数の児童が賛同しつつある際にも、浅川という児童は、自分の持っている素朴な疑問を提示しようとする[No. 12 (334): p. 13-14]。

334 浅川：あの、二つあるんだけど、一つは前から見たって言うのと、横から見たら(・・・)そんなのはあの、その横とか前からって書いてないから分からないし、それにあの、例えば、[長方形の種類が] 3つとか書いてあったとして、その3つで組み合わせていったら全然違う形になってしまう(と思う)から

こうした浅川による問題提起(面の形と数がわかっても異なる立体が構成されるのではないかという疑問)を契機として、クラスにおいて解決を必要とする新たな問題が構成された。そして、それが解決される過程で、児童の立体図形の見方はより一層明確なものになっていった。さらに、浅川による素朴な疑問は、クラスの児童にとって立体図形の意味を洗練する機会となっているだけでなく、教師にとっても授業におけるさらなる学

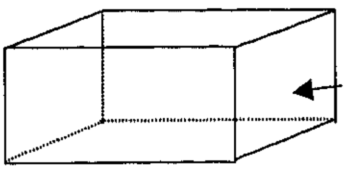
習の文脈を設定する契機となった。実際、浅川による問題提起を切っ掛けとして、児童は、厚紙を用いて3種類の長方形を組み合わせて「直方体」の模型(モデル)を構成する活動に取り組んでいった。直方体のモデル構成では、面の形とサイズをまちまちにすることによる失敗も間々見られたが、逆に、直方体の模型を構成するという合目的的な活動を通して、行為を基本としながら、立体の構成要素の間の関係に着目していったようであった。さらに、こうした構成活動は、直方体の「展開図」という新しい学習内容へと自然に接続していき、次なる第三の活動の相の準備がなされていった。

2．3．一定の視野の形式化と制度化

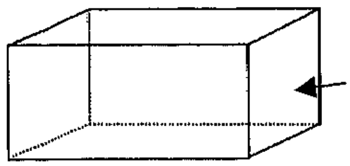
大局的な数学的活動の第三の相では、立体の構成要素を行為に基づき着目してきた経験を、言葉に関連づけることが意図された。この授業では、直方体の言葉による定式化の活動に3時間をかけている。つまり、教師は、3時間(第4時，第5時，第6時)をかけて、児童を言語的な定式化へと徐々に誘っていった。それは、次のようにしてなされた。

児童は、前時に、厚紙を使って直方体のモデルを構成する活動を行った。そして、その名称、すなわち「直方体」と「立方体」という用語が導入された。それを受けて、第4時では、紙で作られた大きな長方形が黒板に貼られ、そうした具体的な長方形を視野にいれつつ、それらから直方体を構成する手だてを言葉を介して行おうとした。

教師は前時に構成された厚紙のモデルを示し、その特徴を語らせている[No. 13: p.14]。こうして、児童は、直方体を、ア「すべての面が長方形からなる」(054)と、イ「正方形と長方形からなる」(057)という2種類のものに区別していった。

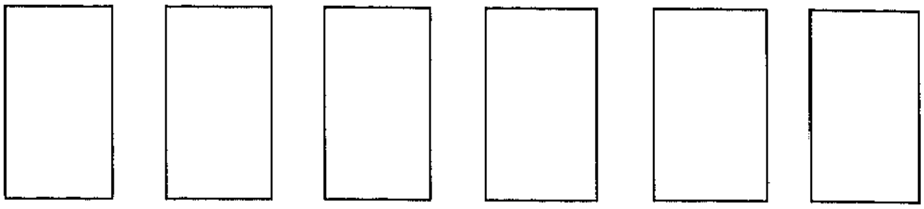


ア）すべての面が長方形



イ）長方形と正方形からなる

このことをふまえて、授業では、先ずアの長方形を考察の対象とした。教師は、「6つの長方形の面があれば、直方体と言っていい」(082)という意見を踏まえ、教師は、児童に揺さぶりをかけはじめる。実際には、合同な6枚の長方形を黒板に提示していく[No. 14: 15]。



教師による揺さぶり

「できん。できない。」(100, 102, 104) という多数の児童の意見を聞きながらも、教師は、児童が言った通り６つの長方形であることを指摘する(110)。

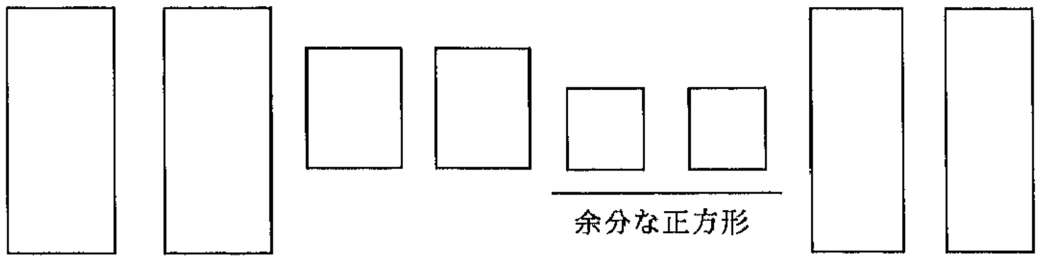
このように、教師は、児童の言葉による特徴づけと指示の曖昧さを利用して、反例を構成していく。児童は、説明(定義)が曖昧であったことに気づき、「言葉をつけ足す」(条件を加える)必要があると言いだす[No. 15: p.15]。そして、国次がその説明を試みようとする。国次の説明は、具体的な立体模型を参照にする冗長な説明で、彼自身「付け足しにならないかもしれないけど」(127)と断っているように、説明として要点を得ない(129), (131)。こうした国次の説明は、具体的なモデルを主要な参照物としており、言語的説明は未だ付随的である。他の児童は、この国次の説明を補足しようと試みるが、言語的説明に言語的説明を補足することは比較的難しいようであった[No. 16: p.16]。このように、同じ長方形では無理であることを表現するのに、児童はいろいろと戸惑っているようであった。前時で、児童は自ら厚紙を用いて直方体のモデルを構成していたので、視覚と行為にもとづく説明は可能であるように思われたが、黒板に張られた長方形から直方体を構成させる手続きを、言葉を介して間接的に操作することは困難であるように思われた。このように、教師は、児童による言語運用の曖昧さを積極的に利用することで、直方体の特徴を言語で表現することを徐々に訓練していった[13]。児童は、言葉によって図形を操作する活動に取り組みつつ、最終的に直方体を組み立てる原型(展開図の逆のもの)を完成することができた。

次の第５時では、具体物の操作から図や言語への移行がさらに進められた。ここでは、黒板に張られた直方体の一つの展開図の触れ合う辺や面の関係が、具体物を操作することなく、図と言語を用いて検討された。こうした言葉を介した具体的行為を通じて、児童の注意は、言葉を補助手段とした具体物の操作から、言葉を用いる問題それ自体へと移行していった。以下では、具体物から言語へと移行するこの過程を詳しく取り上げる。

教師は、前時の活動を確認するために、黒板にランダムに貼られた長方形(それらの中

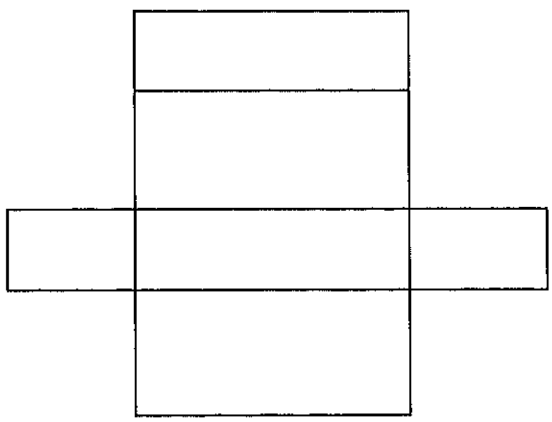
[13] この過程での意味の発達については、次項(2.2.3.(ウ))で述べる。

には、直方体を構成するには余分(過剰)な正方形も含まれているが、後にイのタイプの直方体の議論につながる)から、アのタイプの直方体の原型を構成するよう児童に問うている。



黒板にランダムに貼られた長方形

児童は、黒板に貼られた長方形から不要な正方形を取り除くとともに、それから直方体を構成する原図を作成することができた[No. 17: p. 16]。実際、東は、前時で構成されたものと同じ配置を完成することができた(080)。さらに、国次は、それを言葉によって説明している点に、言葉を主要な道具とする活動への漸次的な移行が伺える(084)。



松畑が構成したアの直方体の原図

ここで教師は、この展開図において辺が触れ合う場所を問うていく[No.18: p.17]。こうした問いを幾つかした後で、教師は、巧妙な問い(「触れ合わない場所ってありますか。」)を発し、議論を締めくくっている(104)。

これまでのデータに見られるように、教師は、黒板に張られた直方体の展開図を操作することなく、言語を用いて説明させていった。それに関して、児童は、言葉を補助手段としながら展開図の構成部分の関係を示し、また説明することもできた。図を言葉によって説明する能力は、アの直方体についての検討を終え、イの直方体(2 つの正方形の面をもつもの)の検討をする際に一層はっきりと現れてきた。

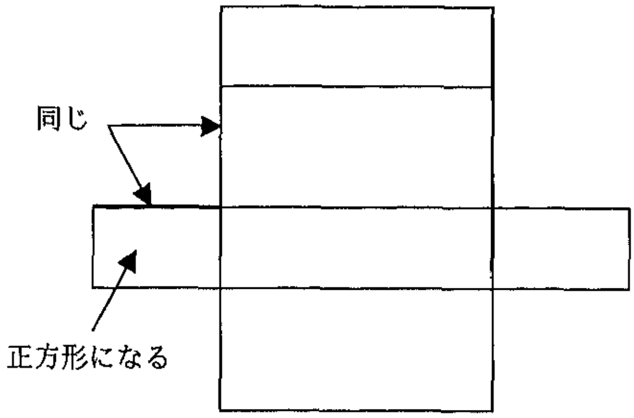
教師は、イのタイプの直方体を構成する長方形と正方形を黒板に列挙し、それを組み

立てずに、アとの違いを問うている[No.19: p.17]。ここで、後藤という児童は、簡潔に説明する(136)。

136 後藤：二つあると思うんだけど、一つは、正方形が入ったということで、もう一つは、イ、アが 3 種類だったけど、イは 2 種類でいいと(思います)。

この後藤の説明を、下田という児童が、アの直方体との関連性から行おうとする(171)。

171 下田：[前へ出る]これ、正方形が加わった、から、ここと、ここと交わるところは、この同じ、同じ形になったせいで、この長方形の種類が、一つになってしまって、で、長方形、あっ正方形が、1 種類加わった、から、この長方形の、アの長方形の方が、4 つにならないと交わらない。



しかし、下田の説明は他の児童には理解しにくいようであった。そこで教師は、下田の説明を大切にし、理解を試みるよう児童に働きかけている[No. 20: p. 18]。このように、児童は、アの展開図をもとにして、イについての問題を意味づけていくことができた。ここでは、イの展開図は構成されておらず、児童は、黒板に示されたアの展開図を参照しつつ、言語で、イの種類の直方体の特徴について説明することができるようになっていった(180)。

最後の第 6 時で、児童は「自分なら直方体をどう言うか」という主題のもとで、直方体の特徴を言葉によって表現することが試みられた。ここでは、言葉が主要な対象となり、言語を意識的に操作することが主要な活動となった。そして、紙で作った具体的なモデルや図は、必要に応じて参照される二義的なものとされた。この授業では、直方体に関する様々な言語的記述が提示されるとともに、それに対する異議が表明された。その際には、言葉のつながりについての判断を、言葉によって反論する児童も見られたが、基本的には、具体的なモデルを議論の補助手段として言葉の結びつきの適否を示すことがなされた。以下では、このことをデータを通して示す。

始業とともに、児童から本日の授業で取り組もうとする課題が表明され、確認された後、教師は、5分間の時間をとり、クラスの児童に、ノートに自分なりの説明を書かせた[No.21: p.18]。このように、この時間では、口頭で述べることだけではなく、書き言葉で記述することに注意が向けられていく。

予定の時間が経過して程なく、教師は、書けた児童を全員起立させ、順番に発表させていった。そして、納得できる説明があった場合に、着席するように言う[No.22: p.18]。そして、教師は、山田(077)、石山(080)、東(082)と指名していき、彼らの発表の後に、納得した児童は座っていく。児童の説明は、若干の新しい属性を取り入れながらも、基本的に同じ属性を列挙するものであった。実際、松畑(084)や浅川(085)の説明はそうしたものであった。

このように、複数の児童による口頭での言語的表現が連続して提示されると、児童は困惑しているようであったので、教師は、残っている児童に、もうすこしゆっくりと話すよう指示している(088)。また、その後発表した児童の説明(岩木(089), 鬼塚(091))は、他の児童がすでに述べているものでもあった。

起立したすべての児童が発言し終えたのを受けて、教師は、起立しなかった他の児童に、誰の説明が分かりやすかったかを聞いていく[No. 23: p.19]。しかし、児童は、先に提示された説明(定義)を言語化することが難しいようであった。実際、赤尾は困惑の表情を浮かべている(106)。そこで、教師は、再度、東らに発表させるとともに、それを黒板に整理していく。黒板において直方体の属性が言語を用いて簡潔に列挙されると、他の児童も新たなる属性を追加することができた。実際、東の説明が黒板に整理されると、他の児童が、石山の説明に似ていると指摘をした。それを受けて、石山は、先の冗長な説明から、今度は、平面角の性質のみを追加したのであった。つまり、教師による属性の簡潔な整理に基づき、児童は、個々の定義の内包を比較することができるようになっていった[No.25: p.20]。そして、教師は、「角が全部直角」という石山の意見を、言語的に説明させるとともに、具体的なモデルを用いて他の児童に確かめさせている(153)。前時までは、具体的な模型に対して言語的な説明を補足していたが、この段階では、言語的説明を分かりやすくするために、具体的なモデルが用いられている。

これまで見てきたように、3時間にわたる授業を通して、教師は、児童を、直方体の属性を言語的に定式化する活動へと段階的に誘っていった。最初の段階で、教師は、児童の言葉的記述と指示の曖昧さを利用して様々な反例を構成しつつ、紙で作られた6つの長方形から直方体を言語的手段を介して組み立てる活動へと誘っている。次には、黒板上で提示される展開図について、また、他の展開図の可能性について、言葉を介して検討させている。こうした言葉を介した具体的行為を通じて、児童の注意は、言葉を手段

とした具体物の操作から、言葉を用いる問題それ自体へと移行していった。そして、最後には、直方体の特徴を言葉によって定式化することが試みられている。この段階では、言葉が主要な対象となり、言語を意識的に操作することが主要な活動となった。そして、紙で作った具体的なモデルや図は、必要に応じて参照される二義的なものとなっている。これが、第三の活動の相における段階的な参加の構造であった。

3．社会的相互作用による数学的意味の発達

授業のプロトコル・データの分析を通じて、立体図形の意味が、大局的な数学的活動の各相における特徴的な社会的相互作用との関わりで発達していることが示唆される。このことを「直方体」に関して整理すると、次のような図式になる。

