第４章　社会数学的活動論の構築

第１節　可謬主義と文化－歴史理論の思想的基盤

ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの発達論の理論的・方法論的命題は、第２章と第３章においてそれぞれ検討してきた。いま筆者は、これらの二つの理論に依拠し、「社会数学的活動論」という数学教育論を編みだそうとする。そのような理論構築の可能性は、両理論が、その哲学的・方法論的基盤において多くの共通部分を持っていることから示唆され、正当化される。ここで「共通部分」と述べたのは、内容における共通性ではなく、思想上の共通性のことである。実際、一方は数学論であり他方は発達論であって、両理論は内容において当然異なっている。しかしながら、異なる理論に依拠する際には、両理論がその本性において類似していることが前提条件であると考える。というのも、その本性からして全く異なる理論はそれに依拠すること自体が無意味だと思われるからである。もちろん、両理論の思想上の共通点を確認することの意味は、単にそれらの理論に依拠する試みを正当化することだけでなく、新しく構築された理論の持つであろう本性を示すことにもある。以下では、両理論に共通する思想的基盤として、「歴史－発生的アプローチ」、「質的変革と弁証法的発展」、そして「個人と社会の相互作用」の３点を取り上げる。

１．歴史－発生的アプローチ

第一に、両理論に共通する思想上の類似点の一つは、完成されたものに対する抵抗、歴史性の重視である。このことを両者の著作から確認していく。

ラカトシュは、形式化された理論のみが数学の科学的研究対象であるとみなす「形式主義」の立場を批判し、数学の歴史的発展の重要性を強調している(Lakatos, 1976)[1]。

> 形式主義は数学の哲学から数学の歴史を切り離す。・・・哲学の導きを欠いた数学史は盲目であり、数学の歴史の最も興味をそそる現象に背を向けた数学の哲学は空虚である。(Lakatos, ibid: 2)

特に、ラカトシュは、完成され、形式化された数学のみが科学的研究に値するという「超(メタ)数学」の立場に異議を唱える。

[1] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge University Press.

超数学は、形式化されていない演繹科学が科学的研究対象としてふさわしくないという理由から、数学における科学的研究対象を形式化された演繹的学問に制限すべきだと主張する。・・・ 人間に関するある問題(例えば解剖学の問題)が、人の死後にのみ取り組まれ得るのと同じように、数学理論に関する若干の問題が、その理論が形式化された後にのみ取り組み得ることを疑う者はいない。しかしながら、このことから、人間は「死んだ」形式で提示される時にのみ科学研究に適しているとか、生物学的研究は死んだ人間の議論に制限されるべきだ、と主張することは決してできない。(Lakatos, ibid: 3)

他方、ヴィゴツキーも、従来の心理学的研究は、既に出来上がった、完成した心理機能、彼の言葉では「化石に転化した」(окаменелось, 1983a: 99)反応に関心を向けていると批判する。そして、人間の精神過程は、その発生過程あるいは歴史的過程を研究することによってのみ正しく理解できると主張する。

何かを歴史的に研究するということは、それを運動の中で研究することを意味する。それは、弁証法的方法の基本的要求でもある。研究において、何らかの物の発達をあらゆる相と変化の中で－その誕生から死滅までを－理解することは、本質的に、その物の本性を明らかにし、その本質を認識することを意味する。なぜなら、「運動の中でのみ、物はそれが何であるのかを示す」からである。かくして、行動の歴史的研究は、理論的研究の補足とか補助ではなく、まさにその土台をなしているのである。(Выготский, 1982b: 62-63)

ヴィゴツキー論において、「歴史的」という語は独特の意味を持っている。それは、「発生的」と同じ含みを持っている。このように、心理学は、既に形成された心理機能、「死滅」し「化石化した」心理機能を研究するのではなく、生まれつつある、また、形成されつつある心理機能を研究すべきであるとした。このように、歴史的・発生的過程を重視する立場は、ヴィゴツキー論とラカトシュ論に共通するものであるといえる。

2．質的変革と弁証法的発展

2．1．質的変革

両理論に共通する思想上の第二の類似点は、発達に対する理解に見いだせる。

先に(3章1節)見てきたように、ヴィゴツキーは、人間の精神発達の過程は単一の説明原理(例えば、行動主義心理学における「刺激－反応」、発生的心理学における「性的成熟」、ゲシュタルト心理学における「洞察」)によって説明される単調な量的増大ではなく、根本的な質的変革の過程であると理解する。ヴィゴツキーは、精神発達の過程において、ある時点までその説明原理であったものがもはや主要なものでなくなり、新しい原理が取り込まれ、全体が再体制化されるとする。

発達における質的変革という発想は、ラカトシュの数学論においても明確に見いだされる。ラカトシュは、数学の発展が単調で着実な量的増大であることに異議をとなえ、次のように述べる。

> 非形式的・擬似経験的数学が、議論の余地なく確立された定理の数的な単調増加によって成長するのではなく、思索と批判、証明と論駁による推量の不断の改良をへて成長する (Lakatos, 1976: 5)[2]

さらに、ラカトシュは、数学の発展の過程が質的変革の過程であり、それに対応して説明原理も変化するとしている。例えば、多面体の概念形成に関して、ラカトシュは次のように述べる。

> 証明によって生成される概念[例えば「単純多面体」などー引用者]は、素朴な概念の「特殊化」でも「一般化」でもありません。素朴な概念に関する証明と論駁のインパクトは極めて革命的です。つまり、素朴な概念を完全に<u>消し去り</u>、証明によって生成された概念で<u>置き換える</u>のですから。・・・証明の考えは、この素朴な概念を呑み込み、完全に消化してしまったのです。(Lakatos, ibid: 98-99)

このように、多面体論の発展において、初期の素朴な多面体概念は、新しい概念に取って代わられ、新たな視点から再体制化される。かくして、ラカトシュは、数学理論の発展は、その時点まで支配的であった説明原理が「主流から消え去り」(Lakatos, 1976: 112)、新しい説明原理により根本的に塗り替えられることによってなされることを示唆する。このように、数学理論の発展は、連続的で累積的過程ではなく、質的変革であるとするラカトシュの見解は、精神発達におけるヴィゴツキーの見解と共通点を持っている。

２．２．弁証法

ラカトシュの数学論およびヴィゴツキーの認知発達論は、ともに弁証法を重要な鍵概念としている。特に(3章3節で示したように)、ヴィゴツキーの発達論は、弁証法を理論構築の方法として用いており、あらゆる精神発達の説明を、相矛盾する過渡的状態の止揚として説明しようとする。弁証法の概念それ自体を取り上げて検討することは、本論文の範囲をこえるが、ここでは、物事の変化と発達の姿を、何らかの(観念的・現実的な)矛盾形態の緊張関係から生起するものとして説明する立場であると捉える。

弁証法という観点からみた両理論の類似性は、その具体的議論において明確に現れている。実際、ラカトシュ論における「推測と証明の関係」、そしてヴィゴツキー論にお

---

[2] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.

ける「思考とことば行為の関係」が、ともに拮抗する関係の弁証法的統一という観点から説明されている。

ラカトシュが可謬主義的数学論を構成する際の問題意識は、伝統的なユークリッド主義において、証明と推測の機能が明確に分離されていることであった[3]。

> 証明によって［推測を－引用者］改良しようとする考えは、彼ら［ユークリッド主義者－同］には全然起こらなかった。推測と証明の2つの活動は、ユークリッド的伝統においては厳然と分離しているのである。(Lakatos, ibid: 138)

このように、伝統的な数学論では、推測の構成と証明の構成は、それぞれ「発見の論理」(logic of discovery)と「正当化の論理」(logic of justification)という別種の相容れない論理に属するものとみなされていた。ラカトシュは、こうした見解に異議を唱える。数学は、何らかの推測の証明が与えられれば絶対無謬の真理とされ、反例が提示されれば誤りとして却下されるという二元論的なものではなく、むしろ弁証法的なものであるとする。実際、数学において、ある推測が成り立つことを証明しようとすると、論が一定のまとまりを持つように組み立てなくてはならない。その際には、問題とされる概念の外延や内包、前提とされる事柄、既有の知識などを再検討する必要が生ずる。すなわち、証明を構成する過程で、正当化しようとしていた推測はもとより、それまで暗黙裏に仮定していた事柄に気づいたり、うまく扱えない変則事例(反例)を見いだしたりする。「雉子も鳴かずば撃たれまい」という諺のように、推測を正当化するために敢えて証明を構成しようとすると、逆に一層の疑問や不完全さが顕在化するのである。推測と証明の間のこうした矛盾する関係にこそ、数学の弁証法的性格がみられるというのである。証明の働きは、「これが証明すべきことであった」[4]と述べ、推測を完成させることにあるのではなく、むしろ推測を改良し理論を発展させることにある。このことに関して、ラカトシュは次のように述べる。

> 「『証明問題』の目的は、ある明確に述べられた主張が真であるか、それとも偽であるかを決定的に示すことである。」というのは誤りです。「証明問題」の本当の目的は、もともとの「素朴な」推測を改良し(実際には完全にし)本物の「定理」にすることなのです。(Lakatos, ibid: 49)

ラカトシュが提唱する「補題組み込み法」(それは数学における一つの有望な「研究プ

---

[3] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.
[4] “Quod erat demonstrandum” というラテン語で、ユークリッド『原論』における証明はこの文言で終わっている。また、学校数学の論証の指導においても、証明の最後に「Q. E. D.」と書くように指示されることもある。

ログラム」であった)は、証明と論駁の基本的な弁証法的統一を含意している。この「補題組み込み法」について、『証明と論駁』における架空の生徒との対話において、教師(ラカトシュ)は次のように述べる。

> 今や皆さんは、証明が、たとえそのままの形では証明とはならなくても、推測の改良に間違いなく役立つことがわかったと思います。例外排除論者もまた推測を改良するのですが、その改良は、その証明とは独立になされました。わたしたちの方法は、証明によって改良するのです。この**「発見の論理」と「正当化の論理」の本質的統一は、補題組み込み法の最も重要な側面**です。(Lakatos, ibid: 44, 強調筆者)

次に、これまで議論してきた推測と証明の弁証法と同じ図式が、「ことば行為」と「思想」の関係についてのヴィゴツキーの議論において見いだされることを示したい。ヴィゴツキーは、伝統的な心理学の諸学派(特にヴュルツブルグ学派)は、「思想」と「ことば行為」とを無関連のものとみなしてきたと述べている(Выготский, 1982b)[5]。

> かくして、ことば行為は、思想の外的表現とされ、思想の内面生活にはなんら参加することのない衣裳のようなものだとされた。思想とことば行為とが心理学者の考えのなかで、ヴュルツブルグ学派の時代ほどに乖離され、引き離されたことはない。(Выготский, 1982b: 300)

こうした主張は、数学において推測と証明が毅然と分離されてきたことを批判するラカトシュの思想と一致する。ヴィゴツキーは、ことば行為を、「思想に言語的コードを与えること」という単純な図式で捉えるのではなく、思想との矛盾的拮抗関係として捉えることを提唱する。

> 思想とことば行為の間には、調和よりも矛盾が存在する。ことばの構成は、既成の思想の表現に奉仕するのではない。思想はことばに転化するときに、削り直されたり、変形させられたりする。思想は、ことばで表現されるのではなく、ことばの中で仕上げられるのだ。(Выготский, 1982b: 305)

ことば行為が思想を改良し仕上げるというヴィゴツキーの主張は、証明が素朴な推測を改良し完全にするというラカトシュの主張と合致していると考えられる。

ここで、ヴィゴツキーが述べる思想とことば行為の弁証法の意味を考えてみたい。人が自分の思想をことばで実現しようとする際に、思想を社会的に共有された言語形式に変換しなくてはならない。すなわち、何らかの個人的な動機によって方向付けられた主

[5] Выготский Л. С. (1982b). *Проблемы общей психологии.* М. Педагогика.

体的思想を、一定の構文と語義を持った客観的な言語に変換しなくてはならない。この変換過程は、具体的状況に根ざした瑞々しい経験を発話において最大限実現しようとする求心力と、他者に理解してもらうために一般的な構造に形骸化してしまう遠心力とのせめぎ合いの過程であるとみなされる。かくして、発話行為は、思想とことばという相拮抗する本性が止揚されたものであるといえる。このことは、数学の言語が、自然言語の冗長性と二犠牲を取り除いた人工言語でありり、社会一文化を超越した普遍性を持っているが故に、一層際立っているように思われる。

思想とことば行為の弁証法的関係の例として、ヴィゴツキーは、「文法上の主語・述語」と「心理上の主語・述語」の不一致をあげる(Выготский, 1982b: 308-309)。例えば、「時計が落ちた」という句においては、文法上の主語は「時計」であり、述語は「落ちた」である。この同一の表現も、異なる状況においては異なる心理的な意味、つまり異なる思想が表現される。一つは、時計が止まっているのに気づき、どうしてなのか人に尋ねる場合である。これに対して「時計が落ちた」と答えた場合に、聞き手には時計の表象が先にあり、これが心理的主語となり、かつ文法的な主語と一致する。しかし、それらが一致しないときもある。例えば、机に向かって勉強しているときに、物が落ちる音がして、何が落ちたのか他者に尋ねる。すると同じ答え「時計が落ちた」という答えが帰ってくる。この場合には、落ちたものの表象が先にあり、「落ちた」が心理的主語になる。この心理的主語に関して語られるものは、この場合、心理的述語であるところの時計の表象である[6]。こうした例をもとに、ことば行為の文法的構造と心理的構造の関係を、ヴィゴツキーは、次のように述べる。

> ことばの文法的構造と心理的構造との一致は、われわれが考えるほど多くはないのかも知れない。むしろ、それは、われわれの仮定にすぎず、実際にはまれにしか、あるいはめったに実現しないものなのである。(Выготский, 1982b: 309)

思想とことば行為の間に見られる不一致と緊張関係のさらなる事例として、ことば行為の「外的・音声的側面」と「内的・意味的側面」の関係があげられる。ヴィゴツキーは、このことを、幼児における言語的思考の発達を例にあげ、議論する。子どもの思想は、最初は、内的・意味的側面に関しては漠然とした未分化な全体として発生し、外的・音声的側面に関しては一言二言の単語においてのみ表現される。子どもの内的思想がやがて分節化するにつれて、逆に、外的なことば行為においては、句から文、さらには一

[6] 「落ちたのは時計です」という表現であれば、文法上と心理上の主語・述語は一致する。

まとまりの首尾一貫した談話へと移行してゆく[7]。

> ことばの意味的側面と音声的側面について、それらの発達における最初と終わりを捉えるならば、これらの発達が対立する方向で行われることを容易に確認することができよう。ことばの意味的側面は、その発達において全体から部分へ、文から単語へと進むが、外的側面は部分から全体へ、単語から文へと進む。(Выготский, 1982b: 306)

ここでもまた、言語的思考の発達を、未分化な全体と、分節化された構造という拮抗する性質の緊張関係のもとでの変化、つまり弁証法的運動の中で捉えようとすることが示されている。

さて、ヴィゴツキー論における「思想とことば行為」の未分化－分節化という弁証法的関係は、ラカトシュにおける「科学的研究プログラムの方法論」の構造と類似しているように思われる。「研究プログラム論」は、未分化な理論を明確で組織だったものに順次仕上げてゆく長期的な綱領(プログラム)を持っている。何れの理論も、その発展の初期段階においては未分化なままであるが、長期的な視野のもとで、次第に整備され、精緻化されたものへと仕上げられていく。数学においては、未分化な推測を分節化された明確な理論へと前進させる「発酵作用素」であるのが、証明、すなわち原始的推測を部分補題に分割する議論であった。大要的な理論的仮説を証明によって明確に表そうとすることで、それまで隠れていた暗黙的な事実が明確になるとともに、新しい証明生成概念によって、理論は一層内容豊かになって行く。このように、証明(分節化されたことば行為)が、未分化な理論仮説(思想)を徐々に洗練する機能を果たしていることは、ヴィゴツキーの思想とことば行為の弁証法的図式と一致していると考えられる。

これまで見てきたように、ヴィゴツキーは、言語的思考は、思想とことば行為との緊張関係の下での、思想からことば行為へ、そして、ことば行為から思想への相対立する運動の弁証法的統一体であるとみなしている。さらに、言語的思考という統一体の下位構造をなし、独自の運動法則を持つ 2 つの機能(思考とことば)の不一致が、言語的思考の発達のための必要条件であるとする。

> ことば行為における不一致は、両側面［外的な音声的側面と内的な意味的側面－引用者］の統一を排除しないばかりか、逆に、それらの統一を前提としていることを示している。こうした不一致は、ことば行為における思想の実現を妨害するのでなく、むしろ逆に、思想からことば行為への運動が実現するための必要条件となっているのである。(Выготский, 1982b: 310)

[7] 逆に、発話が部分から文全体へと移行するに従い、思想においては未分化な全体から部分へと移行する。

このように、ヴィゴツキーの発達論は、何らかの統一体の運動を、独自の運動法則を持つ２つの下位構造の不一致と拮抗関係によって説明する点で、弁証法を重要な構成部分として含んでいる。また、これと似よりのことが、ラカトシュの数学論においてもみられたのであった。かくして、弁証法は、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの発達論の両方に共通する主要な思想的基盤であることが示された。

２．３．特異な状況の重視

発達に関するラカトシュとヴィゴツキーの思想的類似性は、具体的な研究方法論においても見いだされる。それは、ラカトシュが数学理論の発展において反例(変則事例)を重視し、ヴィゴツキーが精神機能の発達において機能欠損(障害)を重視したことに見いだせる。

ヴィゴツキーは、発生的分析の対象として、精神機能の正常な発生過程だけでなく、それらの崩壊や相互干渉にも関心を向ける(Выготский, 1983b)[8]。ヴィゴツキーは、何らかの精神機能の崩壊が、精神機能全体に対してどのような影響を与えるかを探ろうとする。こうして、ある特定の精神機能が崩壊している被験者を調べたり、通常の被験者にわざと干渉する実験を組織したりする。というのも、そうすることによって、通常の精神機能の発生過程がより良く理解されると考えられるからであった。こうした着想のもとで、ヴィゴツキーとその同僚(アレクサンドル・ルリアら)は、聾唖者、失語症患者、脳に傷害を負った患者、パーキンソン氏病の患者などの精神機能を調査している。

他方、ラカトシュは、数学的知識を発展させる上で、反例もしくは変則事例を積極的に活用することを強調する。このことに関して、ラカトシュは、その『証明と論駁』における生徒との対話において、変則事例を「モンスター」(病的なケース)として退けることを不適切な対処法であるとし、生徒*Γ*に、次のように語らせている。

> どんなものでも、本当に深く学びたいと思ったら、それを「正常で」、規則だった、通常の形態においてではなく、臨界状態、熱にうかされた状態、激情の直中にある状態で研究しなければならないと思います。正常な健康体を知りたいときは、それが異常であり、病気である状態を研究しなければなりません。かくして、関数を知りたければ、その特異点を研究しなければなりません。通常の多面体を知りたいなら、気違いじみた逸脱したものを研究すべきなのです。こうすることによって、数学的解析はその核心へ到達することができるのです。(Lakatos, 1976: 23)[9]

---

[8] Выготский, Л. С. (1983b). *Основы Дефектологии.* Педагогика.

[9] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.

ヴィゴツキー論とラカトシュ論の間には、「特異な対象」に接する態度に関しても共通性が見いだされる。ヴィゴツキー論にとっての障害者、ラカトシュ論にとっての変則事例は、ともにモンスターとして忌み嫌うものではなく、健状な心理機能や正則事例と同等なものとみなし、肯定的に関与してゆこうとする。

3．個人と社会の相互作用

「個人と社会の相互作用」とは、個人の内面と社会的諸関係とがいわば不即不離の関係にあること、ここでは、子どもの精神発達および数学者の理論構築が、彼らを取り巻く社会共同体と分かちがたく結びついていることを意味する。これは、主知主義的な個人と、それとは独立に存在する固定的な社会構造との間にある裂け目、いわゆる「デカルト的切断」を克服し、主体の能動性と社会の多様性の相互啓発的関係を強調することである。

ヴィゴツキーは、人間が社会的環境に能動的に働きかける人工的道具を創案するとともに、そうした道具が自分自身の精神機能を随意的にコントロールする手段となることを強調する。人間の高次精神機能が「心的道具」によって媒介されるというアイデアは、ヴィゴツキーの独創的な発想であった(このことは、3章2節の2で述べた)。この「心理的道具」に関する議論は、「道具的方法」という論文（Выготский, 1982a）で示されていた。道具的方法とは、われわれが、何らかの刺激に対して反応をおこなう際に、それを直接的にではなく、人工的で補助的な媒介刺激を介在させ、間接的に反応をおこなうことを指している。

ヴィゴツキーの初期の研究では、心理学的道具は物理的なものをさしており、彼は、それを「インストルメント」(инструмент)と呼んでいた。その後、彼の関心は言語に代表される「記号」(знак)に向けられていった。ヴィゴツキーは、言語が人間の心的活動を改変する道具的本性を強調する。例えば、彼は、ゲシュタルト心理学者ケーラーが、霊長類による道具使用の実験に基づき人間の子どもの思考を類推しようとする立場に強い異議を唱え、人間が言語を使用する点が強調されるべきであるとする。ヴィゴツキーは、子どももチンパンジーも、手の届かない棚の上にある食べ物を取る課題を道具(椅子と棒)を使って解決するが、その際に「人間は目や手を用いて課題を解決するだけでなく、ことばを使用する」(Выготский, 1984: 23)[10]ことを強調する。すなわち、課題を解決する過程で、子どもはことば補助的な道具として、直接的な視覚的領域にない刺

[10] Выготский, Л. С. (1984b). *Научное Наследство.* Педагогика

激を取り込むことにより、様々な種類の予備的な行為をすることができるのであった。

このように、子どものことば行為は、問題解決の単なる付随現象ではなく、問題を分析し計画し解決する道具、つまり問題解決を組織化する源となっている。チンパンジーが目の前にある棒を使用して課題を解決することと、子どもがことばを使用して問題を解決することの間には対比できない次元の相違があり、ヴィゴツキーは、言葉等の記号により媒介された人間に特有な心理機能を「高次心理機能」と呼んだのであった。

このことに関して、ヴィゴツキーが強調する点は、人が媒介刺激を能動的に創案(invent)し、自分自身の心理機能を随意的に制御することを可能にしているという点である。今日、文化心理学者は、人が能動的に創案する刺激を「人工物」(artifact: Cole, 1996: 119)[11]と呼んでいる。さらに、ニューマンら(Newman, Geiffin, & Cole, 1989: 3)は、文化－歴史理論においては、人間の精神機能は自然なものではなく、文化－歴史的人工物に媒介された「人為的」(artificial)なものであると述べている[12]。かくして、ヴィゴツキーの論において、高次精神機能は人為的に創案されたものであるということが示唆される。

さらに、高次心理機能の「人為性」に関して留意される点は、人は人工物(アーチファクト)を能動的に創造し、自己の活動の一部分として組み込むだけでなく、さらに、それを不断に改良し発展させていくことである[13]。つまり、人工物は、固定的なものではなく、生成的・発展的なものとして理解される。実際、ヴィゴツキーは、人工的な道具を、「基本的」道具と「発展的」道具とに区別している(Wertsch, 1985a: 31-32)[14]。このように、様々な社会的・歴史的状況下において人間が獲得する人工物は、それ以前の社会歴史的形態から進化してきたものであり、将来においては更に異なった形態をとりうる。ヴィゴツキー論が「文化－歴史的」と形容されるように、人工物は、そして、それにより媒介される精神機能もまた、普遍的で抽象的なものではあり得ず、具体的で社会－文化的な活動との兼ね合いでのみ理解できることになる。

次に、ラカトシュの可謬主義的数学論について検討することにしたい。ラカトシュもまた、数学者が新しい数学の理論を創案するとともに、そうした新しい理論が数学者共同体において制度化されている他の理論と激しく競合することを契機として成長発展することを強調する。(序章で議論したように)数学の知識は、伝統的に「プラトン主義」(platonism)の枠組みにおいて理解されてきた。すなわち、知識は「イデア」として認識主体とは独立に存在し、人は知性の力によってそれを「発見」(discover)、もしくはそれに

[11] Cole, M. (1996). *Cultural psychology*. The Belknap Press.
[12] Newman, D., Geiffin, P., & Cole, M. (1989). *The construction zone*. Cambridge University Press.
[13] この点は、わが国のヴィゴツキー研究において強調されないように思われる。
[14] Wertsch, J. V. (Ed.), (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Harvard University Press.

接近することができると見なされてきた。ラカトシュの可謬主義は、こうしたプラトン主義的見解を否定し、人が数学的知識を「発明」(invent)することを強調する。実際(2 章 2 節で示したように)、「証明と論駁法」は数学において知識を発明していく強力な研究プログラムであった。

『証明と論駁』では、多面体論の発展が、素朴な多面体概念の一般化や特殊化による整備と累積によって発展するのではなく、本質的に新しい証明の発想と新しい概念に基づく新しい多面体論の「発明」であることが示されている。このことを、ラカトシュは次のように述べている。

> 異なった証明によって生成される定理においては、われわれは素朴な概念は全然もっていません。それは跡かたもなく消え去りました。代わりに、各々の証明はその特徴的な証明生成概念を生むのです。それらの概念は伸開可能性、ポンプによる注入可能性、写真撮影可能性、射影可能性、等に関連しているのです。(Lakatos, 1976: 98-99, 強調は引用者)[15]

このように、多面体論に関する数学者たちの取り組みは、それぞれ新しい証明と新しい「証明生成概念」(proof-generated concept)による質的に新しい多面体論の発明を導いている。オイラーが当初推測を立てた際の素朴な多面体は、ジェルゴンヌ(J. A. Gergonne)の発明によって「射影幾何学」に、コーシー(A. L. Cauchy)の発明によって「解析的位相幾何学」に、そして、ポアンカレ(H. Poincare)の発明によって「代数的位相幾何学」として生まれ変わった。ラカトシュが「異なる証明は異なる定理を生む」(Lakatos, ibid: 79)と述べているように、これらの数学者の証明は、同一の定理のいわば「別証明」ではない。むしろ、異なる数学者の証明は、相違なる多面体論、新しい幾何学的対象の発明であると言える。ラカトシュはこのことを、生徒(Π)を通して、次のように語らせている。

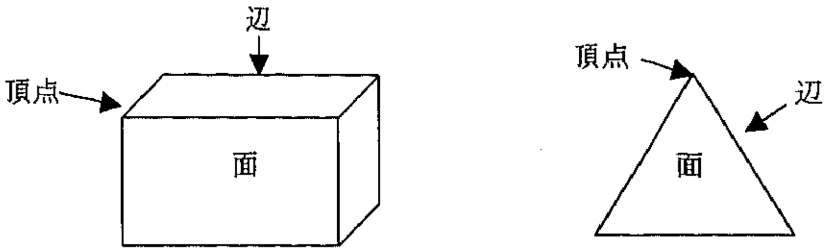
> 異なる証明の間の相違はずっと根が深い。多面体に関するのは素朴な推測だけです。3 つの定理はそれぞれ、コーシー的対象、ジェルゴンヌ的対象、ルジャンドル的対象についてであって、もはや多面体についてではありません。(Lakatos, ibid: 80)

ここで、数学者(ジェルゴンヌ、コーシー、ポアンカレ)が発明した種々の(射影幾何学的、解析位相幾何学的、代数位相幾何学的)多面体論を例示することも考えられるが、ここでは、デカルトの多面体論を取り上げたい。というのも、必要とする概念が少ない点で初等的であり、また今日の幾何教育とも関連している点で教育的でもあるからである。さらに、「デカルト-オイラー予想」という名が冠されていたが、これまでの議論は、もっぱらオイラー流の理論構成を取り上げてきたからである。

---

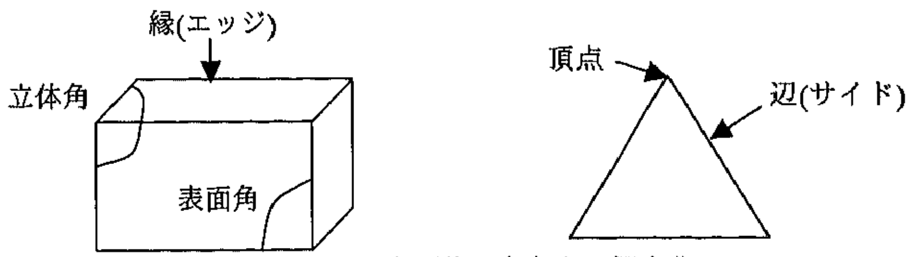
[15] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations.* Cambridge University Press.