大局的数学的活動の相	直方体の意味
複数の視野の提示	「何々のような」 ・キャラメルのような　・四角の、長方形のような
	「ある所から見たら」 ・前後・上下・左右から見て長方形をした形
	「形の中身」 ・長方形が 6 枚　・面が 6 枚、直角が 24 個
個別的視野の検討と精緻化	「何々のような」 ・キャラメルの形をした立体　・厚みのある長方形
	「ある所から見たら」 ・どこから見ても長方形の形をした立体 ・大小が問題となる場合は、辺の長さを与える
	「形の中身」 ・同じ長方形が 3 組 6 枚ある立体 ・大小が問題となる場合は、辺の長さを与える
一定の視野の定式化と制度化	直方体とは、 6 つの面がある立体で、 ア) 3 種類の長方形が 1 組ずつ向かい合っており、しかも、3 種類の同じ辺の長さのところがふれ合っているもの。 イ) 1 組の正方形と 4 組の長方形からなり、しかも、2 種類の同じ辺のところで触れ合っているもの。

大局的な数学的活動の相における直方体の意味の発達

前項(2.2.)において示したように、このクラスにおける大局的な数学的活動は、3 つの相からなっていた。第一の相(「複数の視野の提示」)では、多様な見方ができるよう条件づけられた課題にして、児童は 3 つの視野(「何々のような」,「ある所から見たら」,「形の中身」)を提示した。これらの視野のもとで、直方体は、それぞれ「長方形のような」、「前後・上下・左右から見て長方形をした形」、そして「長方形が 6 枚」と意味づけら

れた。

こうした3つの視野は、漠然とし未分化なものであるが、第二の相(「個別的視野の検討」)の過程で、教師や他の児童との相互作用を通じて洗練された。実際、直方体の3つの意味づけは、それぞれ「厚みのある長方形」、「どこから見ても長方形の形をした立体」、そして「同じ長方形が3組6枚ある立体」となった。

さらに、数学的活動の第三の相(一定の視野の定式化と制度化)では、複数の視野の中から価値あるものが選択され、言語を用いて明確に定義されていった。実際、このクラスにおいては、「形の中身」すなわち立体図形の構成要素によって特徴づける見方が優勢となった。実際には、「直方体とは6つの面がある立体で、3種類の長方形が1組ずつ向かい合っており、しかも、3種類の同じ辺の長さのところがふれ合っているもの」という言語的定式化が与えられた。

以下では、実際の授業データに拠りながら、これらの3つの相における社会的相互作用のもとで発達する立体図形の意味を記述し、分析していく。

3．1．複数の視野の提示の相における意味の発達

最初の授業で、教師は、様々な木製の積み木が入った箱を見せるとともに、箱の数に限りがあるので、班(グループ)を構成するよう児童に指示する。机の移動を終え、静かになるのを待って、教師は児童に箱の中にどういう積み木が入っているかを予想させるとともに、立体図形に関する児童の知識や見方についての情報を得ている[No.25: p.21]。

班活動が開始されると、教室は積み木の音と児童の声で騒然となり、音声データを十分には再生できなかったが、児童の発話において、平面図形に関する用語が多用されていた(「丸い」(051)、「二等辺三角形」(055)、「六角」(058)、「正三角形」(060))。これは、先のプロトコル・データにおける児童の言葉遣い(027-029)と一致している。その他には、「立体的」(054)、「立体二等辺三角形」(056)という表現や、「帽子みたい」(062)という形容もなされていた。

予定の活動時間をやや超過した後、いくつかの班から積み木を特徴づける見方が3つ示された。第一の見方は、「何々のような」という概形を形容する見方であった。第二の見方は、立体図形の構成要素の形と数に着目するものであり、後に「形の中身」と呼ばれた。そして、第三の見方は、見取り図に関連する見方で、児童たちは「あるところから見たら」と名付けた[14]。

立体の概形を形容する第一の見方に関して、児童は、直方体を「キャラメルのような

[14] これらの見方は、前項(3.2.)でも取り上げている。

」、そして立方体を「サイコロのような」と形容している。また、他の班からも、「とんがり帽子のような」(円錐) (120)、「ピラミッドのような」(四角錐) (129)という意見がつけ加えられている。

第二の見方は、図形の構成要素の数に着目するものである。この見方に関しては、2種類のものが提示された。一つは、例えば、「面と平面角の数」によって特徴づけるものである。例えば、鬼塚は三角柱について「最初が、面が5つの積み木で、もう一つが、えーと、直角が、12個ある積み木」と2つの構成要素(面の枚数と平面角の数)によって特徴づけている。この見方は、第4章で取り上げたデカルトによる多面体論と共通しているが、前項(3.3.(ア))で見てきたように、他の班の児童には理解しにくいものであった。

ここで、鬼塚の班が、こうした見方を社会的に構成した様子を取り上げる。この班は、鬼塚、小沼、越山、上村、高峰の5人で構成されていた。彼らは、積み木に対して作業分担のもとで組織的に探究していった。それは次のようになされた。まず、小沼が、調べる積み木と調べる観点を提案し、他の三人(越山、上村、高峰)のうちの一人がそれを取り上げ、その数を数える。そして、鬼塚がその結果を記録するのであった。そして、一つの積み木についての作業が終わると、同じことが次のつみ木で繰り返されていった。この意味で、平面角という視点は、小沼による発想に基づいていることがわかる。

この班で、小沼が最初に提案したのは三角柱であった。彼はそれを「三角形のつみ木」と呼んでいる。そのとき、最初に数を数えることになった越山は、三角柱と四角錐などに触れ、小沼に「どっち」と聞いている。小沼は「これ」といって三角柱を指さすと、越山は面の数を数え「面が、んーと、5つ」という。鬼塚はこれをノートに記録する。次のつみ木は、小沼が提案する前に村田が「ピラミッド」といって四角錐をとりあげた。そして面の数を数えて「5つ」と言う。それを記入した鬼塚は、「さっきと同じやよ」と発言する。それに対して、小沼は「そしたら、ここの、角の、直角の数足したら」と提案する。そこで上村は四角錐と三角柱の直角の数を数え、越山はそれをチェックする。特に、三角柱が直角二等辺三角形であったため、上村は直角を最初12個としたが木越は、「14個や」と訂正している。そこで二人は直角の数を再度一緒に唱えながら14個であることを確認している。鬼塚は次のように記録している。班の作業を鬼塚が発表したのは、彼女が記録を担当したからではないかと思われる。

三角形〃　　5つの三角形の中の1つ

。三角形の積み木　。面が5つの積み木 

。直角が14ある積み木

この班では、こうした作業分担のもとで、積み木を、概形、面の数、平面角(直角)の数で特徴づけていった。時間的制約から、この班は直方体と五角柱を調べて作業を終えている。こうした責任の分担を表にまとめると次表のようになる。

	三角柱	四角錐	直方体	五角柱
小沼	物指示	角指示	物指示	物指示
越山	面	角	——	面・角
上村	角	面・角	——	——
高峰	——	——	面・角	——
鬼塚	記録	記録	記録	記録

鬼塚の班活動における作業分担

この班活動は、個々の児童によるチームワークにより課題が遂行されている。課題の遂行は一人の児童の活動には帰着できないものとなっているが、班全体としてみた場合に課題は首尾よく遂行されている。すなわち、班の 5 人はだれ一人として課題全体を遂行していないが、全体としては課題は遂行されている。この班では、個々人の要素的な行為の加算的総和としてではなく、一つのシステムが活動の単位として意味をなしている。このことから、鬼塚が提示した三角柱の意味づけは、個々の児童による意味づけからではなく、むしろ班活動における社会的相互作用においてよりよく理解することができると考えられる。

第二の見方のもう一つのものは、「面の形と枚数」によって特徴づけるものである。実際、浅川という児童が四角錐(ピラミッド)を提示しながら、この見方を提案している[No.26: p.21]。浅川は、この見方が鬼塚の見方と「多分同じ」(252, 254)であると述べているが、他の児童にとって理解されたようであった。実際、教師の問いかけに大半の児童が挙手し(260)、かつ児童の応答に同意している(263)。教師からその積み木を提示するようにいわれると、すべての班が積み木を正しく提示することができた。

第三の見方は、「見取り図」に関連する見方で、児童たちは「あるところから見たら」と命名した。この見方を、東という児童が、5角柱を手にもち、説明している[No.27: p.22]。東の説明は他の班にも理解できたようで、すべての班が 5 角柱を掲げた。さらに、この見方に関連して、東条という児童が挙手し、似よりの見方を提出する(242)。

241 教師：あっ、まだあるの

242 東条：あと、こんな風に、どこから見ても、四角形の形(の積み木)、四角形の積み木

これまでは、「複数の視野の提示」という第一の相における立体図形の意味の発達について見てきた。これまでのデータから、この相における立体図形の意味は、未分化で漠然としており、かつ具体的で視覚的なイメージに基づいていることが示唆される。実際、児童の説明は具体物(積み木)を主要な参照物としており、言語的記述よりも具体的で視覚的イメージに拠っている。上の東条による「四角形」の積み木の説明(242)でも、「四角形」という言葉より、視覚的イメージが優勢となっている。なぜならば、東条の説明(「四角形の積み木」)に合致する積み木は直方体と立方体であるが、東条が示したものが立方体であったため、他のすべての班も同じく立方体を示しているからである。こうした未分化でイメージ的な意味は、次の活動の相「個別の視野の検討と精緻化」において、より分化し明確化していくことになる。

３．２．個別的視野の検討の相における意味の発達

第二の活動の相で、児童は、第一の相で提示した複数の視野を批判的に検討し、より明確なものに洗練していった。

児童から提出された 3 通りの見方の内で、第一の見方「何々のような」についてはクラスの賛同が容易に得られた。しかし、残る２つについては問題が提起された。第二の「ある所から見たら」に関しては、先項((3.2.(イ))でデータを示したように、「前後・上下・左右から見た面の形」というだけでは、立体図形は確定できないという批判が提示された。実際、大小 2 つの立方体は、こうした見方では区別することができなかった。この問題に対して、児童は、2 つの解決策を提示した。一つの解決策は、小沼によるもので、辺の長さを決め、サイズを指定することによって大小を区別するものであった。もう一つの解決は筒井という児童が提示したもので、大小というサイズは問題とせず、一つの類(「同じ仲間」)とみなすというものであった[No.28 (256): p.22]。教師は、筒井による意見を、他の児童の言葉を通して確認させていく(257), (259)。実際、石山が筒井の意見を説明している(265)。かくして、「あるところから見たら」という見方に二つの種類のものがあることがある程度明確になってきた。しかしながら、児童の中には、まだ若干の「すっきりしない」点が残されている。このことが「点々の赤」(279-280)という東条の言葉に現れている。

このように、このクラスの一斉授業では、児童から提起された問題を解決する中で、意味の合意と共有が目指されるが、解決が暫定的で不完全であるという可能性が常に残

されているようである。実際、大多数の児童が賛同しつつある際にも、浅川は、自分の持っている未分化な疑問を敢えて提示しようとした(そのデータは前項(3.2.(イ))において取り上げた(323-335))。そこでの浅川の問題提起は2点あった。一つは、「あるところから見たら」という見方は、見る人によって異なり、情報としては曖昧であること。もう一つは、立体図形を構成する面の形と枚数がわかっている場合でも、それから立体が一義的に決定されはしないのではないか、という疑問であった。

ここで、直方体に対して、浅川の二つの問題のうちの前者(1番)は解決できることが主張され、議論されていった[No. 29: p. 23]。この問題に対して、東という児童がその解決策を提示した。それは、前・横を明確に指定すれば問題とはならないし、結局は同じ形になるというものであった(371), (374)。この東の説明に対して、多くの児童が賛同していくなかで(385)、浅川はまだ賛同をしなかった(388)。

384 教師：前とか横違ってても、最後には同じ形になるの？
385 複児童：なるよ、なる
386 浅川：でも、ならんときもあるよ
388 教師：ならん時もあると思うげんね

そこで教師は、浅川のこうした反論を取り上げ、クラス全体で厚紙を用いて、3種類の長方形を組み合わせることにより「直方体」の模型(モデル)を構成していった。この構成活動を踏まえ、児童は、「直方体」という名称を知るとともに、直方体の意味を「前後・上下・左右から見て長方形をした形」というものから「どこから見ても長方形の面をもつ立体」というものへと変更していった。かくして、第二の活動の相を通じて、直方体の意味は次のように精錬された。

大局的数学的活動の相	「ある所から見たら」における直方体の意味
複数の視野の提示	・前後・上下・左右から見て長方形をした形
個別的視野の検討と精緻化	・どこから見ても長方形の形をした立体 ・大小が問題となる場合は、辺の長さを与える

第1の相から第二の相にかけての直方体の意味の発達

ここで、大局的な数学的活動の第二の相における意味の発達について整理してみたい。第二の相における立体図形の意味の発達は、提示された複数の視野の確実な想起を前提としていた。こうした確実な基盤のもとで、それぞれの個別の視野に対する批判的議論が児童の責任において組織され、展開されていった。そして、児童から提示される素朴な疑問は、クラス全体で解決を必要とする新たな問題となり、それが解決される過程で、立体図形の見方はより一層明確なものになっていった。児童による素朴な疑問は、立体

図形の意味を洗練する機会となっているだけでなく、教師にとっても児童が発達させる意味の文脈を定める契機となっている。すなわち、教師は、個別の批判が提示され検討される際の具体的な文脈として、やがて主要な学習対象となる直方体と立方体を取り上げ、児童は、それらの対象において個別の見方に関する問題を議論し、解決していった。児童の自然な問題意識を新しい学習内容へと接続していくことによって、直方体の模型を構成するという合目的的な活動に取り組んでいくことになり、こうした構成活動を通じて、児童の立体図形における意味は、直方体の構成要素の関係についてのもの、しかも具体的な行為に根ざしたものとなっていった。さらに、直方体の構成活動は、「展開図」という新しい学習内容へと自然に接続していくとともに、次なる第三の活動の相の準備ともなっていった。

立体図形に関する複数の視野を批判的に検討し精緻化する活動を通して発達してきた意味は、一方で、児童どうしの意味の摺り合わせ(ﾈｺﾞｼｴｰｼｮﾝ)によるものであり、他方で、教師による意図的な文脈の設定によるものでもある。この意味において、この授業における数学的な意味の発達は、教師と児童による社会的相互作用に位置づけられると考えられる。

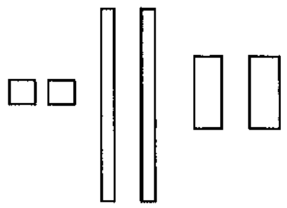
３．３．一定の視野の形式化と制度化

大局的な数学的活動の第三の相では、3 時間をかけて、直方体の意味が、視覚と行為に基づくものから言葉に媒介されたものへと発展していった。

最初の時間に、教師は、模造紙で作った大型の長方形を黒板に提示し、それらから直方体を構成させる操作を言語によって行うよう要求した。前項(3.2.(ウ))でも見てきたように、前時において、児童は自ら厚紙を用いて直方体のモデルを構成しているため、視覚と行為にもとづく活動は可能となっていたが、言葉を介して間接的に操作することは容易ではなかった。

教師は、児童の言葉による特徴づけと指示の不十分さと曖昧さを積極的に利用して、様々な反例を構成していった[No. 30: p. 23]。この授業で、児童の最初の言語的説明は、「6 つの面がある」というものであった(これについては、No. 13 (082): p.15 を参照されたい)。これに対する教師の反例から、同じ長方形では無理であることを表現するのに、児童はいろいろと戸惑っているようであった。このことに関して、鬼塚は、「3 種類の長方形があればできる」(172)と述べた。児童の中には、単に「3 種類」という表現では不十分であることに気づいているが、教師は、半ばとぼけて、3 種類の長方形を黒板に張りはじめる(179)。教室が騒然とする中で、岩木という児童が、黒板に極端な図を描き、下田の説明を補足する(208)。

208 岩木：[黒板に図を描く]えっと、こんな3種類だったらできないと思います。



岩木のこの説明では、言葉よりも図による例示が重要な手段となっている。こうした岩木の説明に対して、越山という児童は、さらなる説明を補足する[No. 31 (224): p.24]。越山の説明は、見取り図を参照しながらのものであり、言語的な説明では「ここ」という指示代名詞が多用され、全体として冗長なものとなっている。この説明に対して、他の児童(山田)は、「それ」という表現の反復を、簡潔でわかりやすい表現にすることを提案する。

234 複児童：わかりやすく。はい。はい。はい。はい。[騒然]わかりやすく。
235 教師：はい、山田君。
236 山田：えっと、長方形を、あっ直方体を作るときに、違う形と違う形を、えっと、くっつけるところの部分、部分を同じにする。

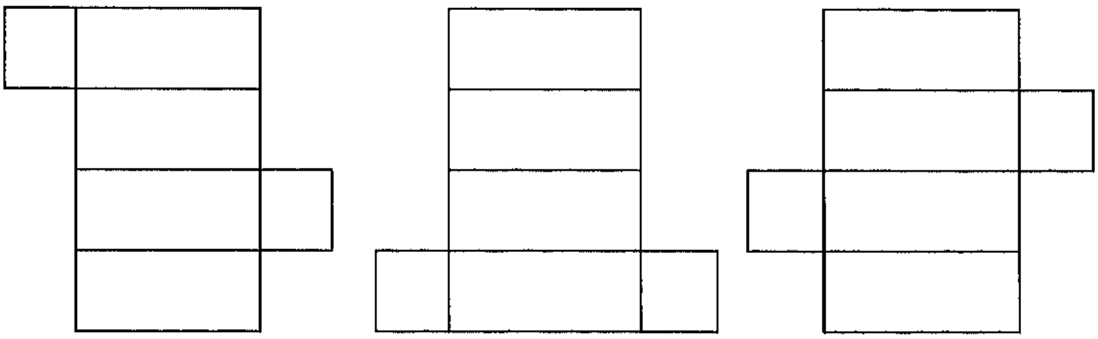
越山が「それ」と述べていることを、山田は「くっつけるところの部分」が同じになると言いなおしている。しかし、教師は、これに対して、その部分はどこかを指摘させると、結局はすべての辺がそうなっており、児童は再び困惑する。この問題に対して、児童は、触れ合った辺というのは全部のことであり、またそれらが「同じ」であるという表現も誤解を招く可能性があることを感じ、児童はさらに表現を明確にしようと試みている[No. 31: p.24]。このように、「触れ合った辺」は長方形の辺であることが明確にされたが、それらの長さについてさらなる明確な議論、例えば「触れ合った長方形の辺の長さは3種類である」といったような議論は起こらなかった。そこで、教師は、児童による言葉の説明を確認するために、直方体にはならない3種類の長方形を黒板に貼る[No. 32: p.24]。教師によるこうした揺さぶりに際して、東は、長方形の辺の長さが同じでなければならないことを指摘し、黒板に長さ(5センチ)を書き込むとともに、同じ辺に同じ色(赤色)をつける(404)。このように、教師は、児童による言葉の使用の曖昧さを利用することによって、直方体の言語的表現を洗練させている。また、教師は、児童が用いた「しかも」という表現(399)を取り上げ、そうした言葉を使用することを評価している(402)。こうした点に、言語による意味の構成へと児童を導こうとする教師の意図が推察される。

さて、児童による曖昧な表現が改良されたことを受けて、教師は、長方形の同じ長さ

の辺を触れ合わせる仕方として、意図的に間違った方法を行おうとする[No. 34 (433): p. 25]。すると、教室は騒然となり、筒井という児童が教師に叱責の言葉を投げかけている(439)。ここで終業のチャイムが鳴り出した。教師は、児童が指摘するように 4 つの長方形を並べ、それを児童の協力のもとでテープで張り、実際に、直方体が構成されることが示された。この授業における教師の意図的な反例を通じて、児童の視覚的・行為的な意味は、言葉と関わり始めていった。

次の時間では、紙で作られた 6 つの長方形から直方体を組み立てる原型(展開図)を構成し、そこにおける辺や面の関係を、(実際に操作することなく)言葉を手段として検討を行った。こうした言語活動を通じて、児童の注意は、言葉を補助とした具体物の操作から、具体物を補助とした言葉の操作へと移行し、直方体の意味において言語的な要素が優勢となっていた。アの種類の直方体(すべてが長方形からなるもの)については、先項(3.2.(ウ))において取り上げた。

アの直方体に続き、この授業ではイの直方体(正方形と長方形からなるもの)について議論がなされた。そこでは、もはや具体的な長方形を用いず、図によって様々な展開図を構成することが可能であることが議論されていった。これに関して、水出、越山、岩崎が 3 種類の展開図を図示した。



越山　　水出　　岩崎

こうして新しいものを含めた 3 つの展開図が想起された後、教師は鍵となる発問をする(297)

297 教師：この水出君、岡山さん、越山君、3 通りもあるのね。
298 複児童：（・・・）はい。はい。はい。もっとあるよ。はい。はい。

このように、イに関して他の展開図の構成も可能であることを確認しようとしている際に、ある児童が同じことがアの直方体でも言えると主張した[No.35 (308): p. 26]。それを受けて、児童は、イの種類の直方体について、新しい展開図のバリエーションを次々と列挙していった。そうする過程で、児童は、展開図の種類には限りがあるが、それを

すべて列挙するのは時間の無駄であると主張する[No. 36: p.26]。これを受けて教師は、東と言う児童の意見(展開図は 11 種類あること)を紹介し、この問題に関するさらなる探究を示唆し、議論を終えている[No. 37: p. 27]。こうした教師の導きは、直方体について議論を、個別の図的なものから、あらゆる可能性を含んだ場合を言語的で概念的な意味に基づいて行うようにしているものと考えられる。

最後の時間では、児童は「自分なら直方体をどう言うか」という主題のもとで、直方体の特徴を言葉によって表現することが試みられた。ここでは、言葉が主要な対象となり、言語(による図形の構成要素の記述)を意識的に操作することが主要な活動となった。そして、紙で作った具体的なモデルや図は、必要に応じて参照される二義的なものとされた。この授業では、直方体に関する様々な言語的記述が提示されるとともに、それに対する異議が表明された。その際には、言葉のつながりについての判断を、言葉によって反論する児童も見られたが、基本的には、具体的なモデルを議論の補助手段として言葉の結びつきの適否を示すことがなされた。

この時間では、口頭で述べることだけではなく、ノートに書き言葉で記述することを行った。そして、書けた児童を全員起立させ、順番に発表させていった。そして、納得できる説明があった場合に、着席するように言った。教師は、児童を指名していき、彼らの発表の後に、納得した児童を座らせた。先項(3.2.(ウ))で取り上げたように、児童の説明は、若干の新しい属性を取り入れながらも、基本的に同じ属性を反復的に列挙するものであった。実際、松畑や浅川は、山田や石山や東が似よりの説明をした後にも、本質的に同じものを繰り返している(No. 22: p.20)。このように、児童による直方体の説明は、それがもっている種々の属性を列挙することからなっており、他者のものとの微妙な相違は意識されていなかった。そうしたこともあってか、教師は、児童の説明をクラスの他の児童とともに丁寧に確認するとともに、黒板に明示化し、整理していった。こうした教師による系統的な明示によって、児童の注意は、複数の説明の相違へと向けられていった。実際、先項でも述べたように、ある児童が東と石山の説明の異同に気づき、それを指摘するとともに、石山本人も東の説明と異なっている部分だけを指摘することができた(No. 24: p.20)。

この授業の後半で、教師は、列挙され、整理された複数の説明の中で「わかりやすいもの」はどれかを問うている。多くの児童にとって、直感的な説明が分かりやすいものであり、受け入れやすいものであった。実際、児童は、山田による説明が分かりやすいものとして取り上げた[No. 38: p. 27]。こうした分かりやすい説明に対して、浅川はそれが不十分であることを主張する(275)。この意味で、説明としてどのようなものが適切であるかに関して、児童の間に理解の違いがあるように思われる。ただし、山田自身も、

自分の記述的な説明が直方体を決定するには不十分であることがわかっている(283)。こうしたことから、児童にとって、直方体は、様々な属性を持っていることは理解でき、それを言語的に表現することもできるが、彼らにとって機能的な意味は、6つの長方形からなるという単純な属性からなるものであると言える。

ここで、大局的な数学的活動の第三の相における意味の発達について整理してみたい。この相における直方体の意味の発達は、視覚的で図的なものから、言語的・概念的に媒介されたものへと次第に移行していった。最初は、黒板に張られた長方形を視野にいれつつ、それらから直方体を構成する操作を言葉によって行おうとした。次には、直方体を組み立てる原型(展開図)における辺や面の関係を、実際に操作することなく言葉を手段として検討を行った。こうした言語活動を通じて、児童の注意は、言葉を補助とした具体物の操作から、具体物を補助とした言葉の操作へと移行し、直方体の意味において言語的な要素が優勢となっていた。最後の時間では、直方体の特徴を書き言葉と話し言葉によって表現することを試み、直方体の意味は、言語的・概念的なものになっていった。しかしながら、児童にとって言語的・概念的な意味は、直方体の多種多様な属性の列記からなっており、彼らの思考において機能的な役割は果たすようなものとはなっていなかった。こうした点に、このクラスの児童の意味(定義)の発達の特徴が現れているように思われる。

4．議論

ここで、このクラスの一斉授業において社会的に構成される数学的活動の特徴を、「社会数学的活動論」の観点から議論する。

このクラスの一斉授業において社会的に構成される数学的活動は、社会数学的活動論の2つの側面(「大局的数学的活動への局所的参加」,「社会的相互作用による数学的意味の発達」)ならびに「数学的条件・定義の機能」に関して整理すると、次のような表になる。

大局的数学的活動の相	条件・定義の機能	立体図形の意味
複数の視野の提示	多様な見方でできるよう条件づけられた未完結な問題に対し、暗黙的な条件・仮説を設定し、視野を確定する。	個別・具体的な立体に対する主観的・感覚的・視覚的なイメージに基づく未分化な意味が発達する。ここでは、立体の構成要素は無自覚的に利用されている。
個別的視野の検討と精緻化	個々の視野に関して派生する議論や反論を解決する過程で、それぞれの視野が拠って立つ条件・仮説を明確にする。	一定の立体の集合において、その構成要素(頂点・辺・面)の関係についての意味が明確に発達する。ただし、ここでの意味は、図的表象および具体的な行為(移動や結合)に基づいている。また、言語的手段も用いられるが、言葉を補助とした図の操作からなる。
一定の視野の定式化と制度化	学級共同体において共有された複数視野の中から価値あるものが公的なものとして制度化され、言語を用いて明確に定義され、形式化される。	図的・操作的なものから、言語的・概念的に媒介されたものへと移行する。ここでは、言葉を補助とした図の操作から、図を補助とした言葉の操作へと移行し、言語・概念に媒介された意味が優勢となる。しかしながら、立体の属性の並列的記述であり、定義としての本来の機能は果たさない。

「社会数学的活動論」からみた数学的活動の構造

このクラスの一斉授業における大局的な数学的活動の構造は、基本的に連続する３つの相(「複数の視野の提示」，「個別の視野の洗練」，「一定の視野の定式化」)から構成されていた。実際、観察を行った他の単元(「面積」、「位置の表し方」、「資料の整理」)においても、同じパターンのもとで授業が展開されていった。この意味で、同じ教師による２年間持ち上がりのクラスでは、こうした一定の大局的な数学的活動のパターンがある程度慣習(ルーティン)として社会的に構成されていることが示唆される。このように、教師は、「複数の視野を提示する」ことと、「提示された視野を検討する」こと、そして「明示化された視野を理論的・概念的に形式化する」ことを異なる活動の相として区別しており、逆に、授業における活動に一定の特質をもたせ、そうした活動に児童を意図的に参加させているという意味で、大局的数学的活動の局所的な相が構成されていると考えられる。

また、大局的な数学的活動の各相においては、数学的条件や定義が重要な機能を果た

している。実際、「複数の視野の提示」においては、教師は、多様な見方ができるよう条件づけられた課題(未完結な問題)を設定し、児童は、未確定な問題状況に対して一定の条件・仮説を設定することにより模(かたど)り、一定の視野のもとで問題を定式化している。次の「個別的な視野の検討と精緻化」においては、個々の視野に関して派生する議論や反論を解決する過程で、それぞれの視野が拠って立つ暗黙の条件・仮説を明確化する。さらに、「一定の視野の形式化と制度化」においては、学級共同体において共有された複数視野の中から価値あるものが公的なものとして制度化され、言語を用いて明確に定義され、形式化される。

さらに、このクラスの一斉授業における数学的意味の発達は、大局的な数学的活動の各相での社会的相互作用の特徴と密接に関わっているように思われる。すなわち、大局的な数学的活動が展開するにつれて、数学的意味は、視覚的・感覚的イメージに基づく漠然とした未分化なものから、図的で経験的な操作に基づくものへと発展し、さらには言語に媒介された抽象的で概念的なものへと分節化していく。

以下では、これら 3 つの相に関してより具体的に述べることにする。

第一の相(「複数の視野の提示」)では、多様な見方ができるよう条件づけられた課題(未完結な問題)に対して、児童は、未分化ながらも一定の条件・仮説を設定し、一定の視野のもとで問題を模っていった。

この相での「数学的参加構造」の特徴は、異なる複数の視野を提示したり似よりの見方を補足したりすることは受け入れられるが、提案された見方に対して異論や反論が述べられることは奨励されず、むしろ消極的に扱われる点に見られる。すなわち、この活動の相では、複数の視野が、曖昧な部分を含みつつも、提示され、補足されることに力点がおかれている。このように、教師は、「複数の視野を提示する」相と次の「提示された視野を検討する」相を異なる活動の相として区別している。

また、この相において構成される数学的意味は、数学的参加構造と密接に関わっている。実際、この相において構成される立体図形の意味は、個々の具体的な積み木に対する主観的・感覚的・視覚的なイメージに基づく未分化な意味であるからである。もちろん、ここでは、立体の構成要素が無自覚的に利用されているが、それはまだ明確な思考の対象とはなっていない。

第二の相(「個別的視野の検討」)では、未分化で漠然とした意味は、教師や他の児童との相互作用を通じて洗練され、精緻化されていく。児童が提示する複数の視野(研究プログラム)は、それを提示する当人にとっても漠然とし未分化なものであるが、それがある程度有望であり、また、クラスでの他者との議論を通じてやがて洗練され、精緻化されていくことが予期されている。実際、児童から提示された視野の中には、クラスの中で