デカルトの草稿(1639)のライプニッツの写しが 1860 年(死後 200 年以上後)に発見され、その中に、多面体の一般的性質に関する短い草稿があった[16]。この草稿は、オイラーの多面体定理を直接述べていないが、それが容易に従うような結果を含んでいる(この定理は「デカルト・オイラー予想」と呼ばれるのはこのためである)。しかし、デカルトの多面体論は、オイラーの多面体論と質的に全く異なっているので、そういう呼称は適切ではないと、ラカトシュは主張する。なぜならば、デカルトは、「平面角」、「立体角」という角の概念を用いており、0 次元の点、1 次元の辺、2 次元の面といった位相幾何学的な特徴の基礎となる革命的な概念には至らなかったからである[17]。



オイラーによる多面体と多角形の概念化

このように、オイラーは、空間における立体図形の構成概念は平面におけるの多角形と同一視している。しかしながら、デカルトは、多面体と多角形は異なる対象、むしろ、類比な関係を持つ対象と見なされる。そこでは、多角形の「辺」(サイド)と「頂点」にあたるものは、多面体では「縁」(エッジ)と「立体角」と呼ばれていた。また、次元を持たない「表面角」[18]が理論の構成部分として含まれていた。かくして、デカルトの立体図形の概念化はオイラーのそれとは全く異なっていたと言える。



デカルトによる多面体と多角形の概念化

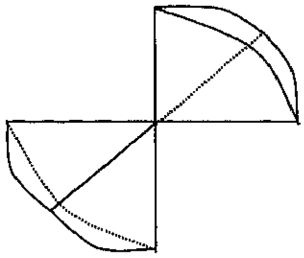
デカルトは、オイラーと異なり、計量的関係を視点として多面体論を組み立てている。

[16] この内容はポリアの著作の問題として系統化されている。Polya, G. (1954a). *Mathematics and plausible reasoning vol. 1*(pp. 56-58) Princeton University Press.
[17] 算数科では、第 4 学年で、立体図形の構成要素として、頂点，辺，面を学習する。この意味で、学校数学における立体幾何は、オイラーの構成概念に基づいている。
[18] 任意の面の任意の角は「表面角」と呼ばれる。

例えば、$\Sigma\alpha$を表面角の総和とするとき、それはE(縁の数)とF(面の数)を用いて

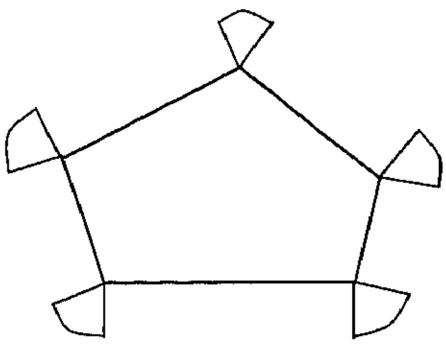
$$\Sigma\alpha = 2\pi(E - F) \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

と表せるとしている。また、デカルトは、「立体角」と、その外角に相当する「補立体角」[19]を考え、それらの計量的関係を打ち立てようとしている。



立体角と補立体角

また、草稿中に、「平面においてすべての外角を寄せると 4 直角(2π)となるように、立体図形においてすべての外立体角を寄せると 8 直角(4π)となる」という命題が述べられている。実際、多面体の各頂点を中心としてその周りに半径 1 の球を描き、外立体角の中に含まれる球の部分だけを残し、それらを 1 箇所にずらして集めると完全な球を形成する。これは、平面図形において、単位円の扇形を 1 箇所にずらして集めると完全な円を形成することと類比な関係となっている。このことから、デカルトにとって、平面多角形における外角は次のような図で表されるものとなり、今日用いられている通常の概念化とは異なったものとなっている。



デカルトによる外角の概念化(Polya, 1954a: 58)

そこで今度は、多面体のV個の内立体角に対応する外立体角(つまり補立体角)の球面多角形の周長との計量的関係から$\Sigma\alpha$をVを用いて表すことができ、

[19] 二つの凸な立体角が同数の面及び同一頂点を持つが、他には点を共有しないとする。一つの立体角の各面に他の立体角の 1 辺が対応し、かつ対応辺は面に垂直であるとする。このような相互関係にある 2 つの立体角を「補立体角」という。

$$\Sigma\alpha = 2\pi V - 4\pi \quad \cdots\cdots (2)$$

となる。(1)と(2)より、

$$2\pi(E - F) = \sum\alpha = 2\pi(V - 2)$$

このことから、$E - F = V - 2$、すなわち「オイラーの多面体定理」と同じ結果が導かれる。

しかしながら、デカルトの命題とオイラーの定理とは、$E - F = V - 2$という定理の表面的な現れこそ同じであるが、理論を組み立てている概念や方法は全く異なっているといえる。したがって、ラカトシュが主張するように、デカルトがその発明の一歩手前まで来ていたとされる定理は、オイラーの定理の異なる証明とは言えないのである。この意味で、デカルトの多面体は新しく発明された幾何学的対象であるといえる。ラカトシュの表現を借りるならば、それは別種の「研究プログラム」であった。

「社会的慣習」という考えは、ヴィゴツキーの文化－歴史理論における前提となっている。ヴィゴツキーは、社会的諸関係がすべての高次精神機能の発生源であるとし、さらに、内面化された精神機能それ自体も社会的本性を保っているとする[20]。先に(141 頁)引用したように、

> すべての高次精神機能は内面化された社会的関係である。それらの構成要素、一般的構造、そして行為の手段は社会的なものである。われわれが精神的なものに目をむけたときにさえ、それらの性格は疑似－社会的なものである。彼らの個人的な領域でも、人間は社会的相互作用を維持する。(Выготский, 1960: 198)

また、(3 章 3 節で述べたように)ヴィゴツキーの文化－歴史理論では、具体的な社会的関係の特徴が明示的に検討されておらず、そのことが活動理論へと発展する一つの契機となっていた。活動理論では、文化－歴史的に発展した具体的な社会共同体における具体的な実践活動(例えば「洋服仕立職の徒弟制度」)が取り上げられ、そこでの成員の認知的・技能的発達過程が具体的な文脈において検討されている。このように、社会実践共同体は、ヴィゴツキー派の理論においてますます重要で明示的な位置を占めるようになっている。

ここで、議論を精神発達論から数学論に移したい。数学教育研究者、より広くは知識社会学者の中には、ラカトシュの数学論の中に、社会共同体的側面を見いだしている者がいる。例えば、アメリカ合衆国のマグダリン・ランパート(M. Lampert)は、ラカトシュの数学論に依りつつ、数学の授業を、「語り合いの共同体」(community of discourse)とし

[20] Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higer mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 144-188). Sharpe.

て特徴づけている(Lampert, 1990)[21]。ランパートは、数学が発展してきたのは、理論が拠り所とする前提や定義自体が、数学者集団において再検討の余地を持ち、検証や修正に対して開かれているからであるとする。そして、数学における理論は所与のものではなく、数学者共同体の成員間で社会的に取り決められる協定物であるとみなしている。

数学を社会共同体的実践と見なす研究として、ここでは知識社会学者ディヴィド・ブルア(D. Bloor, 1976, 1983)[22]および人類学者メアリー・ダグラス(M. Douglas, 1982)[23]の研究を取り上げる。これらの研究は、人々の反例(変則事例)に対する対処法を視点として、マクロな数学者共同体を類型化するユニークな試みとなっている。

ダグラス(Douglas, 1982)は、社会共同体の実践形式を、その成員がよそ者に対してとる対処法から特徴付けている。よそ者に対する人々の対処法はそれほど多様ではない。それらは、「無関心」、「排除」、「包摂」、「日和見」という 4 類型でカバーされる。人々は、よそ者を無視したり無関心を装ったりする。逆に、よそ者を脅威と見なして排除することもある。また、よそ者に対して相応の配慮をし、自らの社会集団に同化したり、既存の範疇を拡げて包摂したりもする。さらに、よそ者に対して、一定の恩恵をもたらす限りにおいて受け入れるという合理的な対応を取ることもある。

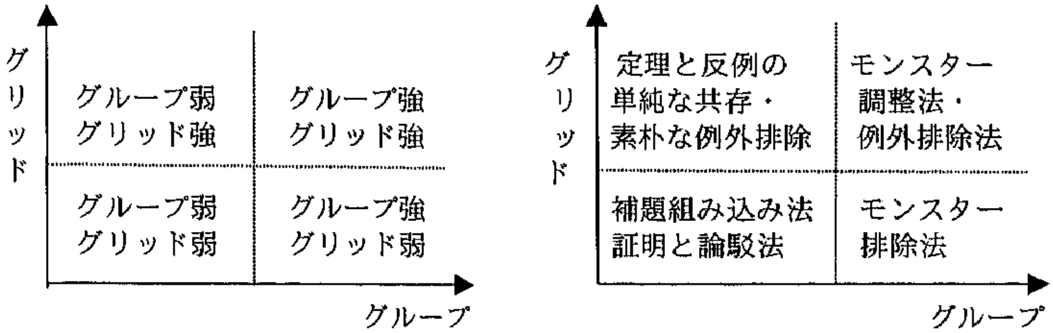
ブルア(Bloor, 1983)は、ダグラス論におけるよそ者に対する対処法のタイプと、ラカトシュ論における反例(変則事例)に対する対処法のタイプとの類似性を指摘する。そして、反例に対する数学者の対処法は、彼らの信念体系に深く根ざし、一貫したパターンを示すとする。こうして、よそ者に対する一貫した対処法が社会共同体の類型をなすように、変則事例に対する数学者の対処法が、数学者共同体の特徴的な実践様式の類型を与える。

よそ者に対する対応(Douglas)	数学者の反例の対処法(Bloor, Lakatos)
排除	モンスター排除法
包摂	モンスター調整法・例外排除法
無視	素朴な例外排除法
日和見	補題組み込み法

ダグラスの類型論で興味深い点は、社会共同体の実践様式の類型を、2 つの独立した境界基準によって分類していることである。ダグラスによる 2 つの境界基準とは、ある共同体の成員を非構成員(よそ者)と区別する境界、そして一つの集団内部での役割・地位・

[21] Lampert, M. (1990). When the problem Is not the question and the solution Is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.
[22] Bloor, D. (1976). *Knowledge and social imagery*. Routledge & Kegan Paul; Bloor, D. (1982). Polyhedra and the abominations of levitics. In M. Douglas (Ed.), *Essays in the sociology of perception* (pp.191-218). Routledge & Kegan Paul.
[23] Douglas, M. (1982). *Essays in the sociology of perception*. London: Routledge & Kegen Paul.

身分・義務を区別する境界で、それぞれ「グループの境界」、「グリッドの境界」と呼ばれている。社会共同体は、こうした境界の強さと明確さの程度により区分される。この分類図式は、グループの境界の強度を横軸に、グリッドの境界の強度を縦軸にとることにより、平面上に表すことができる[24]。



グリッド・グループ境界基準による二次元配置 (Bloor, ibid: 203)

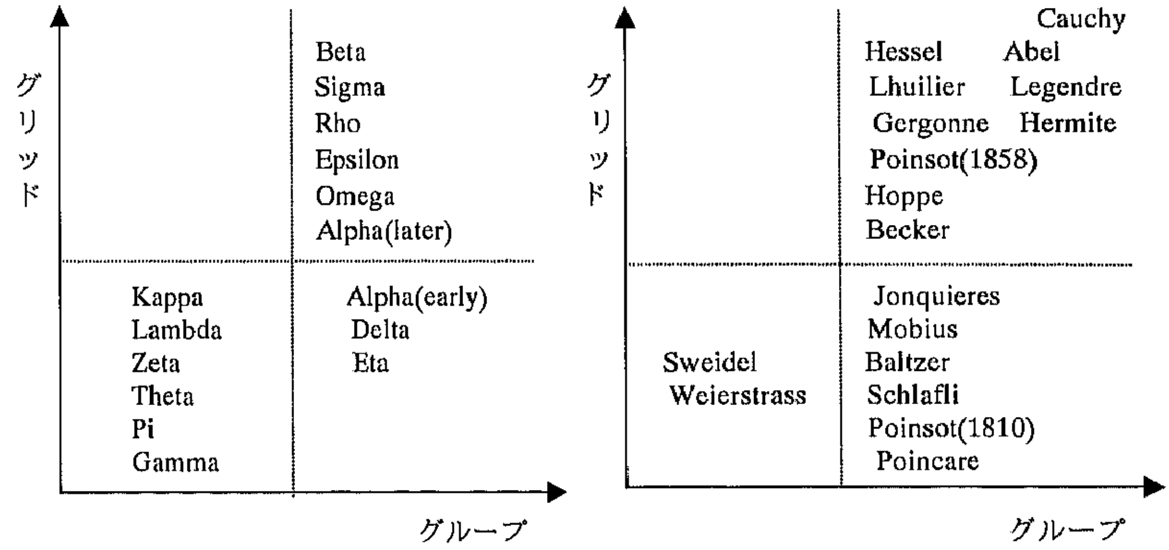
このように、ブルアは、ダグラスの着想を援用し、反例に対処する４つの戦略に対応する数学者の４つの社会共同体的実践形式を区別している。

「グリッド弱・グループ強」の区画は、よそ者と身内を明確に区別するが、集団内の組織化の程度は低い社会構造に対応する。ダグラスによれば、これは、内部の純粋さや穢れを強く意識し、変則例を好まない社会である。こうした社会は、追放という脅しによって秩序を保とうとする。ブルアによれば、こうした社会集団は、「モンスター排除法」を使用する数学者集団に対応する。対照的に、「グリッド強・グループ弱」の社会構造は、二つの集団を互いに争わせるような圧力は存在せず、さりとて、両集団に協力を促すような力も存在しない。この場合、理論の支持者と反例の支持者とが互いに無関心かつ冷淡に共存している。こうした疎外状況にいる数学者集団は、専ら「素朴な例外排除法」を使用する。さらに、「グリッド強・グループ強」の社会構造は、軍隊や官僚組織のように、順次等級付けられた地位とそれに関連する権利や義務を特徴とする。こうした社会は、複数の利害関心のもとで、異なる層の間の複雑な関係の調整と妥協案の策定を必要とする。こうした社会集団は、数学者の場合では、理論と変則例の関係を調整する「モンスター調整法」や「例外排除法」を用いる実践共同体となる。最後の「グリッド弱・グループ弱」の社会構造は、よそ者と身内を区別する境界が弱いため、排除の脅しや、地位や義務に基づく圧力もない。こうした社会では、何かの利益や恩恵のために、境界線を超えることが自由になされる。このような社会は、変則事例を新しい光のもとで眺めることを奨励し、評価する。こうした特徴に鑑み、数学者共同体を特徴づ

[24] この図式では、どちらの軸も原点に近づくほど境界の強さは弱まり、その明確さも失われる。

ける対処法として「証明と論駁法」・「補題組み込み法」が位置づけられる。

ブルアは、ラカトシュの『証明と論駁』に登場する架空の生徒と、歴史上の数学者を、先の４つの集団に分類している[25]。



「証明と論駁」に登場する生徒と数学者の二次元配置(Bloor, ibid: 203-204)

これまで見てきたように、ダグラスの社会集団の分類図式と、それに基づくブルアの数学者集団の議論は、数学を一つの社会実践共同体として特徴付ける可能性を示している。

他方で、ヴィゴツキーは精神機能に関して、ラカトシュは数学理論に関して、個と社会が、一致もしないが乖離もしない関係にあるものとして、理論を展開していることが示される。これまで見てきたように、ラカトシュの可謬主義的数学論とヴィゴツキーの文化－歴史的発達論とは、内容こそ異なるものの、その理論的・方法論的前提を検討するとき、いくつもの共通点を持つことが示される。かくして、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの発達論から、一つの数学教育の理論を構築する前提が確認される。

最後に、本節の議論を振り返りたい。本節では、数学的活動についてのラカトシュの可謬主義と、精神発達についてのヴィゴツキーの文化－歴史論とが思想的レベルにおいて共通性(歴史－発生的アプローチ、拮抗関係の弁証法的発達、社会実践共同体)を持っていることを議論してきた。これまでの議論から、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの

[25] この配置から、多くの数学者が「モンスター調整法」もくしは「モンスター排除法」を用いていたことが示唆される。また、ラカトシュが推奨する「証明と論駁法」を採用する数学者はわずか２名であり、「証明と論駁法」の高度さが伺われる。

発達論は、その理論的・方法論的前提を検討するとき、多くの共通点を持っていることが示された。かくして、これら２つの理論から、一つの数学教育論を構築するための準備が整えられた。このことをふまえ、次節では、これら２つの理論に依拠した理論構築を試みたい。

第２節　社会数学的活動論の構築

本節では、可謬主義的数学論と文化－歴史的発達論に依拠する際の観点を提示する。

１．構築の観点

本論文で、ラカトシュ論とヴィゴツキー論に依拠する際に、両理論の対照性に着目する。それは二点ある。一つは、ラカトシュ論における「大局的発見法である研究プログラム」とヴィゴツキー論における「局所的で周辺的な参加」であり、もう一つは、ラカトシュ論における「新しい知識の発明」とヴィゴツキー論による「慣習的な形式」である。

前者の観点(大局と局所)の意味は次のことである。一方の可謬主義では、科学者が理論を構成する際に、種々の反証事例の存在や他者からの論駁を予感しているが、そうした枝葉末節には気を留めずに、予め自分なりに定めた大局的なプログラム(綱領)に従って理論構成を進めていく。他方の文化－歴史理論では、文化的実践への局所的参加を通して、すなわち、社会集団の年長の成員が組織する文化的実践に、新参者が導かれつつまた周辺的に参加することを通して、文化的道具を内面化し、その道具に表象された過去の問題解決の歴史を知的遺産として継承する。このように、ラカトシュ論は大局性を、ヴィゴツキー論は局所性をそれぞれの特徴としている。

後者の観点(創案と協約)の意味は次のことである。ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの発達論は、ともに個人と社会の弁証法的関係を強調していた。しかしながら、どちらかというと、ラカトシュ論は、数学者個人が新しい数学理論を「発明」(invent)することに力点を置いている。実際、可謬主義は、客観的真理を「発見」(discover)するという認識論の批判を出発点としていた。他方で、ヴィゴツキー論は、文化－歴史的に形成された「慣習」を個人が取り込んでいくことを重視しているように思われる。実際、文化－歴史理論は、心理発達を社会文化側面から切り離して検討する立場の批判を出発点としていた。このように、ラカトシュ論は「個人的創案」(personal invention)を、ヴィゴツキー論は「社会的協約」(social convention)をそれぞれの特徴としている。

そこで、本論文では、「大局」と「局所」の対照性、そして「創案」と「協約」の対照性に着目し、それらを弁証法的に統合することにより新しい数学教育論の構築を試みる。

２．大局的活動への局所的参加

２．１．可謬主義における大局的プログラム

ラカトシュの可謬主義に関して、ここでは「科学的研究プログラムの方法論」(Lakatos, 1978a)[26]の２つの特徴に着目する。一つは、科学的研究プログラムが「肯定的発見法」と呼ばれる大局的で長期的な研究指針を持っていることであり、もう一つは、理論の科学性についての規範的な基準を備えている点である。

ラカトシュの「科学的研究プログラムの方法論」は、いずれの理論も長期的視野のもとでの理論の発展させるための研究プログラムとして理解された。そして、すべての研究プログラムは理論を前進させるための発見法、すなわち「肯定的発見法」を持っていた。それは、長期間にわたる研究方針を定めたものであって、研究者はそれに従って自分の理論を構築することに一意専念し、現実の反証事例も利用可能なデータも無視する役割を演じていたのであった。いずれの研究プログラムも、その展開過程において膨大な反証事例を処理していくこととなるが、その処理手続きは、理論家の理論上の基本構想のもとで整理され、進められてゆく。すなわち、既知の変則事例とは独立に処理手続きの基本枠が定められるのであった。かくして、「肯定的発見法」は、研究者が、様々な反駁に対して過度に神経をとがらすことから回避し、長期的視野のもとで計画された研究方針に従って理論を整備することを可能にしている。研究者は、「肯定的発見法」に規定されている指示に従って自分のモデルを構築することに一意専念し、現実の反証事例も利用可能なデータも無視するのであった。この意味で、「肯定的発見法」は、研究者が、次第に複雑さを増してゆく理論モデルを発展させ、膨大な数の変則事例による混乱から彼らを救い出す、いわば「羅針盤」であった。

次に「科学性の基準」の問題を述べる。ラカトシュが科学的研究プログラムの方法論を提出したのは、科学理論の進歩を合理的に記述し、かつ説明することにあった。ラカトシュは、ポパーが提示した「方法論的反証主義」の科学性の基準を採用し、これまで予期されていないことを予言したり、これまでに判明していることでもそれを違ったやり方で説明できたりするかどうかにかかっていると考えた。そして、複数の研究プログラムが競合している状況において、ある研究プログラムが、たとえ多くの反証事例を抱えていても、それまで予期されていなかった新しい事実を予言する力を持つとき、それは「前進的問題移動」をしていると呼ばれ、逆に、新しい事実を何も予言できなくなり、変則事例に対して後知恵的な説明しかできなくなった研究プログラムは「退行的問題移

---

[26] Lakatos, I. (1978a). *The methodology of scientific research programmes.* Cambridge UP.

動」をしていると呼ばれた。ラカトシュは、「前進的問題移動」をしている研究プログラムが「退行的問題移動」しかできなくなった研究プログラムを追い越していくことによって科学的理論が進歩すると考えたのであった。

これまで見てきたように、ラカトシュの研究プログラム論は、長期的な視野のもとで未分化な仮説から分節化・精緻化された理論へと徐々に進歩していく大局的な姿を記述するとともに、理論が進歩する際の規範的な基準をも提示しているものであった。

2．2．文化－歴史理論における導かれた参加

ヴィゴツキーの文化－歴史理論に関して、ここでは 2 つの特徴に着目する。一つは、数学的道具が正統に使用される実践活動についてであり、もう一つは、発達途上の新参者ををそうした実践活動に徐々に導いていく先達の指導性についてである。

前者に関して、文化－歴史理論は、数学文化において歴史的に発展してきた道具を、数学的実践に埋め込まれた文脈で使用することを強調する。すなわち、文化的道具は、文化的に組織化された実践活動において本来の機能を果たすと見なされる。そして、文化的実践に埋め込まれた文脈において道具を使用することにより、人は、道具それ自体についての事細かな分析をする必要がなく、また、彼らが道具に関して理解する以上に複雑な実践に参加することができるとされる。こうした実践活動と道具の間の不即不離の関係が、文化－歴史理論の特徴であった。

後者に関して、文化－歴史理論は、文化的道具を習得する方法は、文化的実践への参加を通して、すなわち、社会文化的な集団の年長の構成員が組織する慣習的実践に、新参者が導かれつつ周辺的に参加することを通して行なわれるとする。熟練者の手ほどきのもとで、新参者は、文化的道具の正統な使用を見よう見まねで模倣し、次第に、独力で使用できるようになっていく。このことは、新参者が、実践活動の遂行に部分的な責任を負うことから、次第に全体的な責任を請け負うようになれることを意味する。

これまで見てきたように、ヴィゴツキー論は、文化的道具が正統に使用される実践活動へ発達途上の人々を徐々に導いていく過程を説明しているものであった。

2．3．大局的活動への局所的参加

ここでは、ラカトシュの研究プログラム論とヴィゴツキーの文化－歴史理論のそれぞれの特徴を踏まえ、社会数学的活動論を構築する観点を提示する。

一方の研究プログラム論は、大局的で未分化な構図から分節化された明確な理論へと発展する過程を説明している。他方の文化－歴史理論は、実践活動への局所的な参加から、次第に実践全体に対して責任を負っていく過程を説明している。このように、数学

論は大局から局所へ進み、認知発達論は局所から大局へと進むという意味で、両者は対照的な特徴を持っている。本論文では、こうした二つの立場を次のようにして統合する。それは、大局的で規範的な数学的活動に子どもたちを周辺的に参加させていくことである。

では、こうした統合が、どのような意味を持つのであろうか。このことを、現在の学校数学のかかえる課題に照らして検討したい。学校数学では、数学の実践において歴史的に蓄積され固定化されてきた文化的道具を内面化することにより、道具に表象された過去の問題解決の歴史を知的遺産として継承することを意図している。しかしながら、学校数学の授業では、ともすると数学的道具それ自体が前面に出てしまい、数学の文化的実践に埋めこまれた問題解決の経験、すなわち数学に特徴的な活動が見落とされがちであった。このことに関して、文化人類学者のレイヴら(Lave et al., 1988)[27]は「徒弟制」(apprenticeship)との比較から、学校数学では、数学的知識がその本来的使用の具体的文脈から離れて半ば個別的・抽象的に取り上げられていると述べている。

> 学校数学で獲得される概念的知識や問題解決に関する知識は、大多数の生徒にとって統合されておらず、不活性のままである。というのも、学校では、孤立した抽象的な概念的知識や問題解決のための下位スキルを習得することに注意が向けられるが、それらを複雑で現実的な課題解決に利用したり獲得したりする過程には、ほとんど注意が向けられていないからである。授業では、課題が小ステップに細分され、各ステップを模倣的・反復的に遂行することが知識や技能の獲得になっているのである。(Lave et al., ibid: 66)

また、先に(166 頁)述べたように、レイヴらは、学校数学では真正な数学的実践が欠如しており、親方(マスター)の役割を果たすような教師も不在であると批判する。レイヴらによるこうした批判は、学校数学の 2 つの問題に向けられているように思われる。一つは、学校数学で教えられる文化的道具とその使用方法が数学的実践と乖離していることであり、もう一つは、数学的実践の熟達者としての教師が、生徒を真正な数学的実践に埋めこれまた文脈において数学的道具の習得を支援するような組織的な手だてを講じていないということである。数学的活動を人為的に分解し、生徒を個別・断片的な課題に反復的に従事させるのではなく、教師の支援と方向づけのもとで正統な数学的活動に生徒を周辺的に参加させ、次第に彼らが独力で可能となるよう、教師の側で徐々に支援の手を緩めていくことが必要となってくる。本論文で、ラカトシュ論とヴィゴツキー論に依拠することで、こうした必要性に応えることができると考える。

---

[27] Lave, J., Smith, S., & Butler M. (1988). Problem solving as an everyday practice. In R. I. Charles, & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and learning of mathematical problem solving* (pp.61-81). NCTM.

ここで、数学的活動の「規範性」について述べることにしたい。ラカトシュの研究プログラム論には、新しい理論を構築していく際の規範的な基準が盛り込まれていた。数学的活動に関して、ラカトシュは、「モンスター排除法」や「例外排除法」などを望ましい活動とはみなさなかった。そして、証明分析を手だてとした「補題組み込み法」により理論を進歩させていくことが科学性の規範的基準に合致するとした。規範や価値が関わる教育においては、数学的実践に関する規範的な在り方にもとづく教室の活動が組織されなくてはならないし、教室を規範的な数学的活動が展開される社会－共同体的空間にすることが重要となってくる。この意味においても、ラカトシュの可謬主義的数学論は、ヴィゴツキー論にもとづく学習指導と結びつくことになる。

３．個人的創案と社会的慣習の相互作用

３．１．可謬主義における創案

ラカトシュの可謬主義論は、知識に関するプラトン主義的見解(すなわち、知識は「イデア」として認識主体とは独立に存在し、人は知性の力によってそれを発見、もしくは接近可能であると見なすこと)を否定し、人が知識を創案することを強調する。『証明と論駁』は、数学において知識を発明されていく姿を具体的に示すものであった。

ラカトシュの著書『証明と論駁』では、多面体論の発展が、素朴な多面体概念の一般化や特殊化によって発展するのではなく、本質的に新しい証明の発想と新しい概念による新しい多面体論の発明を通して発展することが示されている。多面体論に関する数学者たちの取り組みは、それぞれ新しい証明と新しい「証明生成概念」(proof-generated concept)による質的に新しい多面体論の発明を導いている。実際、オイラーが当初推測を立てた際の素朴な多面体は、ジェルゴンヌの発明によって「射影幾何学」に、コーシーの発明によって「解析的位相幾何学」に、そしてポアンカレの発明によって「代数的位相幾何学」として生まれ変わった。ラカトシュが「異なる証明は異なる定理を生む」(Lakatos, ibid: 79)と述べているように、これらの数学者の証明は、同一の定理のいわば「別証明」ではなく、むしろ、異なる数学者の証明は、相違なる多面体論、新しい幾何学的対象の発明であると言える(詳しい議論は本章１節の３で述べた)。

３．２．文化－歴史理論における社会的慣習

ヴィゴツキーの発達論は、個人と社会の弁証法的関係を強調するが、どちらかというと、社会的側面の果たす役割を重視する。すなわち、文化-歴史理論は、人間の高次精神活動を、人間の存在の歴史・社会的形態に、現実に対する人間の実際の関係に求めようとしている。その際に、ヴィゴツキーは、社会的側面として２つの観点を取り上げる。

以下では、このことを、言葉と思想(意味)の関係を例として述べたい。

第一の観点は、子どもの精神機能の発達は、大人との社会的関係から、ことばを媒介とした大人とのコミュニケーションから始まることである[28]。

> ことばは、子どもとのコミュニケーションの手段として、大人によって機能的に利用されねばならない。その後でのみ、ことばは子ども自身にとって意味を持ったものとなる。ことばの意味は、このようにして、初めは他人に関して客観的に存在するものであり、その後子ども自身にとっても存在し始めるのである。大人と子どもの言語的コミュニケーションのあらゆる基本的形態は、後になって精神機能となる。(Выготский, 1983a: 145)

ヴィゴツキーは、子どもが大人と言語的コミュニケーションをするようになると、やがて、自己中心的発話行為が社会的発話行為から分離し、その後に、個人的で、言語に媒介された思想の原初的形態が現れるとしている。すなわち、社会的発話から、自己中心的発話を経て、思想と言語が内的関連性をもつ内面的発話(すなわち「内言」)が発達すると述べている。このように、ヴィゴツキー論にとって、社会的側面は、内的な思想(意味)の発達の源泉となっている。

第一の観点が、社会的発話から内的発話と思想への転回であったのに対して、第二の観点は、内的思想から社会的発話への転回の過程についてである。ヴィゴツキーが、思想とことば行為(はなし言葉、書き言葉)との相互関係を分析する際に、「ことばの意味」[29]という単位に着目した。ことばの意味は、思想とことば行為という２つの過程がせめぎ合う場であり、そこでの拮抗によって両者(思想とことば)が互いに構造的な変化を受ける弁証法的中間項であるとヴィゴツキーは考えたのであった。

ことばの意味は、一方では、社会的に協約され、文脈の影響を受けない辞書的な意味である「語義」に影響される。実際、自分の考えを他人に伝える際には、社会的に協約されている語義に自分の思想を乗せなければ意味を伝えることができない。他方で、ことばの意味は、主体の内的動機に方向づけられた個人的経験である思想にも影響される。発話者は、自分自身の具体的な動機や願望、状況に根ざした個性的で豊かな経験を発話の中でできるだけ表現しようとする。かくして、ことばの意味は、語義による思想の形骸化の力と、思想の側のそれへの反発力とのせめぎ合いの中で不断に達成され、更新され続ける。そして、そのようなせめぎ合いの結果、一方の社会的に協約された語義が詩や小説の創造などを通して構造的変化を被り、他方の思想もこれまでにないことばで語

---

[28] Выготский, Л. С. (1983a). *Проблемы Развития Психики*. Педагогика.

[29] 「ことばの意味」とは、辞書的で客観的な「語義」(значение)ではなく、何らかの具体的文脈で発せられた発話が担う意味(смысл)であった。

られることにより新しい構造を得る。このように、ヴィゴツキーは、個人の内的な思想の運動を、社会的に協約された形式との拮抗関係において描き出そうとしており、社会的協約は個人的思想が発展するための原動力となっている。

３．３．個人的創案と社会的慣習の相互作用

ここでは、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの発達論の特徴を踏まえ、それに依拠することで数学教育の新しい観点を提示する。これまで見てきたように、ラカトシュ論は、数学者個人が新しい数学理論を創案することに力点を置き、ヴィゴツキー論は、文化－歴史的に形成された社会的協約を個人が取り込んでいくことを重視する。このように、ラカトシュ論は「個人的創案」(personal invention)を強調し、ヴィゴツキー論は「社会的協約」(social convention)を重視する点で、両者は対照的な特徴を持っている。本論文では、こうした二つの立場を次のようにして統合する。それは、個人的創案と社会的協約が「ことば行為」において相互啓発的関係を生み出すことである。こうした統合の可能性は、「証明」を「ことば行為」とみなすことに見いだされる。このことを、以下で説明したい。

可謬主義的数学論は、証明の議論を積極的に利用して数学的知識を創案することを強調する。他方の文化－歴史理論は、個人の内的思想が言語の社会的協約によって制約される点を強調する。この意味で、両理論とも、思想とことば行為の緊張関係に着目している。

ラカトシュが可謬主義的数学論を構成する際の問題意識は、伝統的なユークリッド主義において、証明と推測の機能が明確に分離されていることであった[30]。伝統的な数学論では、推測の構成と証明の構成が、別種の相容れない論理に属するものとみなされていた。しかし、ラカトシュは、こうした見解に異議を唱え、数学は、何らかの推測が証明されれば絶対無謬の真理とされ、反例が提示されれば誤りとして却下されるという二元論的なものではなく、むしろ弁証法的なものであるとする。そして、証明の働きは、推測を完成させることにあるのではなく、むしろ推測を改良し理論を発展させることにあるとする。このことに関して、ラカトシュは次のように述べる(これは、既に 173 頁に引用した)。

> 「『証明問題』の目的は、ある明確に述べられた主張が真であるか、それとも偽であるかを決定的に示すことである。」というのは誤りです。「証明問題」の本当の目的は、もともとの「素朴な」推測を改良し(実際には完全にし)本物の「定理」にすることなのです。(Lakatos, ibid: 49)

[30] Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge University Press.