賛同を得られるものもあるが、議論や反論を招くものも含まれている。かくして、クラス全体で、個別の視野を検討していく過程で、解決を要する新たな問題が生まれ、それが解決される過程で、それぞれの視野が拠って立つ前提条件や仮説が明確なものとなり、その結果、個々の視野が精緻化されていく。

この相における数学的参加構造は、個別の視点を批判的に検討する活動への児童による責任ある参加に基づき組み立てられている。児童による責任ある参加は、正当な根拠に基づく批判だけではなく、素朴な疑問を提示することによっても展開される。すなわち、たとえ些細で未分化な疑問であっても、敢えてクラスに提示することが、論議を誘発し、理解を深めるうえで重要であるとみなされている。他方で、教師は、児童の批判的な意見を整理するとともに、クラス全体で共有するように丁寧に取り扱う役割を負っている。ただし、教師は児童どうしの活発な議論を調整する役割を演じているだけでなく、個別の視野が議論される際の具体的な参照枠組みを与えることにより、児童の参加を間接的に組織化するとともに、数学的意味が発達する文脈をも設定している。

意味の発達に関しては、第一の相では、個別・具体的な積み木が考察の対象となっていたのに対して、第二の相では、一定の具体的な立体の集合において、それまで無自覚的に用いていた構成要素(頂点・辺・面)の関係が分化され明確なものとして意識化される。ただし、ここでの意味は、図的表象および具体的な行為(移動や結合)に基づいている。この相では、言語的手段も用いられるが、それはまだ思考における明確な対象とはなっておらず、図の操作に付随するものとして用いられる。すなわち、児童は、言葉によって図形を操作する活動に取り組みつつ、自分たちの用いる言語の曖昧さを正しつつ、立体図形の構成要素の関係を意識化していく。ここでの言語活動は、直方体を定義するというよりも、むしろ、言葉を補助手段として図的表象を操作するものであり、言葉は主要な思考の対象とはなっておらず、図的表象に対する付随物である。

第三の相(「一定の視野の定式化と制度化」)では、学級共同体において共有された複数視野の中から価値あるものが公的なものとして制度化され、言語を用いて明確に定義され、形式化されていく。図的・操作的なものから、言語的・概念的に媒介されたものへと移行する。ここでは、言葉を補助とした図の操作から、図を補助とした言葉の操作へと移行し、言語・概念に媒介された意味が優勢となる。ここでは、言葉が主要な思考の対象となり、言語を意識的に操作することが主要な活動となる。そして、図的表象は、必要に応じて参照される二義的なものとされた。すなわち、立体図形(直方体)は、図形の構成要素の言語的で概念的な関係によって組織化される。しかしながら、立体の属性の並列的記述であり、定義としての本来の機能は果たさない。実際、この授業では、立体図形(直方体)に関する様々な言語的記述が提示されるとともに、それに対する異議も、言

語的になされはじめるが、完全に言葉の間の概念的な関係に基づく判断ではなく、図的な表記を議論の補助手段として用いている。

最後に、本観察研究から見いだされた数学的活動の構造について、本論文での理論的研究との関連性を2点述べたい。

第一に、大局的な数学的活動の3つの相は、第2章で議論した可謬主義における「科学的研究プログラム論」と合致している。すなわち、3つの相は、未分化な理論が長期的な視野のもとで、他の複数の理論的視野と競合ないし相互作用しながら、徐々に展開し、精緻化し、優勢化していく過程として理解することができる。可謬主義的数学論においてみてきたように、いずれの理論も異論や反論から逃れることはできないが、新しく生まれようとする理論は、即座の批判や論駁にさらされるべきではなく、むしろ長期的視野のもとで寛大に扱われなくてはならない。この意味で、数学的活動の相を区分する授業の組織化は、新しく生まれつつある理論を批判や論駁から防御するための、さらには、児童を大局的な数学的活動に部分的・局所的に参加させるための教授上の手だてであると理解される。自然科学における優れた研究プログラムは固有の防御帯と発見法を備えているが、児童による新しい発想では、そうした機構が備わっていない場合が多く、教師は授業における不十分な機構を補完したり肩代わりしたりする役割を果たしているように思われる。

第二に、この大局的な数学的活動の3つの相に連動して発達する数学的な意味は、ファン・ヒーレの思考水準の第0(基底)水準と第1(記述的)水準に対応している。実際、この観察されたクラスにおける立体図形の意味は、多くの属性が網羅的に記述されており、また論理的に秩序づけられてはいないものであった。したがって、そうした水準では、本来の意味での定義が機能するまでには至らなかった。しかし、この結果は、小学校中学年における意味の発達の水準としては、妥当なものであるといえよう。この意味で、当然のことであるが、本調査研究から見いだされた数学的活動の構造は、小学校の中学年における特徴を表しており、より高い水準における数学的活動の構造については、さらに具体的な学校・学年段階において検討しなくてはならない。

第２節　社会数学的活動論に基づく規範的研究

本章では、「社会数学的活動論」を視点として、学校数学の一斉授業における数学的活動の規範的研究を行う。本論文では、高等学校において、反証主義的・可謬主義的数学に基づく小規模な教授実験を組織する。反証主義的・可謬主義的な数学的活動を反映する教材と指導計画は、筆者により構想され、2 名の大学院生の協力を得て実施された。本教授実験では、2 つの研究課題が設定された。一つは、ポリア・ラカトシュ的な数学的活動への導かれた参加の可能性を検討すること、もう一つは、証明や反例を道具として数学的知識を発展させることの可能性を検討することである。

１．教授実験の計画と実施

教授実験は、平成 8 年 8 月 21 日から 23 日の 3 日間にわたり、石川県立の高等学校第 2 学年生 4 名を対象として行われた。実際の授業は、平素よりこれらの生徒に数学を指導している現職派遣大学院生が行った。また、1 名の大学院生が共同研究者として、この教授実験の参与観察を行った。

本教授実験では、社会数学的活動論の枠組み(「大局的数学的活動への局所的参加」、「社会的相互作用による数学的意味の発達」、)に照らして、次の 2 つの課題が設定された。

ア）反証主義的・可謬主義的な数学的活動へ生徒が正統的かつ周辺的な参加を可能にするために、教師はどのような支援を提供することが可能であるか。
イ）生徒が構成する数学的意味が、教師により提供される証明批判や反例とどのように相互作用するか。

教授実験の素材としては、本論文の第 2 章で取り上げてきた「多面体に関するデカルト・オイラー予想」が用いられた。この素材の選定は、理論的かつ実践的な配慮によるものであった。理論的には、この素材は、ポリアによる反証主義論(Polya, 1954a)[15]とラカトシュによる可謬主義論(Lakatos, 1976)[16]の素材として共通に取り上げられており、実践的には、生徒たちがそれまで学んできた(もしくは身につけている)数学の内容の有無と差異に影響されず、初歩的な予備知識で取り組むことが可能であることを配慮した。

[15] Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning; vol.1.*.Princeton University Press.
[16] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*, Cambridge University Press.

3 日間の教授実験では、この素材は次のように取り上げられていった。

先ず、「デカルト・オイラー予想」を素朴な推測と論駁との弁証法を経ながら再発見するような課題の設定と発問の構成を試みた。具体的には、基本的な 9 種類の多面体について、具体的な作業に基づき、頂点、辺、面の数をそれぞれV, E, Fで表すとき、$F+V=E+2$なる関係が成り立つことを推測として導いた。教授実験では、こうした推測の構成に十分なゆとりを設けることとし、これを 1 日目の課題とした。

これを受けて、2 日目は反証主義に基づく決定的実験がテーマとされた。ここでは、生徒を反証主義的な数学的実践へと誘うよう、教師の側で潜在的な反証事例を探究するような実験の系列が構成された。その際には、教師の側から、各々の決定的実験が、各時点での推測を験証する上で適切であり、推測の進展にとって尤もらしい接近法であることを示唆するような説明と問いかけをするように心がけた。こうした験証の積み重ねで、当該の推測が反証事例(反例)により論駁されるまでが 2 日目の学習内容であった。

教授実験の 3 日目は、可謬主義的数学の実践へと生徒を誘うことに向けられた。これに関して、先ずは、教師の側で、コーシーによる証明(思考実験)を丁寧に説明することとした。その上で、生徒に、従来の証明の考えと対比できるように、証明分析の考えを説明することとした。その際に、生徒の側で証明を構成する各補題に照らして、それを論駁するような事例を探究する試みを行った。3 日間の実験授業の内容は、概ね上で述べたような段取りで計画され、実施された。教授実験の詳しい計画を示した学習指導案と生徒に配布した教材は、いずれも資料として巻末に添付した。

本教授実験を通じて得られたプロトコル・データは、本研究の理論枠組みである社会数学的活動の 2 つの観点、すなわち「大局的数学的活動への局所的参加」と「社会的相互作用による数学的意味の発達」から分析された。

「大局的数学的活動への局所的参加」に関しては、反証主義的・可謬主義的な数学的活動へ生徒が正統的かつ周辺的な参加を可能にするために、教師はどのような支援を提供することが可能であるかを、数学的条件や定義の運用を視点として分析する。本教授実験では、教師の側で「決定的実験」や「証明分析」の模範を示しつつ生徒への参加を促していき、彼らが負う責任の程度を次第に増大するように教師の側で支援の手を緩めるよう授業が構成されている。反証事例を意識的に探る決定的実験では、多面体の外延が徐々に拡大されていくとともに、その定義の内包が次第に明確になっていく。また、反例に基づく証明分析は、暗黙裡であった多面体の定義や議論の前提条件が顕在化する。このように、決定的実験や証明分析を道具として知識を発展させるには、数学的条件や定義を分析することが本質的なこととなってくる。かくして、反証実験や証明分析の模

範を示しつつ生徒への参加を促すことは、実質的に数学的条件や定義を思考の道具として運用するように模範を示し、次第にそうした活動が生徒自身の手によって遂行可能なように教師の側から支援の手を緩めていくことを伴う。本教授実験では、生徒が数学的条件や定義を徐々に使用していけるようになる実際の態様が、教師の支援の程度との関わりで分析されることとなる。

「社会的相互作用による数学的意味の発達」に関しては、生徒が構成する素朴な数学的推測を、教師から提供される証明や反例を道具として利用しつつ洗練していく過程を、数学的条件や定義を分析の単位として検討する。実際、証明や反例を意識的に考察することは、議論を構成する前提条件や定義に照らして自らの素朴な知識や推測を検討することが必要となる。数学文化を代表する教師から提示された慣習的な条件や定義を意識的に検討することを通して、それまでインフォーマルで暗黙裡であった自らの前提や定義が意識化されるとともに、公式なものと非公式なものとの調整がなされなくてはならない。かくして、この教授実験では、教師という公的な他者から提示される形式的な慣習と、生徒の持っている非形式的な知識とが相互作用する実際の態様が分析されることとなる。

2．大局的数学的活動への局所的参加

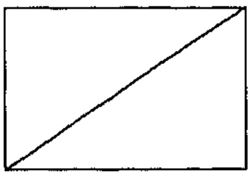
大局的数学的活動への局所的参加に関して、本節では、反証主義的な数学的活動へ生徒を正統的かつ周辺的に参加させていく教師の支援の特徴を、数学的条件や定義の運用を視点として分析する。ここでは、教授実験の前半部分(1日目と2日目)における教師による二つの支援形態に着目する。それらは、1）多面体に関する意識的な推測と論駁を通じて推測を漸次洗練してゆく活動へと生徒を誘うこと、2）一度構成された推測に対して手厳しい反証実験を組織する指針を生徒に示すこと、である。これらの二つは、ポリアのいう「暗示的接触」と「支持的接触」にあたる。本節では、数学文化の代表者であり熟達者でもある教師が生徒に模範を示しつつも、生徒の側に遂行する責任を次第に移譲するよう教師の側で支援の手を緩めてゆく過程を分析する。

2．1．推測と論駁への誘い

教授実験第一日目では、「デカルト・オイラー予想」を素朴な推測と論駁との弁証法を経ながら再発見するような課題の設定と発問の構成を試みた。実際には、いろいろな多面体の頂点、辺、面の数を数え、それらを表に記入し、それらを観察することを通じて、それらの間に成り立つ関係について推測を構成した。

[1] [17] 教師により、3日間の学習についての概説がなされた。素材として「多面体」について取り上げることを述べ、この分野に関する生徒たちの予備知識を確認していった。生徒たちは、中学校の経験から素朴なレベルで多面体の知識を持っていた。中学校での学習についての雑談を交えながら、教師は、実験授業の緊張をほぐし、打ち解けた中で自由に話し合えるような雰囲気作りに心がけているようであった。

[2] この問題に関するポリアの扱い方に習い、問題の導入にあたり、多角形の頂点と辺の関係についての問題が取り上げられた。その際に、教師から、頂点と辺の数をそれぞれV, Eなる記号で表現することが紹介された。ここで、参与観察者にプリント[1-1](巻末の資料2に所収)を配布してもらい、三、四、五角形において$V=E$なる関係が成り立つことを確認し、ついでn角形においても同じ関係が成り立つことに気づくことを期待した。1人の生徒(東郷)がn角形において、$V=E$が成り立つと述べた。しかしながら、この意見は簡単には合意に至らず、予定の時間を大幅に超過することになった。この原因の一つは、n本の辺を描くことができないために、図形が曖昧に描かれていることにあると思われる。実際、曖昧に描かれた図形に対して、新川は「いつでもVとEがイコールではないと思う」(071)[18]と反論している。しかし、より本質的な原因は、多角形の理解にあるように思われる。例えば、 島尾は次のような反例を提示してくる。



島尾の反例

島尾は、この図形を5角形であるとみなした場合には、$V=E$なる関係は成り立たないことを指摘しつつも、自らの反論が風変わりなものであることを躊躇している。実際、島尾は、「そんなの、なしよね？」(114)、「なしよね、そんなん。なんでこんなこと深く考えるんだろう。」(118)などと述べている。こうした躊躇を伴った反論や反駁に対して、教師は逆に自由な発想で意見を述べるよう奨励し、「深く考えるのが目的でやっているから、今のような意見をどんどん出していって。思っていることをね。」(128)と述べている。問題の導入におけるこうした議論は、当初予期してはいなかったが、逆に、この教授実験の趣旨に合致する活動、すなわち数学的対象についての定義を検討するこ

[17] 鍵カッコ付きの数字([1]など)は、巻末資料2の学習指導案の項目をあらわす。
[18] プロトコルにつけられた通し番号である。

とが最初から発生するとともに、生徒が気後れせず議論に参加する先付となったと思われる。

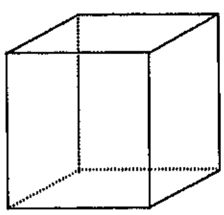
[3] 多角形について$V=E$なる関係が成り立つことが合意に達したことを受けて、これと似よりの関係が多面体においても成り立たないかを考えてみたい旨提案し、「多面体の頂点，辺，面の数を数えよう」という課題を提起した。

[4] まず、生徒は、多面体として自らが挙げた立方体と三角柱について、頂点、辺、面の数(V,E,F)を数えていった。その際、教師は、色画用紙で作った大小２つの立方体と三角柱の模型を与えた。この作業を通じて、教師は、生徒が課題に必要とされる基本的な事柄について知っており、それを数えることができるかどうかを確認した。生徒たちはさしたる困難もなく、この課題をやり遂げることができた。

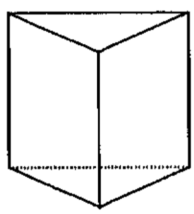
[5] 指導案では、多角形の事実との類比で、「FはVとともに増す」という素朴で自然な推測を立てた後に、良く知っている具体的な多面体(立方体や三角柱)で検討する予定であった。しかし、教師は、計画を変更し、V,E,Fを数えることに慣れさせてから問題を提示することとした。こうした変更をしたのは、先に述べたように、多面体の構成要素についての彼らの理解度を確認しておきたかったからであった。生徒は、それら２つの多面体に関して「ＦはＶとともに増す」という推測が成り立つことを確認した。そこで、教師は、２つだけでは少なすぎるので、もっとたくさんの多面体について調べることにした。

[6] そこで、教師は、基本的な９種類の多面体が描かれたプリント[1-2] と[1-3]を参与観察者に配布してもらい、十分なゆとりを設けつつ、それらの頂点、辺、面の数を数え、表に記入させた。

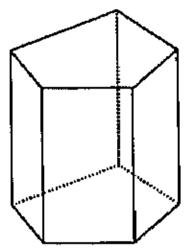
I.