さて、数学における推測と証明の関係と同じ図式が、ヴィゴツキーによる「思想」と「ことば行為」の関係の議論においても見られる。ヴィゴツキーは、ことば行為を、思想に言語的コードを与えるという単純な図式で捉えるのではなく、思想を改良し、仕上げる働きを持つとする。このことに関して、ヴィゴツキーは次のように述べている(これも先に(173頁)で引用した)。

> 思想とことば行為の間には、調和よりも矛盾が存在する。ことばの構成は、既成の思想の表現に奉仕するのではない。思想はことばに転化するときに、削り直されたり、変形させせられたりする。思想は、ことばで表現されるのではなく、ことばの中で仕上げられるのだ。(Выготский, 1982b: 305)

人が自分の思想をことばで実現しようとする際に、思想を社会的に協約された言語形式に変換しなくてはならない。すなわち、何らかの個人的な動機によって方向付けられた主体的思想を、一定の構文と語義を持った客観的な言語に変換しなくてはならない。この変換過程は、具体的状況に根ざした瑞々しい経験を発話において最大限実現しようとする求心力と、他者に理解してもらうために一般的な構造に形骸化してしまう遠心力とのせめぎ合いの過程で、互いに改変され、洗練される相互啓発的関係にある。こうしたヴィゴツキーの主張は、証明が素朴な推測を改良し完全にするというラカトシュの主張と合致している。かくして、「推測と証明」の相互啓発的関係についてのラカトシュの見解は、「思想とことば行為」の相互啓発的関係についてのヴィゴツキーの見解と合致している。

ラカトシュの「科学的研究プログラムの方法論」は、未分化な理論を明確で組織だったものに順次仕上げてゆく長期的な綱領(プログラム)を持っていた。何れの理論も、その発展の初期段階においては未分化なままであるが、長期的な視野のもとで、次第に整備され、精緻化されたものへと仕上げられていく。数学においては、未分化な推測を分節化された明確な理論へと前進させる「発酵作用素」であるのが、証明、すなわち原始的推測を部分補題に分割する議論であった。大要的な理論的仮説を証明によって明確に表そうとすることで、それまで隠れていた暗黙的な事実が明確になるとともに、新しい証明生成概念によって、理論は一層内容豊かになって行く。このように、証明(分節化されたことば行為)が、未分化な理論仮説(思想)を徐々に洗練する機能を果たしている。

上で述べた証明と推測の間の関係は、ことば行為の「外的・音声的側面」と「内的・意味的側面」の関係と合致している。子どもの思想は、最初は、内的・意味的側面に関しては漠然とした未分化な全体として発生し、外的・音声的側面に関しては一言二言の

単語においてのみ表現される。子どもの内的思想がやがて分節化するにつれて、逆に、外的なことば行為においては、句から文、さらには一まとまりの首尾一貫した談話へと移行してゆく。逆に、発話が部分から文全体へと移行するに従い、思想においては未分化な全体から部分へと移行する。ここでもまた、言語的思考の発達を、未分化な全体と、分節化された構造との関係によって理解することができる。

これまでみてきたように、数学における新しい知識の創案には、証明ということば行為が関連する。数学における証明は、その本性として、数学者(共同体)を意識する社会的ことば行為でもある。証明を構成する際には、他の数学者(例えば、論文の査読者)を説得し、異議を挟まれないように、明確に定義された概念と形式化された論法を用いて論を展開する必要がある[31]。証明が新しい知識の創案に関連とともに、社会的なことば行為でもあるという点に、ラカトシュ論とヴィゴツキー論との接点が見出せる。本項での議論では、「証明」という「ことば行為」を取り上げてきたが、このことは数学的言語一般に拡張することができると考えられる。この点については、本項の範囲を超えるので、次の節で詳しく議論することにしたい。

[31] Water proof(防水)という言葉のように、Proof(証明)には、外部からの攻撃を防御するという意味がある。

第3節　社会数学的活動論の構築

本節では、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーの発達論に依拠し、「社会数学的活動論」と呼ばれる理論を構築する。以下では、社会数学的活動論の対象と方法を述べ、その構造を示したい。

1．社会数学的活動論の対象

1．1．社会数学的活動論の研究対象と分析視点

社会数学的活動論は、子どもが、教師の指導のもとで、教室共同体における数学的実践活動への社会的参加を通して、数学文化の一部となっている数学的道具の使用に長けるようになることと理解する。こうした理解にもとづき、社会数学的活動は、二つの対象からなる。一つは「大局的数学的活動への局所的参加」、もう一つは「社会的相互作用による数学的意味の発達」である。本論文では、これらの内容を「側面」と呼ぶことにする。というのは、これら二つは別々のことがらではなく、社会数学的活動における力点の違いにすぎないからである。ここで、社会数学的活動の対象である二つの側面を図式化すると次のようになる。

社会数学的活動論の対象／分析の視点	大局的数学的活動への局所的参加	社会的相互作用による数学的意味の発達
協働的活動から個人の活動への責任性の移行、数学的道具の内面化	数学的発見法に基づく大局的な活動への導かれた参加を通じた子どもの側での責任性の増大	熟練者や数学的道具を介した社会的相互作用のもとでの子どもの数学的意味(一般化)の発達

「社会数学的活動論」の研究対象

ここで「社会数学的活動論」の特徴を二点挙げることができる。第一に、「社会数学的活動論」をなす 2 つの側面が、ヴィゴツキーの「機能システム」を構成していることである。「大局的数学的活動への局所的参加」では、数学的発見法を媒介する教師と子どもの関係(教師－数学的発見法－子ども)が機能システムであり、「社会的相互作用による数学的意味の発達」では、数学的道具を媒介する教師と子どもの関係(教師－数学的道具－子ども)が機能システムである。かくして、「社会数学的活動論」の二つの側面は、その媒介項によって区別されるものと言える。第二に、社会数学的活動論の 2 つの側面

の発達に関して、前者は、数学的発見法に参加する上での個人の「責任性」が増大し、後者は、数学的道具に個人が付与する「意味」(すなわち一般化)が発達することと理解される。前者を、子どもの側での発見法に関する「意味」の発達と表現し、後者を、数学的道具を操作する「責任性」の増大と見なすこともできるが、本論文では、それぞれの特徴を浮き彫りにするために、一方の語を用いている。より客観的な指標として、前者は、教師から提供される支援が減少すること、後者は、数学的道具が有効性を発揮する課題の範囲が広がることが挙げられる。

社会数学的活動の二つの側面は、いずれも学級共同体における数学的活動を基盤としているが、前者の「大局的数学的活動への局所的参加」は、数学的発見法にもとづく大局的な活動に参加する上での子どもの責任性の増大に光をあて、後者の「社会的相互作用による数学的意味の発達」は、社会的慣習に媒介された数学的活動に参加する際の子どもの側での数学的意味の発達に光をあてている。前者が、教師の導きのもとで、長期的に理論を発展させる指針である数学的発見法に基づき、子どもたちを部分的に参加させることに光をあて、後者は、教師から提示される(数学的言語に代表される)社会慣習と、子どもの数学的意味の創案との相互啓発的関係に注意を向ける。

この図式において、「分析の視点」とは、社会数学的活動の基本的な立場のことであり、道具・談話・他者を介する協働的活動から個人的活動への移行を分析することを意味している。以下では、社会数学的活動の二つの側面についてその意味と、理論的背景を示す。

１．２．大局的数学的活動への局所的参加

「大局的数学的活動への局所的参加」に関しては、教師による導きや他者との協働による数学的活動への周辺的な参加から、徐々に自分自身で活動を成し遂げる責任を請け負っていく過程を分析する。子どもが教師の導きのもとで徐々に自立していく過程は、ヴィゴツキー論に拠っている。しかしながら、こうしたヴィゴツキー論だけでは、一斉授業における大局的な数学的活動へ参加させるための観点を示すことができない。というのも、ヴィゴツキー論は、社会的相互作用を「対人的相互作用」に還元しているからである。この問題点を克服するためには、局所的な対人的相互作用から大局的な数学的活動の構造へと視野を拡張することが必要とされた(Wertsch, 1993)[32]。

こうした意味の拡張に関して、ラカトシュの数学論が重要な示唆を与えてくれる。そ

[32] Wertch, J. V. & Rupert, L. J. (1993). The authority of cultural tools in a sociocultural approach to mediated agency. *Cognition and Instruction, 11* (3 & 4), 227-239.

れは、数学が長期的に発展する大局的な姿を示していることである。

ラカトシュ論にもとづく数学的活動とは、次のような長期的な探究過程である。それは、子どもたちが既に知っているインフォーマルな知識や方法を用いて解決することができる問題を手がかりとして、数量や図形等に関する数学的パターンについて意識的な推測を構成し(その際には、授業に参加している多数の子どもたちから複数の推測が提示されることが自然である)、それが未知の事柄にも当てはまるかどうかという予言可能性を厳しく検証することにより、尤もらしく一般的な数学的命題を定式化していく、というものである。これは、未分化で漠然とした推測を、明確で分節化された理論体系へと長期的に発展させるための大局的な発見法に基づくものであった。数学における大局的発見法としては、ラカトシュによる「証明と論駁法」(もしくは「補題組み込み法」)が挙げられる。これは、一部の数学者が創案した高度な方法論であった。本論文では、学校数学における可能性を検討し、ポパー・ポリアによる「反証主義にもとづく手厳しい実験」も、大局的発見法として取り込むことにする。このことに関して、次の章(5章2節)では、反証主義にもとづく数学的活動の可能性に関して、高等学校での教授実験を取り上げる。

次に、「大局的数学的活動への局所的参加」を分析する視点についてのべる。数学的活動に関する従来の研究は、この点に関する議論が希薄であったように思われる。すなわち、数学的活動に関する議論は、学級共同体において子どもが数学的活動に徐々に参加していく過程を説明する視点を組み入れていなかった。この点に関して、本論文では、実践共同体における新参者の発達を説明するヴィゴツキー派の発達論を取り入れ、この問題の解決を試みた。

本論文では、学級共同体における数学的活動を分析する視点として、「他者との協働的活動から個人的活動への移行」を検討する。「協働的活動」とは(序章で定義したように)、複数の人々の作業分担により一定の活動が遂行されることを意味する。すなわち、教室共同体をなす複数の人々が、彼らが成し得る応分の責任分担のもとで数学的活動に参加することを意味する。協働的活動は、必然的に、子ども個人で可能なものよりも高いレベルの数学的活動を可能にする。これは、ヴィゴツキーの「発達の最近接領域」(зона ближайщего развития, Выготский, 1935: 12)[33]に拠っている。ちなみに、数学的活動のこうした協働的本性は、数学の理論が、個々の数学者によって単独に構築されるのではなく、むしろ複数の数学者の部分的寄与や相互作用を通じて発

[33] Выготский Л. С. (1935). *Умственное развитие детей в процессе обучения.* М. Педагогика.

展している(きた)こととも合致している。

協働的活動から個人的活動への移行を、「大局的数学的活動への局所的参加」という側面において分析することに関して、本論文では、「参加構造」(participation structure: Erickson & Schiltz, 1997: 22)[34]という視点を採用する。参加構造とは、一定の社会集団の成員間において社会的にとりきめられている権利や義務の配分の構造を指す。これは、一定の社会集団に固有の実践活動を遂行する際に、成員間の相対的権利や義務、さらには適切なコントロールの頻度や程度に一定の構造が見られるという考えに基づいており、教室共同体において協働で遂行される数学的活動を分析する視点を与える。一斉授業における数学的活動に関わる教師と子どもの間の権利と義務の配分と所有のパターンを、本論文では「数学的参加構造」(大谷, 1994a)とよぶ[35]。ここで、数学的参加構造が「発達」するとは、数学的活動において教師と生徒の間に分配される責任が子どもの側に次第に大きくなっていくことを意味する。先に、「大局的数学的活動への局所的参加」の分析の視点として、「導かれた参加を通じた子どもの側での責任性の増大」と書いたのは、こうした意味においてである。

１．３．社会的相互作用による数学的意味の発達

社会数学的活動のこの側面は、数学的言語等の慣習的道具を介した他者との社会的相互作用に照らして子どもの数学的意味の発達を分析する。それは、数学的活動において教師から提示される「数学的道具」を、子どもが自分自身の心的道具として「内面化」(интериоризация, Леонтьев, 1982: 32)[36]していく過程を分析することを意味する。以下では、「数学的道具」と「内面化」についてその意味を説明する。

社会数学的活動論では、「数学的道具」とは、主として「数学的ことば行為」を意味する。先節の議論では、ラカトシュの数学論にもとづき、証明という数学的談話を取り上げてきた。実際、ラカトシュは、数学的談話と数学的知識の弁証法的な関係を強調している。ラカトシュが「証明と論駁法」を数学的発見法として位置づけているように、数学における談話は、新しい道具を生み出す機能を持っている。数学者がある推測の証明を行うために、論を一定のまとまりのある談話に組み立てようとすると、しばしば、

---

[34] Erickson, F. & Schultz, J. (1997). When is a context? In M. Cole et al., (Eds.), *Mind, culture, and activity* (pp. 22-31). Cambridge University Press. これと似よりの用語として、茂呂(1997: 69)は「参加の枠組み」ということばを用いている。茂呂雄二 (編), (1997). *対話と知：談話の認知科学入門*. 新曜社.

[35] 大谷　実 (1994b). 一斉授業における「数学的参加構造」の社会的構成. *筑波大学教育学系論集*, 18(2), 41-56.

[36] Леонтьев, А. Н. (1982). Вступительная статья. В Л. С. Выготский, *Собрние сочинений, том I. Вопросы теории и истории психологии* (с.9-41). М. Педагогика.

条件や定義、前提、既有の知識を再確認する必要性が生じたり、時には思いがけない反例に直面したり、こうした矛盾を克服する過程で、数学的知識(道具)が発展する。このように、ラカトシュは、新しい数学的道具が数学的談話から生まれ、さらに数学的道具がそれを使わないで行なうものとは実質的に異なる談話を可能にするという談話と道具の相互作用を強調した。社会数学的活動論では、証明という数学的談話だけでなく、文字の式などを含む「数学的ことば行為」に拡張する。

先に「数学的道具」という用語を用いたが、それはヴィゴツキーの「心的道具」という用語に基づいている。第 3 章で述べたように、ヴィゴツキーは「心的道具」として、次のものを挙げた。

> 心理的道具およびそれらの複雑な体系の実例としてあげうるのは、言語、記数法や計算のさまざまな形式、記憶術のための諸工夫、代数記号、芸術作品、文字、図式、図表、地図、設計図、そしてあらゆる種類の記号などである。(Выготский, 1982a: 103) [37]

このことの類推により、数学的道具としては、証明や文字の式の他に、表やグラフ等の図式も含みうる。しかしながら、本論文では、数学的道具として、主として「数学的ことば行為」を取り上げることにする。その理由を次に述べる。

数学的ことば行為、特に「書きことば」は、自然言語と比較して、「対象表示機能」と「思考支援機能」とが表裏一体を成している。自然言語において、書きことばは、主として、事柄の表示や情報の伝達という機能を多く持っている。しかし、数学におけるそれは、思考することと不即不離の関係にある。このことの典型的な例は「筆算」である。筆算では、書くことによって思考が進められる(むしろ、思考をするために書くと言ったほうが適切かも知れない)。他の分野でも、書きながら反省し、思考を進めることも多いが、数学の場合はそのことが標準化され形式化されている。この意味で、数学的言語は、思考との関わりにおいて、他の分野(教科)には見られない固有の特徴を持っていると考えられる。さらに、数学的言語は、社会的慣習(協約)という点に関して、際立った特徴を持っている。数学的言語は、きわめて社会的かつ形式的である[38]。従って、数学的言語は、思考を支援し発見を促すという点でラカトシュ論と合致し、社会的慣習が際立っているという意味でヴィゴツキー論とも合致する。「社会数学的活動論」では、証明という言葉行為を文字の式を含む数学的言語にまで拡張しようとするが、このためにはよ

---

[37]Выготский Л. С. (1982a). *Вопросы теории и истории психологии.* Педагогика.

[38]実際、「1+1=2」というセンテンスが通じない地域を探すことは難しい。

り具体的な説明を要すると思われるので、次項で詳しく議論することにする。

次に、数学的道具の「内面化」とは、他者との言語的相互作用のもとでの個の内面における数学的意味の発達を意味する。数学教育における道具使用に関する研究(例えばCobb, 1995)[39]は、道具を意味付けている個人の思考過程に焦点を当てている。したがって、道具の社会的機能、すなわち道具が複数の人々の間で機能する在り方、さらには他者との関係で道具に埋め込まれた数学的意味が発達する過程については議論がなされていない。これに対して、社会数学的活動は、子どもの側のインフォーマルな知識を尊重するとともに、フォーマルな数学理論の制度化も重視する。すなわち、社会数学的活動論は、子どもの直観的な知識や既に知っている方法にもとづき意識的推測と発見を促すとともに、数学固有の道具使用や社会が求めている形式的な知識の習得をも目指す。これら両面を強調することが、社会数学的活動論の特徴となっている。

子どもの持っている数学的意味は、教師から提示される社会的で慣習的な意味に制約される。子どもが自分なりの仕方で理解していた数学的意味を、教室という社会的場面で提示しようとする際には、教室で共有しうる公的な使用法に従わなければならない。その際に、子ども自身が持っているインフォーマルな知識や方法は、彼らの豊かで具体的な経験と結びついているが、言語化されにくい。また、言語化されたとしても、それは、その人個人にとってよく分かる典型例に基づく類推であって、一般性に欠けている。ましてや、数量や図形に関する一定のパターンそれ自体が観念的な現象であるために、具体的な経験にもとづく言葉では十分に表現できない。教師から提示される数学における慣用的な言語は、こうした個々人の経験的な意味内容の背後にある一般的な仕組みを明確に表現する道具であるとともに、教室共同体において他者と首尾よくコミュニケーションするための重要な道具ともなる。子どもたちが、教室において、公的な数学的言語を意識的に使用し、その使い方を知ってゆく過程で、子どもたちのインフォーマルに持っていた暗黙的で未分化な意味は、一般的なものとして洗練され、明確なものとして再体制化される。このように、社会数学的活動論は、一斉授業を、公的な数学文化の一部となっている数学的言語のフォーマルな使い方と、個人のインフォーマルな意味が緊張関係のもとでせめぎ合い、相互啓発的に発展する場であるとみなす。かくして、社会数学的活動論は、教室共同体において提示される意味が、子どもの個性的でインフォーマルな見方にもとづくという点にラカトシュの数学論が反映され、教師から導入される数学的言語が子どもの個性的な思考の本質を明確化し、他者との有効なコミュニケーシ

[39] Cobb, P. (1995). Cultural tools and mathematical learning: a case study. *Journal for Research in Mathematics*, 26(4), 362-385.

ヨンを促進すると言う点にヴィゴツキー論が反映されているのである。

数学的道具の「内面化」の過程は、ヴィゴツキー論に基づき、次のように説明される。授業を通じて教師から提供される新しい数学的道具に関する知識は、初期の段階にあっては、子どもがすでに使いこなしている知識と半ば併存している。本論文では、複数の知識が併存可能となっているのは、ヴィゴツキー論にならい、それらの知識が果たす機能が異なるためであると理解する。一方の子どもの既存の知識は子ども自身の思考手段として機能し、他方の数学的道具に関する知識は談話において他者との社会的関係を構成し維持するうえでの社会的手段として機能すると考える。こうした初期の異種機能の併存は、社会数学的活動を通して、融合し、数学的道具を自分自身の思考のために使用すること、すなわち数学的視点から自分の思考を随意的にコントロールすることが可能となってゆくと考える。こうした数学的道具の発達は、教師の支援に基づく道具使用から、次第に独力で使用可能となるように、教師の側から支援の手を緩めていく過程であると考えられる。こうした協働的活動から個人的活動への移行が、社会数学的活動論の「分析の視点」で述べていることである。

1．4．数学的ことば行為の威力

先に述べてきたように、数学論と発達論に依拠して社会数学的活動論を定式化する際の発想は、ラカトシュの数学論における「証明」を「数学的ことば行為」に拡張することであり、ことば行為の社会的側面を強調することであった。

ここでは、数学的ことば行為が、物事を数学的視点から的確かつ思慮深く意味付けていくことであり、物事の根底に横たわる本質的な仕組みを一般的で簡潔に把握したり、新しいことがらを発見したりする知性的な威力を増幅することを述べ、もって、社会数学的活動論の本質的な部分を占めることを示す。数学的ことば行為の代表として、先ずは、「文字の式」をとりあげる。以下の議論は、中村(1962)と三輪(1988, 1991c, 1996)の論考に依っている。

われわれが現在手にしている代数の記号法は、既知の数を$a, b, c, \cdots$で、未知の数を$x, y, z, \cdots$で表し、これらの数量間の関係(条件)を一般的かつ簡潔に「表現する」ことができる。例えば、われわれは、二次方程式を、そこに含まれる未知数とその次数や既知数などをすべて文字を使って、$ax^2+bx+c=0$と表す。さらに、その解も文字を使って$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$と、簡潔かつ一般的に表すことができる。実際、この公式を、自然言語で表現しようとすると、極めて冗長で曖昧なものとなる。この公式は、どんな二次

方程式についてもその解を与えるものであり、また、それはa, b, cだけによってのみ与えられていること一目瞭然である。さらに、記号法は、形式的に処理ができるために、「操作以上」の有用性も持っている。つまり、いちいち内容を考えて処理するのでなく、規則に従うだけのものとして取り扱っていくことにより、一歩一歩筋道の立った推理を進めて証明を進めることができる。つまり、計算による変形が「思考してくれる」(三輪, 1999: 134)[40]といえる。

歴史的に、二次方程式の解法は紀元前 2 千年にまで遡ると言われるが、こうした記号法が使用可能になったのは実に 17 世紀のことである(中村, 1962)。それは、専ら一人の天才的な哲学・数学者デカルトに負っている。それまでの記号法の発達は、数の計算と同じく、対象を表現する機能と、思考のための操作機能とが半ば独立に発達していた。代数学の発展の主要な段階を記号法という視野から特徴付けたのは、ドイツの数学史家のネッセルマン(G. H. F. Nesselmann)であった。彼は、代数学の発展を、「修辞的」、「省略的」、「記号的」という 3 つの段階を区別した。

言語的・修辞的代数の典型例は、9 世紀のアラビアの数学者アル・フワリズミー(Al-Khwarizmi)にみられる。ここでは、数量関係の記述や、解法は自然言語を用いてなされている。さらに、問題の解法が正しいことは、改めて幾何学的(つまり図形の長さと面積の計算により)証明されるのである。

「省略的代数」の例は、ネッセルマンが指摘しているように、ギリシアの数学者ディオファンタス(Diophantos, 紀元 300 年頃)の「数論」(Arithmetica)に見られる。ディオファンタスは、未知数をそのべき乗に応じて個別に記号化する省略記号を開発している。こうした記号法に基づくと、例えば、二次方程式$3x^2 - x + 12$に相当する式は、

$$\Delta^{Y}\overline{\gamma} \uparrow \varsigma\overline{\alpha}M^{\circ}\overline{\iota\beta}$$

と表せる[41]。しかし、省略記号を開発しても、結局のところ、計算の過程には役立っていない。さらに、方程式の一般的な解法を提示しようとしつつも、特定の数の場合において論を組み立て、しかも、そうした数の特殊性から出てくることは使用しないよう配慮しなくてはならない。つまり、既知の任意の定数を表す記号が発明されなかったため、論法として特別の場合を論ずる、いわゆる「準一般的」(quasi-allgemein)な方法(中村, ibid: 120)がとられたのであった。中世に至っても、既知数の記号化が出来上がっていないので、

[40] 三輪辰郎 (1999). 証明の指導: 序説. 杉山吉茂(研究代表). 高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発 (pp. 119-142). 文部省科研費研究成果報告書.

[41] 当時は＋記号に相当するものはなく、単に並列的に書かれていたが、－記号は↑が用いられた。また、数の単位を表す記号としてM°が用いられていた。

一般的な方程式の代わりに、具体的な例によって説明する「準一般的」方法が延々と用いられていた。方程式の解法について一般的な関係を述べようとすれば、幾何学的に表現し、幾何学的に証明する以外にはなかったのである。このことからも、既知数の記号化がいかに困難であったかがうかがわれる。

こうした既知数の記号化に成功したのは、16 世紀フランス最大の数学者と言われるヴィエタ(Franciscus Vieta, 1540-1630)であった。彼は、既知数の記号化を含めた「記号的代数」を初めて発明したという、数学史上の不朽の意義を持っている。ヴィエタは、既知量を A, E, I, O, V, Y のような母音の大文字で、未知量を B, G, D 等の子音大文字で表し、そしてこれらの量のべきについては、既知量と未知量とに分けて名称を定めている(中村, ibid: 125)。例えば、$x^3 + 3b^2x = 2c^3$ は、

$$A\ cubus + B\ \ plano\ 3\ in\ A,\ aequari\ Z\ \ solido\ 2$$

と表せるようになった。ヴィエタはこの記号法を駆使して、当時の中心的問題であった 3 次方程式を鮮やかに解決する。もし、それを従前の方法で記述し、幾何学的証明を与えようとすれば，その解法はどれほど膨大で込み入ったものとなるか想像を超える。

しかしながら、ヴィエタの方法は、従前の議論と同じ制約も持っていた。それは、方程式は、いわば「同次元の法則」(中村, ibid: 125)に従わなくてはならないものであった。つまり、ヴィエタの時代でも量は、幾何学的な意味を持っており、方程式の各項は当然のことながら同次元という制約を受けていた。ヴィエタの代数学は「記号的代数」の始まりを告げるものであったが、その分野において画期的で創造的な貢献をなしたのがデカルト(Rene Descartes, 1596-1650)であった。

デカルトの記号法は「幾何学」において論述されている。「幾何学」は 3 部からなっているが、第 1 部と第 2 部は代数的な性質を持っている。「幾何学」第一部では、「幾何学の作図問題はすべて適当な線分の長さを求めるという事柄に、容易に帰着させることができる」という文言で始まる。つまり、算術における四則計算および根に開く計算を、すべて図形における「線分による演算」で行うことができるとしたのである。そして、「どうすれば幾何学において文字を使用することができるか」という小見出しの部分で、次のように述べる。

> ・・・線分 BD を線分 GH に加えるには、わたしは一方を a 他方を b と名付けて、$a+b$ と書く。a から b を引くことを $a-b$ と書く。一方を他方に掛けることを ab、a を b で割ることを $\frac{a}{b}$、a をそれ自身掛けることを aa または a^2、それにもう一度 a を掛けることを a^3、同じようにして限りなく；また a^2+b^2 の平方根を $\sqrt{a^2+b^2}$ 、

$a^3 - b^3 + abb$の立方根を$\sqrt{C.a^3 - b^3 + abb}$、その他についても同様である。・・・ここで注意すべきことは、a^2とかb^3などで表されているものを、代数学の習慣に従って、平方とか立方とかよぶけれども、それが表すものとしては、通常は単純な線分だけを考えるということである。(中村, 1962: 144, 傍点筆者)

これは、デカルトが、線分を演算の元素とする代数学を構成するという考えに達していることを示す著しいところである。それ以前の代数学では、2 つの線分の積は面積を、3 つの線分の積は体積をという幾何学的概念から離脱することができなかった。このように、デカルトによる記号的代数では、未知量と既知量の文字による表現の機能が統一化され、a^nという高次方程式にまで適用可能性が拡大したのであった。これまで見てきたように、方程式論における記号法の発明の歴史は、「表現機能」と「思考支援機能」とが相互に浸透し、統一される過程として理解することができる。

さて、ラカトシュの可謬主義では、数学者が理論を合理的に発展させる際に「証明」が利用されていた。従って、ラカトシュ論では、「証明」は数学的知識を発明する上での発見法的側面を持っていた。したがって、「証明」を広義の「数学的ことば行為」に拡張する際にも、こうした発見法的威力が温存されることを示す必要がある。以下では、このことを学校数学における具体的な教材で例示することにより、社会数学的活動論で提示することがらが、実際の学校数学において実現する可能性を持っていることを示したい。以下では、三輪の研究(1987, 1988)を取り上げ、そのことを例証する。

三輪（1988)[42]は、ポリアによる課題(Polya, 1962)を用いて、思考を進めるうえで文字の式が持つ威力を述べている。ポリアの問題はこうである。

一つの鉄球が水銀中に浮かんでいる。水銀の上に水を注いで、この鉄球をおおうとき、鉄球は下降するか、上昇するか、あるいはもとのままか。(Polya, ibid:.37)

この問題にたいして、三輪は次のように文字の有用性を例証してゆく。

ここで、比重が問題になるが、それを文字で表すことにしよう（図 1 参照）。そうするのは、比重がわからないからでなく、問題のしくみをいっそうわかりやすくするためである。

[42] 三輪辰郎 (1988).「文字の式」をめぐって. *学習指導研修*, 3, 62-65.