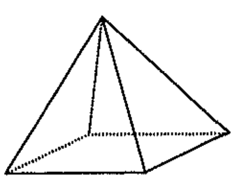
II.



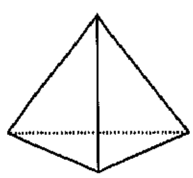
III.



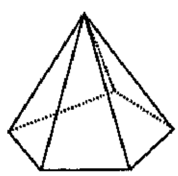
IV.



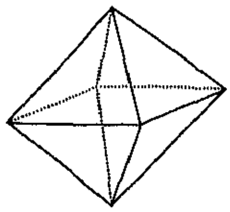
V.

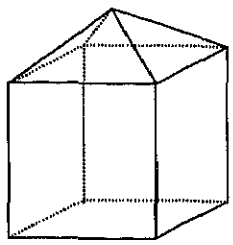


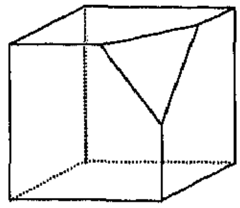
VI.



VII. VIII. IX.







それと同時に、教師は補助教具として、色画用紙で作成したそれらの模型も与え、作業の助けとした。こうして、生徒たちは、五角柱、四角錐、三角錐、五角錐、八面体、VIII「塔」、IX「端を切られた立方体」などについて、V, E, F を数え表に記入していった。その際に、「塔」、「端を切られた立方体」については、生徒たちに自由に意見交換をさせ、名前をつけさせた。彼らは、「塔」を「やっちゃんの家」、「端を切られた立方体」を「東郷の部屋」と名付けた。十分な時間を取った後に、全員でそれぞれの立体について V, E, F の数が確認された。

[7] 9つの多面体から得られたデータから完成した表をもとに、「F はV とともに増す」という素朴な推測がチェックされ、「F はV とともに必ず増すとはかぎらない」ことが見いだされた。東郷は、面の数が増えているのに、頂点の数が変わらない2つの多面体を発見した。また、新川は、 正八面体と正六面体の二つの多面体では、F が増えたときに V が減ってしまうことを発見している。こうして、生徒たちは、自らの活動を通して、当初の素朴な推測を反駁することができた。

[8] 最初の素朴な推測が倒されたことを踏まえ、教師は、何か別な推測を立てること、別の規則性を考えることはできないだろうかと、生徒に問うた。しかし、生徒は他の推測を新たに構成するような動きは見せなかったが、東郷は E については何も検討していないことを指摘した。そこで、教師は、「E は F とともに増すかどうか」、「E は V とともに増すかどうか」という似よりの推測を提示し、検討してみてはどうかと提案し、黒板に二つの推測を書いた。教師による提案が、現時点での生徒の活動にとって十分当を得たものではなかったように思われる。実際、島尾は、参与観察に「あーいうふうに考えなダメなん?」と問いかけている。

教師の提案は少々恣意的な面もあったが、教師の意図は、これらの二つの推測を調べるために、E の値の小さい順(正確には増大しない順)に並べ替えた表を作成するという合理的方法を生徒に紹介したかったからであった。実際、最初の推測をテストした際には、生徒は表を無統制に眺めており、偶然反例を発見したのであった。そして、今回も、生

徒たちは最初に完成した表において検討しようとしていた。そうした経験に鑑みて、教師による提案は、生徒にとっても合理的なものとして受け止められたようであった。こうした方法は、本教授実験において、熟達者としての教師が生徒に提示する合理的な攻略法の一つであった。そこで、プリント[1-4]を配布し、9つの多面体についてEが増すように表を並べ替えさせた。表を完成させた後、当該の推測について験証させた。ここで、生徒たちはすぐに複数の反例を発見することができた。しかし、生徒たちは、合理的な方法によって推測がテストされたことよりも、むしろ、これまで立てられた推測が3つとも論駁されてしまったことに関心を向けていたようであった。

[9] 多面体の頂点、辺、面の二つの間にはいずれも規則性を見いだすことはできなかった。そこで教師は、新たに整理した表から何か別の関係を導き出すことはできないかどうかを考えるように提案する。ここでの教師の意図は、頂点、辺、面の二つの間の関係ではなく、それら全体について何らかの関係が成り立っていないかどうかを考えることであった。しかし、生徒たちは、9つの多面体全体において成り立つ規則性に着目していこうとしなかった。その意味で、新たに作成した表に基づいて検討を進めていくことは教師にとって当を得た活動であったが、生徒にとっては何ら有望な活動には写らなかったようである。

表が完成したことを受けて、教師は、そこから何らかの関係を見いだすことを生徒に問うていく[No.1 (828): p. 54]。教師は、9つの多面体すべてに共通する一般的な関係を期待していたが、生徒は、個別の多面体におけるV, E, Fの間にある関係に着目する。実際、彼らは角錐の場合や、角柱の場合において成り立つ個別的な関係を議論しはじめた。例えば、東郷は、角錐については「$F=V$」(837)という規則が成り立つと主張し、それを具体的に説明した。また、新川は、東郷の意見から発展して、角柱については、$E=V+\frac{1}{2}V$という推測を構成し、「1.5 倍に増えている」(851)と述べている。これと似よりの推測として、島尾も、「n角錐において、$E=2n$」という推測を立て、他の生徒もそれを確認している。このように、生徒は、個別の多面体の種類においてのみ成り立つ規則を求めようとしており、すべての多面体において成り立つ規則性には注意が向いていなかった。そこで、教師は、EとVの間の関係だけではなく、Fも何か関係づけることはできないかと尋ねた(871)。しかし、こうした東郷の発言(872)にみられるように、一般の多面体についての規則を構成してゆくことは比較的困難な課題であるように思われた。

[9] その後も、生徒から提案される推測は、個別・具体的な多面体に関するものであった。そこで、教師は、「角錐」とか「角柱」などと多面体を限定するのではなく、多面体を全体的に捉えて、全ての多面体において成り立つような関係式を考えるように促し

てゆくが、生徒たちは、思うように視野を広げることができず、集中力がやや散漫になってきたようであった。

そこで、教師は、現段階での問題解決の進捗状況を踏まえて、目下、どのように取り組むことが合理的であるかを生徒に示唆していこうとした。実際には、指導案で予定していたように、「FとVが助け合って増すこと」、つまり、「FとVのどちらもEとともに増しはしなかったが、それらは全体的に見て増すように見えること」を生徒に示唆しようとした。しかし、まさにその時に、東郷が、そのことを発言したのであった[No. 3: p.55]。東郷は、それまでの学習において、FとV、EとF、EとVがともに必ず増すとはいえないことを学んでいて、所々VやFが減るような所はあるけれども、よく見ると、V、E、Fはどれも全体的増していることに気づいたのであった(980)。こうしたことの定式化にはすこし時間を要した。最初、東郷は「横を一列一列足していったら、上がっていく」(971)という意見を出してきた。これに対して、教師は、この意見を取り上げ、それが重要なポイントであることを強く示唆している(970)。そして、生徒は、9 つの多面体をV、E、Fを、Eの少ない順番に並べた表においてV、E、Fの総和を計算することにより、Eが増えるに従って、$V+E+F$の値も徐々に増えていることを発見したのであった。このことに関して、教師は、「FとVが助け合って増加していく」ことを指摘するつもりであったが、それを示唆する以前に、島尾が目標とする推測を発見したのであった(984, 986, 988)。こうして、推測と論駁のジグザグを経て「デカルト・オイラー予想」が生徒たちにより構成されたのであった。

2．2．手厳しい実験の組織

大局的数学的活動への局所的参加に関して、ここでは、一度構成された推測に対して手厳しい反証実験を組織する指針を生徒に示しつつ、生徒の側に遂行する責任を次第に移譲するよう教師の側で支援の手を緩めてゆく過程を分析する。

[1] 第1日日では、9個の多面体のデータについて意識的推測と論駁というジグザグとした過程をへて、一つの推測（$F+V=E+2$）が構成された。ポリアの言葉では、推測が 9 つのデータの分析から「暗示された」ということになる。この意味で、次なる探究は、暗示された推測を「支持する」思考実験を組織し、推測をテストにかけ、推測の信頼性を高めることである。

教授実験の2日目は、支持的接触を得る数学的な方法として、反証主義にもとづく厳格な実験を組織することを生徒に示すことを目的とした。ここでは、反証主義的な数学的実践へと生徒を誘うよう、教師の側で潜在的な反証事例を探究するような実験の系列が構成された。その際には、教師の側から、個々の実験がその時点における推測を験証

する上で適切かつ尤もらしいものであるよう説明するように心がけた。こうした験証を積み重ねていくことで、当初一般的に成り立つと思われていた「デカルト・オイラー予想」が論駁されることを経験する。これが、2日目の目標であった。

[2] では、暗示された推測の支持を得るために組織するテストとしてどういうものが合理的であろうか。ここで、教師は、ポリアの示唆に習い、9つのありふれた多面体から得られたこの推測が一般的に成り立つとすれば、何よりも先ず、「正多面体」、つまりもっとも純粋な5つの多面体においても成り立つはずである、という考えを生徒に提示し、彼らの探究を方向づけた。

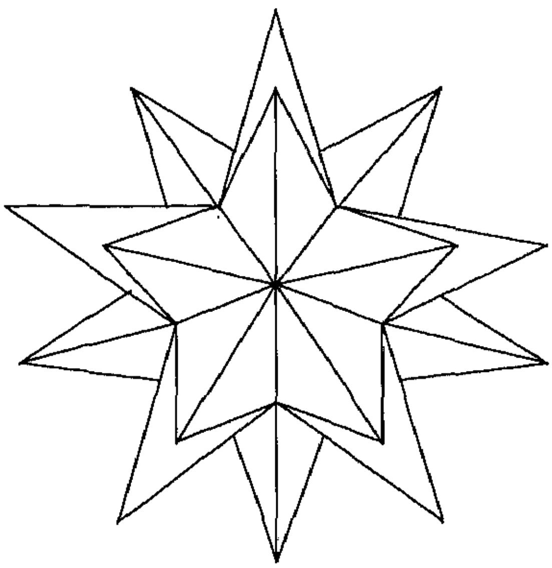
最初に検討した9つの多面体には、既に3つの正多面体が含まれていた。よって、ここで、験証するのは、「正二十面体」と「正十二面体」となる。生徒は、書かれた図や具体的モデルを用いて、V、E、F の数を調べていった。彼らの方法は、当初われわれが予想していたように、個別的・具体的に数えることであった。そこで、教師は、数学の実践の熟練者として、より原理的で合理的な方法を生徒に手ほどきをした。その方法とは、多面体の構成についての概念的な考えに基づくものである。例えば、正二十面体はその名の通り20枚の正三角形からなっている。よって、明らかに、$F=20$ である。今、これらの三角形をバラバラにした際に、辺の総計は60本となる。正二十面体は、それぞれ2本の辺が合わさって構成されているので、辺の数は $E=30$ 本となる。他方で、頂点の総数も同じく60個であり、5枚の三角形が1頂点に集まっている。よって、頂点の数は $V=12$ 個となる。これは、生徒の方法に比べて、概念的かつ合理的で手際よい方法でもある。

教師は、生徒に適度な参加をさせつつ、この方法を実演していった[No. 4 (001～013): p.56]。こうした教師の実演は、生徒によって大体理解されたようであった(014)。教師は、新川の応答が不明瞭であったため(020)、もう一度、やり方を簡単に触れた後、生徒に、「正十二面体」について F、V、E の数を調べてみるように言っている(021)。ここで、参与観察者は、正十二面体が描かれたプリントを配布し、生徒は、独力で課題に取り組んでいった。教師は生徒の作業に目を配りながら、個別に対応しつつ、約7分程経ってから全員が一応の解決をしていることを確認し、生徒に説明を問うている[No. 5: p.58]。教師は、「どんなふうに解きましたか？」(060)と質問する、橋爪は「あーゆうやり方でやらんなんが？」(061)と問い返しているように、生徒は、教師が期待した合理的で概念的な方法を用いることに抵抗を示している。結局、教師の期待とは裏腹に、生徒は、モデルと図形を基にした手作業での方法を優先化したのであった。かくして、数学の熟達者としての教師が合理的な方法について模範(モデル)を示しつつ、生徒に伝授しようとすることは成功しなかった。

[3] これまでの探究の過程では、9つの多面体から推測が暗示され、正多面体のすべてにおいて最初の支持的接触を得た。これにより、当初の推測は前進し、尤もらしくなってきた。そこで、新たな実験を工夫しなければならないが、現段階で、もう一つ二つ多面体を選んで験証したところで、それは推測の進歩に対してはほんの僅かしか貢献しないであろう。その意味で、推測をもっと前進させ、その信頼性を高める、何か「骨折り甲斐のあるテスト」を考えることは生徒にとっても当を得ているようであった。

[4] この時点での教師の計画は、既に調べた9つの多面体から何かヒントを得るのが良いとし、それらの多面体の第一行にある 3 つの立体がすべて角柱であることを指摘し、「すべての角柱」に対して調べることは推測を前進させることになるだろうと、生徒に対して説明をすることであった[No. 6: p. 59]。そして、教師は極端な例を考えることを示唆してはいないが、東郷は「円錐」を調べたらどうかと提案する(305)。こうした特異な例を考えることによって、推測を反証しようとする行為が生徒から自発的に出てきたことは、筆者にとって驚きであった。東郷が提案した円錐について、それを多面体と認めるかどうかが議論された。新川は「一応、多面体」(318)と述べ、多面体として受け入れている。しかしながら、これについては、当該の推測に当てはまらないことが、教師主導で確認され(323, 324)、また、それについて詳しく考えることをしないように方向づけている(326)。このことは、教師が、自分が意図する議論の方向性を意識しすぎているからであろうと思われる。

ここでさらに驚いたことに、島尾は「くす玉みたいなのは？」(329)と、星型多面体を持ち出してきた。これは、正二十面体のそれぞれの面に三角錐をくっつけたものである。

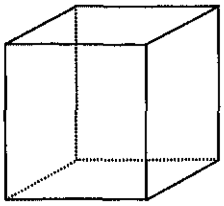


星形正多面体「くす玉」

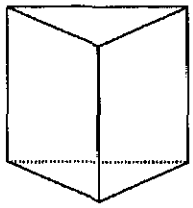
そこで、生徒たちは、島尾が指摘した「くす玉」を「やっちやんのアトリオ」(338)と名付け、F、V、Eの数を数えてゆき、当該の推測に当てはまることを確認した。

休憩の後、教師は、本来計画していた「より手厳しいテスト」として、すべての角柱(n角柱)について験証することへと生徒を誘ってゆく[No. 7: 60]。

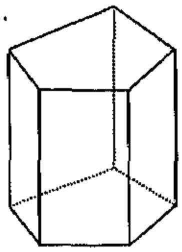
I.