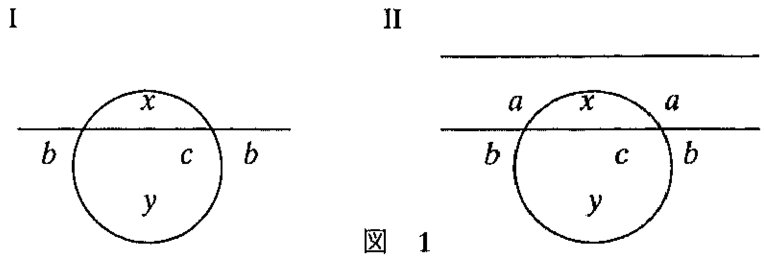


図 1

いま、水、水銀、鉄の比重をそれぞれa, b, cで表し、鉄球の水銀より上方に出ている部分、水銀中の部分の体積をそれぞれx, y全体の体積をvで表す。鉄球の重さが、その球が排除する液体の重さに等しいことから、I、II の場合に、それぞれ、次の連立方程式をつくることができる。

$$\mathrm{I}\quad \begin{cases} x+y=v \\ by=cv \end{cases} \qquad \mathrm{II}\quad \begin{cases} x+y=v \\ ax+by=cv \end{cases} \quad (\text{ここで}\ a<c<b)$$

言うまでもなく、$a>0$、$x>0$であるから、I の方のyの値が II の方のyの値より大きい。つまり、II の方のxの値が、I の方のxの値より大きい。よって、鉄球は上昇する。（中略）さらに、比重の間の関係が、$a<c<b$である限り、物質が鉄、水には限らないことも明らかになる。(pp. 63-64)

先に述べたように、文字の式はいろいろの有用性を持っている。この事例において文字の有用性が際立っている点は、「文字の式を読む」行為である。この問題において、連立方程式を立てた後に、I と II について実際に解いて鉄球が上昇することを結論付けることも可能である(ポリアは、実際にそうしている)。しかしながら、三輪は、連立方程式として立てられた式を「読む」ことで解決する。このように、式を外的対象として、それを形式的に変形しないまま、その構造を読むことにより有用な判断を下すことができる。

次に、数学的ことば行為としての「証明」を取り上げたい。三輪(1987)[43]は、証明の意義として、あまり注目されていない点に「ことがらに洞察を与えること」をあげている。

証明には、ことがらの正当化だけでなく、そのことがらがなぜ真であるかの洞察を与えることが、期待できるのである。つまり、ことがらに光を当てて照明する働きをもつのである。(三輪, ibid: 66, 傍点筆者)

このことを、三輪は、図 3 のように、「頂点Aを共有する正三角形$\triangle ABC$，$\triangle ADE$があるとき、$DB=EC$である」ことの証明をとりあげている。

[43]三輪辰郎 (1987). 証明の指導を通して思考力を育てる. *学習指導研修*, 11, 64-67.

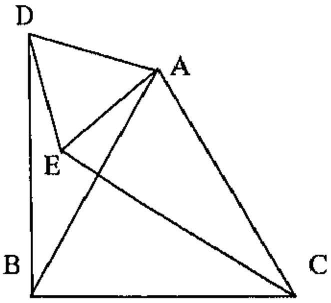


図 2

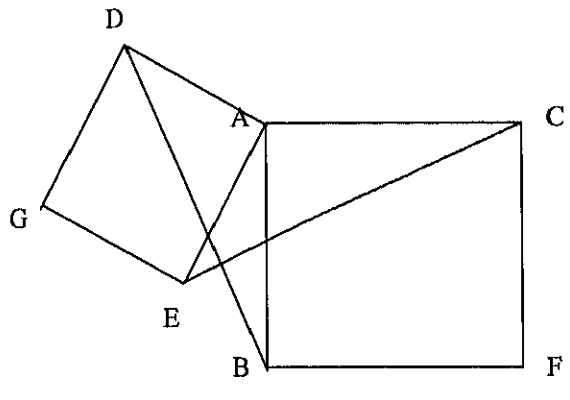
△*ADB* と△*AEC* で、*AD*＝*AE*　・・・①、*AB*＝*AC*　・・・②

∠DAB＝∠EAC＝60°＋∠*EAB*　・・・③

よって、△*ADB*≡△*AEC*、*DB*＝*EC*　　(証明終)

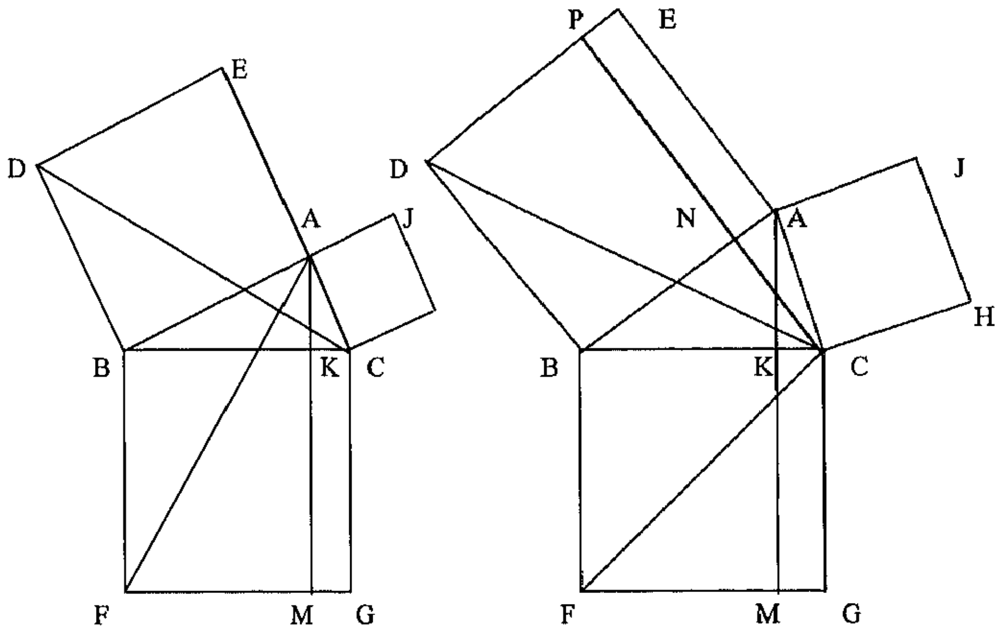
ここで、証明をよく見ると、使われているのは、辺についての①、②と、$\angle DAB = \underline{60}^\circ + \angle EAB$、$\angle EAC = \underline{60}^\circ + \angle EAB$ である。いま、等辺の①、②をそのままにし、アンダーラインの 60° の部分を、等しい他の角に変えたとしても、証明そのものに何らの変更はない。だから、結果は成り立つことになる。つまり、△*ABC*、△*ADE* が正三角形であることは、必ずしも必要ではなく、頂角∠*BAC*＝∠*DAE* が等しい二等辺三角形であればよいことになる。(中略)このようにして、証明はことがらが真であることに、条件（仮定）がどのようにかかわるかを明らかにすることができる。そして、それに基づいて、新しいことがらを発見することすらできるのである。つまり、ことがらについての理解が深まり、その内容の吟味ができるような力を持つに至るのである。(三輪, ibid: 66, 傍点筆者)

ここで、証明には、「それに基づいて、新しい事柄を発見することができる」という発見法的機能が備わっている点に留意したい。このことに関して、三輪は次のような興味深い一連の発展的事例を提示する。先の証明では、定理が真であることに係わる条件として、「頂角∠*BAC*＝∠*DAE* が等しい二等辺三角形であればよい」ことが明らかになった。このことから、容易に、次の新しい命題、「頂点 *A* を共有する正方形 *ABFC*、*ADGE* があるとき、*DB*=*EC* である」が真であることが理解される(三輪, ibid: 66)。



この定理は、いわゆる「三平方の定理」のユークリッドによる証明の特述において利

用される。この定理は、「$\angle A=90^\circ$ の直角三角形 ABC で、$BC^2=AB^2+AC^2$ である」というものである。



ユークリッドによる証明は、概略的に、次のようになる。

$\angle A=90^\circ$ の直角三角形の各辺に、正方形を定め、線分 $AKM \perp BC$ とする。先の問題の成果を踏まえると、$\triangle ABF \equiv \triangle DBC$ が成り立つ。

ここで、$\triangle ABF$ の面積は、$BF // AKM$ より、等積変形により、$\triangle KBF$ に等しい。

他方で、$\triangle DBC$ の面積も、$\angle A=90^\circ$ だから CAE は一直線となり、以て、$CAE // BD$ となり、等積変形により、$\triangle DBA$ に等しい。これらから、$\square BFMK$ と $\square ABDE$ の面積が等しくなる。同様にして、$\square CGMK$ と $\square AEPN$ の面積が等しくなり、定理が証明される。

この証明を分析すると、それが真であることを成り立たせている条件は、上の下線部、である。したがって、$\angle A=90^\circ$ なる条件、直角三角形でないならば、定理は成り立たない。当然、$\angle A<90^\circ$ のときは、結論は成り立たないことになる。このことを、前の証明の図式に従って考えてゆくと、結果は一層はっきりする。前の図と同じよう記号を付けると、$\angle A<90^\circ$ から、$CNP \perp AB$ とすると、N は辺 AB 上に来る。

前の証明の図式に習い、$\triangle ABF \equiv \triangle DBC$、$\triangle ABF=\dfrac{1}{2}BFMK=\dfrac{1}{2}NBDP$ となる。よって、$BFMK<ABDE$ となる。同様に、$CKMG<ACHJ$。よって、$BC^2<AB^2+AC^2$ となり、三平方の定理が成り立たないことが示される。ここで、$ABDE$ と $NBDP$ の差である $ANPE$ は、$AB=c$、$AC=b$ とおくと、$bc\cos A$ に等しい。こうして、三平方の定理についての証明分析を通して、「余弦定理」という新しい拡張された定理が証明されることになる。

証明の洞察的で発見的なはたらき、つまり「照明(illumination)の機能」は、今日の論証指導に対して新しい視点を与えていると思われる。証明の照明機能を支えているのは、「証明を読む」とでも呼べる活動、すなわち証明のテキストを対象化し、それを外的支援として思考を進めることであると言えよう。ヴィゴツキー派の文化歴史論は、人が、自分たちを取りまく人工的で物理的な状況を活動の構造化源として利用するとともに、実践を支える知識の有機的な部分として個人の外に分散させていることを強調する。上で例証してきた文字の式や証明は、こうした点において、活動の構造化源となっているように思われる。

これまで見てきたように、文字の式と証明という数学に固有の文化的道具は、問題の仕組みを一般的で簡潔に表現する機能と、推論を形式操作的に進める機能とを併せ持っており、われわれの思考を深くし、思考を進める発見法的威力を発揮していると言える。

２．社会数学的活動論の方法

これまでの議論は、社会数学的活動の二つの側面、すなわち「大局的数学的活動への局所的参加」と「社会的相互作用による数学的意味の発達」とについて、その意味と特徴を述べてきた。しかしながら、そこでの議論は、社会数学的活動の「分析の対象」についての記述であって、具体的で操作的な「分析の方法」については明示されていなかった。社会数学的活動をなす二つの側面を分析する際の方法として、本論文では「数学的条件と定義」に着目する。

いうまでもなく、数学的活動それ自体において、条件(前提・仮説)や定義は、本質的に重要な役割を演じている。このことは、第 1 章(数学的活動論の検討)においても示唆されている。例えば、島田による数学的活動の模式図では、数学的活動は、「現実世界」と「数学的世界」という 2 つの世界の相互作用とみなされる。現実世界と数学の理論的世界は、「数学的モデル」によって橋渡しされていた。そして、現実から数学的モデルへと至る際に重要な構成部分であるのは、「条件・仮説」設定であった。この条件・仮説は、最初は、現実場面に関するものであり、後には(もし成功裏に問題が解決された場合には)、観念的世界である数学(理論)のモデルとなるものであった。このように、条件・仮説は、一方で現実世界において活動する主体を取りまく社会的環境によって制約され、他方で数学の論理・演繹的世界の大前提として数学的結論を制約する。その意味で、「条件・仮説」は、現実の世界と数学の世界の連結環、二つの世界のいわば「緩衝地帯」となっている。すなわち、現実の世界と数学の世界はそれぞれ独立に存在するというよりも、相手の存在によって自らの特徴が際立つという弁証法的な関係をなしている。

他方で、定義も、数学的活動において中心的な役割を演ずる。このことに関して、クリゴウスカ(Крыговская, 1988)[44]は、定義に代表される数学の言語がもつ重要な価値(正確さ，明瞭さ，簡潔さ)を強調する。そして、定義を構成する活動は、対象についての深い洞察を与え、直観を正確・鋭敏にする教育的価値を持っており、数学的活動の重要な部分であると主張する。クリゴウスカは、学校数学における定義の役割として６つのタイプの活動［外延を広げずに既知の対象を整理し明確化すること；一般的で論理的で構造的記述を与えること；アイデアを洗練させること；類比や転義をすること；分類をすること；個別な場合を分離すること[45]］において、定義を構成することが本質的に関わっているとしている。このように、定義の構成は、複雑な状況を簡単なものに分離したり、類比的に考えたり、理想化したり、外挿したり、独創的な発想を持ち込んだり、発想を徐々に洗練したりするという積極的な思考活動を伴っており、数学的活動において重要な役割を果たしていると言える。

条件や定義は、さらに、本論が依拠しているラカトシュの数学論においても重要な位置を占める。ラカトシュは、数学は、疑いなく確立された定理の単調的増加によるのではなく、証明(推測の正当化)と、それに関する反駁との間の絶え間無いせめぎ合いと改良により発展すると述べている。この意味で、ある数学者が何らかの推測の証明を打ち立てたとしても、証明の拠り所となっている定義や前提条件は他の数学者にとっては必ずしも自明ではなかったり、不自然であったり、受け入れがたいものであったりする。かくして、数学が発展してきたのは、理論が拠り所とする前提(公理)や定義自体が、数学者集団において再検討の余地を持ち、検証や修正に対して開かれているからである。さらにいえば、定義や前提は、数学者共同体の成員の同意を伴うことになる。つまり、定義や前提は、所与のものではなく、数学者どうしの議論の過程で相互に取り決められてゆくものとみなされる。こうした意味で、数学的条件(前提)や定義は、数学者共同体における協定物といえる。かくして、条件と定義は、個人の数学的思考を支える認知的機能を果たすと同時に、他者との相互作用を活性化し、共同体において数学を発展させる社会的機能も果たしているといえる。

こうした議論をふまえて、本論文では、学校数学の一斉授業における社会数学的活動の二つの側面(「大局的数学的活動への局所的参加」、「社会的相互作用による数学的意味の発達」)を、「条件や定義」を視点として分析することを提案する。「大局的数学的

---

[44]Крыговская, С. (1988). Роль определения в математической деятельность учащихся. Математика в школе, 6, 66-70.

[45]三角形 ABC からなる面の面積を ${S_{ABC}}^2$ のように表すと、${S_{ABC}}^2 + {S_{ACD}}^2 + {S_{ABD}}^2 = {S_{BCD}}^2$ なる関係が成り立つ。

探究活動への局所的参加」に関しては、個々の子どもが数学的活動に参加する上で他者と配分している責任や義務が教師の側から子どもの側へと徐々に移譲してゆく過程を、教師と子どもが取り交わす条件や定義の機能を視点として分析する。また、「社会的相互作用による数学的意味の発達」に関しては、個人のインフォーマルな意味と、公的な数学文化の一部となっている数学的道具の慣習的な使い方とが相互作用する過程を、教師と子どもによって運用される「数学的条件と定義」の機能的変化に着目することにより捉えてゆこうとする。以下では、これらの二つの側面について説明することにしたい。

「大局的数学的活動への局所的参加」に関しては、数学的発見法を指針とした活動に参加する責任が、教師の側から子どもの側へと徐々に移譲してゆく過程を、教師と子どもが取り交わす「数学的条件や定義」の機能を視点として分析する。ここで、数学的発見法と数学的条件・定義の関連性が問題となる。この関連性は、ラカトシュの数学論から示唆される。ラカトシュが提唱した数学的発見法である「証明と論駁法」は、隠された条件や仮説を明らかにし、新しい概念[46]とその定義を創案することに関連している。より一般的に、大局的な数学的活動は、未解決の状況に対して条件や仮説を設定して問題を定式化する過程や、問題の解決にとって重要な概念を定義したり、解決にとって決定的な条件は何であったかをふり返ることで一般化や図式化を行う一連の営みである。かくして、数学的条件や定義は、大局的な数学的発見法の重要な構成部分であると言える。

ここで、「数学的条件・定義」を分析単位として「大局的数学的活動への局所的参加」を分析することの意味が説明される。教室共同体においては複数の理論が競合することが想定される。複数の理論的視野の競合は、多数の子どもたちから構成される学級では、むしろ自然であると思われる。その際には、各理論の前提条件や概念定義を意識的に検討することが必要となる。一斉授業において、こうした条件や定義を検討する活動は、無統制になされるというよりも、むしろ教師の大局的な理論発展の指針に基づく導きによってなされる。その際に、教師は、数学的条件や定義を検討・修正・改良する模範を示しつつ、次第にそうした活動が子ども自身の手によって遂行可能となるように、支援の手を緩めていく。このように、「大局的数学的活動への局所的参加」を「数学的条件・定義」を視点として分析することは、数学的知識を発展させる方法として数学的条件や定義を利用することに、子どもを徐々に参加させる過程を分析することであると理解される。

次に、「社会的相互作用による数学的意味の発達」に関しては、個人が構成している

[46] ラカトシュの用語では、「証明生成概念」(proof-generated concepts)、「論駁生成概念」(refutation-generated concepts)である。Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations. Cambridge University Press.