II.



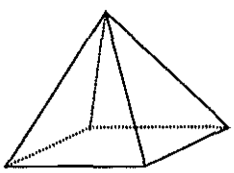
III.



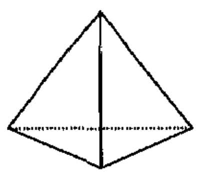
教師は、3つの角柱に生徒の注意を向け、それを底面の辺の数が増大するように並べ替えた。そこで、教師は、立体図形と平面図形との類比な関係に言及し、平面における多角形一般(n 角形)について整然とした規則($V = E$)が成り立つことを想起させ、これと似よりの問題として、角柱一般について検討することを提案する(508)。このように、教師は、n角柱について考えることを提案する。生徒の参加のもとで、すべての角柱について推測が験証された。このことは、この推測が厳しいテストをくぐり抜け、一層の信頼性を獲得したことを意味する。しかしながら、教師による提案は、その理由や意義が述べられないままであったため、われわれが期待したものとはなっていなかった。つまり、手持ちの有限個の多面体から無数の多面体において推測をテストにかけることの意味が説明されなかった。

n角柱における一般的な験証がなされた後に、「すべての角錐」について験証することへと移っていった。教師は、9つの多面体の図表の第二列を指摘すると、生徒は容易に錐体を指摘することができた(588, 590)。

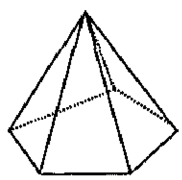
IV.



V.



VI.

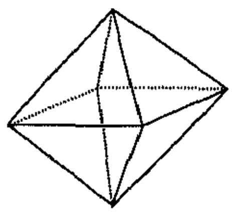


教師と生徒は、四角錐、三角錐、そして五角錐について、頂点、辺、面の数を確認していった。この意味で、教師の誘いは、生徒にとって、押しつけがましくはなかったようであった。そして、生徒は、一般的な角錐について推測を験証するという課題を受け止めたように思える。しかしながら、教師は、筆者の期待に反して、この験証に生徒を

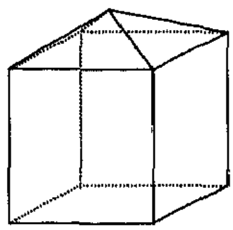
参加させるのではなく、角柱の場合と同じように、教師自らが説明を進めていったのであった[No. 9 (746): 62]。かくして、教師主導のもとで、角錐一般についてオイラーの推測が確かめられた。この時点で、教師は、これまでの作業をふり返るなかで、反証主義的なテストの意義を事後的に説明する[No. 13: p. 58]。当初、われわれは、手厳しい実験の意義を取り上げてから、実際にテストにかけることへと生徒を導く予定であった。しかし、実際に、説明は事後的となってしまった。ただし、東郷の反応(768, 769)は、こうした験証が推測の妥当性を飛躍的に高めたことを理解したように思われる。

[7] この段階で、教師は、さらに骨折り甲斐のあるテストを組織することを誘おうとする。その際には、現時点では、以前のものとは質的に異なる骨折り甲斐のあるテストを考えてみるべきであることを明示的に述べようとはせずに、進んでゆく。

VII.

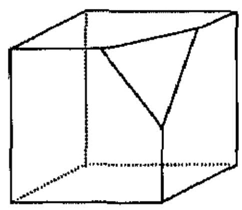


VIII.



やっちゃんの家

IX.



東郷の部屋

ここで教師は、「もっと複雑なやつ」という曖昧な説明をするが、橋爪は、次のテストがどういうものであるかを予想している(771)。教師は、「屋根をくっつける」という表現を用いて、テストの手順を生徒に示してゆき、生徒にその操作を行うことによって増減する頂点、辺、面を変数nで表すように言うと、彼らはさほど困難もなく、変数を使って表現することができた(つまり、頂点は$V+1$、辺は$E+n$、そして面は$F+n-1$)。しかし、ここから、推測が成り立っていることを説明することは、すんなりとはいかなかった。つまり、$F+V=E+2$を仮定して、$(F+n-1)+(V+1)=(E+n)+2$であることを示すことが、生徒にとって困難であったようである。このことを見取った教師は、前面に出て、丁寧に説明を行った[No. 10: p. 63]。教師による説明であったが、生徒はそれが理解できたようである。生徒たちは、教師の説明が完了すると、感嘆の声をあげている(902)。

この段階で残っている多面体は「切頭」のケースである[No. 11: p.64]。これを生徒たちは「東郷の部屋」と呼んでいる(904)。生徒たちは、次の実験の内容を予期しているかどうかは不明である。教師は、一般的な「切頭」の操作について説明し、先の「屋根を葺く」実験と同じように試みて見るようにいう。ここでも、われわれは、「認知的な徒弟

制」の側面を反映させ、生徒が反証主義的な探究過程に、参加する程度を少しでも多くしようと考えていた。しかしながら、教師は、生徒に作業課題を移譲せずに、自らが主導的に説明をしてゆくのであった。かくして、ここでも、教師は、適宜生徒に参加させつつも、基本的には、説明の責任を負っているといえよう。そして、先程の「屋根を葺く」場合もそうであったように、新しく得られた一般的な関係式がオイラーの推測を満たしているかどうかについても、教師は一層主導的に説明をしていった[No. 12: p. 55]。

3．社会的相互作用による数学的意味の発達

社会的相互作用にもとづく数学的意味の発達に関して、教授実験の後半部分(3 日目)における二つの活動に着目する。それらは、1）証明の議論に照らして推測をより洗練すること、2）反例に照らして定義を改良すること、である。これらの二つは、ラカトシュのいう「証明と論駁」の弁証法の二つの側面を成している。本節では、数学文化の代表者である教師から提示される証明や反例を道具として、数学的知識を洗練し発展させていく様子について、実際の教授実験におけるプロトコル・データを適宜取り上げ、議論していくことにする。

3．1．証明分析による推測の改良

ここでは、「デカルト・オイラー予想」を証明と論駁の弁証法を経ながら洗練するような課題の設定と発問の構成を試みた。

[1] まず、前日の活動をふり返り、多面体に関する推測($V-E+F=2$)をより一般性のあるものとするために、手厳しい反証テストを構成してきたことが述べられた。

[2] この推測はかなりの程度で「確からしい」という支持を得ていることから、証明を考える必然性を述べ、コーシーによる証明の概略が記されたプリント[3-1]と[3-2]を配布し、その証明を丁寧に解説した。特に、証明の第 3 段階、すなわち、三角形を取り除いていく手続きを、生徒に黒板で説明してもらった。[3] その後、生徒たちにこの証明についての感想を述べてもらった。

[4] さらに、証明の議論についてのより具体的な理解を得るために、四角錐、三角柱などの例で証明を具体的な文脈において跡づけてみた。その際、生徒たちに紙を与え、まず正四面体において 1 つの面を取り除いて平らに伸開した図形を描かせた。このとき、生徒たちは、互いに図を見せ合いながら、証明がうまくいっていることを確認していた。

次に三角柱についても同じ作業をさせた。ここでは、取り除く面を指定せず、自由に考えさせたところ、底面を取り除く者と側面を取り除く者に分かれた。彼らはお互いの方法を確認し、さらに進んで「屋根を葺かれた」多面体についてもコーシーの証明の各

補題をフォローし、証明の成り立つことを確認した。

[5] 15分の休憩の後、教師は生徒に、コーシーはすべての多面体において上の証明が当てはまると考えたが、他の数学者からいくつかの批判が出てきたことを紹介した。ここでは、コーシーの証明に対する2つの局所的反例を取り上げた。その一つは、証明の第3段階において、1つの三角形を取り除くときに内部の三角形をいわば「ジグソー・パズル」のようにして取るとしたら、証明の議論が成り立たなくなるのではないかという批判を紹介し、皆で確かめた。興味あることとして、新川は、このことを事前に考えていたのであった。

[6] 証明が批判された場合、その対処法として、証明を却下してしまうのではなく、それを改良する方法があることを示唆した。ここでは、生徒たちに、自らがコーシー自身になったつもりで、証明の改良を考えさせてみた。その際に、島尾は、内部の 1 辺を取り除き、2個の三角形を取ることになるという矛盾をついてきた。しばらく議論をした後で、内部の三角形を取り除いたことが問題なので、そのような取り方をさせないように境界三角形を取り除かせることにすればよいことを理解できた。

[7] 今度は、同じように、証明の第3段階で、境界三角形を取り除くのであるが、プリント[3-2]の番号の順に取り除くと、$V-E+F=1$が変わらないという議論が成り立たなくなる(9と 10 の三角形が非連結になる)という批判を紹介し、生徒たちに確認させた。このことについて、2名の生徒に黒板の前に出て説明してもらった。ここで、先ず、東郷の説明を取り上げたい。彼は上に述べたような順序で三角形を取り除いていくと、8番目の 3 角形を取り除いたときに、コーシーの証明の第 3 段階に含まれる条件に合わなくなることを、黒板消しを用いて説明していった[No. 13: p. 65]。

東郷の証明に対して教師は適宜聞き手の理解を確認しているが、級友たちは、図を使った東郷の丁寧な説明と段取りのよい具体的操作を困難なくフォローしているように思われた。さらに、東郷の説明は、証明批判に対する積極的な関わりが伺える。ここで、東郷は、聞き手を意識して、論駁の要点を明確にしようとしている。このことは、「これは、この条件は、星印には、のってません。」(805)という発話や、「二つの辺と一つの頂点が消されることになってます。」(807)から示唆される。さらに、最後の発話(811)にみられるように、東郷は、教師が準備したコーシーの証明批判の基本的説明に踏み込んで、さらに丁寧な説明を最後まで展開している。というのも、教師が準備した証明の資料は、(808)の発話で示されたところまでであった。このように、情報として示された証明に対して、聞き手の立場を配慮するだけではなく、証明批判の行為主体としての自覚がこうした発話から明確に伺えた。

次に、もう一人の生徒(新川)の証明批判をみてみよう。新川は、コーシーの証明に対す

る反例で示された順序で三角形を取り除いた際、一つ一つ取っていったときのそれぞれの場合のV、E、Fの値を数え、それを一覧表にして提示し、第8番目の三角形を取り除くと$V-E+F=2$となることを明らかにしている。新川が黒板に書いた表は次のような丁寧なものであった[No. 14: p. 66]。

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
V	8	8	8	8	7	7	6	6	6	3
E	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
F	17	16	15	14	12	11	9	8	6	3
V−E+F	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1

ここでは、コーシーの証明の第3段階において、プリント[3-2] の4のように三角形を1つ1つ取り除くときに、$V-E+F=1$が成り立たなくなるという反例に対して、取り除き方に問題があるので、取り方の番号を変えればどうかということについて議論している場面を取り上げる[No. 15: p. 66]。これに関して、東郷は三角形の取り除き方をコーシーが固定したのか尋ねてきた。この発言は証明に対して疑間を持った発言であり興味深いものである。コーシーの証明をみんなで確かめて議論した結果、三角形の取り除き方は固定されていないことが分かった。

次に、島尾が三角形を取り除いた際に、$V-E+F$の値が2になってもよいのではないかと主張してきた。これは、証明の第1段階の原多面体に対して$V-E+F=2$が成り立つことを、この場合においても当てはまると考えたことから生じたものであると考えられる。それに対して、新川は島尾の主張が間違っていることを説明しようとした。新川はコーシーの証明において、$V-E+F$の値が変わらない約束であるということに着目して、三角形を取り除いた後においても$V-E+F=1$でなければならないことを島尾に説明した。話し合いの上で、三角形の取り除き方に問題があることがわかったため、問題のない取り方を生徒に前に出て説明してもらった。まずは橋爪の説明である。どのように三角形を取り除いていけばよいか、三角形を取り除く順に番号を打ってもらった。橋爪の説明が正しいことを全員で確認した後、今度は新川が別の取り除き方があり、それを黒板に書きたいと言ってきた。教師が認めた後、新川は自主的に前に出て、同じように三角形に番号を打っていった。

[8] ここで証明における補題の修正、つまり局所的反例に対する証明の回復についての生徒たちの議論が起こった。証明に対する局所的反例を扱うことが許されている可謬主義の土壌のもとに、局所的反例に対して、$V-E+F=1$が変わらない取り方が必ずあることを全員で確認した。そして、証明の「1つの三角形を取り除くとき」の次の部分に、「$V-E+F=1$が変わらないやり方で取り除くとすると」と補うことで、証明を改良し

再び傷のないものにすることができたことをお互いに確認した。

３．２．反例に照らした定義の改良

この教授実験では、多面体の定義を話題として取り上げることにより、生徒たちが定義に対してどのように関わっているのかを調査した。

[9] まず、教師は、生徒に対して、オイラーの定理とコーシーの証明に対して、ある数学者から大局的反例が提示されたことを知らせる。ここでは、まずプリント[3-3]を配布し、「四面体の鋭い先がくっついたもの」を取り上げ、それについて、$V-E+F=3$となることを確認する。また同時に、その事例が、証明の第１段階をも反証することを説明する。そして、こうした大局的反例が提示された際に、それを排除するために、多面体の定義を改良していったことを紹介された[No. 16: p. 68]。このように、教師は、提示された大局的反例に、それに抵触しないような多面体の定義を紹介した(157)。ただし、こうした定義の改良が反例(変則事例)の排除を意図するものであることは明言しなかった。ここで、生徒の側から興味ある反応が出てくる。教師が定義を改良すると、他の生徒は驚きの表情を示すとともに(158)、定義の意味することが理解されたようである(159)。その後、すぐに、彼らは個人的な意見を述べる。橋爪は、定義を個人的に決めることの可能性を問題にしている(160)。

これに関して、島尾は、やや否定的な態度をとっている(162)が判然としない。そうした過程で、新川と東郷は、コーシーの証明を擁護することとの関わりで、定義を改良することを認めようとしている(167, 169)。こうした基調に対して、次に見るように、島尾が明確に反対意見を唱えてくる(171)。実際、島尾は、定義を自由気ままに修正することに意義を唱えている(173)。

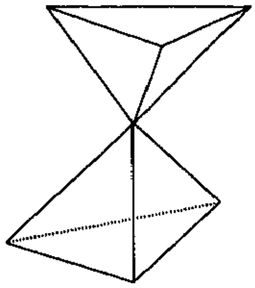
さて、ここで提示したエピソードをふり返ってみたい。まず、教師が大局的反例による推測批判に対して、多面体を「1つの面の内部から他の面の内部へ頂点を通らずにいけるもの」というように多面体の定義を改良した(157)。それに対して、生徒たちはさまざまな形で対応した。「すごい」(158)、「決めていいんですか」(160)、「ダメなんじゃない」(162)、などのように、驚きや疑問を表現している。

さて、定義の改良に対する関わり方は、反例に対する関わり方に関係があるようである。そこで次には、生徒の反例に対する関わり方を見て行きたい。

この教授実験では、教師から提示される大局的反例（かつ局所的反例）に対して、生徒たちはさまざまな対応をしていった。ここでは、4つの大局的反例に対する彼らの対処法を、発話記録を取り上げて検討してみたい。

（ア）頂点が共通である２つの四面体

[11] 最初に、大局的反例である「頂点が共通である二つの四面体」（生徒たちは「砂時計」と名付けた）について議論した場面を取り上げる。



教師は新川がこの物体を初めて見たときに「これも多面体なんですか」と疑問を述べたことを思い出して、再度その言葉を確かめようとした。すると今度は、一応多面体になるのではないかと考えを改めた[No. 17: p.69]。これに関して、島尾は、この鋭い先が結びつけることができるのかと疑問を出してきた。これをきっかけにして、教師はこの物体を多面体として認めるかどうかという議論へ導こうとした。この物体を多面体として認めるかどうかを尋ねたところ、生徒たちはいろいろな反応を示したが、特に島尾はこの物体を多面体と認めることにはっきりと反対していることが読みとれる。「ちがう」、「そんなの私が許さん」などの発言からわかるように、かなり明確に否定している。教師は今までのやりとりから、この物体を多面体と認めると問題が起きることを確認させて、どのようなものを多面体とするのか、その定義をはっきりと決めさせることにした。

ここまでの流れをまとめると、まずこの物体を最初に提示したとき、新川は「これも多面体なんですか」と言っている。議論が進むにつれて、彼はこの物体を一応多面体になるのではないかと考え、状況の推移を見守っていたようである。ただ、この物体の頂点がわからない(117)と疑問を投げかけている。

橋爪は、何か考えているようであるが、ここでははっきりとは発言せず状況の推移を見守っている感じである。これに対して、島尾は、この反例に対してはっきりと「モンスター排除的」であることがわかり、興味深い。「鋭い先のくっついた四面体」を多面体と認めることに、断固として反対していることが随所に見られるのである。鋭い先がくっつくのか(100) や、頂点はどこなのか(119) などと疑問を投げかけ、さらに「ちがう」(106) や「ダメ」(144) などにみられるように、この物体をモンスターだとみなして、考えること自体がおかしいと捉えている。このように、多面体に対する概念を拡張することを嫌い、対象を広く取り込むことに明らかに抵抗を示している。

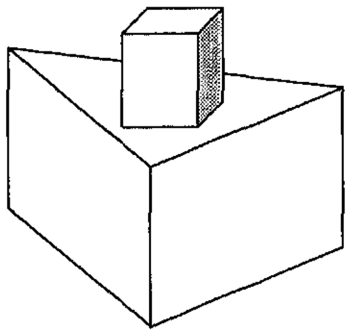
他方で、東郷の対処の仕方はこれとは質的に異なっている。131 番の彼の発言は、多面

体をコーシーの証明のアイデアが生きるように捉えて、このように特徴づけた。彼は証明のアイデアを大切にして、それに関連するような概念の定理を出しているのである。つまり、証明と反例から生まれてきた概念である「単純多面体」ということに着目した。これは、いわゆる「補題組み込み法」に当たる行為である。

（イ）重なり立方体

[12] 先に、頂点を共有する 2 つの四面体という大局的反例に対して、教師は、定義を変更してみせた。続いて、教師は、改良された定義に対してさえ、新たな大局的反例による論駁がなされた歴史を紹介しようとした。教師は次のように話を切り出す[No. 18: p. 70]。このように、第一の大局的反例に照らして改良された定義が、再び論駁されることを話し始めると、生徒たちは、驚きと不思議さとの混じった疑問を呈している(189, 191, 192, 197)。そして、島尾は、先の反例の場合と同じように、これから提示されようとする立体もまた多面体と呼ばれるにはふさわしくないと予想している(196)。ここで、興味ある事態が生じてくる。それは、教師が反例とされる立体を提示する前に、新川が似よりの反例を自分で構成して見せたのである。

ここで着目すべき点は、反例を提示しようとしたときに、それを予想して三角柱の上に小さい立方体を乗せた新川の 199 番の行動である。

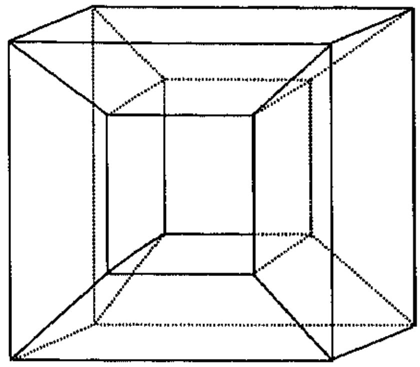


新川の構成した反例

既に先のところで、1 つの大局的反例である「鋭い先のくっついた四面体」を取り扱ったことで、生徒たちの間には変わったものを考えてみようとする雰囲気が少しずつ出てきたのかもしれない。この中で、改良した定義を満たしているにもかかわらず、推測が成り立たない例があるということについて、生徒たちは熱心に取り組んで行った。

（ウ）額縁

[13] 続いて、教師は、第 3 の大局的反例である「額縁」を提示する。



額縁 V－E＋F＝0

生徒たちは、これが反例になっているかどうか即座に確認することができず、頂点、辺、そして面の数を具体的に数えあげ、$V-E+F$ の値を求め、それが 0 であることがわかり、大局的反例となっていることが確認される[No. 19: p. 70]。ここで、教師は、生徒に、大局的反例が同時に局所的反例となっているかどうかを確認してみるように指示する。これは、証明分析という高度な方法を、教師が手ほどきしようとする場面である。教師は、コーシーの証明の第 1 段階に照らして反例を検討するように指示する。

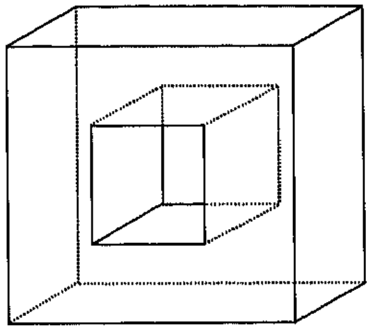
こうして、大局的反例が証明の第一段階に合っておらず、局所的反例でもあることが確認される。この後に東郷は、「額縁」が多面体ではないと言い始める。東郷は「額縁」を排除しようとしたが、参与観察者の発言(468)をきっかけとして、定義に照らして検討することとなる。そして、この立体が多面体の定義に適合していることが議論の末、確認される。こうした状況にあって、生徒たちがとった対処法は、ラカトシュが「断片的排除」もしくは「戦略的退却・安全のために大事をとること」(Lakatos, 1976: 28)というものであった。生徒は、明確な根拠もないまま、「穴空き」多面体を除こうとしていく[No. 28: p. 66]。このように、東郷は、「額縁」それ自体に問題があるのだと言い(482, 484)、新川は「穴の開いた」ものはだめ(488)として、反例を拒否し排除しようとする。

大局的反例が 3 つ目を迎えたということもあって、全体的に生徒たちは反例に対し、冷静に対処したようである。$V-E+F$ の値を計算して 0 になったということに関して淡々と受け止めたようであった。466 番の「これ多面体じゃない」という東郷の発言は、最初の反例のところで彼が考えたように「1つの面を切り取って、平らに伸ばすことができるもの」、つまり、「単純性」（伸開可能性）が満たされていないことにより、この反例を多面体として認めなかったと考えられる。彼は証明というものを大事に保護しながら、多面体というものの線引きをしているようである。島尾は、先の二つの大局的反

例の場合ほど「モンスター排除的」ではないようである。しかしながら、494 番の発言からわかるように、やはり、この物体を多面体として認めることには抵抗を示しているようである。

（エ）前後両側に環状面をもった額縁

[14] 最後に、「前後両側に環状面をもった額縁」を提示したときの議論について取り上げる。生徒たちは、この立体の頂点、辺、面の数を数えあげ、推測の成否を確認する。



先程は「額縁」を考えた際に、「穴の空いた」立体は排除されたが、この立体では、穴が空いているにも関わらず、推測が成り立っていることが確認される。つまり、これまでの議論が覆ったのである。このとき生徒がどのように対応していくかが次に示されている[No. 20: p. 71]。このように、島尾は、この立体を「例外」と見るべきだと繰り返している(565, 567)。この事例は、「穴のあいた面を持つ」ことから、改良した定義を満たしていないが、$V-E+F=2$が成り立つ例である。教師は、生徒たちの驚きを期待したが、彼らにとってはあまり意外ではないような感じであり、手応えが少なかった。成り立つということ自身にあまり説得力がなく、これまでに「穴のあいた」例を２つ取り扱ったことから、「穴のあいたものはダメ」なのであるという意識が生徒たちの間にあったのかもしれない。

新川は、$V-E+F=2$が成り立つが、すぐに環状面があることを指摘した(563) 。一方、島尾は「例外」であると述べ、ほとんど相手にしていないようであった。

[15] ３日目の教授実験の終盤で、教師は、反例にたいして、定義を順次改良するだけではうまくいかないことが説明された。実際、定義をいくら改良しても、再び$V-E+F=2$とはならないものが出現する一方で、定義に合わないものが$V-E+F=2$を満たすことがあった。そこで、それに対処する合理的な方法としては、自分が構想している理論と証明のアイデアを大切にしながら、推測を改良していくことが理論を発展させる一つの有望な方法であることが紹介された。

[16] 最後に、こうした証明に基づき推測を改良する方法により、「1つの面を取り除いて平らに伸ばすことができて、かつ、穴のあいた面を持たない多面体において、$V-E+F=2$が成り立つ」というように初期の推測を改良することが示され、3 日間にわたる教授実験は終了した。

4．議論

ここで、高等学校の教授実験において社会的に構成される数学的活動の特徴を、「社会数学的活動論」の二つの観点から検討する。

4．1．大局的数学的活動への局所的参加

「大局的数学的活動への局所的参加」に関して、本教授実験では、教師が課題を提示しその解決のための個別的な技能を伝授するのではなく、真正な数学的活動を展開する過程で浮かび上がってくる課題を取り扱い、その解決のための合理的な接近法について模範を示しつつ、そうした活動の責任を徐々に生徒の側に移行していくことを意図した。これは、「正統的周辺参加論」もしくは「徒弟制」の考えに基づくものであった。それは、親方である教師が、見習い段階の生徒を、正統的な数学的活動に周辺的(部分的)に参加させつつ、次第に数学的活動全体を遂行できるよう導いていく教育の一形態である。これは 3 つの相からなっている。すなわち、教師の側で活動の模範を示す「モデリング」の相、生徒とともに実地を行なう「コーチング」の相、そして、生徒が次第に責任を負うように教師の支援の手を引いていく「フェーディング」の相からなっている。

この教授実験では、意識的な推測と論駁の弁証法を経ながら多面体の構成要素(頂点，辺，面)において成り立つ関係を見いだす課題の解決に、経験豊かな教師が初心者の生徒を誘っていくように局所的な活動と発問の構成を試みた。ここでは、ポリアにならい、多角形における関係の類比な問題として多面体の構成要素の関係について考察する課題を提示した。これは、解決の方向性が予め定められていないという意味で未完結な問題状況を構成することになっている。こうした課題は、生徒にとって比較的自然な課題として受け入れられたようであった。この漠然とした問題状況において、「面(F)は頂点(V)とともに増す」という最初の推測を立て、それを験証する作業は、生徒にとって無理のない活動であったように思われる。その際に、個別に験証をする多面体を持っていない生徒にとって、教師の側で入念に選択し配列した 9 つの多面体は、自然に受け入れられたようであった。

最初の推測が倒された後に、それを反省して新たな推測を意識的に構成していくこと、すなわち漠然とした問題状況に対して改めて条件や仮説を設定し、問題を確定する活動

に進むことになる。こうした活動は、多少なりとも教師の導きを必要とするように思われるが、今回の教授実験では、その大部分が教師によって組織され実演されていった。本教授実験では、最初の部分では教師が模範(モデル)を示しつつ、改めて条件や仮説を設定し問題を確定する活動に、生徒を徐々に参加させることを意図していたが、実際にはそうはならなかった。結果的に、推測と論駁の一連のジグザグとした過程は、教師主導で進められたため、生徒には恣意的なものとして受け止められたようであった。

では、なぜ、教師はそのような展開をしたのであろうか。本教授実験の事後的な検討から、この教師は、高等学校の生徒にとって、推測と論駁のジグザグをたどりつつ、より一般的な推測に洗練して行く活動がそれほど容易ではないと感じていたようであった。教師は、それまでの生徒たちの数学の経験において、推測が三度も立て続けに論駁されることは稀であるとみなしていた。実際、三度の論駁を経験した生徒は、先のデータにも見られるように、一般的な推測の構成に向かうというよりは、むしろ(錐体や柱体などの)特殊な推測を構成しようとしていた。この意味で、筆者が構想した教授実験は、推測と論駁により発展する数学の姿を当然視しすぎており、平素の学校数学を経験している生徒の数学観との隔たりを十分考慮していなかったように思われた。以上のような課題も残されるが、最終的に、生徒自身がデカルト・オイラー予想を発見することができ、それを成し遂げた際に生徒から歓喜の声もあがっていることに鑑み、推測と論駁を通じて知識を発展させていくような数学的活動が、生徒にとってある程度可能であることが示唆された。

次に、教師の側から提示される合理的な問題の攻略法について検討してみる。教授実験のデータから、このことに関して、二つの特徴が見いだされる。一つは、問題を解決する際の合理的な方法の良さを、教師があまり強調していないことである。例えば、「面(F)は辺(E)とともに増す」、「頂点(V)は辺(E)とともに増す」という推測の験証において、Eの数が増すように表を並べ替えることが、推測を合理的に験証することを可能にする(その上、後のデカルト・オイラー予想を発見する鍵ともなる)が、実際の教授実験では、こうした合理的攻略法の良さに関して、教師の側からの指摘はなされず、結果的に、単なる解法のヒントとなってしまった。もう一つは、教師にとって合理的な方法とみなされることが、生徒にとっては、必ずしも合理的なものとして受け止められなかったことである。例えば、正二十面体について推測を験証する活動では、筆者が予想していたように、生徒の方法は洗練されていなかった。彼らの方法は、多面体の図や模型を用いて、視覚を補助としながら経験的に数え挙げていくものであり、重複や見落としをする危険性を含んでいた。そこで、教師は、数学の実践の熟練者として、多面体の仕組