非公式な意味と、公的な数学文化の一部となっている数学的道具の慣習的な使用法とが相互作用する過程を、教師と子どもによって運用される「数学的条件と定義」の機能的変化を視点として分析する。ここでも、数学における慣習的道具と数学的条件・定義との関連性が問題となる。数学的道具は、過去に繰り返し取り組まれた数学的問題解決のアイデアや手続きを、あとで使いやすいように概念やアルゴリズムとして固定化したものと考えられる。

一方の数学的アイデアを固定化する際には、問題解決において用いられたアイデアの実質的な側面を捨象し、その根底にある一般的な構造を取り出すことになる。こうした一般的構造は、言語的に定義され、定義に照らして個別の事柄が判断される。従って、数学的概念に基づく判断は、具体的経験と結びついた典型例との類似性に基づく判断とは異なる。他方の問題解決の手続きを固定化する際に、数学では、一定の問題群の解決を形式的に演繹処理するための記号法とアルゴリズムを開発し、記号の配列の変形として演繹推理を行う。ここでの推理は、既約に従った形式的変形によるものであり、具体的経験と結びついた推理とは異なる。かくして、数学的道具の一般性と形式性により、無数の具体的な問題の解決が可能となる。逆に、現実の問題解決において数学的道具を使うことは、それを使いやすいように問題を捉え直すことである。従って、その際には、道具が使用可能となるよう、現実の問題場面に関して条件・仮説を設定し、さらにそれを抽象化・理想化・単純化し、一般的・形式的に表現することが必要となる。このように、数学的道具の使用は、数学的条件・定義の運用と本来的に結びついている。

ここで、「数学的条件・定義」を単位として、「社会的相互作用による数学的意味の発達」を分析することの意味が説明される。学校数学は、数学文化において慣習的に使用される道具の指導を目指す、そして、一斉授業において、教師は、子どもが他者との相互交渉する際に、公的な道具を使用するよう奨励する。数学的道具は条件・定義に関連するので、一斉授業では、条件・定義が、公的かつ明示的に運用される。その際に、子どもは、自らの豊かな具体的経験と結びついている個人的な意味を、慣習的で恣意的な条件・定義に適合させなければならない。この意味で、教師から提示される条件・定義は、子どもの直感的知識や既に知っている方法と相互作用する。

こうした相互作用は、学校数学の一斉授業において必然的であり、また教育的であるように思われる。必然的であるというのは、子ども自身が持っているインフォーマルな知識や方法は、言語化されにくく、また、言語化されたとしても、それは、子ども個人によく分かる文脈に基づくものであって、一般性に欠けるからである。他方で、それ自体が観念的な対象を表現する数学の言語は、一般性を必要とするからである。教育的であるというのは、教師から明示的に提示される数学的条件・定義は、子どもの経験的な

意味内容の背後にある一般的な仕組みを浮き彫りにし、また、教室共同体において他者と相互交渉する公的手段を提供するからである。このように、数学的条件・定義の一般的・形式的本性と、子どもの意味の特殊的・内容的本性との対照性が、相互作用の基盤となっている。かくして、「社会的相互作用による数学的意味の発達」は、一斉授業において、子どもが、公的な数学的道具を意識的に使用し、その使い方を知ってゆく過程で、数学的条件・定義が明示的に取り扱われ、そのことが、子どもの暗黙的で未分化な意味が意識化され再体制化されることと理解される。これは、子どもの意味が、外延的にも内包的にも一般化されることと言える。

ここで、公的な数学的道具の慣習的な使い方を、条件と定義から議論することにしたい。公的な数学的道具の代表的な例は、ヴィゴツキーが「科学的概念」と呼ぶものである。第 3 章で議論したように、「科学的概念」の意味は、*scientific concept* ではなく、むしろ *academic concept* と訳出することが提案されている(Van der Veer & Valsiner, 1994: 369)[47]。すなわち、科学的概念とは、学校という制度的な機関に特徴的なことば行為である。つまり、科学的概念は、教師によって、対象の諸特徴が言語的に明確に定義された仕方で提示される。言語的に定義された内包(諸条件)からなる概念は、最初は具体的な意味内容をほとんど持っていないが、教師の社会的支援のもとで使用していく過程で、子どもが日常生活経験によって既に獲得している豊かな経験内容と結びつき、次第に具体性を獲得していく。こうした過程で、言葉で定義された科学的概念は具体性を獲得すると同時に、日常の具体的経験は意識的で明確な基準(条件)に照らして随意的に扱われるようになる。これまでの議論から、科学的概念としての言葉は、条件(この場合は概念の内包)と定義それ自体であると言える。

次に、道具としての数学的記号法について考えてみる。数学的記号の代表として挙げられるのは、代数における文字の式である。文字の式は、言語という意味で、先に議論した言葉と共通する点を持っている。文字の式は、数学における言語であり、一定の構文論(そしてまた意味論も)持っている。文字の式の構文論は、種々の既約からなっており、文字を結合して正しく構成された(well-formulated)式であるためには、一定の決まりに従わなくては意味をなさない。こうした決まりは、数の演算規則を背後に持っているが、基本的に数学という文化的実践共同体において協定され制度化されてきたもの、いわば「慣習」(convention)の一種である。この意味で、文字の式の学習において、子どもたちは、数の演算についての具体的意味を踏まえつつも、文字式の既約について教師の指導のもとで、見よう見まねで習得していかなくてはならない。したがって、文字の式の学習の初期に

[47] Van der Veer, R., & Valsiner, J. (Eds.), (1994). *The Vygotsky reader*. Oxford: Blackwell Publishers.

おいて、文字の式は具体的な意味で満たされていないが、次第に数の演算についての意味と結びつき、次第に具体性を獲得していく。その際には、具体的な状況を文字の式で表したり、逆に文字の式に具体的な意味を付与すること(すなわち、式をよむこと)が可能になっていく。また、文字の式の計算に習熟することは、最初は文字の式を意識的に運用すること自体に思考が向けられるが、習熟が進むことによって、逆に、文字の式の計算が思考を支援するようになる。このことを、三輪は「(文字の式の)計算が思考してくれる」(1999: 134)と述べている[48]。これまで述べてきたように、文字の式に代表される記号法は、数学における形式的既約である。

このように、社会数学的活動論は、教師や他の児童という社会的な他者から提示される形式と、児童の持っている非形式的な意味とが相互作用する実際の態様を分析する。

これまで述べてきた社会数学的活動の分析方法を整理すると、次の図式となる。

社会数学的活動の側面 / 分析の単位	大局的数学的活動への局所的参加	社会的相互作用による数学的意味の発達
数学的条件・定義 機能的変化	数学的知識を発展させる方法として数学的条件や定義を検討することへの子どもの側の関与の増大	教師により明確に定義され条件付けられた数学的道具の使用に基づく子どもの側の意味(一般化)の発達

「社会数学的活動」の分析方法

最後に、数学的条件・定義の「機能的変化」を視点として分析する問題を述べる。これは、ヴィゴツキーの発達論に依拠し、次のように理解する。すなわち、数学的条件・定義は、社会的機能から個人的機能へと変化すると理解する。一斉授業において、教師から提供される新しい数学的条件・定義に関する知識は、初期の段階にあっては、子どものインフォーマルな知識や方法と併存する。複数の知識が併存可能であるのは、ヴィゴツキー論に基づき、それらの知識が果たす機能が異なるためであると考える。すなわち、子どもの既存の知識は子ども自身の思考手段として機能し、教師から提示される数学的条件や定義は、他者との社会的関係を取り持ち、維持するための社会的手段として機能すると理解する。

[48] 三輪辰郎(1999). 証明の指導: 序説. 杉山吉茂(研究代表). *高度情報化社会に対応する数学教育カリキュラムの開発* (pp. 119-142). 文部省科研費研究成果報告書.

3．社会数学的活動論を構築する意義

本章を締めくくるにあたり、ここで、可謬主義的数学論と文化-歴史的発達論に依拠し、「社会数学的活動論」を構築したことの意義を整理する。

本論文で、社会数学的活動論を構築しようとした背景には、従来の数学教育論ならびに隣接する学問分野において、教室共同体において数学的活動に従事する教師と子どもたちを一つのまとまった単位と見なし、その特徴を分析・説明する理論枠組みが、十分定式化されていないという問題意識があった。このため、本章では、社会と個人の不可分な結びつきを前提とする数学論(ラカトシュの可謬主義)と認知発達論(ヴィゴツキーの文化歴史理論)に依拠し、一つの整合的な理論の構成を試みた。

ラカトシュの可謬主義的数学論の検討から、教室を真正な数学的活動が展開される社会共同体と見なすことが示唆された。しかし、この段階では、まだ学校数学に対する示唆とはなっていなかった。なぜなら、可謬主義から得られる示唆は数学に関するものであり、教育に関する視点を欠いているからである。そこで、教室を社会共同体と見なす可謬主義的数学論の示唆を踏まえつつ、さらに教育的な観点を取り込んでゆくことが必要であった。本論文では、その観点として、教室の社会共同体的本性が明確に現れている「一斉授業」に着目していった。そして、一斉授業において、発達途上の子どもたちの活動を導く教師が本質的に重要な役割を演ずることに着目した。このことは、新しい問題、すなわち、社会共同体において、能力に長けた先達者の導きのもとで、新参者が知的に発達する過程を説明する理論は何かという問題を提起した。それに答える可能性をもつ理論として、本論文では、個人の心理発達と社会的相互作用が密接に絡み合うとする学説の一つであるヴィゴツキーの文化-歴史理論が適切であると考えた。

ヴィゴツキーが、精神発達の過程を、一定の文化的実践共同体において、未熟な成員が、熟達者の導きのもとで文化的道具の使用を伴う問題解決に周辺的かつ部分的に参加しつつ、次第に独力で問題解決が可能となり、有能な実践者として自立していく過程とみなしていることに基づき、本論文では、学校数学の一斉授業における数学的活動の特徴を、子どもが、教室共同体における数学的実践へ、教師による導きのもとで周辺的に参加し、数学的道具の使用に堪能になるとともに、教室共同体の自立した成員となっていくことと特徴づけた。しかしながら、こうした特徴は、まだ基本的な特徴付けであって、分析的なものにはなっていなかった。そこで、本論文では、ヴィゴツキーの発達論が拠って立つ基本原理や方法論的命題を明確化し、それに基づく操作的な分析方法の定式化を試みた。

ヴィゴツキーの発達論の根底にある基本原理や方法論的命題の検討から、次の 3 つの問題((ア),(イ),(ウ))が提起された。

(ア) 活動を、人と彼らを取り巻く他者や道具からなる機能システムとして捉え場合、数学的活動は、どのような機能システムをなすか。また、機能システムの構成部分である教師はどのような役割を果たすのか。

(イ) 機能システムの関係が変化するとはどういう意味か。

(ウ) 分析の単位として何を設定するか。

こうした問題の解答は、ヴィゴツキー論自体からは得られないものであり、それらは、数学論に依拠することによって与えられると考えた。

本章で構築された「社会数学的活動論」なる理論の構築は、こうした 3 つの理論的問題にアプローチするためのものであった。実際、「社会数学的活動論」の 2 つの研究対象(「大局的数学的活動への局所的参加」と「社会的相互作用による数学的意味の発達」)は、問題(ア)と(イ)に答えるものであり、また、分析の方法論に関する議論は、問題(ウ)に答えようとするものであった。このように、「社会数学的活動論」を構築することの意義は、数学教育研究において今日的課題とされている問題、すなわち、教室共同体において営まれる数学的活動を記述し分析するための理論と方法論を提示するという問題に答えるものとなっている。

本章のまとめ

本章では、ラカトシュの数学論とヴィゴツキーのに依拠し、「社会数学的活動論」という数学教育論を構成した。その基本作業として、先ず両理論が、その哲学的・方法論的基盤において 3 つの共通部分(歴史ー発生的アプローチ、質的変革と弁証法的発展、そして、社会実践共同体)を持っていることを述べ、もって、両理論から一つの数学教育の理論を構築する前提を確認した。

ラカトシュ論とヴィゴツキー論に依拠して社会数学的活動論を定式化する方法として、本章では、両理論の対照性に着目した。それは二点あった。一つはラカトシュ論における「大局的発見法である研究プログラム」とヴィゴツキー論における「局所的で周辺的な参加」の対照性であり、もう一つはラカトシュ論における「新しい知識の発明」とヴィゴツキー論による「慣習的な形式」の対照性であった。社会数学的活動論は、こうした両理論の対照的側面を弁証法的に統合することによって構成された。

社会数学的活動論の構造は研究の対象と研究の方法からなっていた。

社会数学的活動論の研究対象は、「大局的数学活動への局所的参加」と「社会的相互作用による数学的意味の発達」という二つの側面からなっていた。「大局的数学的活動への局所的参加」は、教師の支援と方向づけのもとで、本物の数学的活動の文脈に子どもたちを参加させつつ、彼らが独力で数学的活動が可能となるよう、教師の側で徐々に支援の手を緩めていくこととして特徴づけられた。また、「社会的相互作用による数学的意味の発達」とは、公的な数学文化の一部となっている数学的道具のフォーマルな使い方と、個人のインフォーマルな意味が緊張関係のもとでせめぎ合う空間、相互啓発的に発展する過程として理解された。

次に、社会数学的活動をなす二つの側面を研究する方法として、「数学的条件と定義」という「分析の単位」が提案された。実際、数学的条件や定義は、個人の思考を支える認知的機能を持つと同時に、他者の活動を制約したり組織化したりする社会的機能も併せ持っているという意味で分析の単位とみなされた。「大局的数学的活動への局所的参加」に関しては、個々の子どもが数学的活動に参加する上で他者と配分している責任や義務が教師の側から子どもの側へと徐々に移譲してゆく過程を、教師と子どもが取り交わす条件や定義の機能を視点として分析することが提案された。また、「社会的相互作用による数学的意味の発達」に関しては、個人のインフォーマルな意味と、公的な数学文化の一部となっている数学的道具の慣習的な使い方とが相互作用する過程を、教師と子どもによって運用される「条件と定義」の機能的変化に着目することにより分析することが提案された。

このように、本章では、社会数学的活動論の枠組みが定められた。この理論枠組みは、実際の数学の一斉授業における数学的活動の態様を記述し分析する視点であるとともに、規範的な数学的活動を組織する際の視点でもある。そこで、次の章では、社会数学的活動論に基づく観察研究ならびに教授実験を実施し、そこで社会的に構成された数学的活動の実際を記述し分析することにしたい。