みに基づく概念的な方法を生徒に手ほどきすることを試みた。筆者と教師は、感覚的に複雑な正二十面体における説明が説得力を持ち、生徒はその方法を正十二面体において用いることが可能であると考えた。しかしながら、実際には、生徒は、正二十面体についての説明に困難を覚え、正十二面体の場合にもそれを応用することができなかった。その理由として 2 つのことが考えられる。第一に、教師から模範を示した後、すぐに生徒に独力で行わせたことによるものと思われる。一緒にやってみるなどして協働で行いながら、生徒の理解度を見計らいつつ、徐々に手を引いていくような教師の関わりが必要であったように思われる。第二に、生徒の目の前に模型や図があったためと思われる。具体的なモデルを用いることで構成要素の数を数えることができてしまい、教師の提示する概念的な方法がそれほど説得力を持たなかったと考えられる。これらのことから、合理的な攻略法の良さに関して、教師の側からの丁寧に例証するとともに、新しい課題に対しても応分の支援をしていくことが必要であったように思われる。このように、本教授実験では、当初予期しなかった課題も明らかとなったが、それと同時に、教師が問題解決の合理的攻略法を示唆することが、間接的ながらも、デカルト・オイラー予想の発見と験証において、有効に働いていたように思われる[19]。

次に、反証主義的な数学的活動へと生徒を誘う過程について検討する。教授実験では、ひとたび暗示された推測をより尤もらしい信頼できるものになるように、手厳しい反証実験を組織する活動を計画した。それは、数学文化の代表者であり熟達者である教師が、こうした反証実験の模範を生徒に示しつつ、そうした実験を遂行する責任を次第に移譲してくいように、教師の側で支援の手を緩めてゆく典型的な過程であった。ここで反証実験を組織することは、当該の推測をより広い集合に拡張するように条件を緩めることである。したがって、反証的実験を組織することは、より一般的な条件のもとで推測を験証する活動を行うことであると言える。

本教授実験で、教師はより一般的な多面体において推測をテストすることの模範を示している。実際、n 角柱について験証することを実演し、その後に n 角錐や他の一般的な多面体について生徒に考えさせようとしている。さらに、「屋根を葺かれた多面体」についての模範を示し、その後に「端を切られた多面体」についても推側が成り立つことを確認するよう生徒を誘おうとしていた。しかし、実際の教授実験では、「一般的な角錐」における験証や、後の「端を切られた多面体」についての験証も、基本的には教師による説明が大半を占め、生徒自身が験証を行うような相互作用はあまり見られなかった。こうしたことの理由として、教師の側から模範を示した後に、すぐに似よりの験証

[19] 「間接的」とは、後の n 角柱などの験証では、概念的方法が主要となることを意味している。

実験を説明するなど、教師の関わりが多すぎるということが考えられる。教師がする仕事を徐々に減らし、生徒への仕事を徐々に増していくような関わり合い方もあったのではないかと思われる。ただし、実験授業の時間的制約や、生徒の活動に対する経験的な判断から、教師の側から説明を提供せざるを得なかったことも一つの理由であったと考えられる。

教授実験から得られたこれまでの事柄を「徒弟制論」の観点から意味づけることができるように思われる。徒弟制においては、親方が見本となる仕事を示した後、弟子にその仕事をさせ、必要なときには口うるさく関与し、要所要所で手を貸すような段階がある。このことに関して、この教授実験では、教師は模範を示すこと(モデリング)は行うが、その後に生徒にその方法をやらせ、要所要所で手を貸すようなコーチをする相(コーチング)が弱かったように思われる。他方、徒弟制においては、親方が手を貸す段階の後に、徐々に手を引いていき、弟子にさせる仕事を増やしながら、徐々にその仕事を習熟させていく段階がある。このことに関して、教授実験では、生徒を反証主義的な手厳しい験証を行うことに誘おうとしたが、徐々に生徒の仕事を増やすような段階が丁寧に踏まれていなかった。

しかしながら、問題解決の過程で生徒が感心したような反応を見せる場面もあったように、教師の意図した数学的活動がある程度伝わっている場面も見られた。これは、当初の推測を、正多面体、n角柱、n角錐など、より一般的な多面体において験証するという部分的な仕事を生徒に与え、それぞれの験証が成功するごとに推測が徐々に真実味を帯びてくることが実感できているように思われた。つまり、生徒は、推測により手厳しい験証を組織するという反証主義的な数学的活動の意味を、未分化ながらも理解しはじめているとも考えられる。

４．２．社会的相互作用による数学的意味の発達

「社会的相互作用による数学的意味の発達」に関して、本教授実験では２つの側面。すなわち、１）証明の議論に照らして推測を洗練すること、２）反例に照らして定義を改良すること、が検討された。これは、数学における可謬主義的活動の主要な方法であった。こうした活動は、ともに多面体の定義について、その内包をなす条件を意識的に検討することであると言える。すなわち、証明分析や反例の対処法を通して、それまで暗黙的に使用してきた多面体の定義や推測が問題視され、証明の補題や反例の意味に照らして新しい条件や制限が定義や推測に導入される。したがって、証明や反例の分析は、本来的に、数学的条件や定義の分析を含んでいる。本教授実験では、こうした分析方法を、数学文化の代表者である教師が模範を示すことに主観が置かれた。実際、証明や反

例の分析はともに高度な数学的活動であり、それを数日の教授実験において生徒に手ほどきし、会得するよう支援することは現実的ではないと考えていたからであった。本教授実験では、「デカルト・オイラー予想」を証明と論駁の弁証法を経ながら洗練するような課題の設定と発問の構成を試みた。その結果、生徒は、教師による証明分析の模範(モデル)を手がかりとして、自ら似よりの証明分析を再現することができた。さらに、生徒の中には、証明分析を手がかりとして、自ら変則事例(反例)を見いだすこともできた。しかしながら、一人の生徒は、証明批判や反例の分析という新しい数学的経験に対して、終始抵抗を示していた。以下では、こうした結果のもつ意味を議論していくことにしたい。

先ず、教師による証明分析の模範(モデル)を手がかりとして、生徒は、自ら似よりの証明分析を再現することができたが、このことには、教師による丁寧な証明の取り扱いとともに、生徒による反証主義的な活動の経験が関わっているように思われる。幾種類もの手厳しい実験をくぐり抜けた推測は、生徒にとってかなりの程度確からしいという支持を得ており、この段階で証明を考えることは理に適っているように思われた。そして、教師は、コーシーによる証明を丁寧に解説し、第 3 段階について生徒に黒板で説明してもらい、さらに、具体的な例(四角錐、三角柱、「屋根を葺かれた多面体」)を具体的な素材として理解を図っている。四角柱では教師が部分的に関与し、次の三角柱では取り除く面を指定しないなど、生徒の証明への関与を徐々に多くしている。その結果、三角柱では複数の証明が提示されることとなり、お互いの方法を確認することで、さらに理解が進んだように思われた。そして、最後の「屋根を葺かれた多面体」では、生徒は自力で証明をフォローしていくことができた。このように、教師は、単に証明を生徒に紹介するのではなく、具体的な素材を用いて確認するとともに、生徒が部分的に関与する割合を増していったことがわかる。

他方で、生徒の側も、教師から提示されたコーシーの証明を単に受け入れるのではなく、表や図などを用いて補っている。実際、東郷は、教師が準備したコーシーの証明批判の説明を踏み込んで、さらに丁寧な説明を展開している。実際、東郷は、聞き手を意識して論駁の要点を明確にしようとしているとともに、図を使いつつ、段取りのよい説明をおこなっている。このように、情報として示された証明に対して、聞き手の立場を配慮するだけではなく、証明批判の行為主体としての自覚がこうした発話から明確に伺えるのである。こうしたことは、新川においても見られた。彼は、三角形を取り除く手続きを一覧表に表している。こうした二人の生徒の証明批判から、彼ら自身による証明行為への積極的な関わりを見取ることができるのである。生徒たちの説明は、証明が本来的にもっている他者に対する説得行為、批判的姿勢、そして、確実さに対する慎重で

丁寧な議論の組み立てという重要な側面が前面に現れているように思われる。

その後、教師はコーシーの証明に対する他の数学者からの批判を生徒に紹介していく。ラカトシュの「証明と論駁」において興味あるものの 1 つは、コーシーの証明に対し、その証明が契機となって異議・異論が引き出されたことである。通常の授業では、証明というものが生徒にとっては受け入れるべきものになっていて、またそうすることが役割になっている。生徒にすれば、証明は理解すべきものという規範が暗黙的に社会的に構成されているのではないだろうか。高等学校の数学では、何に付け数学的な証明が提示され、証明なくしては数学の学習はあり得ないものとなっているが、逆に、証明に対する一般的な受け身の姿勢は、数学そのものに対する姿勢になっているようにも思われる。この意味で、証明(しかも著名な数学者による証明)が批判に晒されることは、生徒にとって新しい数学的な経験であったと思われる。しかしながら、本教授実験では、これまであまり身近とはいえない経験に比較的すんなりと対応している点が興味深い。

教師は、いくつかの証明批判をとりあげ、生徒の理解を確認しつつ、丁寧にとりあげている。このことに関して、生徒は、教師の説明を受け取るだけではなかった。実際、新川という生徒は、一つの証明批判と同じことを事前に考えていたのであった。また、コーシーの証明の第3段階に対する批判(三角形を1つ1つ取り除くときに、$V-E+F=1$ が成り立たなくなる場合がある)に対して、東郷は三角形の取り除き方をコーシーが固定したのか尋ねている。橋爪は、教師が提示した反例以外の三角形の取り除き方を検討してもいる。さらに、島尾は、三角形を取り除いた際に、$V-E+F$ の値が 2 になってもよいのではないかとも主張している。それに対して、新川は島尾の主張が間違っていることの説明を試み、島尾の矛盾を解消したのであった。こうした証明に対する生徒の批判的な関わりは、われわれにとって予期しなかったことであったが、教授実験の 3 日目を通じて、生徒の側に批判的な思考態度が芽生えつつあったのではないかとも考えられる。

次に、反例に対する生徒の対処法について検討する。この教授実験では、教師から反例を意図的に提示することにより、生徒たちが多面体の定義に対してどのように関わっているのかを検討している。教師は、生徒に対して、コーシーの証明に対して、ある数学者から大局的反例(四面体の鋭い先がくっついたもの)が提示されたことを知らせている。そして、それがオイラーの推測とコーシーの証明の両方の反例になっていることが確認されている。さらに、教師は、こうした大局的反例が提示された際に、それを排除するために、多面体の定義を改良していったことを紹介する。このことに対して、生徒たちは、定義を改良する問題を議論しはじめたのであった。実際、橋爪は、定義を個人的に決めることの可能性を問題にすると、島尾は否定的な態度を表明し、逆に新川と東郷はコーシーの証明を擁護するために定義を改良することを認めようとしている。普段、数

学の授業においては「何々のことを、何々という」というように、教師は、定義を決まりきったものであるように扱い、生徒たちに覚えさせることがよくある。こうした平素の数学の学習を通して、生徒たちは、定義が変更されうることや、それによって他の事柄も連動して変更されることの理解、すなわちファン・ヒーレの第3水準に達するような学習指導が行われているとは思われない。しかしながら、先の新川と東郷の活動は、この学年段階において、ヒーレの第3水準の活動を取り入れることの可能性が示唆され、興味深い。

ここで、本教授実験から明らかになったことは、定義の改良に対する生徒の関わり方は、反例に対する関わり方と関係があるということである。実際、この教授実験では、教師から提示される反例に対して、生徒たちは様々な対応をしていることが示唆された。先に定義の改良を認めようとした生徒(東郷と新川)は、教師が提示する反例にたいして「これも多面体なんですか」と疑問を述べるが、一応多面体になるのではないかと考えを改めている。実際、東郷は、多面体をコーシーの証明のアイデアが生きるように捉えて、それに適合するように概念の定義を構成しようとしている。つまり、東郷は、「補題組み込み法」を採用し、証明と反例から生まれてきた「単純多面体」という概念を受け入れようとしている。他方で、橋爪は、何か考えているようであるが、ここでははっきりとは発言せず状況の推移を見守っている感じである。これに対して、島尾は、教師の提示する反例を多面体とは認めることを明確に拒否している。実際、島尾は、「ちがう」、「ダメ」、「そんなの私が許さん」などと強く発言している。このように、島尾は、反例に対して「モンスター排除的」立場をとり、概念を拡張することを嫌っている。以上のように、生徒たちは、この反例に対してさまざまな関わり方をしたことがわかった。

このことに関して、本教授実験から示唆されることは、反例に対して改良された定義がさらなる反例に直面する可能性を知ったときの生徒の対応についてである。先の議論で、反例に照らして定義を改良することを認めようとした生徒の中には(東郷)、新たな反例が示されると、それを断片的に排除しようとしはじめた。実際、東郷は、「額縁」に対して取った対処法はラカトシュが「断片的排除」もしくは「戦略的退却・安全のために大事をとること」というものであった。つまり、東郷は、明確な根拠もないまま、「穴空き」多面体を除こうとした。さらに、新川は「穴の開いた」ものはだめとして、反例を拒否し排除しようとした。しかし、新川は、東郷よりも反例にたいして柔軟な対処法を取っていた。というのも、新川は、自分なりに反例を考え出そうとし、実際、反例を構成することができたのであった。実際、教師が大小 2 つの四角柱が重なっている反例を示そうとしていた際に、新川は、三角柱に四面体を重ねた反例を提示したのであった。他方で、反例を拒否する生徒は、その後の度重なる反例の提示に対しても、一貫して拒

否ないし無視をする傾向がみられた。しかしながら、最後の「環状面をもつ穴の空いた立体」が取り上げられると事態はさらに変化した。その多面体は、穴が空いているにも関わらず、推測が成り立っていることが確認され、これまでの議論が覆ると、東郷と島尾は、この立体を「例外」とみなし簡単に片づけたのであった。また、新川は、すぐに環状面があることを指摘しており、反例に対する柔軟で鋭い関わりが伺われるが、それ以上の検討はなされていない。かくして、様々な反例に対して 4 人の生徒は各人各様の対処法を取っていることが示唆された。このことを整理すると、次のようになる。

生徒	反例の対処法
新川	補題組み込み法
東郷	断片的排除法・例外排除法
島尾	モンスター排除法
橋爪	——

反例の対処法

このことに関して、筆者は、証明や反例に対する生徒の異なる対処法は、彼らの数学の「信念システム」と関連しているように思われた。

最後に、本教授実験全体を通して、二つの課題が残された。一つは、分析された授業が 4 人という少人数でおこなったため、生徒が積極的に参加し、教師も一人ひとりの生徒に注意を向け、彼らの理解度に応じて授業を進めることができたが、この教授実験の成果が、数十人の生徒からなる実際の一斉授業においてどの程度一般化可能であるかは定かでない。第二に、本調査研究は、3 日間という短期間のものであったため、この研究で示唆された事柄の有効性について、さらに長期的な調査研究によって確認していく必要がある。実際、数学的活動へ参加する責任の移行や、証明と反例を手がかりとして知識を発展させるという高度な方法は、長期的な視野のもとで計画され、達成される事柄であると思われるからである。実際、本研究では、教師による「コーチング」や「フェーディング」の活動が十分には発揮されていないことが明らかになったが、こうした教師の支援形態は、ある程度の時間経過のもとで有効性を発揮するように思われるからである。このように、実際の教室での長期間にわたる一斉授業を通じて、本研究で得られた事柄を一層確かなものとし、あわせて本調査研究の実験的制約を克服していくことが今後の課題として残される。